

Matematika 1 za kemičare

Franka Miriam Brückler & Matea Čelar

Zagreb, 2026.

Sadržaj

1	Elementarna matematika	1
1.1	Aritmetika racionalnih brojeva s primjenama	1
1.1.1	Postotni račun	10
1.1.2	Osnove vjerojatnosti	14
1.2	Iracionalni brojevi	22
1.3	Pravokutni koordinatni sustav u ravnini	27
1.4	Algebarski izrazi	32
1.5	Osnove geometrije	37
1.5.1	Elementarna planimetrija	37
1.5.2	Elementarna stereometrija	46
1.6	Linearne jednadžbe i nejednadžbe i njihovi sustavi	53
1.6.1	Linearne jednadžbe i nejednadžbe s jednom nepoznanicom . . .	53
1.6.2	Linearne jednadžbe i nejednadžbe s dvije nepoznanice	58
1.6.3	Sustavi linearnih jednadžbi	59
1.7	Zadaci iz elementarne matematike	66
1.7.1	Zadaci vezani za racionalne brojeve, postotke i vjerojatnost . . .	66
1.7.2	Zadaci vezani uz iracionalne brojeve i algebarske izraze	73
1.7.3	Zadaci iz planimetrije i stereometrije	74
1.7.4	Zadaci vezani za linearne jednadžbe i nejednadžbe	74
	Bibliografija	75

Predgovor

Primijenjeni primjeri koji sadrže pojmove i gradivo koje ne spada u standardno srednjoškolsko i osnovnoškolsko gradivo iz fizike i kemije nisu obvezni dio ispitnog gradiva, nego ilustracija korištenja matematičkih tehnika (koje jesu dio ispitnog gradiva) za probleme koje će studenti susresti i proučiti kasnije tijekom studija na odgovarajućim kolegijima. Specijalno, jedine veličine i mjerne jedinice za koje se podrazumijeva da ih studenti znaju su one koje spadaju u opću kulturu svake osobe koja je završila srednju školu. Pregled tih veličina i mjernih jedinica možete naći u prilogu na početku ove knjige, odmah iza ovog predgovora. Također, ni za koji konkretni opis kemijske, fizikalne ili ine ovisnosti koji se pojavi u primjerima i zadacima se ne očekuje da ga student/ica zna navesti (niti objasniti), osim ako se radi o standardnom gradivu osnovne i srednje škole (primjerice, podrazumijeva se da svaki student zna što je množinska koncentracija ili brzina pri pravocrtnom gibanju). Dijelovi označeni s „Za one koji žele znati više“ sadrže raznolike dopunske matematičke informacije koje ne ulaze u ispitno gradivo.

Sadržaj ove skripte odgovara gradivu koje se obrađuje na nastavi. Za dodatne materijale upućujemo na literaturu na kraju ove skripte i na kraju svakog poglavlja.

(...)

U Zagrebu, 2026.

F. M. B. & M. Č.

Poglavlje 1

Elementarna matematika

1.1 Aritmetika racionalnih brojeva s primjenama

Kemičari i drugi prirodosnanstvenici brojeve koriste ponajviše za izražavanje rezultata mjerenja, tj. za navođenje iznosa (skalarnih) fizikalnih veličina. Iznosi skalarnih fizikalnih veličina *uvijek* su umnošci po jednog broja i mjerne jedinice. Primjerice, nije dovoljno reći da je množinska koncentracija neke otopljene tvari 1,01; to je besmislen iznos ako se ne navede radi li se o, recimo, $1,01 \text{ mol L}^{-1}$. Ponekad se pojavljuju i „čisti“ brojevi, poput pH, no ako se dogovorimo da je njima mjerna jedinica jednaka 1, onda i njih možemo shvatiti kao umnožak broja i mjerne jedinice.

Brojnost (N) se izražava **prirodnim brojevima** 1, 2, 3, Skup N svih prirodnih brojeva se svim rezultatima oduzimanja dvaju prirodnih brojeva proširuje do skupa Z svih **cijelih brojeva**. Uz zbrajanje i oduzimanje u osnovne računske operacije spadaju i množenje i dijeljenje. Dok množenjem cijelih brojeva dobivamo cijeli broj, to općenito nije slučaj s dijeljenjem.

 Razlomci su količnici (kvocijenti) cijelih i prirodnih brojeva, pri čemu se djeljenik naziva brojnikom i piše iznad razlomačke crte, a djelitelj je nazivnik i piše se ispod razlomačke crte. Racionalni brojevi su brojevi koji se mogu zapisati kao razlomci. Oznaka za skup svih racionalnih brojeva je $\mathbb{Q}$.

Uočimo da razlomke možemo definirati i kao količnike dvaju cijelih brojeva uz dodatak da djelitelj ne smije biti nula.

Primjer 1.1 $\frac{1}{2}$ je različit razlomak, ali isti racionalni broj kao $\frac{2}{4}$.

Zadatak 1.1.1 Koliko iznosi $\frac{10}{3}$ od $\frac{3}{5}$ bureka?

Razlomci s istim nazivnikom se zbrajaju tako da im se zbroje brojnici. Općenito, razlomci se zbrajaju tako da se prvo svaki proširi tako da imaju iste nazivnike (npr. tako da svaki razlomak proširimo ili nazivnikom onog drugog ili kvocijentnom njihovih najmanjih zajednički višekratnika), nakon čega je zbrajanje svodi na slučaj s istim nazivnicima. Pritom, proširiti razlomak znači pomnožiti mu i brojnik i nazivnik istim brojem (različitim od nule). **Nula**¹ se zapravo definira kao neutralni element za zbrajanje,

¹S N_0 se označava skup koji se sastoji od nule i svih prirodnih brojeva.

tj. kao (jedini) broj takav da zbrojen sa svakim drugim brojem ne mijenja taj broj ($x + 0 = 0 + x = x$ za sve x). Za svaki broj x se s $-x$ označava njegov **suprotni broj**, tj. broj koji dobijemo promjenom predznaka i koji zbrojen s polaznim brojem daje 0: $x + (-x) = (-x) + x = 0$ za sve x . Oduzimanje se definira kao pribrajanje suprotnog broja: $x - y = x + (-y)$ za sve x i y .

Zadatak 1.1.2 *Za kakve razlomke je njihova razlika jednaka razlomku kojem je brojnik razlika njihovih brojnika, a nazivnik razlika njihovih nazivnika?*

Zadatak 1.1.3 *Jedinični razlomci su razlomci s brojnikom 1. U starom Egiptu, svi (pozitivni) razlomci (s izuzetkom dvije trećine) su se shvaćali kao zbrojevi različitih jediničnih razlomaka. Primjerice, $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$. Ako je vrijednost razlomka bila veća od 1, prvo se odvojio cijeli dio. Pokažite da se svaki pozitivan razlomak napisati „na egipatski način“, tj. kao zbroj prirodnog broja i različitih jediničnih razlomaka. Je li takav zapis jedinstven?*

Kad računamo s razlomcima, uobičajeno ih je (osobito konačne rezultate) kratiti. Pritom, **kraćenje razlomka** (ili općenitije, nekog razlomljenog izraza) je dijeljenje brojnika i nazivnika s istim brojem. Budući da dijeljenje s nulom nije dozvoljeno, pri kraćenju s varijabilnim izrazom moramo paziti na to da ne kratimo s nulom. Uočimo da se proširivanjem i kraćenjem mijenja razlomak, ali se ne mijenja racionalni broj kojeg razlomak predstavlja.

Primjer 1.2 *Kraćenje $\frac{a^2}{a} = a$ nije korektno ako nismo prvo naveli da $a \neq 0$.*

Zadatak 1.1.4 *Zašto nije dozvoljeno dijeliti s nulom?*

Ponekad se u računima pojavljuju i dvostruki razlomci, tj. količnici dvaju razlomaka. Dvostruki razlomak jednak je razlomku čiji brojnik je umnožak brojnika od brojnika i nazivnika od nazivnika, a nazivnik mu je jednak umnošku nazivnika brojnika i brojnika nazivnika:

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} = \frac{m q}{n p}.$$

Stoga se pri kraćenju dvostrukih razlomaka mogu kratiti brojnici (ili nazivnici) njihovih brojnika i nazivnika (kao i zasebno pojedinačni razlomci u njihovom brojniku i nazivniku).

Primjer 1.3

$$\frac{4}{\frac{3}{2} + \frac{5}{6}} = \frac{4}{\frac{3 \cdot 6 + 5 \cdot 2}{2 \cdot 6}} = \frac{4}{\frac{28}{12}} = \frac{4}{\frac{7}{3}} = \frac{12}{7}.$$

Razlomci se množe tako da im se pomnože brojnici, odnosno nazivnici. Dok kod zbrajanja kao i kod množenja redoslijed nije bitan (kaže se: zbrajanje i množenje su komutativne operacije), oduzimanje i dijeljenje nisu komutativne operacije — promjena redoslijeda mijenja rezultat. Slično kao kod oduzimanja koje se definira temeljem definicije broja 0 i suprotnog broja, dijeljenje se definira temeljem definicije broja 1 i recipročnog broja. Broj 1 se naime definira kao (jedini) broj takav da pomnožen sa svakim drugim brojem ne mijenja taj broj ($1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ za sve x), a **recipročni**

broj nenul-broja x se definira kao broj x^{-1} takav da je $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$. Stoga je dijeljenje definirano kao množenje s recipročnim djeliteljen: $x : y = x \cdot y^{-1}$ za sve x i za sve $y \neq 0$. Uočimo da budući da je $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$ za sve $x \neq 0$ slijedi

$$x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Zadatak 1.1.5 *Koliko iznosi recipročni broj broja $\frac{5}{6}$?*

Zadatak 1.1.6 *Koliko iznosi recipročni broj recipročnog broja od $x \neq 0$?*



Za one koji žele znati više Da 0 nema recipročni broj (te da stoga nije moguće dijeljenje s nulom) se strogo uzevši dokazuje ovako: Po definiciji nule je $0 + 0 = 0$, pa je i $a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$ za sve a . Zbrajanje se definira kao distributivno pa imamo $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$. Pribrojimo li suprotni broj od $a \cdot 0$, po njenoj definiciji, ostaje $a \cdot 0 = 0$. Dakle, nula pomnožena sa svakim brojem daje nulu. Kad bi postojao 0^{-1} , moralo bi vrijediti $0 \cdot 0^{-1} = 1$ pa bi po prethodnom moralo biti $0 = 1$. No, to je nemoguće: Kad bi bilo $0 = 1$, bilo bi i $a \cdot 0 = a \cdot 1$, tj. $0 = a$, za sve a , tj. onda bi nula bila jedini broj. 🦆🦆🦆

Zadatak 1.1.7 *Koliko iznosi $1 + \frac{2}{3+\frac{4}{5}}$ podijeljeno s $1 - \frac{2}{3-\frac{4}{5}}$?*

Primjer 1.4 *Vozio sam od Zagreba do Osijeka prosječnom brzinom 50 km h^{-1} , a natrag istim putem prosječnom brzinom 70 km h^{-1} . Objasnite zašto ukupna prosječna brzina za moj izlet u Osijek nije bila 60 km h^{-1} ? S kojom prosječnom brzinom sam se trebao voziti natrag da ukupna prosječna brzina bude 60 km h^{-1} [14]?*

Udaljenost od Zagreba do Osijeka je $d \text{ km}$. Prema zadanom, od Zagreba do Osijeka mi je trebalo $t_1 = \frac{d}{50}$ sati, a natrag $t_2 = \frac{d}{70}$ sati. Dakle, ukupno sam se vozio $t_1 + t_2 = \frac{d}{50} + \frac{d}{70} = \frac{12d}{350} = \frac{6d}{175}$ sati. Za to vrijeme prosječna brzina mi je bila $\frac{d}{\frac{6d}{175}} = \frac{175}{6} \text{ km/h}$ (malo manje od 30 km/h jer je $6 \cdot 30 = 180 > 175$). Drugi dio zadatka prepuštamo čitatelju za vježbu.

Primjer 1.5 *Problemi podjele nasljedstva u određenim omjerima prisutni su u ljudskoj civilizaciji već od staroegipatskog doba. Jedan poznati matematički zadatak tog tipa vezan je uz priču od bogatom Arapu koji je sinovima ostavio deve u nasljedstvu te je postao poznat kao problem 17 deva. Postoji više legendi o pojavi tog problema i bivao je pripisan raznim matematičarima iz razdoblja 9.–16. st. Iako se vjerojatno radi o arapskoj narodnoj priči, najstariji poznati zapis ovog zadatka potječe od šiitskog iranskog filozofa, mule Muhameda Nahdija Naraqija u 18. st.*

U tom zadatku, bogati Arapin je na smrti svoje deve ostavio u nasljeđe trima sinovima, uz uvjet da konje raspodijele deve tako da najstariji dobije $\frac{1}{2}$, srednji $\frac{1}{3}$ i najmlađi $\frac{1}{9}$. Kad su po očevoj smrti išli raspodijeliti deve, prebrojavši ih utvrdili su da ih ima 17 i nitko nije imao ideju kako ih raspodijeliti bez da ubije koju devu. No, oazu je posjetio mudrac iz Indije jašući na devi. On im je rekao da naravno da se 17 deva ne mogu raspodijeliti ni na polovine, ni na trećine ni na devetine jer je 17 prost

broj.² No, zatim im je rekao: „Evo dodajmo moju devu. Sad imamo 18 deva pa od toga njih devet ide najstarijem sinu, šest njih srednjem i dvije najmlađem. Ukupno smo tako raspodijelili $9 + 6 + 2 = 17$ deva i možete mi vratiti moju.” Objasnite zašto je ovo korektan postupak!

Princip iz gornjeg zadatka, u kojem se rješenje lakše dobije tako da razmatranom broju ili izrazu dodamo pa oduzmemo isti broj, ili pak alternativno pomnožimo i podijelimo s istim brojem (proširimo) zbog gornje je priče poznato kao **princip deve** (engl. *camel principle*) i često ćemo ga koristiti u nastavku gradiva.



Za one koji žele znati više Kao što se pola zbroja dva broja naziva njihovom aritmetičkom sredinom (ili prosjekom), recipročna vrijednost aritmetičke sredine dva broja pomnožena s njihovim umnoškom zove se njihovom harmonijskom sredinom:

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad H = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = A a b.$$

U situacijama kao u prethodnom zadatku prosječna brzina na dvjema dionicama za koje su poznate zasebne prosječne brzine jednaka je harmonijskoj sredini tih prosječnih brzina. Za više od dva broja, njih n , njihova aritmetička sredina je njihov zbroj podijeljen s n , a harmonijska sredina je recipročna vrijednosti aritmetičke sredine njihovih recipročnih vrijednosti. 

Uzastopnim množenjem broja samog sa sobom dobivamo njegove **potencije** s prirodnim eksponentima: $x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$ i t.d.



Općenito, za prirodan broj (eksponent) n i bilo koji broj x (bazu potencije x^n) je

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_n$$

(x pomnožen sam sa sobom $n - 1$ puta). Po definiciji je svaki broj potenciran na eksponent 0 daje 1, osim što 0^0 nije definirano. Potenciranje na negativne cijele brojeve definira se tako da je $(-n)$ -ta potencija broja isto što i n -ta potencija recipročnog broja: za svaki $x \neq 0$ i prirodan broj n je

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Kad uzastopno primjenjujemo različite računske operacije, ako nije drugačije naznačeno korištenjem zagrada (izrazi u zagradama se uvijek prvi izračunavaju), potenciranje ima prednost pred množenjem i dijeljenjem, a množenje i dijeljenje pred zbrajanjem i oduzimanjem. Unutar jednakopravnih operacija (množenja i dijeljenja odnosno zbrajanja i oduzimanja) redoslijed izračunavanja je slijeva udesno. Uočimo i da je promjena predznaka množenje s -1 : $-x = (-1) \cdot x$. Kod uzastopnog potenciranja

²Prost broj je prirodan broj koji nije djeljiv ni sa kojim drugim brojem osim samog sebe i jedinice. Složen broj je prirodan broj djeljiv s nekim brojem većim od 1 i manjim od sebe. Jedinica nije ni prost ni složen broj.

podrazumijeva se skupljanje eksponenata prema gore: a^{b^c} je isto što i $a^{(b^c)}$, dok je $(a^b)^c$ jednako a^{bc} .

Primjer 1.6

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} : \frac{2}{3} \cdot 5 - 3^4 \cdot \frac{1}{4} + 9 &= \frac{1}{2} : \frac{2}{3} \cdot 5 - 81 \cdot \frac{1}{4} + 9 = \\ &= \frac{3}{4} \cdot 5 - \frac{81}{4} + 9 = \frac{15}{4} - \frac{81}{4} + 9 = -\frac{66}{4} + 9 = -\frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 1.1.8 Koji je (su) pravilni zapis(i) mjerne jedinice fizikalne veličine koja ima fizikalnu dimenziju kvocijenta množinske koncentracije i vremena: mol/Ls, mol L⁻¹ s, mol/L s⁻¹, mol L⁻¹ s⁻¹, mol/(L⁻¹ s⁻¹), mol/(Ls)?



Brojevi se zapisuju brojkama, a brojke se sastoje od pojedinačnih simbola koje zovemo znamenkama.

Danas uobičajeni zapis brojeva je **decimalni (dekadski) zapis**, tj. zapis u kojem su pojedine znamenke brojke svojom pozicijom vezane za toj poziciji odgovarajuću potenciju broja deset. Taj je zapis toliko uobičajen da se često govori o decimalnim brojevima (a ne brojkama).

Primjer 1.7 Brojka 725 predstavlja broj $7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$.



Za one koji žele znati više Osnova moderne digitalne tehnologije je binarni brojevni sustav, u kojem su pojedine znamenke (0 ili 1) brojke svojom pozicijom vezane za toj poziciji odgovarajuću potenciju broja 2. Primjerice, binarna brojka 1011₂ predstavlja broj jedanaest jer je to $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. 

Primjer 1.8 Jedan poznati matematičarski trik odvija se na sljedeći način: Matematičar Vidoviti Mujo poziva jednog dobrovoljca da sudjeluje u triku. Javila se Fata. Fata izlazi pred ploču, a Mujo joj daje kedu i zamoli da mu čvrsto zaveže tamni neprozirni šal oko očiju da ne bi vidio što Fata piše na ploči. Pita Mujo Fata: "Bona, Fato, znadeš li ti zbrajat i oduzimati bez kalkulatora?". Odvratila Fata: „Da šta zbrajat i oduzimati, znam i množiti. Al' dijeliti, jok!" Nakon toga kaže Mujo Fati: „Odaberi troznamenkasti broj kojemu prva i zadnja znamenka nisu jednake i zapiši ga.“ Zapiše Fata broj. Kaže Mujo dalje: „Obrni svom broju redoslijed znamenki, recimo ako si zapisala 123 zapiši 321.“ Kaže Fata: „Jesam Mujo, što ću sad?". Mujo odvratila: „Sad imaš dva broja. Oduzmi manjeg od većeg i reci mi kad si izračunala.“ Izračuna Fata i kaže Muji „Gotovo!". Nastavlja Mujo: „Ako si dobila broj s manje od dvije znamenke, napiši mu ispred nulu ili nule tako da bude troznamenkast.“ Fata reče: „Aha“. Naposljetku će Mujo: „Sad tom broju opet obrni znamenke. Nakon toga zbroji zadnja dva broja koja si napisala.“ Javi se Fata da je gotova, pa će joj Mujo: „Jesi sama izabrala svoj broj? Jesam te ja ičim nagovarao da izabereš određeni broj? Jesam li mogao znati koji si broj izabrala? E, nisam, ali zato znam koji si rezultat dobila na kraju: 1089.“ Fata će: „Bolan Mujo, kako pogodi?". Objasnite Fati (a i Muji, ako on to već ne zna) kako i zašto je Mujo pogodio konačni rezultat!

Ako Fata primjerice krene od 781, onda će računati: $781 - 187 = 594$, $594 + 495 = 1089$. Mujo može pogoditi rezultat jer je taj uvijek 1089. Zašto?

Fata na početku bira broj $(abc) = 100a + 10b + c$ sa znamenkama $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$, pri čemu $a \neq c$ (to osigurava da u oduzimanju ne dobije nulu). Obrnuti broj je onda $(cba) = 100c + 10b + a$. Uzmimo da je $a > c$ (inače samo zamijenimo uloge prvog i drugog broja). U prvom koraku oduzimanje onda daje

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100(a - c) + c - a.$$

Budući je $a > c$, znači da oduzimanje na mjestu jedinice prenosi znamenku na mjesto desetica (posuđuje se desetica da bi se izvelo oduzimanje na zadnjem mjestu), a ta pak prenosi znamenku i na mjesto stotica (npr., $672 - 276 = 396 = 100(6 - 2 - 1) + 90 + (10 + 2 - 6)$). Dakle, dobit ćemo broj kojem je prva znamenka $a - c - 1$ (zbog Mujinih uputa, ako je ovo 0 svejedno ju Fata ispisuje), druga je 9, a treća je $10 + c - a$: broj $100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$. Obrtanje poretka znamenki tog broja daje $100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$, što u konačnom zbroju daje

$$100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) + 100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1) = 1089.$$

Za ne-cijele brojeve cijeli dio se od razlomljenog dijela u decimalnom zapisu odvađa decimalnim zarezom (ili decimalnom točkom). Pritom znamenke iza decimalnog zareza odgovaraju redom potencijama -1 , -2 i t.d. broja deset (desetinama, stotinkama, ...). Broj znamenaka iza decimalnog zareza u decimalnom zapisu broja naziva se njegovim **brojem decimala**.

Primjer 1.9 U broju 21,47, koja ima dvije decimale, je 21 cijeli dio, a 0,47 razlomljeni dio, odnosno ovaj broj je broj $2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$.



Za one koji žele znati više U znanosti i tehnici, pri opisivanju iznosa kutova i vremena, često se koristi i seksagezimalni brojevni sustav. Radi se o pozicijskom brojevnom sustavu s bazom 60, pri čemu se cijeli dio nekad tretira decimalno, a nekad seksagezimalno, dok se potencije 60^{-1} i 60^{-2} nazivaju minutama i sekundama. Primjerice, vrijeme 5 h 6 min 7 s je $\frac{18367}{3600}$ sati, a kut od $25^\circ 30'$ je kut od $25,5^\circ \neq 25,5$. 🦆🦆

Svaki konačni decimalni zapis možemo shvatiti kao beskonačan, ali obrat ne vrijedi.

Primjer 1.10 $\frac{1}{2} = 0,5 = 0,50000\dots = 0,5\dot{0}$, ali $\frac{1}{3} = 0,33333\dots = 0,3\dot{3} \neq 0,333333$. Također, $0,4\dot{9} = \frac{1}{2}$ pa decimalni zapis ne mora biti jedinstven.³

Racionalni brojevi mogu i ne moraju imati konačan decimalni zapis. No, decimalni zapis racionalnog broja je uvijek periodičan, tj. počevši od nekog mjesta se neki dio zapisa počinje ponavljati. U decimalnom zapisu, računske operacije se provode analogno kao za cijele brojeve, uz obraćanje pozornosti na poziciju decimalnog zareza. Množenje i dijeljenje s 10 odgovara pomicanju decimalnog zareza za jedno mjesto udesno odnosno ulijevo.

³Ako zahtijevamo da se uvijek prednost daje decimalnom zapisu s beskonačno mnogo znamenki različitih od nule, onda decimalni zapis postaje jedinstven, no to bi davalo prednost neuobičajenom zapisu poput $1 = 0,9$ pred zapisom $1 = 1,0$ te se takav uvjet postavlja samo u dokazima za koje je bitno osigurati jedinstven zapis.

Zadatak 1.1.9 Odredite dva razlomka čiji decimalni zapis je $1,\overline{230}$.

Zadatak 1.1.10 Matemagičar Vidoviti Mujo izvodi sljedeći trik s Fatom: Fata zapisuje proizvoljan pozitivan decimalni broj manji od 1. Ispod njega Mujo zapisuje još jedan takav broj, ali s istim brojem znamenki, a nekom u publici predaje svoje predviđanje. Dalje oboje naizmjenično, Fata pa Mujo, zapisuju još po jedan broj s istim brojem znamenki. To se ponavlja dok Fata ne zapiše onoliko brojeva koliko je bilo znamenki iza decimalnog zareza. Nakon tog Mujo više ne dodaje svoj broj, nego traži da Fata zbroji sve brojeve, ističući da je više od pola njih Fata izabrala sama. Dok se Fata muči sa zbrajanjem, Mujo otvara svoje, naravno točno, predviđanje rezultata. Kako to uspijeva? Hint: U svakom koraku Mujo bira broj tako da njegov zbroj s prethodnim Fatinim brojem bude $0,99 \dots$ (onoliko devetki koliko je znamenki u prvom broju).

Kod potenciranja decimalnih brojeva, ako su racionalni, često ih je zgodnije zapisati kao razlomke.

Primjer 1.11

$$0,04^{-2} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-2} = 25^2 = 625.$$

Budući da mjerenja nikad nisu savršeno točna, podaci dobiveni mjerenjem zapisuju se kao decimalni brojevi i koristeći pravila o **značajnim znamenkama**: Sve sigurne i prva nesigurna znamenka su značajne. U značajne znamenke se ne ubrajaju nule na početku zapisa, nule na kraju se zanemaruju osim ako nisu iza decimalnog zareza, a sve ostale znamenke su značajne. Uočimo da to znači da su rezultati mjerenja uvijek racionalni brojevi. Egzaktni brojevi imaju beskonačno mnogo značajnih znamenki. Kako bi se izbjegle nedoumice, uobičajeno je koristiti **znanstvenu notaciju** brojeva:

 Znanstvena notacija (realnog) broja x je zapis tog broja u obliku $x = m \cdot 10^k$ gdje je (realni) broj m ($1 \leq m < 10$), tzv. mantisa ili koeficijent od x (u pravilu zapisan decimalno, sa svim značajnim znamenkama), a cijeli broj k je karakteristika (ili eksponent) broja x . Potencija 10^k naziva se redom veličine od x .

Primjer 1.12 Broj $2,1 \cdot 10^{-5}$ je reda veličine 10^{-5} , a $5,345 \cdot 10^3$ je reda veličine 10^3 . Kažemo da je prvi broj za 8 redova veličine manji od drugog jer je $10^3/10^{-5} = 10^8$.

Zahtjev da mantisa bude broj između 1 i 10 čini znanstveni zapis broja jedinstvenim. Znanstveni zapis je osobito koristan za brojeve jako velikog ili malog reda veličine.

Primjer 1.13 Avogadrova konstanta iznosi $602214076000000000000000 \text{ mol}^{-1}$, no u računima se obično zaokružuje na prve četiri značajne znamenke, tj. na

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Naboj elektrona iznosi $-0,0000000000000000001602176634 \text{ C}$, što se u standardnijim računima obično zaokružuje na prve četiri značajne znamenke, tj. na

$$e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Zadatak 1.1.11 Procijenite red veličine broja udaha tijekom ljudskog života te broj listova papira u tornju papira debljine oko $\frac{1}{10}$ mm visokom 1 km.

Budući da su iznosi skalarnih fizikalnih veličine umnošci brojeva s mjernim jedinicama, pretvaranje mjernih jedinica svodi se (u pravilu, ali važna iznimka vrijedi kod preračunavanja mjernih jedinica temperature) na skaliranje, tj. množenje s prikladnim faktorom.

 Dvije (promjenjive, skalarne) veličine su proporcionalne (razmjerne) ako im je količnik međusobno odgovarajućih iznosa uvijek isti, osim kad neka od njih ima iznos nula. Taj kvocijent zove se koeficijent proporcionalnosti.

Primjer 1.14 U anglosaksonskim zemljama se kao jedinice mase koriste funte (pound, oznaka lb) i unce (ounce, oznaka oz). Njihov međusobni odnos i odnos prema našim jedinicama definiran je s

$$1 \text{ lb} = 16 \text{ oz} = 453,59237 \text{ g}.$$

S kojim faktorom treba množiti masu izraženu u uncama da dobijemo iznos iste mase izražene u kilogramima?

Iz definicije je $1 \text{ g} = \frac{16}{453,59237} \text{ oz}$, a znamo da je $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$, dakle je $1 \text{ kg} = \frac{16000}{453,59237} \text{ oz} = 35,27396 \text{ oz}$, dakle traženi faktor, tj. koeficijent proporcionalnosti između mase izražene u kilogramima i uncama je $\frac{1}{35,27396} \frac{\text{kg}}{\text{oz}} = 0,02834952 \frac{\text{kg}}{\text{oz}}$.

 Omjer dviju skalarnih veličina je njihov odnos poistovjećen s njihovim količnikom, a razmjer je jednakost dvaju omjera.

Uočimo: Ako su dvije veličine x i y proporcionalne te ako znamo da kad x iznosi a , y iznosi b , a kad x iznosi c , onda y iznosi d , onda je zadovoljen razmjer $a : b = c : d$. Iznimno, ako je x iznosa 0, kod proporcionalnih veličina y može poprimiti bilo koji iznos i obrnuto. Primijetimo i da ako je jedna veličina proporcionalna drugoj, a druga trećoj, onda je i prva proporcionalna trećoj.

Primjer 1.15 Ako je $a : b = c : d$, množenje s b i d daje da vrijedi i $ad = bc$, a onda dijeljenje s a i c daje da vrijedi i $d : c = b : a$. Naravno, prethodna manipulacija razmjera je korektna samo ako su $a, b, c, d \neq 0$.

Primjer 1.16 Jedan poznati matematički zadatak glasi: Kokoš i pol snese jaje i pol za dan i pol. Koliko jaja snese šest kokoši za šest dana?

U takvim zadacima se očigledno pretpostavlja implicitne proporcionalnost. Koja? Najlakše je razmotriti sličan zadatak, ali s očiglednim rješenjem: Ako 1 kokoš u 1 danu izlegne 1 jaje, onda 6 kokoši u 1 danu izlegu 6 jaja jer je učestalost lijeganja jaja iz prve rečenice jednaka $\frac{1 \cdot \frac{1}{1}}{1 \cdot \frac{1}{1}} = 1 \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}}$ po kokoši, dakle je brzina izlijeganja jaja u tom slučaju $1 \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}}$. Vidljivo je da imamo proporcionalnost između broja jaja i umnoška vremena i broja kokoši.

U zadatku stoga imamo učestalost lijeganja jaja jednaku

$$v = \frac{1,5 \text{ j.}}{1,5 \text{ d. } 1,5 \text{ k.}} = \frac{2}{3} \frac{\text{j.}}{\text{d. k.}}$$

Dakle, u našem zadatku jedna kokoš izlegne $\frac{2}{3}$ jaja na dan, pa šest kokoši u jednom danu izlegne 4 jaja, odnosno šest kokoši u šest dana izlegne 24 jaja:

$$N_{\text{jaja}} = N_{\text{k}} t v = 6 \text{ k.} \cdot 6 \text{ d.} \cdot \frac{2}{3} \frac{\text{j.}}{\text{d. k.}} = 24 \text{ j.}$$

Proporcionalnost i (produljeni) omjeri često se koriste u stehiometrijskim zadacima, osobito onima vezanim za empirijske formule. Pritom se koriste sljedeća dva pravila:

- Ako se u (produljenom) omjeru $a : b : \dots$ u svim članovima pojavljuje isti faktor, primjerice ista mjerna jedinica, taj faktor se može pokratiti u cijelom omjeru.
- Ako (produljeni) omjer $a : b : \dots$ želimo pojednostaviti na njemu približno jednaki omjer $a' : b' : \dots$, primjerice jer su u prvom veliki brojevi i želimo ga svesti na omjer malih prirodnih brojeva, obično se prvo svi brojevi zaokruže na manje (odbaci im se neki broj zadnjih znamenki, primjerice odbacivanjem zadnje tri znamenke dobijemo $4612526 : 243955 \approx 4613 : 244$), pokratimo sve eventualne zajedničke faktore pa podijelimo sve članove s najmanjim brojem i opet zaokružimo ($4613 : 244 = \frac{4613}{244} : 1 \approx 18,9 : 1 \approx 19 : 1$).

U postupku pojednostavljivanja omjera treba biti oprezan, jer svođenje najmanjeg broja na 1 ne mora dati dobru aproksimaciju, primjerice $401 : 275 : 633 = \frac{401}{275} : 1 : \frac{633}{275} \approx 1,46 : 10 : 2,30$ pa bi „slijepo“ držanje gornjeg pravila dalo očigledno lošu aproksimaciju $1 : 1 : 2$. U ovakvim slučajevima možemo ponoviti postupak: $1,46 : 1 : 2,30 = 146 : 100 : 230 \approx 14,6 : 10 : 23 \approx 1,5 : 1 : 2,3 = 3 : 2 : 4,6 \approx 3 : 2 : 5$. Uočimo da $3 : 2 : 5$ nije loša aproksimacija, ali da je bolja $6 : 4 : 9$ koju bismo dobili tako da omjer $1,458 : 1 : 2,302$ množimo redom s faktorima 2, 3, ... dok ne dobijemo omjer u kojemu su svi članovi blizu cijelih brojeva: pomnoženo s 2 dobijemo $2,92 : 2 : 4,60$ (zadnji broj ni približno nije cijeli), pomnoženo s 3 dobijemo $4,37 : 3 : 6,91$ (prvi broj ni približno nije cijeli), pomnoženo s 4 dobijemo $5,83 : 4 : 9,21 \approx 6 : 4 : 9$.

Primjer 1.17 Odredimo empirijsku formulu spoja kisika, natrija i sumpora u kojem su njihovi maseni udjeli redom $w(\text{O}) = 45,02\%$, $w(\text{Na}) = 32,40\%$ i $w(\text{S}) = 22,58\%$.

Molarne mase kisika, natrija i sumpora su $M_{\text{O}} = 15,999 \text{ g mol}^{-1}$, $M_{\text{Na}} = 22,990 \text{ g mol}^{-1}$ i $M_{\text{S}} = 32,065 \text{ g mol}^{-1}$.

Naš spoj ima empirijsku formulu $\text{Na}_i\text{S}_j\text{O}_k$ s maksimalno skraćenim prirodnim brojevima i , j i k . Pritom se oni odnose kao omjeri masenih udjela i molarnih masa:

$$\begin{aligned} i : j : k &= \frac{w(\text{Na})}{M_{\text{Na}}} : \frac{w(\text{S})}{M_{\text{S}}} : \frac{w(\text{O})}{M_{\text{O}}} = \frac{32,40\%}{22,990 \text{ g mol}^{-1}} : \frac{22,58\%}{32,065 \text{ g mol}^{-1}} : \frac{45,02\%}{15,999 \text{ g mol}^{-1}} = \\ &= \frac{32,40}{22,990} : \frac{22,58}{32,065} : \frac{45,02}{15,999} = 1,409 : 0,7042 : 2,814 = 14090 : 7042 : 28140 \approx 2 : 1 : 4 \end{aligned}$$

pa je tražena empirijska formula H_2SO_4 .

Zadatak 1.1.12 Alkemičar Wladolphus kuha napitak za sposobnost instant-polaganje ispita iz Matematike 1. Recept zahtijeva zmajevu krv, žablje suze i znoj šišmiša u omjeru $2 : 3 : 5$. Alkemičar je u mješavinu zabunom ulio 12 mjerica žabljih suza više nego je trebao. Da bi popravio napitak, dodao je točno onoliko zmajeve krvi i znoja šišmiša koliko je bilo potrebno da omjer ponovno bude točan i svoj napitak će pokloniti svakom studentu koji mu ispravno odgovori koliko je zmajeve krvi i šišmišovog znoja dodao. Koliko je to bilo?

Zadatak 1.1.13 Vaši kolege su u računima koristili procjene iznosa raznih veličina. Koje od sljedećih procjena su smislene? Kojim izračunima biste ih provjerili [14]?

- Boca vode sadrži 50 cl vode. Punim rupu kvadratnog presjeka ($50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$) i dubine 1 m ulijevajući u nju vodu iz takvih boca. Procjenjujem da mi za to treba 500 boca vode.
- Danas sam kao i svaki dan u pauzi između predavanja pojela paketić od 30 g zobenih pahuljica. Procjenjujem da godišnje pojedem oko 11 kilograma zobenih pahuljica.

Zadatke uvijek treba čitati s razumijevanjem jer proporcionalnost nije uvijek ispravan model.

Primjer 1.18 Ako znamo da je temperatura od 10°C jednaka 50°F , to ne znači da je temperatura od 20°C jednaka 100°F . Naime, iznosi temperature u $^\circ\text{C}$ i $^\circ\text{F}$ nisu proporcionalni, nego se iznos u $^\circ\text{F}$ dobiva množenjem temperature u $^\circ\text{C}$ s $\frac{9}{5}$ (proporcionalnost) uvećan za 32°F (ovo približavanje „kvazi“ proporcionalnost).

Zadatak 1.1.14 Riješite sljedeći zadatak iz Institutiones Arithmeticae in usum Gymnasiorum et Scholarum Gramaticarum per Regnum Hungariae et Provincias eodem adnexas (Budim, 1778.), popularnog matematičkog udžbenika u našim krajevima u doba prijelaza 18./19. st.: Ako prodaješ jednu bocu nekog vina za 20 florina, na 100 prodanih boca zaradit ćeš 30 Fl. Koliko ćeš dakle zaraditi prodavši ih 600 po 24 Fl. svaku?

1.1.1 Postotni račun

U situacijama u kojima je veza između dvije veličina proporcionalnost, osobito kad je koeficijent proporcionalnosti između 0 i 1, uobicajeno je koeficijent proporcionalnosti izražavati kao postotak.

 Postotak je racionalan broj izražen u mjernoj jedinici $\% = \frac{1}{100}$. Postoci se koriste za izražavanje udjela u nekoj cjelini, kao koeficijenti proporcionalnosti i za izražavanje vjerojatnosti. Ako se neki iznos poveća odnosno smanji za $p\%$, novi iznos je $1 \pm \frac{p}{100}$ puta stari iznos.

Primjer 1.19 1 % volumena je jedna stotina volumena, dok broj jedna stotinka pišemo i dalje $\frac{1}{100} = 0,01$, a ne kao 1 %.

Kad kažemo da se nešto uveća ili umanja za neki iznos, to znači pribrajanje odnosno oduzimanje tog iznosa (osim kad je taj iznos nula, takva promjena nije proporcionalna). Kad pak kažemo da se nešto promijenilo za određeni postotak, podrazumijeva se proporcionalnost s faktorom danim tim postotkom.

Primjer 1.20 Cijena smanjena za 5 € je stara cijena minus 5 €, a cijena smanjena za 5 % je 0,95 stare cijene.

Primjer 1.21 U nekoj pekari tijekom prošle godine cijena bijelog kruha porasla je za 10 %. Danas nude bijeli kruh uz sniženje cijene za 10 %. Je li danas taj kruh jeftiniji, skuplji ili jednako skup kao lani?

Ako je lanjska cijena bila C , znači da je redovna trenutna cijena $(1 + \frac{10}{100})C = 1,1C$. Danas imamo popus na tu cijenu, dakle danas je cijena $(1 - \frac{10}{100}) \cdot 1,1C = 0,9 \cdot 1,1C = 0,99C$. Dakle, danas je bijeli kruh u toj pekari za 1 % jeftiniji nego lani.

Primjer 1.22 Dana 14. svibnja 2023. u Turskoj su održani predsjednički i parlametarni izbori. Tijekom sutrašnjeg jutra svi su napeto pratili objave neslužbenih rezultata. Na dan 15. svibnja u 9 : 30 i u 9 : 45 sati ujutro zabilježeni su sljedeći podaci (kasniji podaci u zagrada).

Do ovog trenutka prebrojano je 99.20 (99.31) % svih glasova. Dakle, još je trebalo pregledati 0.80 (0.69) % glasačkih listića. U tim trenutcima je Recep Tayyip Erdoğan imao 49.39 (49.41) % glasova. Mnogi su se pitali ima li još šansu pobijediti u prvom krugu, tj. ostvariti bar 50 % svih glasova?

Glasovalo je N birača, a od njih za 0.8 % (0.69 %) još nije bilo poznato kako su glasovali. Za ostale znamo da je Erdoğan podržalo $49.39\% \cdot 0.9920N = 48.99488\%N$ ($49.41\% \cdot 0.9931N = 49.069071\%N$). Da su svi preostali glasovi bili za njega, ostvario bi najviše $(48.99488 + 0.8)\% = 49.79488\%$ ($(49.069071 + 0.69)\% = 49.759071\%$), dakle je već u tom trenu bilo sigurno da će se ići u drugi krug.

Općenito, ako kandidat koji vas zanima trenutno ima $p\%$ od prebrojanih $q\%$ od N glasačkih listića, onda on na kraju može imati najviše $p\% \cdot q\% + (100 - q)\% = (\frac{pq}{100} + 100 - q)\%$ glasova.

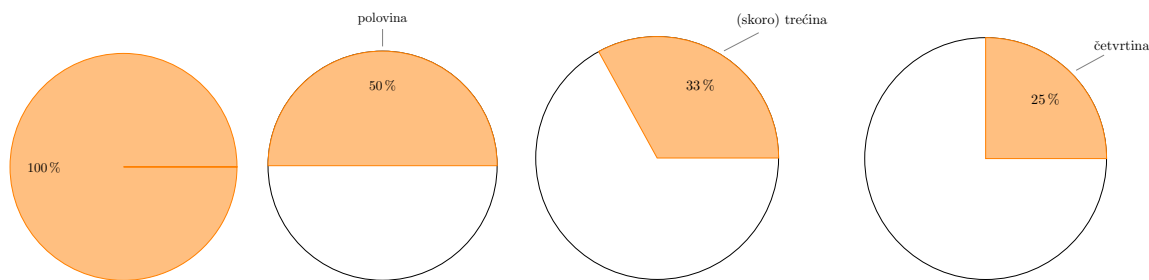
Za brzo izračunavanje postotaka povremeno dobro dođe sljedeći „trik“: Budući da je

$$\frac{p}{100} \cdot x = \frac{x}{100} \cdot p,$$

vidimo da je $p\%$ od x isto što i $x\%$ od p .

Primjer 1.23 Izračunati 4 % od 75 ide brže ako to gledamo kao $75\% = \frac{3}{4}$ od 4, dakle 4 % od 75 je jednako 3.

Zadatak 1.1.15 Ako uložite 1000 eura, koliko vremena bi trebalo da Vam se ulog udvostruči uz jednostavno ukamaćivanje uz kamate od 10 % godišnje? A uz složeno ukamaćivanje jednom godišnje uz istu kamatu?



Slika 1.1: Udjeli od 100 %, 50 %, 33,3 % i 25 % u kružnim dijagramima

Udjeli u danoj cjelini često se prikazuju koristeći **kružne dijagrame**. U tim dijagramima cijeli krug predstavlja cjelinu, odnosno 100 %, a pojedini kružni isječci su takvi da njihove površine u odnosu na površinu kruga odgovaraju udjelima koje predstavljaju. Na slici 1.1 prikazani su najčešći udjeli od 100 %, 50 %, 33,3 %⁴ i 25 % kao kružni isječci. Odgovarajući središnji kutovi su redom puni kut (360°), ispruženi kut (180°), kut od 120° i pravi kut (90°).

Primjer 1.24 Jedna vrsta čokolade navodi sljedeću tablicu sastojaka:

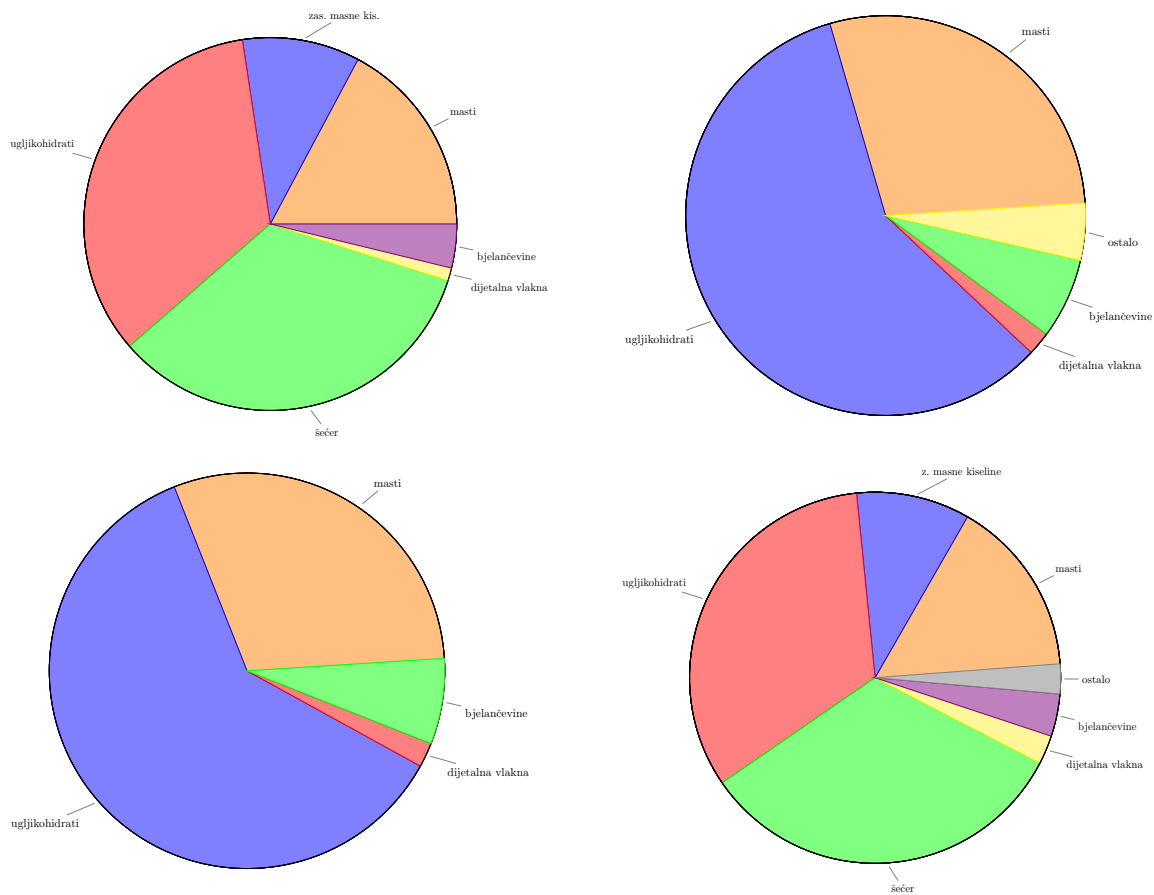
Sastojci	u 100 g	u 33,3 g
Energija	2225 kJ / 530 kcal	742 kJ / 177 kcal
Masti	29,5 g	9,9 g
Od čega zasićene masne kiseline	17,5 g	5,9 g
Ugljikohidrati	58,5 g	19,5 g
Od čega šećer	58,0 g	19,5 g
Dijetalna vlakna	1,9 g	0,6 g
Bjelančevine	6,5 g	2,2 g

Koji od kružnih dijagrama na slici 1.2 odgovara podacima o sastavu ove čokolade? Što predstavljaju dijelovi tog dijagrama, tj. kako bi ih trebalo označiti? Koje su greške u ostala tri dijagrama sa slike 1.2?

Ispravan je drugi po redu od dijagrama. Za prvi su jednostavno kopirani svi podaci iz tablice (odnosno, uzeti su udjeli prvog stupca u odnosu na njegov zbroj), bez da se uzme u obzir da su zasićene masne kiseline dio masti i šećeri dio ugljikohidrata pa su zasićene masne kiseline i šećeri dvaput brojani, a nije uzeto u obzir ni da zbroj prvog stupca ne daje 100 % (100 g). U trećemu nema dupliranja podataka, ali opet nije provjereno da mase sastojaka u 100 g u zbroju ne daju 100 g pa su svi isječci (proporcionalno) veći nego što trebaju biti. U četvrtom pak obrnuto, nije zaboravljena kategorija „ostalo”, ali kao u prvome imamo dvaput brojane zasićene masne kiseline i šećer.

Primjer 1.25 Na slici 1.3 prikazan je tipičan kružni dijagram s preporučenim udjelima hranjivih tvari u dnevnoj prehrani za odrasle osobe (misli se na tvari koje doprinose energiji). Koji su iznosi tih udjela?

⁴Obično se navodi 33 % misleći na trećinu. No, 33 % je malo manje od trećine jer je $3 \cdot 33 = 99$, što je manje od 100.

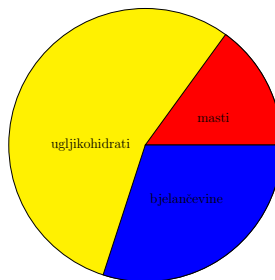


Slika 1.2: Tri kriva i jedan pravilni kružni dijagram za podatke iz primjera 1.24

Na slici je prvo očito da je preporučeni udio ugljikohidrata U nešto veći od pola ($U > 50\%$) te da je preporučeni udio bjelančevina B nešto veći od četvrtine ($B > 25\%$). Ako bolje pogledamo, vidimo i da je preporučeni udio bjelančevina otprilike dvaput veći od udjela masti M ($B \approx 2M$). Sva tri udjela zajedno daju cjelinu ($U + B + M = 1 = 100\%$). Prethodni uvjet, ako ga gledamo kao egzaktnu jednakost, znači da na mjesto B možemo pisati $2M$ pa dobijemo $U + 2M + M = 1$, odnosno $3M = 1 - U$.

No, sve to nije dovoljno da jednoznačno odredimo koji su to preporučeni udjeli. Primjerice, uzmemo li da je $U = 60\% = 0,6$, imamo $3M = 1 - 0,6 = 0,4$ pa je $M = \frac{0,4}{3} \approx 13\%$, a ostatak od $1 - 0,6 - \frac{0,4}{3} \approx 27\%$ bi bio udio bjelančevina. Ako bismo pak uzeli da je $U = 55\% = 0,55$, imamo $3M = 1 - 0,55 = 0,45$ pa je $M = \frac{0,45}{3} = 15\%$, a ostatak od $1 - 0,55 - 0,15 = 30\%$ bi bio udio bjelančevina. Ovdje vidimo zašto je u kružnim dijagramima potrebno uz kodiranje boja odnosno uzoraka pojedinih isječaka navoditi i postotke kojima odgovaraju.

Postoci se koriste i kod izražavanja (relativnih) greški aproksimacija.



Slika 1.3: Primjer preporučenih udjela u prehrani

💡 Relativna greška aproksimacije se definira kao kvocijent apsolutne greške i egzaktnih vrijednosti, pri čemu je apsolutna greška aproksimacije apsolutna vrijednost razlike između aproksimacije i greške. Pritom, apsolutna vrijednost racionalnog (i općenitije, realnog) broja jednaka je tom broju ako je on nenegativan, tj. nije negativan, a inače je jednaka njegovom suprotnom broju.

Kad navodimo približnu vrijednost za koju znamo da nije egzaktna, obavezno treba koristiti znak $\approx$ umjesto $=$. Primjerice, $\frac{1}{7} \approx 0,14$.

Primjer 1.26 *Koliko iznose relativne greške zaokruživanja jedne trećine na 33% i jedne šestine na 16,67%?*

Ako zaokružimo jednu trećinu na 33% = 0,33, apsolutna greška je $|\frac{1}{3} - 0,33| = 0,00\dot{3} = \frac{1}{300}$ pa je relativna greška $\frac{1/300}{1/3} = 1\%$.

Ako zaokružimo jednu šestinu na 16,67% = 0,1667, apsolutna greška je $|\frac{1}{6} - 0,1667| = \frac{1}{30000}$ pa je relativna greška $\frac{1/30000}{1/6} = 0,1\%$. Pritom je ‰ simbol za promil, tj. tisućiti udio u cjelini (jedna desetina postotka).

Napomenimo ovdje da greška mjerenja nije isto što i greška aproksimacije uslijed uzimanja kraćeg decimalnog zapisa (zaokruživanja) za egzaktni broj jer u prvom slučaju ne znamo, a u drugom znamo odbačene znamenke. Stoga se kod navođenja rezultata mjerenja, uz korištenje pravila o značajnim znamenkama, ne koristi znak $\approx$ nego $=$. Kod računanja s rezultatima mjerenja vrijede sljedeća pravila: Rezultat zbrajanja i oduzimanja treba imati isti broj decimala kao najmanje točan početni podatak. Recimo, $12,11 + 18,0 + 1,013 = 31,123$ se u rezultatu navodi kao 31,1. Kod množenja i dijeljenja ne broje se decimale, nego broj značajnih znamenaka: Broj značajnih znamenaka umnoška odnosno kvocijenta treba biti jednak broju značajnih znamenaka najmanje preciznog početnog podatka. Primjerice, $4,56 \cdot 1,4 = 6,38$ se u rezultatu navodi kao 6,4.

1.1.2 Osnove vjerojatnosti

Postoci se često koriste i za iskazivanje **vjerojatnosti**. Vjerojatnost je matematička forma izražavanja stupnja uvjerenja u neki ishod za koji nije sigurno da će se dogoditi (ili da se dogodio), ali su poznati svi mogući drugi ishodi tzv. **slučajnog pokusa** (aktivnosti čiji

ishod nije moguće unaprijed predvidjeti ili se desila u prošlosti, ali joj nije poznat ishod). Pojedinačni mogući ishodi slučajnog pokusa zovu se **elementarni događaji**. **Slučajni događaji** su mogući ishodi slučajnog pokusa, bilo pojedinačni bilo grupirani u skupove. Vjerojatnost događaja A se označava s $P(A)$.

Zadatak 1.1.16 *Zašto izjava Luke Modrića da VAR treba „intervenirati samo ako je riječ o 300 posto očitoj pogrešci“ dobro zvuči, ali nije smisljena? Koji alternativni izraz biste Vi upotrijebili na njegovom mjestu?*

💡 Vjerojatnost $P(A)$ svakog događaja A je uvijek broj između (uključivo) $0 = 0\%$ i $1 = 100\%$: Vjerojatnost ne može biti negativna niti može biti veća od 1.

Ovdje ćemo razmatrati isključivo slučajeve kad postoji *konačno mnogo* mogućih ishoda. U tom slučaju vjerojatnost 1 predstavlja sigurnost, a vjerojatnost 0 predstavlja nemogućnost.⁵

Osnovne ideje vjerojatnosti se najjednostavnije i uobičajeno uvode preko slučajnog pokusa bacanja novčića. Novčić može pasti na pismo ili glavu, dakle sigurno (s vjerojatnosti 100%) će pasti ili pismo ili glava — u ovom standardnom pristupu zanemaruju se mogućnosti da novčić padne na rub ili da padne nekamo gdje ne možemo utvrditi rezultat. Elementarni događaji u ovom slučajnom pokusu su pismo i glava. Budući da će sigurno nastupiti neki elementarni događaj, zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja mora iznositi 1. Dakle, za bacanje novčića imamo:

$$P(\text{pismo}) + P(\text{glava}) = 100\%.$$

Novčić smatramo pravednim ako je jednako vjerojatno da padne pismo ili glava, tj. ako je $P(\text{pismo}) = P(\text{glava})$. Uvrstimo li to ju gornju jednakost dobivamo: Vjerojatnost da padne pismo, ili glava, u pojedinom bacanju novčića je $\frac{1}{2} = 50\%$. Općenito, ako bacamo pravednu kockicu s n različito označenih strana, vjerojatnost svakog pojedinačnog ishoda bit će $\frac{1}{n}$. Tako ako bacamo standardnu kockicu imamo $P(\text{III}) = \frac{1}{6} \approx 16,67\%$.

Primjer 1.27 *Zamislamo kockicu koja na pet od svojih šest strana ima napisano 3, a na zadnjoj piše 6. Bacanje takve kockice je slučajni pokus s dva elementarna događaja, 3 i 6, od kojih prvi ima vjerojatnost $\frac{5}{6}$, a drugi $\frac{1}{6}$.*

💡 Ako se događaji $A, B, \dots$ (njih konačno mnogo) međusobno isključuju, tj. nikoja dva se ne mogu istovremeno dogoditi, onda je vjerojatnost $P(A \cup B)$ da se dogodio bar jedan od događaja $A, B, \dots$ jednaka zbroju vjerojatnosti od $A, B, \dots$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + \dots$. To pravilo ne vrijedi ako se događaji međusobno ne isključuju.

Primjer 1.28 *Vjerojatnost da pri bacanju dodekaedarske kockice, tj. „kockice“ s 12 strana, padne prost broj (2, 3, 5, 7, 11) je $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.*

Iz goenjeg pravila zaključujemo:

⁵Ovo ne mora biti istinito kad postoji beskonačno mnogo mogućih ishoda.



Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Zadatak 1.1.17 Koji su elementarni događaji i koje su im vjerojatnosti za kockicu koja na tri strane ima napisano 2 i na tri strane 5? A za kockicu koja na jednoj strani ima 1 i na pet strana 4?

Zadatak 1.1.18 Veliki matematičar Jean Le Rond D'Alembert (18. st.) tvrdio je da je vjerojatnost bar jedne glave u dva bacanja novčića jednaka $\frac{2}{3}$, argumentirajući da ako je već u prvom bacanju pala glava, nije potrebno igrati dalje pa imamo tri moguća elementarna događaja: glava, pismo-glava i pismo-pismo. U čemu je greška u ovom zaključivanju?

Primjer 1.29 U televizijskom natjecanju glavna nagrada, auto, skrivena je iza jednih od triju vrata. Iza drugih dvaju vrata su utješne nagrade, po jedna koza. Voditelj zna gdje je što, a natjecatelj pogađa. Nakon što natjecatelj odabere jedna vrata, voditelj otvara jedno od preostalih dvaju i otkriva kozu. Natjecatelj, koji želi osvojiti auto, a ne kozu, sad ima pravo predomisliti se ili ostati pri prvom odabiru. Što je pametnije, u smislu povećanja vjerojatnosti osvajanja auta?

Na prvi pogled čini se da je svejedno što natjecatelj učini jer su preostala dva vrata i iza jednog od njih je auto, dakle čini se kao da je sada šansa osvajanja auta 50%. No, takvim pristupom zanemaruje se dodatna informacija u odnosu na polaznu situaciju. Naime, na početku je šansa da je natjecatelj pogodio vrata iza kojih je auto bila $\frac{1}{3}$, a jedini način da promjenom odluke natjecatelj pogorša šansu osvajanja tog auta je ako je isprva bio u pravu. Dakle, ostajanjem pri polaznoj odluci šansa osvajanja auta je samo $\frac{1}{3}$, a promjenom odluke $\frac{2}{3}$, tj. uvijek je bolje promijeniti prvotnu odluku.

Situacije kao u prethodnom primjeru u kojima se vjerojatnost modificira dodatnim saznanjima formaliziraju se kroz tzv. uvjetnu vjerojatnost koja izlazi izvan opsega ovog kratkog repetitorija, a sve one koji žele ponoviti ili naučiti osnovne principe uvjetne vjerojatnosti upućujemo na literaturu, primjerice [13] ili jednostavni uvod Math is Fun: Conditional Probability.

Slučajni pokusi se u pravilu ponavljaju uzastopno, više puta (ili više puta odjednom ekvivalentni pokus: svejedno je bacimo li kockicu 100 puta zaredom ili odjednom bacimo 100 kockica). Ako su izvođenja međusobno *nezavisna* (nijedan pokus ne utječe na rezultat drugog), iz poznavanja vjerojatnosti za događaje u pojedinačnom izvođenju pokusa vjerojatnosti da se desi neki slijed događaja dobivamo množenjem.

Primjer 1.30 Ako bacamo par kockica i zanima nas hoće li u jednom bacanju pasti , vjerojatnost da se to desi u pojedinom bacanju je $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2,78\%$. Ako nas zanima vjerojatnost da u tri bacanja para kockicom zaredom padne par , vjerojatnost je $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{36^3} = \frac{1}{6^6} \approx 0,0021\%$.

Primjer 1.31 Nazovimo kockicu iz primjera 1.27 kockicom **I**, a kockice iz zadatka 1.1.17 redom kockicama **II** i **III**. Koja je vjerojatnost da u jednom krugu u kojem jedan igrač baca kockicu **I**, a drugi kockicu **II**, pobijedi (dobije veći broj) prvi igrač?

Kockica **I** može pasti na 3 ili 6, s vjerojatnostima $\frac{5}{6}$ i $\frac{1}{6}$, a kockica **II** može pasti na 2 ili 5, s vjerojatnostima $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$. Dakle, imamo četiri elementarna događaja, (3, 2) (pobjeda prvog), (3, 5) (pobjeda drugog), (6, 2) (pobjeda prvog) i (6, 5) pobjeda prvog. Dakle, prvi pobjeđuje s vjerojatnosti

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

Zadatak 1.1.19 Nastavite primjer 1.31 izračunavanjem vjerojatnosti da igrač koji igra s kockicom **II** pobijedi onog s kockicom **III** i vjerojatnosti da igrač koji igra s kockicom **III** pobijedi onog koji igra s kockicom **I**. Više o ovakvim kockicama možete pročitati, primjerice, na stranici plus.maths.org.

Ako razmatramo neki slučajni događaj A („dogodilo se A ”), s A^c označavamo njegov **suprotni događaj** („nije se dogodio A ”). Budući da se A sigurno ili dogodi ili ne dogodi, vrijedi $P(A) + P(A^c) = 1$. Dakle, vrijedi sljedeća formula za vjerojatnost suprotnog događaja:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Primjer 1.32 Nastavimo primjer . Vjerojatnost da u jednom bacanju ne padne  je $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$ pa je vjerojatnost da u tri bacanja zaredom nijednom ne padne  jednaka $\left(\frac{35}{36}\right)^3 = \frac{42875}{46656} \approx 91,90\%$. Možete li objasniti zašto zbroj te vjerojatnosti i vjerojatnosti da u tri bacanja zaredom padne par šestica nije 100%?

Primjer 1.33 Radite na trećem katu u neboderu s 20 katova i jednim dizalom. Prijatelj Vam radi na 5. katu pa u pauzama za kavu rado odlazite na 17. kat. No, imate dojam da kad pozovete dizalo, puno češće ide dolje nego gorei obratno, kad se vraćate na svoj kat imate osjećaj da još češće ide prema gore nego prema dolje. Imate li stvarno peh?

Ne! Uz pretpostavku da dizalo kad ga se pozove nastavlja prethodni put prema gore ili dolje (osim naravno na prvom i zadnjem katu), onda za svaki osim prvog kata imamo mogućnost da dizalo ide prema dolje. Imamo dakle ukupno 19 katova za koje je moguće da dizalo ide prema dolje. Ako ste na 5. katu, dizalo će ići prema dolje ako je u trenutku poziva bilo na nekom od 15 katova iznad Vas, tj. s vjerojatnosti $\frac{15}{19} \approx 78,95\%$. Ako ste na 17. katu, dizalo će ići prema gore ako je u trenutku poziva bilo na nekom od 16 katova ispod Vas, tj. s vjerojatnosti $\frac{16}{19} \approx 84,21\%$.

Općenito, ako ste na m -tom katu ($m > 1$) u zgradi s N katova, vjerojatnost da kad pozovete dizalo ono ide prema dolje/gore je $\frac{N-m}{N-1}$.

Primjer 1.34 Na terenu na početku svake nogometne utakmice su 23 osobe: Po 11 igrača svake momčadi i glavni sudac. Isplati li se kladiti, uz omjer 1 : 1, da će dvije od tih osoba imati rođendan na isti dan?

Vjerojatnost da dvije osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365}$, vjerojatnost da tri osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$ i t.d. Vjerojatnost da od 23 osobe nikoje dvije ne dijele rođendan je $\frac{364 \cdot \dots \cdot 343}{365^{22}}$. Dakle, vjerojatnost da bar dvije dijele rođenda je $1 - \frac{364 \cdot \dots \cdot 343}{365^{22}} \approx 50,73\% > \frac{1}{2}$, dakle kladenje uz omjer 1 : 1 bi bilo isplativo za Vas jer je vjerojatnije da ste u pravu nego da niste.

Uočite da gornja vjerojatnost nije ista kao, primjerice, vjerojatnost da jedan od 22 igrača ima isti rođendan kao sudac. Ta vjerojatnost je $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{22} \approx 5,86\%$.

				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
	1	4		6		4		1	
	1	5	10		10	5		1	
	1	6	15	20		15	6		1
1	7	21	35	35	21	7			1

Slika 1.4: Prvih osam redova Pascalovog trokuta.

Slučajni pokusi sa samo dva elementarna događaja, kao kod bacanja novčića, nazivaju se **Bernoullijevi pokusi**. Pritom vjerojatnosti oba elementarna događaja ne moraju biti jednake. Ako je vjerojatnost jednog od njih, nazovimo ga uspjehom, p , onda je prema formuli za vjerojatnost suprotnog događaja vjerojatnost drugog („neuspjeha“) uvijek $q = 1 - p$. Ako uzastopno (nezavisno) ponavljamo Bernoullijev pokus n puta, a zanima nas vjerojatnost $P_n(k)$ da se uspjeh dogodio k puta (naravno, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$), ta vjerojatnost se može izračunati formulom **binomne raspodjele**:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

gdje je $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$ (uočite po k faktora u brojniku i nazivniku) tzv. binomni koeficijent.⁶ Po definiciji je $\binom{n}{0} = 1$, a vrijedi i $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$ za svaki n . Uočimo da za slučaj $p = \frac{1}{2}$, primjerice za uzastopno bacanje novčića, formula binomne razdiobe poprima oblik $P_n(k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$.



Za one koji žele znati više Binomni koeficijenti se najbrže računaju pomoću Pascalovog trokuta. To je trokut koji u prvom redu ima broj 1 (predstavlja binomni koeficijent $\binom{0}{0}$), u drugom redu ima 1 i 1 (binomne koeficijente $\binom{1}{0}$ i $\binom{1}{1}$), a svaki sljedeći red sadrži po jedan broj više, pri čemu su na početku i kraju reda jedinice, a svaki broj između je zbroj dva broja neposredno iznad njega, vidi sliku 1.4. Tada su u n -tom redu (brojeći od $n = 0$) Pascalovog ispisani redom binomni koeficijenti $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$. 🦆



Primjer 1.35 Prema podacima sa stranice Sofascore, u trenutku pisanja ovog primjera, nogometna reprezentacija Hrvatske po utakmici u prosjeku daje 1,5 gol i upućuje samo 9,3 udarca prema protivničkim vratima, a reprezentacija Turske daje u prosjeku 1 gol po utakmici upućujući čak 23,7 udarca prema protivničkim vratima. Dakle, Hrvatska ima uspješnost $p_H = \frac{1,5}{9,3} \approx 16,1\%$, a Turske ima uspješnost $p_T = \frac{1}{23,7} \approx 4,2\%$.

⁶Podsjećamo da oznaka $k!$ predstavlja k faktorijela, tj. umnožak prirodnih brojeva od 1 do k . Po definiciji je $0! = 1$.

Zamislamo da se u ovom trenutku igra hipotetska utakmica Hrvatske i Turske. Iako to nije u potpunosti točno, kao model možemo uzeti da je upućivanje udarca prema protivničkim vratima Bernoullijev pokus s p jednakom uspješnosti pojedine momčadi i da je stoga rezultat posljedica približno nezavisnog slijeda Bernoullijevih pokusa. Hrvatska će najvjerojatnije uputiti 9 ili 10 udaraca, dakle je u binomnoj raspodjeli za Hrvatsku $n_H = 9$ ili $n_H = 10$. Turska će najvjerojatnije uputiti 23 ili 24 udaraca, dakle je u binomnoj raspodjeli za Tursku $n_T = 23$ ili $n_T = 24$.

Izračunajmo vjerojatnost da ta utakmica završi bez golova. Binomna raspodjela za Hrvatsku daje vjerojatnost od $\binom{9}{0}p_H^0(1-p_H)^9 \approx 20,54\%$ odnosno $\binom{10}{0}p_H^0(1-p_H)^{10} \approx 17,22\%$ da Hrvatska ne postigne pogodak. Binomna raspodjela za Tursku daje vjerojatnost od $\binom{23}{0}p_T^0(1-p_T)^{23} \approx 37,10\%$ odnosno $\binom{24}{0}p_T^0(1-p_T)^{24} \approx 35,54\%$ da Turska ne postigne pogodak. Ako za procjenu uzmemo da su brojevi pogodaka Hrvatske i Turske nezavisni, vjerojatnost rezultata $0 : 0$ je približno $20\% \cdot 36\%$, tj. oko $7,2\%$.

U statistici se iz puno rezultata slučajnog pokusa za koji nisu poznate teorijske vjerojatnosti pokušavaju izvesti zaključci o vjerojatnostima. Tu koristimo tzv. eksperimentalnu vjerojatnost (**vjerojatnost a posteriori**), definiranu kao iznos oko kojeg se grupiraju **relativne frekvencije**⁷ razmatranog događaja. Veza između vjerojatnosti a posteriori i **vjerojatnosti a priori** (teorijske vjerojatnosti) dana je (**slabim**) **zakonom velikih brojeva**: Kako se povećava broj opažanja (tj. izvedenih slučajnih pokusa), relativna frekvencija događaja A postaje sve bliža teorijskoj vjerojatnosti od A u jednom izvođenju pokusa. Primjerice, ako uzastopno bacamo pravedni novčić, s porastom broja bacanja relativna frekvencija glava će biti sve bliža 50% . No, to ne znači da će s porastom broja pokusa apsolutne frekvencije pisma i glava postajati sve bliže.

Primjer 1.36 Uzastopno bacamo kockicu i zanima nas kladenje na padanje bar jedne **II**. Recimo da uzastopno 20 puta nije pala **II**. Znači li to da je sad vjerojatnije da u sljedećem bacanju padne **II**?

Ne! Kao prvo, kockica nema memoriju, nego je u svakom bacanju vjerojatnost da padne **II** jednaka točno $\frac{1}{6}$. Nadalje, zakon velikih brojeva se odnosi na neodređeno velik broj bacanja, odnosno ne odnosi se na njihov ma koliko velik konačan broj. Ako bismo kockicu bacali jako puno puta, recimo milijun, ovih prvih 20 (pa i puno više) ne-šestica postaju tek $\frac{20}{1.000.000} = 0,00002$ od svega, te se neće primijetiti u tome da će u tih milijun bacanja udio **II** biti ipak bliže $\frac{1}{6}$: Zakon velikih brojeva djeluje kroz samu brojnost ponavljanja pokusa, a ne kroz mijenjanje vjerojatnosti u pojedinom izvođenju.

Primjer 1.37 Prema zakonu velikih brojeva i rezultatima primjera 1.31 i zadatka 1.1.19, ako se tri opisane igre ponavljaju jako puno, u igri **I** protiv **II** će dugoročno češće ($7 : 5$) pobjeđivati **I**, u igri **II** protiv **III** će dugoročno češće ($7 : 5$) pobjeđivati **II** i u igri **III** protiv **I** će dugoročno češće ($25 : 11$) pobjeđivati **III**. To znači da ako se dva igrača dogovore da jedan izabere bilo koju od kockica, a drugi jednu od preostale dvije, onaj koji bira drugi je u prednosti jer uvijek može izabrati kockicu s kojom će, ako dovoljno dugo igraju, pobjeđivati.

Zadatak 1.1.20 Što ako u igri iz prethodnog primjera igrači uzimaju po dvije jednake kockice, dakle po dvije **I**, dvije **II** ili dvije **III**, hoće li i dalje biti bolje birati kao drugi? Koje su sad vjerojatnosti pobjeda za sve moguće kombinacije?

⁷Relativna frekvencija događaja A u n opažanja jednaka je količniku broja pojava (apsolutne frekvencije) događaja A i nroja n .

Zadatak 1.1.21 Što se više isplati u lotu, uvijek igrati iste brojeve, uvijek odigrati neke brojeve koji se nisu pojavili u zadnjih recimo desetak izvlačenja, ili pak svaki put nasumično birati brojeve?

Važan vjerojatnosni parametar je **očekivanje**, tj. teorijski prosječni rezultat slučajnog pokusa ako se pokus ponavlja jako puno puta („u beskonačnost“). Pritom se pretpostavlja da smo elementarne događaje, ako nisu već sami po sebi brojevi, opisali brojčano, primjerice za bacanje novčića pismo i glavu možemo opisati brojevima 0 i 1, za bacanje kockice rezultate možemo opisati brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6. Formalno se to poistovjećivanje provodi uvođenjem pojma slučajne varijable, tj. funkcije X koja elementarnim događajima promatranog pokusa pridružuje (realne) brojeve. Očekivanje se onda označava s $E(X)$ ili $\langle X \rangle$. Zbog zakona velikih brojeva, prosječni rezultat opažanja s povećanjem broja izvođenja slučajnog pokusa postaje sve bliži očekivanju.

 Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo mogućih ishoda, očekivanje je jednako zbroju umnožaka vjerojatnosti s iznosima svih pojedinačnih elementarnih događaja.

Iznos $E(X)$ pritom ne mora biti jedna od mogućih vrijednosti od X .

Primjer 1.38 Za bacanje kockice, uz X koja redom elementarne događaje $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$ poistovjećuje s brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6 je

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Iako 3,5 ne može biti ishod bacanja kockice, za jako velik broj bacanja će prosječan iznos svih rezultata biti blizu 3,5.

Primjer 1.39 U kazinu igrate rulet (standardni, s utorima 0 i 1–36), pri čemu u svakom krugu ulažete po 1 € na po jedan broj. Ako ste pogodili, u tom krugu ćete dobiti svoj ulog natrag i još 35 euro, a suprotnom gubite svoj ulog. Koliko iznosi Vaš očekivani dobitak ili gubitak ako odigrate deset krugova?

U pojedinom krugu vjerojatnost dobitka 35 € je $\frac{1}{37}$, a vjerojatnost gubitka 1 € je $\frac{36}{37}$. Dakle, očekivani dobitak u jednom krugu iznosi $\frac{1}{37} \cdot (+35) + \frac{36}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37}$ eura, tj. očekujete gubitak od 0,027 eura po krugu, odnosno očekujete gubitak od 27 centi u deset krugova.

Primjer 1.40 Marta i Martina igraju igricu. Marta kaže: „Bacit ću tri novčića u zrak. Ako svi padnu na pismo ili ako svi padnu na glavu, dat ću ti 2 €, ali ako padnu ikako drugačije, ti ćeš meni dati 1 €.“ Martina razmišlja: „Ako od tri novčića dva padnu različito, treći će pasti jednako kao jedan od njih. A ako dva padnu jednako, treći će ili pasti kao oni ili će pasti različito. Za to su šanse jednake. Dakle, jednako je vjerojatno da će pasti tri jednako i da neće, a Ana ulaže dvaput više nego ja, dakle sam ja u prednosti.“ I tako Martina prihvaća okladu. Je li to bilo pametno?

Nije. Baciti tri novčića istovremeno isto je kao baciti jedan od njih triput. Dakle, ovdje imamo $n = 3$ puta ponovljeni Bernoullijev pokus bacanja novčića s $p = \frac{1}{2}$. Stoga je, prema binomnoj razdiobi, vjerojatnost da pismo padne $k = 0$ puta (tj. glava padne tri puta) jednaka $\binom{3}{0} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, a vjerojatnost da pismo padne $k = 3$ puta jednaka

$\binom{3}{2} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ pa je vjerojatnost da Martina dobije 2€ jednaka $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$. Stoga je vjerojatnost da Marta dobije 1€ jednaka $1 - \frac{1}{4} = 75\%$. Odnosno, tri put je vjerojatnije da Marta dobije 1€ nego da Martina dobije 2€: Očekivani dobitak za Martinu je $0,25 \cdot 2€ - 0,75 \cdot 1€ = -0,25€$, tj. ponuđena igra nije pravedna, nego na Martininu štetu.

U prethodnom primjeru imali smo situaciju omjera uloga 1 : 2. Da je u primjeru Marta bila kladionica, a Martina igrač, Martini bi Marta ponudila koeficijent 3: Za svaki uloženi iznos igrač (u primjeru to je Martina) u slučaju gubitka gubi taj iznos, a u slučaju dobitka dobija svoj uloženi iznos natrag i još dvostruko povrh toga. Općenito, omjer uloga 1 : k odgovara kladioničkom koeficijentu $1 + k$. Omjer (koeficijent) nazivamo pravednim ako odgovara očekivanju 0. Primjerice, ako se s nekim kladite na ishod bacanja novčića, pravedno je da oboje uložite isti iznos jer su Vam vjerojatnosti pobjede jednake: Omjer 1 : 1 (koeficijent 2) je u tom slučaju pravedan jer ako biste puno puta bacili novčić, prosječno ćete Vi i Vaš protivnik dobiti jednako mnogo puta, odnosno očekivani dobitak iz Vaše perspektive je $50\% \cdot 1 - 50\% \cdot 1 = 0$. Općenito, ako je p vjerojatnost dobitka, onda je omjer $(1 - p) : p$ pravedan (odnosno, koeficijent $K = 1/p$ je pošten), jer je tada očekivani dobitak $p \cdot (1 - p) - (1 - p) \cdot p = 0$.

Primjer 1.41 Ako je koeficijent 2,6 pravedan, znači da je vjerojatnost dobitka 1 : 2,6 = 38,46%.

Primjer 1.42 Igrate sljedeću igru protiv svog najboljeg prijatelja: Oboje imate po jedan standardni komplet karata (od 52 kaete) i svatko promiješa svoj. Stavljate svoje komplete na stol, poledinom prema gore. Redom otvarate oboje najgornju kartu. Dogovorili ste se da ako u ijednom trenutku oboje otvorite istu kartu, Vi častite prijatelja večerom, a ako otvorite sve karte bez da se ijedan par podudara, on časti Vas. Je li igra pravedna ili je netko od vas u prednosti? Koji je očekivani broj podudaranja?

Pokažimo prvo da je očekivani broj podudaranja jednak 1. Naime, ako gledamo karte od vrha prema dolje, prije nego ih krenemo otvarati, vjerojatnost da se prve karte podudaraju je $\frac{1}{52}$, vjerojatnost da se druge karte podudaraju je $\frac{1}{52}$ i tako dalje. Imamo 52 para, dakle je očekivani broj podudaranja $52 \cdot \frac{1}{52} = 1$. Uočimo da ovo vrijedi i za komplete s drugačijim brojevima karata.

Dan je omjer 1 : 1, dakle je igra pravedna ako su vjerojatnosti da se bar jedan par podudara i da se nijedan par ne podudara jednake. Zamislimo prvo da kompleti imaju samo po $n = 2$ karte. Vjerojatnost da se prvi par ne podudara je $\frac{1}{2}$. No, ako se prvi par nije podudara, u ovom slučaju se ne podudara ni drugi, a ako se prvi par podudara onda se podudara i drugi. Dakle, vjerojatnost da se ni prvi ni drugi par ne podudaraju je $\frac{1}{2}$, odnosno u ovom slučaju igra bi bila pravedna.

Ako igrači imaju po $n = 3$ karte. Uzmimo da su karte prvog redom 1, 2, 3. Onda se one kod drugog mogu pojaviti u redosljedima 123, 132, 213, 231, 312 i 321. Nijednog podudaranja nema u dva od tih šest slučajeva, dakle je sad vjerojatnost da nema podudaranja $\frac{1}{3}$, odnosno igra sad više nije pravedna jer su Vam šanse da dobijete besplatnu večeru sad 1 : 2. Igru biste mogli učiniti pravednom da u slučaju da nema podudaranja prijatelj časti Vas s dvije večere.

Općeniti račun je prezahtjevan na ovoj razini, ali čim se igra s više od dvije karte igra nije pravedna, nego je u vašu korist. Može se pokazati, korištenjem limesa, da što je više karata, to je vjerojantost bar jednog podudaranja bliža $1 - \frac{1}{e} \approx 63,2\%$, pri čemu

je toj vjerojatnosti vrlo blizu već kad imate po dvadeset karata, pri čemu je e iracionalni broj o kom ćemo više reći u odjeljku ???. Dakle, poštenu koeficijent bi bio otprilike 1,58.

1.2 Iracionalni brojevi

Brojevni pravac je pravac na kojem su označene pozicije brojeva 0 i 1 (čime je određeno mjerilo, tj. jedinična duljina⁸ na njemu) i strelica koja ukazuje na smjer porasta brojeva.



Za prirodan broj n , n -ti korijen broja x , u oznaci $\sqrt[n]{x}$, je svaki broj koji potenciran na n -tu potenciju daje x . Korištenjem korjenovanja, potenciranje se proširuje na racionalne eksponente. Naime, uz definiciju da je $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ za prirodan broj n dobivamo da je za prirodan n i cijeli m

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Drugi i treći korijen često se nazivaju kvadratnim odnosno kubnim korijenom. Budući da potenciranje na parne eksponente uvijek rezultira nenegativnim brojem, dok smo u skupu realnih brojeva, parni korijeni (primjerice, kvadratni) su definirani samo za nenegativne brojeve, ali za pozitivne brojeve daju po dvije vrijednosti, dok su neparni (primjerice, kubni) korijeni definirani za sve realne brojeve i poprimaju samo po jednu vrijednost. U složenim izrazima s korijenima, u slučaju parnih korijena pozitivnih brojeva (ako nije drugačije rečeno) podrazumijeva se njihov pozitivni iznos.

Primjer 1.43 Brojevi ± 5 su drugi korijeni broja 25: $\sqrt{25} = \pm 5$. Broj -2 je treći korijen broja -8 : $\sqrt[3]{-8} = -2$.

No, u izrazu $\sqrt{30 - \sqrt{30 - \sqrt{25}}}$ podrazumijevamo $\sqrt{30 - \sqrt{30 - \sqrt{25}}} = \sqrt{30 - \sqrt{30 - 5}} = \sqrt{30 - \sqrt{25}} = \sqrt{30 - 5} = \sqrt{25} = 5$.

Primjer 1.44 Bez korištenja kalkulatora što točnije procijenimo $2^{3/4}$. Imamo: $2^{3/4} = 2^{3/(2 \cdot 2)} = \sqrt{\sqrt{2^3}} = \sqrt{\sqrt{8}}$.

Budući da je $2^2 < 8 < 3^2$, slijedi da je $\sqrt{8}$ između 2 i 3. Budući da je $1^2 < 2 < 3 < 4 = 2^2$, gruba procjena je da je $2^{3/4}$ broj između 1 i 2.

Zadatak 1.2.1 Koliko iznosi $-1^{-2^{-3^{-4}}}$?

Bolje procjene iznosa drugih korijena možemo dobiti raznim metodama, a jedna od najjednostavnijih je **Heronova metoda**. Ako imamo trenutnu procjenu x za $\sqrt{X}$, novu (uvijek bolju) procjenu x' možemo dobiti kao

$$x' = \frac{1}{2} \left(x + \frac{X}{x} \right).$$

⁸Dužina je matematički objekt, dio pravca između dvije točke. Duljina je fizikalna veličina, sa SI jedinicom metar (m).

Primjer 1.45 Nastavimo primjer 1.44. Prva procjena za $\sqrt{8}$, dakle $X = 8$, nam je bila da je to broj između 2 i 3 pa možemo uzeti da nam je prva procjena $x = 2,5$. Bolja procjena je onda

$$x' = \frac{1}{2} \left(2,5 + \frac{8}{2,5} \right) = \frac{\frac{5}{2} + \frac{8}{\frac{5}{2}}}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{16}{5}}{2} = \frac{\frac{57}{10}}{2} = \frac{57}{20} = \frac{285}{100} = 2,85.$$

Nama treba $\sqrt{\sqrt{8}} \approx \sqrt{2,85}$ pa ako njega procijenimo prvo s 1, onda je bolja procjena

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2,85}{1} \right) = \frac{3,85}{2} = 1,925.$$

Dok nam je bolja procjena za $\sqrt{8}$ već bila točna na jednu decimalu, ovako dobivena procjena za $\sqrt{\sqrt{8}}$ još nije točna na jednu decimalu. Razlog je dijelom u tome što Heronova metoda ne garantira da ćemo svakom primjenom povećati broj točnih decimala, a dijelom u tome što ju u drugom koraku nismo primijenili na $\sqrt{8}$, nego na njegovu aproksimaciju.

Općenito, dobro je — primjerice za provjeru smislenosti rezultata duljih računa — znati razumno procijeniti iznose prvih i drugih korijenja, što nije teško ako zapamtimo nizove prvih deset kvadrata i kubova prirodnih brojeva.

Primjer 1.46 Želimo li procijeniti $\sqrt[3]{5000000}$ prvo uočimo da je mu je cjelobrojni dio sigurno troznamenkast (jer je $100^3 = 1000000 < 5000000 < 1000^3 = 1000000000$). Nadalje, $\sqrt[3]{5000000} = 100\sqrt[3]{5}$ te budući da je $1^3 = 1$ i $2^3 = 8$ zaključujemo da je $\sqrt[3]{5000000}$ broj između 100 i 200.

Primjer 1.47 Bez korištenja kalkulatora što točnije procijenimo $\sqrt{55555} - \sqrt[3]{55555}$.

Prvo, $\sqrt{55555}$ je sigurno troznamenkast, a $\sqrt[3]{55555}$ sigurno dvoznamenkast, dakle im razlika ima tri ili dvije znamenke, odnosno naš broj je u intervalu $\langle 10, 1000 \rangle$.

Bolju procjenu dobivamo uočivši da je $100^2 = 10000$, $200^2 = 40000$, $300^2 = 90000$ pa je $\sqrt{55555} \in \langle 200, 300 \rangle$. Također, iz $10^3 = 1000$, $20^3 = 8000$, $30^3 = 27000$, $40^3 = 64000$ pa je $\sqrt[3]{55555} \in \langle 30, 40 \rangle$. Stoga je naš broj u intervalu $\langle 200 - 40, 300 - 30 \rangle = \langle 160, 270 \rangle$. Dakle, ugrubo ga možemo procijeniti s 200.



Za one koji žele znati više Za dva nenegativna broja a i b njihova geometrijska sredina definirana je kao drugi korijen njihova umnoška, $G = \sqrt{ab}$. Za više, njih n , pozitivnih brojeva njihova geometrijska sredina je n -ti korijen njihova umnoška. Pritom geometrijska sredina (nenegativnih brojeva) nikad ne može biti veća od njihove aritmetičke sredine, ni manja od harmonijske. 🦆🦆🦆

Dok na racionalne brojeve primjenjujemo samo četiri osnovne računske operacije, što uključuje i potenciranje na cjelobrojne eksponente, dobivat ćemo samo racionalne brojeve. No, kad dozvolimo i korjenovanje, rezultat više ne mora biti racionalan broj.



Iracionalni brojevi su brojevi koji nisu racionalni, ali jesu realni, tj. ako gledamo brojevni pravac svakom od njih kao i racionalnim brojevima odgovara točno po jedna točka tog pravca. Decimalni zapis iracionalnog broja uvijek je beskonačan i neperiodičan. Realni brojevi su svi brojevi koji su racionalni ili iracionalni. Svakom realnom broju odgovara točno jedna točka brojevnog pravca i obrnuto, svakoj točki na brojevnom pravcu odgovara točno jedan realan broj.

Istaknuti iracionalni brojevi su kvadratni korijeni svih prirodnih brojeva koji nisu kvadratni brojevi, dakle $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, ... te omjer opsega i promjera bilo kojeg kruga, koji je poznata matematička konstanta π .

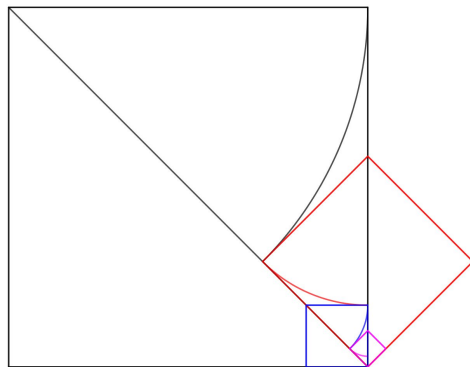
Primjer 1.48 Dokažimo da $\sqrt[3]{3}$ nije racionalan broj. Pretpostavimo suprotno: $\sqrt[3]{3} = \frac{m}{n}$ gdje je razlomak $\frac{m}{n}$ maksimalno skraćen, posebno nisu oba m i n djeljiva s 3. To bi značilo da je $m^3 = 3n^3$, dakle je m djeljiv s 3, tj. $m = 3k$. Stoga je $27k^3 = 3n^3$, dakle $n^3 = 9k^3$ pa bi i n bio djeljiv s 3, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Primjer 1.49 Pitagorejci, dakle članovi društva kojeg je u 6. st. pr. Kr., osnovao Pitagora sa Samosa, vjerovali su da se sve može opisati isključivo prirodnim brojevima. U skladu s time vjerovali su da su svake dvije istovrsne veličine, primjerice dvije duljine, sumjerljive, tj. da postoji njihova zajednička mjera, tj. s njima istovrsna veličina tako da su obadvije prirodni višekratnici te mjere. Suvremenim jezikom rečeno, pitagorejci su vjerovali da je omjer svake dvije istovrsne veličine racionalan broj. No, netko od pitagorejaca otkrio je da ta pretpostavka nije točna. Tradicija navodi Hipasusa iz Metaponta, koji je navodno oko 500. g. pr. Kr. dokazao da dijagonala i stranica kvadrata nisu sumjerljive. Pritom dokaz najvjerojatnije nije sličio modernom dokazu iracionalnosti broja $\sqrt{2}$, nego je vjerojatno koristio Euklidov algoritam.⁹

Euklidov algoritam se danas obično koristi za računanje najvećeg zajedničkog djelitelja (mjere) dva prirodna broja m i n . Ako je $m > n$, podijelimo djeljenik m s djeliteljem n i zapišemo ostatak. U svakom sljedećem koraku na mjesto djeljenika ide prethodni djelitelj, a na mjesto djelitelja prethodni ostatak. Postupak staje kad dobijemo ostatak 0 te je traženi najveći zajednički djelitelj jednak zadnjem djelitelju. U pitagorejsko doba taj se algoritam primjenjivao na dužine, a dijeljenje se svodilo na nanošenje manje dužine na veću. Pritom su pitagorejci, vjerojatno, znali da ovaj postupak staje kad god su dvije veličine sumjerljive, jer tako dobijemo njihovu najveću zajedničku mjeru, što znači da ako postupak ne staje one nisu sumjerljive.

Kako su to mogli napraviti za slučaj dijagonale i stranice kvadrata? Jedan način je sljedeći. Pogledajmo sliku 1.5: krećemo od crnog kvadrata. Primjenjujemo Euklidov algoritam na dijeljenje njegove dijagonale sa stranicom. Očito je dijagonala kraća od dvije stranice, dakle se stranica na dijagonalu može nanijeti samo jednom. Nad ostatkom nacrtamo novi (crveni) kvadrat i na njega primijenimo isti postupak. Nad ostatkom konstruiramo novi plavi kvadrat, pa ružičasti. Postupak očigledno možemo nastaviti unedogled pa slijedi da dijagonala i stranica kvadrata nisu sumjerljive.

⁹Nazvan po Euklidu Aleksandrijskom, koji ga je zapisao u svojim *Elementima* oko 300. g. pr. Kr., no vrlo vjerojatno je bio poznat već pitagorejcima, a možda i ranije.



Slika 1.5: Ilustracija uz primjer 1.49.

Zadatak 1.2.2 Recipročni broj od 10 je $\frac{1}{10} = 0,1$. Možete li naći još neki primjer broja takav da je decimalni zapis njegovog recipročnog broja moguće dobiti pomicanjem decimalnog zareza za neki broj mjesta ulijevo? A ako tražimo da je taj pomak za točno jedno mjesto ulijevo?

Potenciranje se dalje korištenjem limesa, o kojima ćemo govoriti u odjeljku ??, može proširiti i na iracionalne eksponente, pri čemu ostaju sačuvana osnovna svojstva potenciranja:

$$a^{b+c} = a^b a^c, \quad a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}, \quad a^{bc} = (a^b)^c,$$

koja vrijede za sve realne brojeve a , b i c za koje izrazi s obje strane pojedine jednakosti imaju smisla.

Primjer 1.50 Iracionalan broj potenciran na iracionalan broj može biti racionalan, ali i iracionalan.

Pogledajmo broj $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ako je on racionalan, onda je on primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti racionalan. U tom slučaju je pak $\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}$ primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti iracionalan (umnožak racionalnog i iracionalnog broja je uvijek iracionalan).

Ako je pak $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ iracionalan, onda je on primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti iracionalan. No, u tom slučaju $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ pokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti racionalan.



Intervali, tj. skupovi svih realnih brojeva koji se nalaze između dva realna broja a i b (gdje je $a < b$) na brojevnom pravcu se prikazuju kao dužine, s uključenim ili isključenim krajevima ovisno o tome je li rub a odnosno b uključen u interval. Zatvorenost, tj. uključenost ruba se naznačava uglatom zagradom $[$ odnosno $]$, a otvorenost, tj. neuključenost ruba se naznačava s $\langle$ odnosno $\rangle$. Intervali mogu kao lijevi (otvoreni) rub imati $-\infty$ (ako se u njima nalaze neograničeno mali brojevi) odnosno kao desni (otvoreni) rub mogu imati $+\infty$ (ako se u njima nalaze neograničeno veliki brojevi) i u tom slučaju im duljine nisu konačne.

Primjer 1.51 Interval $[-2, 5)$ (skup svih realnih brojeva x takvih da je $-2 \leq x < 5$) će biti dužina duljine 7 razmaka od 0 od 1, pri čemu će točka koja predstavlja -2 biti uključena, a točka koja predstavlja 5 isključena.

Primjer 1.52 Interval $\langle 0, +\infty \rangle$ je neograničen interval koji sadrži sve pozitivne realne brojeve.

Zadatak 1.2.3 Intervali realnih brojeva definirani su kao $I_n = \langle 0, \frac{1}{n} \rangle$ kad je n prirodan broj. Na zasebnim brojevnim pravcima, s istom jedinicom duljine, skicirajte prvih pet intervala I_n ($n = 1, \dots, 5$). što su za te n presjeci¹⁰ $I_1 \cap \dots \cap I_n$? Možete li naslutiti kako se ponašaju I_n i spomenuti presjeci kad n postaje sve veći?

Zadatak 1.2.4 Ana i Boris utvrđuju gradivo o racionalnim i iracionalnim brojevima. Našli su zadatak u kojem se traži navođenje primjera racionalnih brojeva u intervalu $\langle \sqrt{65}, \sqrt{67} \rangle$.

Pritom su otkrili da za neke nazivnike ne postoji razlomak između $\sqrt{65}$ i $\sqrt{67}$ s takvim nazivnikom. Ana je rekla: „Znamo da je $\sqrt{65} \approx 8,06$, a $\sqrt{67} \approx 8,18$. To je zato jer razlomci s nazivnikom 4 u decimalnom zapisu imaju razlomljeni dio ,0 ili ,25 ili ,5 ili ,75.“ Boris se složio, ali je razmišljao malo drugačije: „Ako tražim razlomak $\frac{m}{n}$ u intervalu $\langle \sqrt{65}, \sqrt{67} \rangle$, znači da tražim prirodne brojeve m i n takve da je $65 < \frac{m^2}{n^2} < 67$, tj. $65n^2 < m^2 < 67n^2$. Ako uzmem $n = 4$ dobio bioj $32^2 = 1024 < 1040 < m^2 < 1072 < 33^2 = 1089$ pa bi kvadrat od m bio između kvadrata od 32 i 33, što je nemoguće.“

Nađite bar deset razlomaka u intervalu $\langle \sqrt{65}, \sqrt{67} \rangle$. Nađite bar još jedan nazivnik osim 4 za koji ne postoji razlomak s tim nazivnikom u intervalu $\langle \sqrt{65}, \sqrt{67} \rangle$. Možete li naći sve takve nazivnike?

Kao što je već istaknuto, konačni decimalni zapisi iracionalnih brojeva, ali i mnogih racionalnih, sadrže grešku zaokruživanja i nisu egzaktni: $\sqrt{2} \neq 1,41$ (ali $\sqrt{2} \approx 1,41$ s greškom reda veličine 10^{-3}), $\frac{1}{9} \neq 0,11111$ (ali $\frac{1}{9} \approx 0,11111$ s greškom reda veličine 10^{-6}). Kod računa s aproksimacijama, ali i s rezultatima mjerenja izraženim u skladu s pravilima o značajnim znamenkama, kako bi se izbjeglo pojavljivanje greške zbog samog računa, račun treba provoditi s više znamenki i tek konačni rezultat zaokružiti.

Primjer 1.53 Recimo da trebate izračunati $\frac{0229\cdot15913}{135\cdot000341}$. Prema pravilima, rezultat treba imati tri značajne znamenke te se ispravnim računom dobije rezultat $7,92 \cdot 10^2$. Ako biste

¹⁰Presjek dva skupa je skup koji se sastoji od svih elemenata zajedničkih oboma skupovima.

pak računali u tri koraka, tj. prvo izračunali produkte $0,229 \cdot 15,913 = 3,64408$ i $1,35 \cdot 0,00341 = 0,0046035$, ali ih prije dijeljenja zaokružili na tri značajne znamenke dobili biste $\frac{364}{000460}$ što nakon zaokruživanja daje $7,91 \cdot 10^2$, tj. zbog zaokruživanja međurezultata imali biste grešku na trećoj značajnoj znamenici.

Primjer 1.54 Izačunajmo egzaktni iznos broja $\sqrt{3\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{11\sqrt{13}}}$ i izrazimo ga u racionaliziranom obliku, tj. u obliku u kojem nema dijeljenja s iracionalnim brojem. Imamo:

$$\begin{aligned} \sqrt{3\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{11\sqrt{13}}} &= \sqrt{3\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt{\frac{11\sqrt{13}-9}{99\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{(3\sqrt{5}-2)(11\sqrt{13}-9)}{99\sqrt{13}}} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{33\sqrt{65}-27\sqrt{5}-22\sqrt{13}+18}{11\sqrt{13}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{33\sqrt{65}-27\sqrt{5}-22\sqrt{13}+18}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt[4]{13}} \cdot \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt[4]{13^3}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt[4]{13^3}} = \\ &= \frac{\sqrt[4]{2197}}{429} \cdot \sqrt{363\sqrt{65}-297\sqrt{5}-242\sqrt{13}+198}. \end{aligned}$$

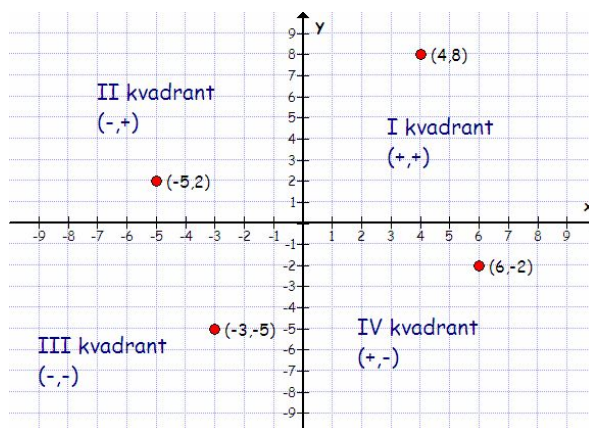
Ako za sve druge korijene uzimamo samo pozitivni drugi korijen, onda je približan iznos gornjeg broja, zaokružen na šest decimala, jednak 0.635942. Da smo naš izraz računali tako da smo prvo zaokružili na tri decimale $\sqrt{5} \approx 2.236$ i $\sqrt{13} \approx 3.605551$, pa izračunali $3\sqrt{5}-2 \approx 4.708204$ i $\frac{1}{9}-\frac{1}{11\sqrt{13}} \approx 0.085897$ i naposljetku $\sqrt{3\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{11\sqrt{13}}} \approx \sqrt{4.708204} \cdot \sqrt{0.085897} \approx 0.635941$, tj. imali bismo grešku na šestoj decimali.

1.3 Pravokutni koordinatni sustav u ravnini

Često je korisno imati način prikazivanja uređenih parova realnih brojeva, npr. parova podataka. **Uređeni par** dva (ne nužno različita) broja čine ta dva broja uz specifikaciju koji je prvi, a koji je drugi. Npr. $(1, 2)$ je uređeni par različit od $(2, 1)$. Uređene parove realnih brojeva možemo vizualizirati koristeći pravokutni koordinatni sustav.



Pravokutni koordinatni sustav se sastoji od dva međusobno okomita brojeva pravca koje nazivamo koordinatnim osima. Koordinatne osi se sijeku u zajedničkoj nuli (ishodištu koordinatnog sustava). Pritom jedinične duljine na osima ne moraju biti jednake, a ako jesu, sustav zovemo Kartezijevim koordinatnim sustavom. Kad unosimo par brojeva (x, y) u pravokutni koordinatni sustav, jedan broj (prvi broj x u paru) nanosi se na horizontalnu os koju zovemo os apscisa, a drugi (y) na vertikalnu os koju zovemo os ordinata. Par (x, y) je onda prikazan točkom koja je sjecište okomica povučenih na obje osi u točkama koje odgovaraju nanesenim podacima. Brojevi x i y zovu se koordinatama točke (x, y) .



Slika 1.6: Pravokutni koordinatni sustav (slika izrađena programom Graph).

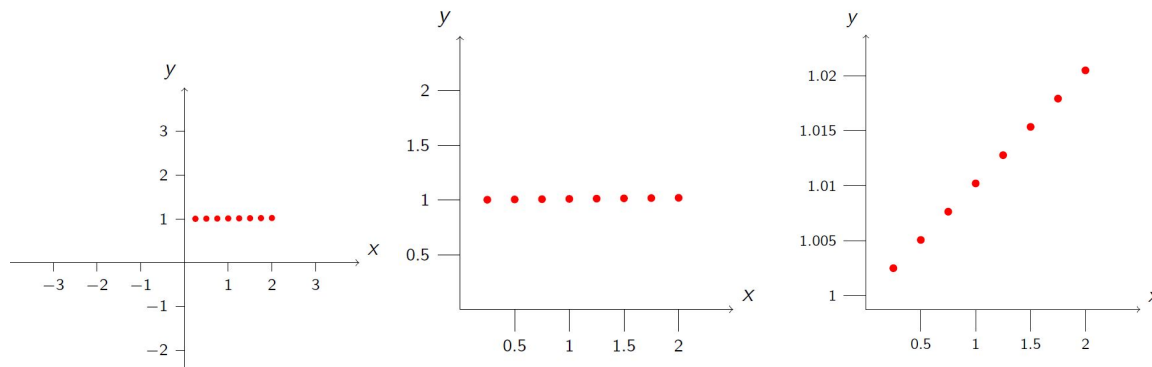
Ishodište koordinatnog sustava po definiciji ima koordinate $(0, 0)$. U praksi, nacrtano sjecište osi ponekad nije točka kojoj su obje koordinate 0, tj. nije ishodište koordinatnog sustava (obično su koordinate nacrtanog sjecišta malo manje od, za konkretnu situaciju, najmanje potrebne apscise odnosno ordinate). Stoga oprez: Ishodište je zajednička nula, dok nacrtano sjecište osi ne mora biti ishodište koordinatnog sustava (odnosno, moguće je da jedan ili oba nacrtana brojeva pravca zapravo nisu koordinatne osi, nego samo njima paralelni brojevi pravci, usp. primjere 1.56 i 1.57).

Točke na osi apscisa imaju ordinatu 0, tj. koordinate oblika $(x, 0)$, a točke na osi ordinata imaju apscisu 0, tj. koordinate $(0, y)$. Koordinatni sustav dijeli ravninu na četiri **kvadranta**; u prvom kvadrantu su točke kojima su obje koordinate pozitivne, u drugom one s negativnom apscisom i pozitivnom ordinatom, u trećem one kojima su obje koordinate negativne, a u četvrtom one s pozitivnom apscisom i negativnom ordinatom (vidi sliku 1.6). Os apscisa uobičajeno je crtati horizontalno sa smjerom porasta vrijednosti udesno, a os ordinata vertikalno sa smjerom porasta vrijednosti prema gore. Čak i ako os apscisa nije nacrtana horizontalno odnosno os ordinata vertikalno, u kontekstu korištenja pravokutnih koordinatnih sustava pravci paralelni s osi apscisa nazivaju horizontalnim, a pravci paralelni s osi ordinata vertikalnim.

Svaka koordinatna os se označava oznakom koja nam govori što brojevi na toj osi predstavljaju. U pravokutni koordinatni sustav u ravnini unose se isključivo parovi *brojeva*. Dakle, ako u pravokutnom koordinatnom sustavu prikazujemo parove rezultata nekih mjerenja, na osima su iznosi tih mjerenja podijeljeni s odabranom mjenom jedinicom. Stoga su pravilne oznake koordinatnih osi oznake veličina (vrste podataka) podijeljene s odabranom mjernom jedinicom. Apstraktne oznake osi su x odnosno y , a njih u konkretnim situacijama zamjenjujemo upravo opisanim konkretnim oznakama.

Primjer 1.55 Ako na jednu koordinatnu os nanosimo brzine u metrima u sekundi, pravilna oznaka te osi je $v/(m/s)$, $v/(m\,s^{-1})$ ili $v\,m^{-1}\,s$.

Želimo li dobro planirati prostor papira za skiciranje podataka, potrebno je prvo odrediti odnosno procijeniti raspon $[a, b]$ iznosa podataka koje nanosimo na apscisu i raspon $[c, d]$ iznosa podataka koje nanosimo na ordinatu. Sjecište osi obično se onda često, ali ne nužno, crta dolje lijevo, na poziciji blizu (a, c) ; ako je $a < 0 < b$, sjecište

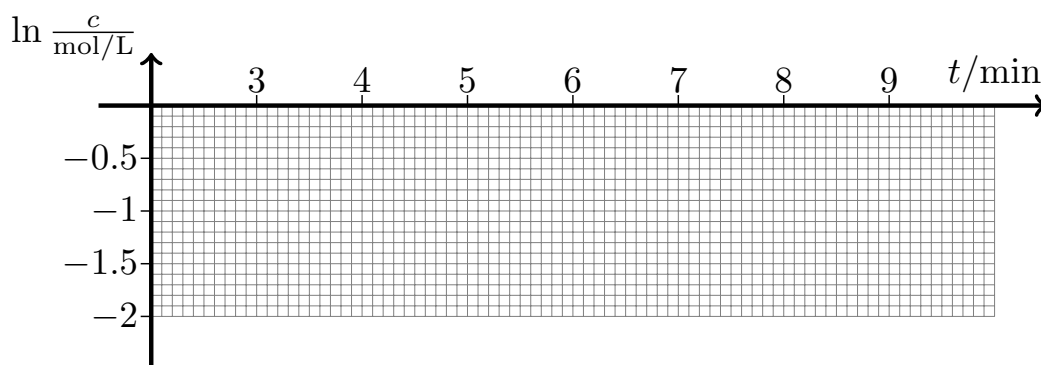


Slika 1.7: Loše planiranje prostora, malo bolje planiranje prostora i dobro planiranje prostora za prikaz parova $(x, 1 + x/100)$ za $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots, 2$.

koordinatnih osi se stavlja u 0 na apscisi, odnosno ako je $c < 0 < d$ u 0 na ordinati, umjesto da se crta u donjem lijevom kutu papira. Bilo da je sjecište osi odabrano na način opisan u prethodnoj rečenici ili kao stvarno ishodište, dobro planiranje prostora za crtanje podrazumijeva da je prostor maksimalno iskorišten i da pritom najljepije točke imaju apscise a (ili malo manje od a), najdesnije točke imaju apscise b (ili malo veće od b), najdonje točke imaju ordinate c (ili malo manje od c), a najgornje točke imaju ordinate d (ili malo veće od d). Jedinica duljine se u praktičnim situacijama onda prilagođava takvom planiranju umjesto da se prvo odabere jedinica duljine, a onda ucrtavaju točke.

Primjer 1.56 Želimo li u koordinatnom sustavu ucrtati parove $(\frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{400})$, $(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{200})$, $(\frac{3}{4}, 1 + \frac{3}{400})$, $\dots$, $(2, 1 + \frac{1}{50})$, a na raspolaganju nam je kvadratni prostor širine i visine 5 cm, ako bismo prvo na standardan način nacrtali Kartezijev sustav i onda ucrtali točke, dobili bismo potpuno neupotrebljiv prikaz kao na slici 1.7 lijevo. Uočimo li da su svi parovi u prvom kvadrantu i imaju koordinate maksimalno iznosa 2 dobijemo smisleniji, ali još uvijek za ikakvo očitavanje neupotrebljiv prikaz kao na slici 1.7 u sredini. Uočimo da je taj prikaz dobar što se tiče apscisa jer su maksimalno rastegnute sve potrebne apscise u intervali $[1/4, 2]$, no ordinate su sve jako bliske te je ovdje potpuno neprikladno koristiti Kartezijev koordinatni sustav. Budući da je najmanja ordinata koju trebamo $1 + \frac{1}{400} = 1,0025$, a najveća $1 + \frac{1}{50} = 1,02$, dobro planiranje prostora za crtanje rezultira prikazom kao na slici 1.7 desno.

Primjer 1.57 Recimo da na apscisi želimo prikazivati vremena iz raspona $2 \text{ min} \leq t \leq 10 \text{ min}$ i na ordinati prirodne logaritme izmjerenih koncentracija reaktanta (podijeljenih s mjernom jedinicom mol L^{-1}) koji se nalaze u rasponu $-2 \leq \ln \frac{c}{\text{mol/L}} \leq -0,5$. Prikladan raspon apscisa bio bi malo veći od 2 do 10, a raspon ordinata malo veći od -2 do $-0,5$. Odgovarajuća oznaka osi apscisa je t/s , a osi ordinata $\ln \frac{c}{\text{mol/L}}$. Takav koordinatni sustav prikazan je slikom 1.8. Primijetimo da ovdje nacrtano sjecište osi nije ishodište, nego točka $(0, 2)$.



Slika 1.8: Odabir raspona na koordinatnim osima (primjer 1.57).

Zadatak 1.3.1 Pri nekom eksperimentu dobivene su sljedeće vrijednosti tlaka para etanola pri različitim temperaturama:

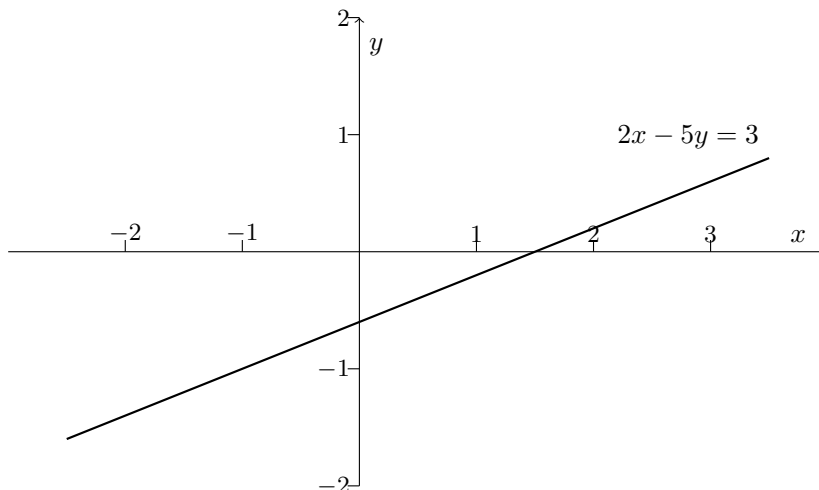
$t/^{\circ}\text{C}$	p/torr
25	55,900
30	70,000
35	93,800
40	117,50
45	154,10
50	190,70
55	241,90
60	304,15
65	377,90

Skicirajte podatke u pravokutnom koordinatnom sustavu tako da na apscisi budu temperature, a na ordinati tlakovi. Obratite pozornost na označavanje koordinatnih osi i dobro planiranje prostora.

Analitička geometrija ravnina koristi koordinate kako bi krivulje opisala pomoću jednadžbi te se odnosi među geometrijskim objektima onda mogu ispitivati i opisivati algebarski. Osim točaka, temeljni geometrijski objekti su **pravci**, neomeđene i savršeno ravne crte¹¹ koje se beskonačno protežu u oba smjera.

💡 U pravokutnom koordinatnom sustavu pravci imaju eksplicitne jednadžbe oblika $y = kx + \ell$ (ako nisu vertikalni, tj. ako nisu paralelni s osi ordinata) ili pak $x = c$, ako su vertikalni. Smisao jednadžbe pravca je da se pojedina točka ravnine nalazi ili ne nalazi na pravcu ovisno o tome zadovoljava li ili ne zadovoljava njegovu jednadžbu. Jednadžba x -osi je $y = 0$, a jednadžba y -osi je $x = 0$.

¹¹Matematički rečeno, pravci su krivulje zakrivljenosti 0.

Slika 1.9: Pravac $2x - 5y = 3$.

U pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini svaki pravac posjeduje i **implicitnu jednadžbu** oblika

$$ax + by = c,$$

gdje bar jedan od brojeva a i b nije nula. Ako je $a = 0$, pravac $ax + by = c$ je paralelan s x -osi, ako je $b = 0$ paralelan je s y -osi.

Primjer 1.58 Jednadžbi $2x - 5y = 3$ odgovara pravac kojem je to implicitna jednadžba, tj. pravac kroz točke $(0, -\frac{3}{5})$ i $(\frac{3}{2}, 0)$ (vidi sliku 1.9). Uz te dvije točke i svaka druga točka tog pravca, primjerice $(9, 3)$, je rješenje te jednadžbe. Dakle, ta jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja. No, nije svaki par (x, y) (svaka točka ravnine) njezino rješenje, primjerice par $(0, 0)$ (ishodište) ju ne zadovoljava.

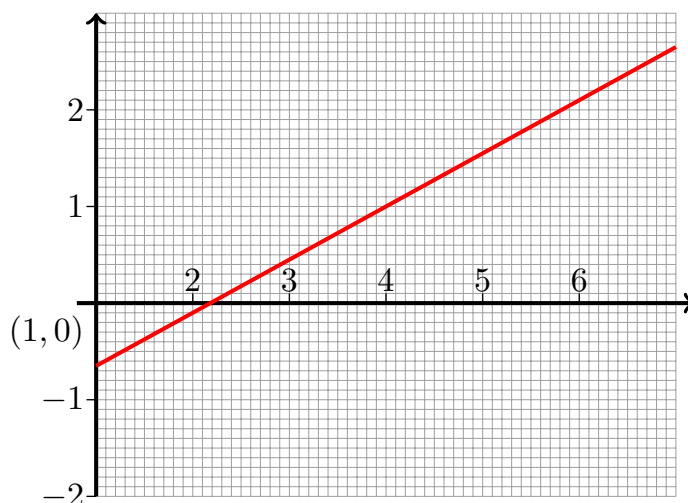
Pritom, svaki pravac je jednoznačno određen s dvije točke. Pritom, ako te dvije točke imaju istu apscisu c , jednadžba pravca je $x = c$. Inače, koeficijent smjera pravca, tj. broj k jednak količniku razlike ordinata i razlike apscisa bilo koje dvije točke na pravcu dobijemo upravo tako da podijelimo razliku ordinata s razlikom apscisa zadanih točaka (x_1, y_1) i (x_2, y_2) : $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Nakon toga jednu od njih uzimamo za (x_0, y_0) u jednadžbi pravca zadanog koeficijentom smjera k :

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0).$$

Primjer 1.59 Jednadžba pravca kroz točke $(-1, 1)$ i $(-1, 100)$ je $x = -1$.

Primjer 1.60 Jednadžba pravca kroz točke $(7, 8)$ i $(-21, -24)$ je $y = \frac{8}{7}x$. Naime, $a = \frac{8 - (-24)}{7 - (-21)} = \frac{32}{28} = \frac{8}{7}$ pa je jednadžba pravca $y - 8 = \frac{8}{7}(x - 7)$, odnosno $y = \frac{8}{7}x$.

Zadatak 1.3.2 Što preciznije odredite koeficijent smjera i slobodni član pravca prikazanog na slici 1.10.



Slika 1.10: Odredite koeficijent smjera i slobodni član!

1.4 Algebarski izrazi

Algebarske izraze smo u manjoj mjeri već koristili u prethodnim odjeljcima. Radi se o matematičkim izrazima koji uključuju osnovne računske operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, potenciranje uključivo korjenovanje), ali je barem jedan broj u njima neodređen (dakle, varijabla) i stoga označan slovom. Ako nije drugačije istaknuto, podrazumijeva se da slova u algebarskim izrazima označavaju realne brojeve. Račun s algebarskim izrazima osnova je većine izvoda pravila odnosno formula, ali i rješavanja mnogih konkretnih problema i zadataka, primjerice izračunavanja derivacija i integrala. Posebno često dobro baratanje algebarskim izrazima može bitno pojednostaviti i(li) ubrzati rješavanje raznih zadataka.

Zadatak 1.4.1 *Želite ravnu traku papira podijeliti na petine, ali nemate na raspolaganju nikakvo pomagalo za mjerenje duljine. Presavinete ju odoka i otvorite. Time je traka podijeljena na veći i manji dio. Veći dio presavijanjem prepolovite. Sad je traka podijeljena na tri dijela: Onaj prvi koji ste odoka procijenili da iznosi petinu duljine (uz početak trake) i dva jednako duga dijela. Presavijanjem prepolovite onaj od ta dva dijela koji je bliži kraju trake. Time smo dobili još jednu liniju preavijanja. Sad prepolovite dio trake od počeka do te linije i onda od početka do polovice iz prethodnog koraka. Dokažite da čak i ako Vaša početna oznaka nije bila blizu $\frac{1}{5}$ duljine trake, posljednja oznaka će biti tome jako blizu.*

Najjednostavniji algebarski izrazi su binomi i trinomi.



Binom odnosno trinom je zbroj ili razlika dvaju odnosno triju brojeva, od kojih je barem jedan neodređen.

Binomi, trinomi i općenitije izrazi koji se sastoje od više zbrojenih i(li) oduzetih članova (monoma) množe se tako da se svaki član pomnoži sa svakim,

Primjer 1.61 *Primjeri binoma su $a + b$ i $xy - 1$, a primjeri trinoma su $x + y + z$, $x - y^2 + 5$ i $1 - 2xy + \sqrt{z}$. Umnožak drugog binoma i trećeg trinoma je*

$$(xy - 1) \cdot (1 - 2xy + \sqrt{z}) = xy - 2xy^2 + xy\sqrt{z} - 1 + 2x - \sqrt{z},$$

što je zbog definicije kvadriranja i komutativnosti množenja jednako $xy - 2x^2y^2 - xy\sqrt{z} - 1 + 2x - \sqrt{z}$.

Specijalni slučaj binoma je razlika kvadrata, tj. binom oblika $a^2 - b^2$. On je jednak umnošku dva binoma:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Često je korisna i formula za kvadrat binoma (kvadrat zbroja):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Uočimo da je formula za kvadrat razlike samo specijalni slučaj prethodne formule: $(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, jer je $(-b)^2 = (-b)(-b) = (-1)b(-1)b = (-1)^2b^2 = b^2$. Kod ovakvih formula podrazumijevamo da vrijede za sve a i b za koje izrazi na obje strane imaju smisla, dakle u gornjim slučajevima za sve realne brojeve a i b .

Zadatak 1.4.2 *Dokažite formule za razliku kvadrata i kvadrat binoma algebarski i koristeći skicu 1.11.*

Formula za kvadrat binoma često se koristi za tzv. svođenje na potpun kvadrat.

Primjer 1.62

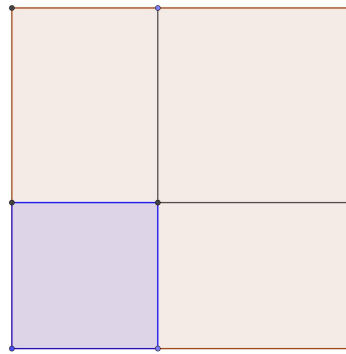
$$x + \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Uočimo da budući da polazni izraz nema smisla za negativne x , cijeli izvod je korektan za sve $x \geq 0$.

Primjer 1.63 *Izraz $(\frac{1}{x-3})^{-2}$ ima smisla za sve realne brojeve x osim za $x = 3$ jer bi tada u nazivniku bila nula. Dakle, za $x \neq 3$ imamo*

$$\left(\frac{1}{x-3}\right)^{-2} = \left(\frac{x-3}{1}\right)^2 = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9.$$

Primjer 1.64 *Umnožak $(a^2 + b^2 - 6ab)(a^2 + b^2 + 6ab)$ je umnožak dva trinoma. No, ako uočimo da je $6 = 2 \cdot 3$, on je zapravo umnožak dvaju kvadrata binoma, tj. jednak je $(a - 3b)^2(a + 3b)^2 = ((a - 3b)(a + 3b))^2 = (a^2 - (3b)^2)^2 = (a^2 - 9b^2)^2$.*



Slika 1.11: Skica za geometrijski dokaz formule za razliku kvadrata i kvadrat binoma.

Slične formulaza za razliku kvadrata i kvadrat binoma su formule za razliku kubova i kub binoma:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$



Za one koji žele znati više Uočite da su koeficijenti u formuli za kvadrat binoma redom 1, 2, 1, a u formuli za kub binoma redom 1, 3, 3, 1. To su točno drugi, odnosno treći red u Pascalovom trokutu (slika 1.4). To nije slučajno: koeficijenti u formuli za $(a + b)^n$ gdje je n bilo koji prirodan broj su prema binomnoj formuli

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

točno brojevi iz n -tog reda Pascalovog trokuta. Uočite da je zbroj eksponenata su svakom članu jednak n i pritom eksponenti od a padaju od n do 0, a od b rastu od 0 do n . Primjerice, $(1 + x)^5 = 1^5 \cdot x^0 + 5 \cdot 1^4 \cdot x^1 + 10 \cdot 1^3 \cdot x^2 + 10 \cdot 1^2 \cdot x^3 + 5 \cdot 1^1 \cdot x^4 + 1^0 \cdot x^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$. 

Zadatak 1.4.3 Objasnite grešku u sljedećem „dokazu“: Ako je $a = b$, onda je $a^2 = ab$, pa je $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Stoga je $(a - b)(a + b) = b(a - b)$ pa je $a + b = b$. Budući da je $a = b$ slijedi $2a = a$, tj. $2 = 1$.



Za one koji žele znati više Formule za kvadrat i kub binoma mogu se poopćiti na više potencije **binomnim teoremom**: Za svaki prirodan broj n vrijedi da je

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Primjerice, šesti član u razvoju binoma $(2xy - z)^8$ dobijemo za $k = 5$ i on je $\binom{8}{5} (2xy)^5 (-z)^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} 2^5 x^5 y^5 (-1)^3 z^3 = -1792 x^5 y^5 z^3$. 

Kao i množenje, tako se i dijeljenje algebarskih izraza te stoga i algebarskih razlomaka provodi po istim pravilima kao i za konkretne brojeve. Pritom je kod svakog dijeljenja treba obratiti pažnju na to da spriječimo dijeljenje s nulom. Također, kod korjenovanja algebarskih izraza, ako se radi o parnim korijenima, pojavljuje se uvjet da izraz pod korijenom ne bude negativan. Uz to treba obratiti pozornost da parni korijeni, kad imaju smisla, daju po dvije vrijednosti (osim za nulu).

Primjer 1.65

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x + 1)^2} = \pm(x + 1).$$

Zadatak 1.4.4 Za koje realne brojeve se podudaraju iznosi drugog korijena od danog broja uvećanog za 1 i istog broja umanjenog za 3?

Primjer 1.66 Zadana je jednakost

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + A^2}} = \frac{B}{1 + \frac{B}{1 + \frac{B}{\beta}}}.$$

Izrazimo β kao izraz ovisan od α , A i B . Uočimo da izvorni izraz ima smisla za $\beta \neq 0$ i $\alpha^2 + A^2 \neq 0$, tj. ako α i A nisu istovremeno nula.

Ako bi B bio jednak 0, desna strana bi bila nula, ali lijeva ne može biti nula jer dijeljenjem 1 s nikojim brojem ne dobijemo 0. Dakle, uočite da ovo nije uvjet da bi formula imala smisla već posljedica formule ako ju prihvatimo kao smislenu, sad znamo i da $B \neq 0$. To znači da možemo uzeti recipročne vrijednosti obje strane, koristeći činjenicu da je $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$:

$$\sqrt{\alpha^2 + A^2} = \frac{1 + \frac{B}{1 + \frac{B}{\beta}}}{B}.$$

Koristeći pravila o računu s razlomcima dalje imamo:

$$\sqrt{\alpha^2 + A^2} = \frac{1}{B} + \frac{\frac{B}{1 + \frac{B}{\beta}}}{B} = \frac{1}{B} + \frac{1}{1 + \frac{B}{\beta}}.$$

Jedan način da nastavimo ovaj zadatak je da svedemo i zadnji dvostruki razlomak na obični i onda izrazimo β (preporučamo da pokušate i taj način). Mi ćemo ovdje nastaviti malo drugačije: Iz zadnjeg imamo

$$\sqrt{\alpha^2 + A^2} - \frac{1}{B} = \frac{1}{1 + \frac{B}{\beta}},$$

tj.

$$\frac{1}{1 + \frac{B}{\beta}} = \sqrt{\alpha^2 + A^2} - \frac{1}{B} = \frac{B\sqrt{\alpha^2 + A^2} - 1}{B}$$

pa opet uzimanjem recipročne vrijednosti dobijemo

$$1 + \frac{B}{\beta} = \frac{B}{B\sqrt{\alpha^2 + A^2} - 1}$$

odnosno

$$\frac{B}{\beta} = \frac{B}{B\sqrt{\alpha^2 + A^2} - 1} - 1 = \frac{B - B\sqrt{\alpha^2 + A^2} + 1}{B\sqrt{\alpha^2 + A^2} - 1}$$

pa je (uzimanjem recipročne vrijednosti i nakon toga množenjem s B)

$$\beta = \frac{B^2\sqrt{\alpha^2 + A^2} - B}{B - B\sqrt{\alpha^2 + A^2} + 1} = \frac{B(B\sqrt{\alpha^2 + A^2} - 1)}{1 - B(\sqrt{\alpha^2 + A^2} - 1)}.$$

Iako smo u prethodnom primjeru naveli većinu detalja koraka, neke nismo isticali. Općenito, razumijevanje značenja simbola olakšava i ubrzava baratanje algebarskim izrazima. Primjerice, kad imate jednakost dva izraza, primjerice $L = D$, zamjena strana $D = L$ je posljedica činjenice da je jednakost simetrična (ako je prva stvar jednaka drugoj, onda je i druga stvar jednaka prvoj), a ne nepotrebne i zaobilazne algebarske manipulacije tipa množenje s -1 daje $-L = -D$ pa prebacivanje strana uz promjenu predznaka (što je u biti pribrajanje $L + D$ objema stranama) da se dobije $D = L$. Također, ako se neki izraz ponavlja u više monoma uvijek ga je moguće izlučiti zbog distributivnosti množenja prema zbrajanju i oduzimanju, npr. $AB \pm CA = A(B \pm C)$. Izraze tipa $A - B$ često je zgodnije shvatiti kao $-(B - A)$, tako smo učinili u zadnjem koraku prethodnog primjera, gdje i nazivniku nismo izlučili B nego $-B$ kako bi dobili u zagradama iste izraze gore i dolje. Dakle, često se umjesto izlučivanja

$$ab - ac = a(b - c)$$

koristi izlučivanje

$$ab - ac = -a(c - b).$$

Zadatak 1.4.5 Za kakve x i y vrijede jednakosti $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ i $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

Mnoge algebarske razlomke moguće je pojednostaviti koristeći pravila o dijeljenju **polinoma**, tj. algebarskih izraza koji su zbrojevi monoma u kojima su sve neodređene veličine potencirane isključivo na prirodne brojeve ili nulu.

Primjer 1.67 Primjeri polinoma su $2a - 5bc^3$, $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ te $yz - 7y^8 + 2$.

Više o dijeljenju polinoma ćemo reći u odjeljku ??, a ovdje pogledajmo samo dva jednostavna primjera. U prvom primjeru ćemo ponoviti kako dijelimo s monomima: Ako algebarski razlomak u nazivniku sadrži monom, ukupni razlomak možemo rastaviti na svim zbrajanjima i oduzimanju u brojniku, dijeleći pojedine članove s monomom u nazivniku.

Primjer 1.68

$$\frac{\sqrt{x} - 2x^2 + x^{-1}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{2x^2}{x} + \frac{x^{-1}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2x + \frac{1}{x^2},$$

koristeći činjenicu da „seljenje“ potencije iz brojnika u nazivnik ili obrnuto mijenja njezin predznak i da umnožak dviju potencija s istom bazom ima tu bazu na eksponent koji je zbroj eksponenata pomnoženih potencija. Naravno, gornji izvod vrijedi za $x \neq 0$ jer bez tog uvjeta već početni izraz ne bi imao smisla.

Također, ako se neki dio izraza ponavlja i u brojniku i u nazivniku, možemo ga iskoristiti za pojednostavljivanje izraza.

Primjer 1.69

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{x^2 + x + 1} &= \frac{x^3 + x^2 + x - x^2 - x}{x^2 + x + 1} = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + x + 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} = \\ &= x + \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} = x + 1 - \frac{1}{x^2 + x + 1}.\end{aligned}$$

Uočimo da ovaj izvod vrijedi za sve x jer $x^2 + x + 1$ ne može biti nula jer je jednak $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, što je zbroj nenegativnog i pozitivnog broja.

1.5 Osnove geometrije



Temeljni geometrijski pojam je točka (koja je duljine, površine i volumena 0). Svake dvije različite točke određuju jedinstven pravac kroz njih, a svake tri točke koje nisu na jednom pravcu određuju jedinstvenu ravninu koja ih sadrži. Planimetrija se bavi geometrijom ravnine, a stereometrija geometrijom prostora. Ograničeni dijelovi ravnine zovu se geometrijski likovi, a ograničeni dijelovi prostora su geometrijski likovi i geometrijska tijela.

Točke označavamo velikim slovima latinske abecede: $A, B, \dots$. Udaljenost dvije točke A i B označavamo s $|AB|$ ili s $d(A, B)$. Pravci se označavaju malim slovima latinske abecede: $p, q, \dots$. Ravnine se označavaju velikim slovima grčke abecede: $\Pi, \Sigma, \dots$

1.5.1 Elementarna planimetrija



Svake dvije točke A i B određuju točno jedan pravac (neograničenu ravnu liniju) AB . Dio pravca između točaka A i B (uključivo te dvije točke, njihova najkraća spojnica) zove se dužina $\overline{AB}$. Polupravac (zraka) je dio pravca s jedne strane od jedne točke pravca (početak polupravca). Dio ravnine između dva polupravca sa zajedničkim početkom zove se kut.

Kao što je već rečeno, dužina i duljina nisu isti pojam: **Duljina** je fizikalna veličina SI jedinice metar (m) te svaka dužina ima duljinu (jednaku $|AB|$, što je 0 ako $A = B$), no i drugi objekti (krivulje) imaju svoje duljine. Za opis veličine kuta koriste se dvije mjerne jedinice: Stupnjevi (oznaka $^\circ$, pri čemu se razlomljeni dijelovi obično izražavaju u bazi 60, tj. u minutama ' i sekundama ") i radijani (koji se poistovjećuju s čistim brojevima se tada ne piše mjerna jedinica). Mjere kutova izražene u stupnjevima i radijanima su proporcionalne, kao što su i duljine izražene u različitim mjernim jedinicama.



Dva pravca mogu biti paralelni (usporedni) (ako se nigdje ne sijeku). U suprotnom se sijeku u točki koju zovemo sjecištem pravaca. Ako je time ravnina podijeljena na četiri jednaka kuta, kažemo da su pravci okomiti, a te kutove nazivamo pravim kutevima i kažemo da oni imaju mjeru $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

Dvostruki pravi kut, dakle kut mjere

$$180^\circ = \pi,$$

zove se **ispruženi kut**. Kutovi manji od pravog kuta nazivaju se **šiljasti kutovi**, a kutovi veći od pravog kuta (i manji od ispruženog) zovu se **tupi kutovi**. Dvostruki ispruženi kut, dakle kut mjere $360^\circ = 2\pi$, zove se **puni kut**.



Iracionalni broj π definiran kao omjer opsega i promjera bilo kojeg kruga (vidi niže), a zaokružen na dvije decimale iznosi $\pi \approx 3,14$.

Budući da je π iracionalan broj, ma koliko mnogo znamenaka naveli, nijedan konačni decimalni zapis neće biti jednak broju π . Aproximacija 3,14 ili pak razlomak $\frac{22}{7}$ je dovoljno dobra za većinu problema u svakodnevici, za uobičajene znanstvene primjene razine studija obično se koristi aproksimacija 3,1415926 na sedam decimala, NASA koristi prvih 15 decimala, a s prvih 39 decimala se može izračunati opseg poznatog svemira s greškom manjom od veličine atoma vodika. Za pamćenje prvih 14 decimala može poslužiti rečenica *How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics*¹² u kojoj redom brojevi slova pojedine riječi odgovaraju iznosima znamenki.

Primjer 1.70 Kolike kutove u stupnjevima i radijanima pređu minutna i satna kazaljka analognog sata tijekom 5 minuta? Minutna kazaljka u 5 minuta pređe jednu šestinu ispruženog kuta, dakle kut od $\frac{1}{6} \cdot 180^\circ = 30^\circ$ odnosno $\frac{\pi}{6}$. Ako taj kut označimo s α , satna kazaljka u 5 minuta pređe $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ od α , dakle kut od $\frac{1}{12} \cdot 30^\circ = 2,5^\circ = 2^\circ 30'$ odnosno $\frac{1}{12} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{72}$.

Primjer 1.71 Kut mjere 1, dakle 1 radijan je malo manji od 60° . Naime, $180^\circ = \pi$ znači da je 180° malo više od 3 radijana, dakle je 1 radijan malo manje od trećine od 180° .

Kut mjere 20° je točno devetina kuta od $180^\circ = \pi$, dakle mu je mjera u radijanima $\frac{\pi}{9}$.

Svi planimetrijski objekti imaju i **površinu** (SI jedinica je kvadratni metar, m^2), no površina dužina (i pravaca i općenitijih krivulja) iznosi 0. Rub svakog geometrijskog lika je krivulja te kao takav ima duljinu koju nazivamo **opsegom**. Dok je površina lika razmjerna, primjerice, količini boje potrebne da ga (jednoliko) obojimo, opseg je razmjernan, primjerice, vremenu da prehodamo (stalnom brzinom) njegov rub.

¹²Rečenicu je osmislio Sir James Jeans (1877.–1946.), a kasnije je osmišljen nastavak *All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard, and if the lectures were boring or tiring, then any odd thinking was on quartic equations again*, za pamćenje čak 32 znamenke broja π .

💡 Uglati geometrijski likovi, točnije geometrijski likovi omeđeni dužinama, zovu se mnogokuti (poligoni). Dužine koje ih omeđuju zovu se njegovim stranicama i prema njihovom broju razlikujemo trokute, četverokute, peterokute, ... Točke u kojima se sastaju dužine koje omeđuju mnogokut zovu se njegovim vrhovima. Dužine koje spajaju dva vrha mnogokuta, a koje mu nisu stranice, zovu se dijagonale.

Stranice mnogokuta odvajaju njegovu unutrašnjost od vanjštine, a kutovi među po dvije susjedne stranice gledani s unutrašnje strane zovu se (unutrašnji) kutovi mnogokuta. Ako mnogokut ima n stranica, zbroj njegovih kutova iznosi $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

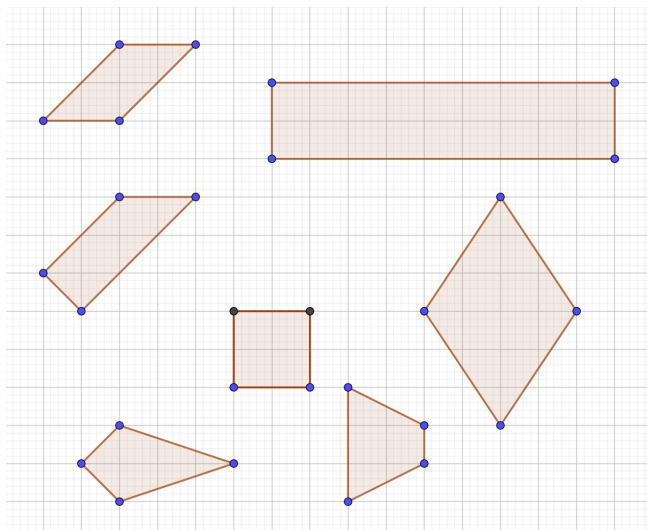
💡 Trokut ima opseg jednak zbroju duljina a , b i c njegovih stranica, a površinu $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{a v_a}{2}$ (prvu od dviju formula nazivamo Heronovom formulom), gdje je s poluopseg, a v_a duljina visine na stranicu duljine a . U svakom trokutu zbroj duljina bilo koje dvije stranice mora biti veći od duljine treće stranice.

Među trokutima se ističu pravokutni trokuti, tj. trokuti u kojima je jedan kut pravi. Budući da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak 180° , vidimo da trokut ne može imati više od jednog pravog kuta. Prema **Pitagorinom poučku**, trokut je pravokutan ako i samo ako je $a^2 + b^2 = c^2$, gdje je c duljina najdulje stranice trokuta (za pravokutan trokut ona se zove hipotenuza, dok su druge dvije stranice katete). U pravokutnim trokutima su definirane i osnovne trigonometrijske veličine, sinusi, kosinusi i tangensi: Sinus bilo kojeg ne-pravog kuta α ($\sin \alpha$) u pravokutnom trokutu je količnik duljina njemu nasuprotne katete s hipotenuzom, kosinus bilo kojeg ne-pravog kuta α ($\cos \alpha$) u pravokutnom trokutu je količnik duljina njemu priležeće katete s hipotenuzom, a tangens od α ($\tan \alpha$) je količnik sinusa i kosinusa tog kuta. Sinus i tangens pravog kuta iznose 1, a kosinus pravog kuta iznosi 0.

Primjer 1.72 Izračunajte sinus, kosinus i tangens od kutova 30° , 45° i 60° .

Još jedna važna podvrsta trokuta su jednakokračni trokuti, tj. trokuti u kojima dvije stranice imaju istu duljinu. U jednakokračnom trokutu su kutovi nasuprot tih dviju stranica jednaki. Jednakokračni trokut u kojem sve tri stranice imaju istu duljinu naziva se jednakokraničnim trokutom. U jednakokraničnom trokutu su sva tri kuta jednaka i iznose $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

💡 Četverokut koji je omeđen s po dva para paralelnih bridova zove se paralelogram. Paralelogram kojemu su svi kutovi pravi naziva se pravokutnik. Romb je četverokut kojemu su sve stranice iste duljine (svaki romb je i paralelogram). Četverokut koji je istovremeno romb i pravokutnik je kvadrat. Površina paralelograma kojemu stranice duljina a i b zatvaraju kut φ je $P = ab \sin \varphi$. Trapez je četverokut s dvije paralelne stranice (osnovice), a ako su u trapezu druge dvije stranice jednako duge, govorimo o jednakokračnom trapezu. Površina svakog trapeza jednaka je prosjeku duljina osnovica pomnožena s njegovom visinom (udaljenošću osnovica).



Slika 1.12: Primjeri četverokuta.

Zadatak 1.5.1 Koliko na slici 1.12 ima jednakokračnih trapeza, trapeza, rombova, paralelograma, pravokutnika, kvadrata?

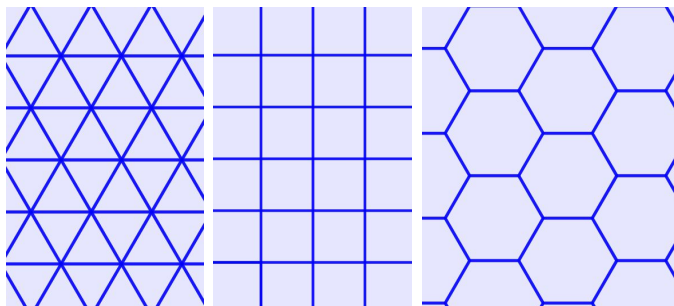
Zadatak 1.5.2 Dokažite da je duljina dijagonale kvadrata kojemu je stranica duljine a jednaka $d = a\sqrt{2}$.

Zadatak 1.5.3 List papira ima oblik kvadrata $ABCD$. Presavinemo ga popola preko dijagole AC , pa otvorimo presavinuti papir. Zatim ponovno presavinemo napola preko spojnice polovišta P i Q dviju nasuprotnih stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Ponovno otvorimo papir i sad presavinemo preko spojnice polovišta Q stranice $\overline{CD}$ s vrhom B . Otvorimo papir i uočimo sjecište S pravaca AC i QB . Presavinemo papir tako da nova linija savijanja prolazi kroz S i bude paralelna s BC . Neka ta linija savijanja siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ u točkama P' i Q' . Dokažite da je udaljenost P' do B točno trećina stranice polaznog kvadrata.

Zadatak 1.5.4 A-format papira poznat je i pod nazivom srebrni pravokutnik. Definiran je svojstvom da kad ga se prepolovi (paralelno s kraćim stranicama) dobijemo polaznom pravokutniku sličan pravokutnik. Odredite omjer duljina stranica papira A-formata!

Ako papir A-formata prepolovimo paralelno s duljom stranicom, otvorimo i jedan od vrhova spustimo na liniju savijanja tako da dobijemo novu liniju savijanja koja prolazi kroz spomenutom vrhu najbliži, dokažite da kutovi tako nastalog trokuta iznose 30° , 60° i 90° !

Primjer 1.73 Koristeći trapezno pravilo, površina geometrijskog lika $ABCD$ kod kojeg je $AB \perp BC \perp CD$, a AD neka krivulja, može se aproksimirati kao $|BC|$ (širina tog lika, tj. udaljenost točaka B i C) pomnoženo s prosjekom (aritmetičkom sredinom) od $|AB|$ i $|CD|$. Kao što ćemo naučiti u poglavlju o integralima, ako je $|AB| = 0$, $|BC| = |CD| = 3\text{ cm}$, a A je tjeme parabole kojoj je os okomita na BC i parametar jednak 1, onda je stvarna površina lika $ABCD$ jednaka 3 cm^2 , dok bi trapezno pravilo dalo površinu $4,5\text{ cm}^2$. Dakle, u tom slučaju je apsolutna greška aproksimacije površine trapeznim pravilom $1,5\text{ cm}^2$, a relativna je $\frac{15}{3} = 50\%$.



Slika 1.13: Tri pravilna popločenja ravnine.

Pravilni mnogokut je mnogokut kojemu su svi bridovi iste duljine a i svaka dva susjedna brida zatvaraju isti kut. Opseg pravilnog n -terokuta je $O = na$, a površina mu je $P = \frac{na^2}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$. Specijalno, za pravilne trokute (jednakostranične), četverokute (kvadrate), peterokute i šesterokute imamo redom sljedeće formule za njihove površine:

$$P_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, \quad P_4 = a^2, \quad P_5 = \frac{\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{4}a^2, \quad P_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Primjer 1.74 Popločenje ravnine je prekrivanje ravnine pločicama, za koje se obično uzima da imaju oblike mnogokuta, bez rupa (međuprostora) i bez preklapanja. Popločenje je pravilno ako su sve pločice sukladni pravilni mnogokuti, te ako se u svakom vrhu sastaje isti broj mnogokuta. Postoje točno tri pravilna popločenja ravnine (slika 1.13): s jednakostraničnim trokutima, kvadratima ili pak pravilnim šesterokutima. Dokažimo to!¹³

Neka je dano pravilno popločenje u kojem se u svakom vrhu sastaje po m pravilnih n -terokuta. Naravno, $m, n \geq 2$. Zbroj kutova u svakom n -terokutu je $(n-2) \cdot 180^\circ$, dakle su unutrašnji kutovi u pravilnim n -terokutima iznosa $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$. U svakom vrhu popločenja se sastaje njih m pa budući da nema rupa ni preklapanja slijedi da je $m \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = 360^\circ$, tj. $m = \frac{2n}{n-2}$. Budući da je m prirodan broj, takav mora biti i $\frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = \frac{2n-4}{n-2} + \frac{4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$. Dakle, $\frac{4}{n-2}$ treba biti prirodan broj, što je moguće samo ako je $n-2 = 1$ ili $n-2 = 2$ ili $n-2 = 6$, dakle za $n = 3, 4$ i 6 . Time je tvrdnja dokazana.

Primjer 1.75 Arhitekt Vam u vrtu želi ugraditi vrtno jezerce čiji rub je oblika pravilnog mnogokuta s najviše šest strana, ali takav da mu je površina u kvadratnim metrima jednaka opsegu u metrima. Može li se takav park projektirati? Za koje brojeve stranica? Za one koji su izvedivi, odaberite jezerce najmanje površine.

Neka je n broj stranica vrtnog jezera i a duljina njegove stranice podijeljena s metrom.

- Ako je $n = 3$, moralo bi vrijediti $3a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, dakle $a = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. Dakle, moguće je da park bude jednakostraničan trokut površine $12\sqrt{3}$ kvadratnih metara.

¹³Najstariji sačuvani dokaz ove tvrdnje je u djelu *Harmonice mundi* (1619.) J. Keplera.

- Ako je $n = 4$, moralo bi vrijediti $4a = a^2$, dakle $a = 4$. Dakle, moguće je da park bude kvadrat površine 16 kvadratnih metara.
- Ako je $n = 5$, moralo bi vrijediti $5a = \frac{\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{4}a^2$, dakle $a = \frac{20}{\sqrt{5(2+\sqrt{5})}} = 4\sqrt{5(\sqrt{5}-2)}$. Dakle, moguće je da park bude jednakostraničan trokut površine $20\sqrt{5(\sqrt{5}-2)}$ kvadratnih metara.
- Ako je $n = 6$, moralo bi vrijediti $6a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, dakle $a = \frac{4}{\sqrt{3}} = 4\frac{\sqrt{3}}{3}$. Dakle, moguće je da park bude jednakostraničan trokut površine $24\frac{\sqrt{3}}{3}$ kvadratnih metara.

Imamo $12\sqrt{3} > 16$ jer kvadriranje daje $3 \cdot 144 > 256$. Također, $20\sqrt{5(\sqrt{5}-2)} > 16$ jer prvo kvadriranje daje $2000(\sqrt{5}-2) > 256$, a to vrijedi jer je $2 < \sqrt{5} < 3$, a Heronovim algoritmom za $\sqrt{5}$ s početnom aproksimacijom 2 u prva dva koraka dobijemo 2,25 i 2,23..., dakle $\sqrt{5} \approx 2,2$. No, $24\frac{\sqrt{3}}{3} < 16$ jer kvadriranje desne strane daje opet 256, a lijeve $\frac{576}{3} < 256$. Dakle, arhitekt će planirati jezerce oblika pravilnog šesterokuta i stranice duljine $4\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2,3094$ m.



Kružnica je krivulja u ravnini koja se sastoji od svih točaka koje su na istoj udaljenosti (polumjeru r) od jedne točke (središta). Promjer kružnice je maksimalni razmak dvije točke na njoj: $d = 2r$. Krug je kružnica skupa sa svojom unutrašnjosti. Opseg kruga i kružnice je $O = 2r\pi$. Duljina luka kružnice ako je odgovarajući središnji kut φ iznosi $l = r\varphi$. Kružnica ima površinu 0, a krug ima površinu $P = r^2\pi$. Dužina koja spaja dvije točke kružnice je njezina tetiva. Dio kruga između dva polumjera zove se kružni isječak, a dio kruga između neke tetive i rubne kružnice zove se kružni odsječak. Središnji kut u krugu ili kružnici je kut između dva njezina polumjera. Za danu tetivu, pripadni središnji kut je dvostruko veći od bilo kojeg obodnog kuta nad tom tetivom. Specijalno, prema Talesovom teoremu, obodni kut nad promjerom je pravi. Dva kruga ili dvije kružnice s istim središtem zovu se koncentrične. Dio ravnine između dviju koncentričnih kružnica zove se kružni prsten.

Primjer 1.76 Površina kruga je razmjerna kvadratu njegova polumjera, ali ne i njegovom polumjeru. No, opseg je kruga je razmjeran njegovom polumjeru.

Zadatak 1.5.5 Dokažite: Ako u kružnom dijagramu želimo nacrtati isječak koji predstavlja udio od $p\%$, odgovarajući središnji kut iznosi točno $p \cdot 3,6^\circ$.

Zadatak 1.5.6 Ispravite matematičke greške u vijesti <https://www.24sata.hr/sport/znete-li-cemu-sluzi-polukrug-na-rubu-kaznenog-prostora-evo-u-kojem-sluzi>

Zadatak 1.5.7 Koliki udio površine većeg kruga pokriva kružni prsten između dviju kružnica od kojih veća ima dvaput veći promjer od manje.

Općenito vrijedi zapamtiti: Ako neka formula nema dimenziju duljine, onda sigurno ne predstavlja opseg ikogjeg lika. Analogno vrijedi za površinu (i volumene i bilo koje druge fizikalne veličine).

Primjer 1.77 Zapisati formulu za površinu kruga u obliku πr znači učiniti puno značajniju i fundamentalnu grešku, nego zapisati formulu za površinu jednakokraničnog trokuta u obliku $\frac{3}{4}a^2$. U prvom slučaju imamo broj pomnožen s duljinom, dakle što god da predstavlja πr , to ne može biti površina ičega jer ima dimenziju duljine. U drugom slučaju smo doduše koeficijent proporcionalnosti između površine jednakokraničnog trokuta i površine kvadrata nad njegovom stranicom zabunom zapisali kao $\frac{3}{4}$ umjesto $\frac{\sqrt{3}}{4}$, što doduše ima relativnu grešku od otprilike 73 %, ali barem sama formula predstavlja neku površinu.

Zadatak 1.5.8 Odredite relativne greške izračunavanja površine kruga promjera d kao $3,14 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$ te staroegipatskim postupkom u kojem se površina kruga računa kao površina kvadrata kojemu je stranica $\frac{8}{9}d$.

Primjer 1.78 Slažete kovanice od jednog eura (promjer im je 23,25 mm) na veliki stol i to što gušće, dakle tako da između njih ostane što manje neprekrivenog prostora, ali opet bez da se ikoje dvije kovanice preklapaju. Znae da je Fejes Tóth 1940./42. dokazao da je najgušće pakiranje ono u kojem svaku kovanicu dodiruje njih šest, pri čemu središta tih šest čine vrhove pravilnog šesterokuta, vidi sliku 1.14.

Koliko iznosi prazna površina između takvih šest kovanica i jedne središnje oko koje su raspoređene? Ako znamo da je gustoća čitavog pakiranja jednaka omjeru prekrivene i sve površine u bilo kojem jednakokraničnom trokutu čiji vrhovi čine sredine triju susjednih novčića, koliko iznosi gustoća tog najgušćeg pakiranja?

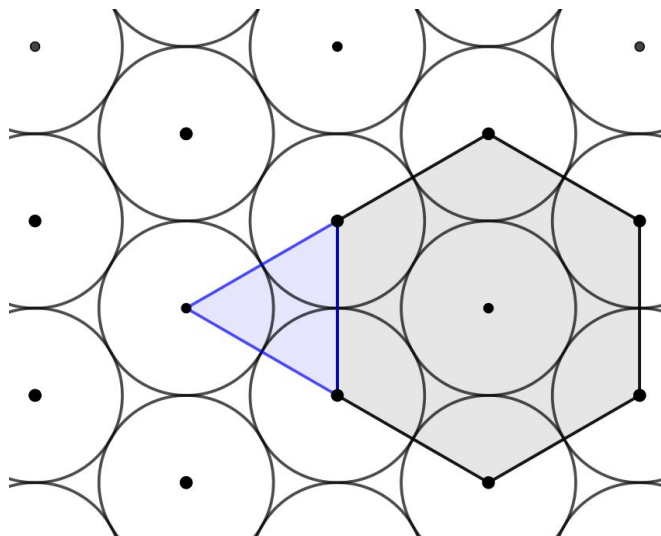
Očigledno je tražena površina jednaka površini između triju susjednih krugova promjera $d = 23,25$ cm. Pogledajmo jednakokranični trokut kojeg tvore središta tih triju krugova (plavo na slici 1.14). Njegove stranice su točno duljine d , dakle mu je površina $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$. Od te površine krugovi pokrivaju tri svoja isječka sa središnjim kutovima 60° , dakle točno pola jednog kruga, odnosno $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{8}d^2$. Dio između stoga ima površinu jednaku razlici tih dviju površina te je stoga tražena površina

$$6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}d^2 - \frac{\pi}{8}d^2 \right) = \frac{6\sqrt{3} - 3\pi}{4} \cdot 23,25^2 \text{ cm}^2 = 1,308 \text{ cm}^2.$$

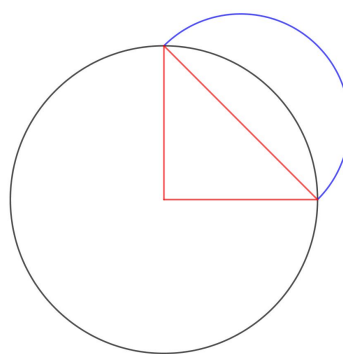
Također, iz prethodnog računa vidimo da je gustoća najgušćeg pakiranja sukladnih krugova jednaka

$$\frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90,69 \, \%.$$

Primjer 1.79 Pokušavajući riješiti znameniti problem kvadrature kruga, Hipokrat s Hiosa je u 5. st. pr. Kr. konstruirao je određene likove koji su kasnije dobili naziv Hipokratovi mjeseci. Prvi Hipokratov mjesec je lik omeđen lukovima polukružnice nad hipotenuzom (plavo na slici 1.15) jednakokračnog pravokutnog trokuta (crveno) i tom trokutu opisane kružnice (crno). Hipokrat je dokazao da takav mjesec uvijek ima istu površinu kao trokut temeljem kojeg je nastao.



Slika 1.14: Skica uz primjer 1.78

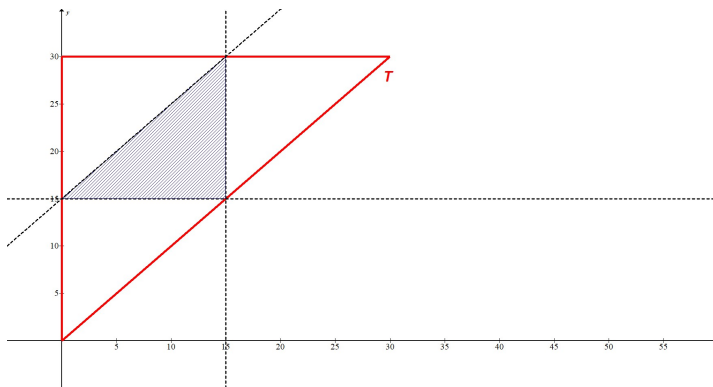


Slika 1.15: Prvi Hipokratov mjesec

Uočimo prvo da prema Pitagorinom poučku kvadrat nad hipotenuzom (promjerom plave kružnice) ima dvostruko veću površinu nego katetom trokuta (polumjerom od crne kružnice). Budući da je polumjer pola promjera, to znači da je kvadrat nad hipotenuzom pola kvadrata nad promjerom crne kružnice. Budući da se površine krugova odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima, što je Hipokrat znao iako još nije znao modernu formulu za površinu kruga, slijedi da se površina kruga nad hipotenuzom prema površini kruga omeđenog crnom kružnicom isto odnosi kao 1 : 2, pa se tako odnose i odgovarajući polukrugovi.

Stoga polukrug nad hipotenuzom ima jednaku površinu kao isječak koji je četvrtina kruga omeđenog s crnom kružnicom. Površina mjeseca je očito zbroj površina trokuta i polukruga nad hipotenuzom umanjena za spomenuti isječak, pa slijedi da prvi Hipokratov mjesec ima jednaku površinu kao trokut kojim je određen.

Zadatak 1.5.9 Prvi Hipokratov mjesec je negdje na prijelazu 10. na 11. st. poopćio arapski matematičar Ibn Al-Hajtam, poznat i kao Alhazen. On je pokazao da za svaki



Slika 1.16: Skica uz primjer 1.80

pravokutni trokut vrijedi da ako mu opišemo kružnicu te nacrtamo kružnice kojima su promjeri katete tog trokuta, onda je zbroj površina tako nastalih dvaju mjesecolikih likova jednak površini polaznog pravokutnog trokuta. Dokažite da je Alhazen bio u pravu.

U nekim slučajevima se koristeći geometriju mogu računati i vjerojatnosti događaja kod kojih slučajni pokus ima beskonačno mnogo elementarnih događaja. To je slučaj kad vjerojatnosni prostor možemo poistovjetiti s nekim geometrijskom krivuljom, likom ili tijelom, a događaj onda shvatimo kao njegov podskup. Tražena vjerojatnost je onda količnik duljina, površina odnosno volumena koji odgovaraju samom događaju i vjerojatnosnom prostoru. Ovakav pristup je poznat kao **geometrijska vjerojatnost**.

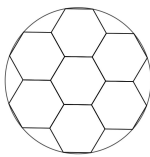
Primjer 1.80 Vili Šeptrlji je ispao njezin stakleni čarobni štapić duljine 30 cm i prelomio se na dva mjesta. Kolika je vjerojatnost da ta tri dijela vila može složiti u trokut?

Uzmimo da je mjera duljine fiksirana kao centimetar. Neka su u odnosu na jedan kraj pozicije lomova x (pozicija loma bliža tom kraju) i y (centimetara). Naravno, $0 < x < y < 30$. Stoga u Kartezijevom koordinatnom sustavu vjerojatnosni prostor, odnosno sve moguće lomove, možemo poistovjetiti s trokutom s vrhovima $(0,0)$, $(0,30)$ i $(30,30)$ (pri čemu rub nije uključen u moguće ishode, ali rub ima površinu nula pa to ne mijenja površinu trokuta), tj. crveni trokut T na slici 1.16.

Duljine dobivenih dijelova štapića su x , $y - x$ i $30 - y$. Da bi se iz njih mogao složiti trokut, zbroj svake dvije mora biti dulji od treće: $x + y - x > 30 - y$, $y - x + 30 - y > x$ i $x + 30 - y > y - x$, odnosno $y > 15$, $x < 15$ i $x + 15 > y$. Dakle, od T za naš događaj povoljan je onaj dio u kojem je $y > 15$ i $x < 15$ i ujedno ispod pravca $y = x + 15$ (šrafirani dio na slici 1.16). Očigledno je površina tog dijela jednaka četvrtini površine od T , dakle je tražena vjerojatnost $\frac{1}{4} = 25\%$.

Zadatak 1.5.10 S kolegom koji živi u istom kvartu kao Vi ste se dogovorili da ćete na fakultet ići tramvajem, po mogućnosti skupa, s iste tramvajske stanice. Da biste na vrijeme stigli na predavanje u 8 sati morate „uloviti“ tramvaj koji s vaše stanice kreće između 7 : 00 i 7 : 20 sati te ćete oboje sigurno stići na stanicu unutar tog vremena.

Uz pretpostavku da ZET-ovi tramvaji stižu na stanicu nasumično, ali uniformno (dakle, svako vrijeme je jednako vjerojatno) i ako ste se dogovorili da jedan na drugog



Slika 1.17: Skica uz zadatak ??

čekate najviše 5 minuta, pokažite da je vjerojatnost da ćete stvarno skupa ići na predavanje jednaka $\frac{7}{16}$.

1.5.2 Elementarna stereometrija

Osnovni geometrijski objekti u stereometriji su točke i pravci te ravnine. Uz njih se naravno i svi planimetrijski objekti mogu razmatrati kao objekti u prostoru. Dodatno, važni geometrijski objekti u prostoru su geometrijska tijela. Osnovna svojstva geometrijskih objekata u prostoru su oplošje i volumen. Krivulje, uključivo pravaca i duljina, imaju i oplošje i volumen jednak nuli. Za geometrijske likove vrijedi da su im oplošja jednaka površini, a volumen im je nula.

💡 Geometrijska tijela su ograničeni objekti u prostoru koji imaju volumen veći od nule. Rub geometrijskog tijela naziva se njegovom plohom. Oplošje geometrijskog tijela je površina njegove plohe. Uglata geometrijska tijela, tj. tijela omeđena mnogokutima, zovu se poliedri. Mnogokuti koji omeđuju poliedar zovu se njegovim stranama, ali se često koristi i izraz plohe poliedra. Po dvije susjedne strane poliedra se dodiruju u bridu, a krajevi bridova su vrhovi poliedra.

Zadatak 1.5.11 *Mogu li se u nekom vrhu nekog poliedra sastati točno dvije strane? Koji je najveći zbroj kutova strana koje se sastaju u nekom vrhu poliedra?*

Zadatak 1.5.12 *Zašto je ikona prikazan na slici 1.17 loš prikaz nogometne lopte?*

Dva pravca u prostoru mogu biti paralelni ili se sjeći (u oba ta slučaja određuju točno jednu ravninu), ali mogu biti i mimoilazni (mimosmjerni), tj. ne sjeći se bez da budu paralelni. Pravac može ležati u nekoj ravnini, može ju sjeći u jednoj točki (probodištu) ili pak može biti paralelan ravnini. Dvije ravnine mogu biti paralelne, a ako to nisu, onda se sijeku duž jednog pravca (presječnice ravnina).

Primjer 1.81 *Zadani su ravnina Σ te jedna točka A u njoj i jedna točka T izvan te ravnine. Neka je $p = AT$, a q bilo koji drugi pravac koji prolazi kroz T i neka je B probodište q sa Σ . Tada da p i q leže u jednoj ravnini jer nisu isti pravci, a imaju zajedničku točku T pa se sijeku i stoga određuju ravninu Π . Ta ravnina siječe Σ duž pravca AB jer sadrži i točku A i točku B pa mora sadržavati i čitav pravac AB , a pritom očito nije jednaka ravnini Σ jer sadrži točku T koja nije u Σ .*

 Prizma (n -terostrana) je poliedar omeđen s dva paralelna i sukladna n -terokuta (baze prizme) i n pravokutnika (pobočki prizme) kojima su po dva nasuprotna brida međusobno odgovarajući bridovi baza. Razmak baza je visina h prizme. Prizma je uspravna ako su pobočke okomite na baze. Prizma je pravilna ako je uspravna i ako su joj baze pravilni mnogokuti. Uspravna četverostrana prizma kojoj su sve strane pravokutnici zove se kvadar. Ako su a , b i c duljine bridova kvadra, on ima oplošje $P = 2(ab + bc + ca)$, a volumen $V = abc$. Kvadar kojemu su svi bridovi iste duljine a zove se kocka.

Zadatak 1.5.13 Izvedite formule za volumen i oplošje kocke te za duljinu njezine prostorne dijagonale.

Dok će se s povećanjem odnosno smanjenjem volumena često (primjerice, za kocke) povećavati odnosno smanjivati i oplošje tijela određenog tipa (oprez, u pravilu tu nemamo proporcionalnost!), to ne mora uvijek vrijediti. U nekim slučajevim smanjenje volumena ide paralelno s povećanjem oplošja, primjerice kod vrlo poroznih objekata.

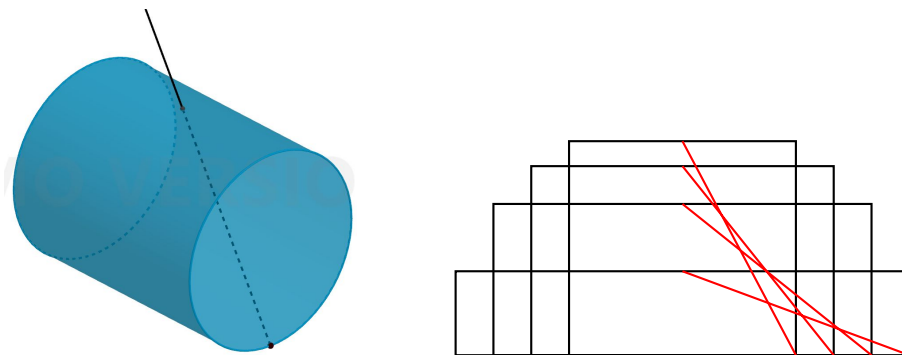
Primjer 1.82 Krećemo od kocke s bridom duljine 9 cm. Razrežemo ju na 27 jednakih kockica s bridovima duljine 3 cm te odbacimo srednju kockicu te srednje kockice na svakoj od 6 strana polazne kocke. Koliki je volumen i oplošje ostatka? Ako svaku od preostalih kockica ponovno podijelimo na isti način te opet odbacimo kockice u sredini svake i u sredini svake strane svake kockice, koliki su sad volumen i oplošje ostatka?¹⁴

Polazna kocka ima volumen $9^3 \text{ ml} = 729 \text{ ml}$. Kockice iz prvog koraka imaju volumene $3^3 \text{ ml} = 27 \text{ ml}$, a kockice iz drugog koraka volumene $1^3 \text{ ml} = 1 \text{ ml}$. U prvom koraku smo od polazne kocke odbacili $6 + 1 = 7$ kockica, dakle je volumen nakon prvog koraka $V_1 = (729 - 7 \cdot 27) \text{ ml} = 540 \text{ ml}$. Iz svake od preostalih $27 - 7 = 20$ kockica nakon prvog koraka smo izbacili po 7 kockica, dakle ukuno $20 \cdot 7 = 140$ kockica volumena 1 ml, pa je volumen nakon drugog koraka $V_2 = (540 - 140) \text{ ml} = 400 \text{ ml}$.

Polazna kocka ima oplošje 486 cm^2 . U prvom koraku izgubi šest puta po 9 cm^2 , ali sa svakim od šest „tunela“ dobije po $4 \cdot 9 \text{ cm}^2$. Dakle, oplošje nakon prvog koraka je $(486 - 6 \cdot 9 + 6 \cdot 4 \cdot 9) \text{ cm}^2 = 648 \text{ cm}^2$. Za vježbu prepuštamo čitaocu da pokaže da je oplošje nakon drugog koraka jednako 1056 cm^2 , a ovdje kao poantu ovog zadatka ističemo da se vidi da je moguće da se određenim postupkom volumeni smanjuju, a pritom oplošja povećavaju.

 Valjak (kružni) je geometrijsko tijelo koje možemo opisati kao prizmu s kružnim bazama, a ako je uspravan možemo ga opisati i kao rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice. Oplošje uspravnog valjka kojemu je visina h i polumjer baze r je $P = 2r\pi(r + h)$. Volumeni prizmi i valjaka su $V = Bh$, gdje je B površina jedne baze.

¹⁴Nastavljanjem ovog postupka u beskonačnost dobivamo fraktal poznat pod nazivom Mengerova spužva, koja ima volumen 0, ali beskonačno oplošje. O tom više u poglavlju o nizovima u Matematici 2.



Slika 1.18: Keplerov problem bačve.

Primjer 1.83 Dok oplošje tijela odgovara količini boje koju trebamo da ga jednoliko obojimo, volumen odgovara količini teućine koju možemo uliti u njega. Uzmimo dvije (otvorene) konzerve oblika valjka, zanemarive debljine stijenki. Obje imaju i promjer i visinu od točno 10 cm. Jedan robot boji prvu (samo izvana) brzinom od $1 \text{ cm}^2/\text{s}$, a drugi robot u drugu ulijeva vodu brzinom od 1 ml/s . Oba rade dok konzerva nije do kraja obojena odnosno napunjena. Koji robot će brže biti gotov s poslom?

Oplošje otvorene konzerve je $r^2\pi + 2r\pi \cdot h = \frac{\pi}{4}d^2 + dh\pi = \frac{5\pi}{4} \cdot 100 \text{ cm}^2 = 125\pi \text{ cm}^2$, pa za bojanje prvom robotu treba $125\pi \text{ s}$.

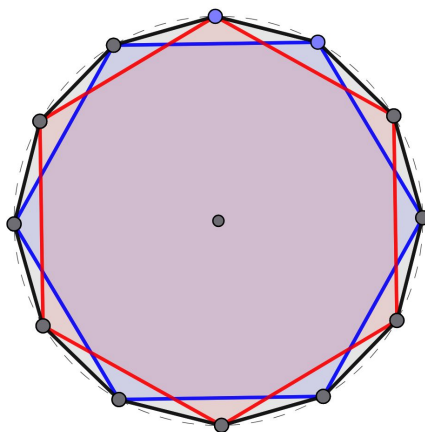
Volumen konzerve je $r^2\pi \cdot h = \frac{\pi}{4}d^2h = \frac{\pi}{4} \cdot 1000 \text{ ml} = 250\pi \text{ ml}$. Dakle, drugom robotu će trebati dvaput više vremena za napuniti konzervu nego prvi za obojat ju.

Primjer 1.84 Godine 1613., Johannes Kepler se u gradu Linzu ženio po drugi puta. Za svadbu je kupovao bačvu vina, no pri kupnji mu se čudnom učinila metoda kojom je trgovac određivao cijenu vina: Cijenu je doduše uzimao kao razmjernu volumenu, ali volumen je određivao pomoću štapa kojeg je provukao kroz rupu u sredini ruba bačve, dok ne dotakne jedan od kružnih krajeva na suprotnoj strani te zatim izmjerio koliko je dug mokri dio štapa. Dakle, cijena bačve je bila razmjerna duljini mokrog dijela štapa. Kepler je primijetio da mokri dio štapa može biti jednako dug za bačve različitih volumena (slika 1.18). Nađimo dimenzije konkretnih triju različitih bačvi, čiji oblik aproksimiramo — kao i Kepler — koje imaju različite volumene, a da je pritom duljina mokrog dijela štapa točno 1 m.

Volumen svake bačve je $V = r^2\pi h = \frac{\pi}{4}d^2h$. Prema slici 1.18 i Pitagorinom poučku vidimo da je za svaku bačvu $d^2 = 1 \text{ m}^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$. Dakle, za sve bačve za koje mokri dio štapa ima duljinu 1 m je

$$V = \frac{\pi}{4}h \left(1 \text{ m}^2 - \frac{h^2}{4}\right).$$

Uzmemo li recimo redom $h = 0,2 \text{ m}$, $0,4 \text{ m}$ i $0,8 \text{ m}$ dobit ćemo tri različita volumena $\frac{99\pi}{2000} \text{ m}^3$, $\frac{12\pi}{125} \text{ m}^3$ i $\frac{21\pi}{125} \text{ m}^3$, za koja bi Kepler u opisanoj situaciji platio istu cijenu. Tražene dimenzije tih triju bačvi su onda $h = 0,2 \text{ m}$ i $d = \frac{3\sqrt{11}}{10} \text{ m}$, $h = 0,4 \text{ m}$ i $d = \frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ m}$ i $h = 0,8 \text{ m}$ i $d = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ m}$.



Slika 1.19: Tlocrt pravilne šesterostrane antiprizme

💡 Piramida (n -terostrana) s vrhom V je poliedar omeđen jednim mnogokutom (bazom piramide, pri čemu ravnina baze ne sadrži V) i trokutima kojima su bridovi po jedan brid baze i spojnice V s njegovim krajevima. Visina piramide je duljina spojnice V s probodištem P okomice iz V na bazu. Trostrane piramide nazivaju se tetraedrima. Pravilna piramida je piramida kojoj je baza pravilni mnogokut i za koju je P središte baze. Stožac (kružni) možemo opisati kao piramidu s kružnom bazom, odnosno kao geometrijsko tijelo omeđeno jednim krugom i spojnica (izvodnicama stoča) svih točaka njegove rubne kružnice s točkom izvan ravnine tog kruga. Oplošje uspravnog kružnog stočca polumjera baze r i visine h je $P = r \pi (r + \sqrt{h^2 + r^2})$. Volumeni piramida i kružnih stožaca su trećina volumena prizmi odnosno valjaka iste površine baze B i iste visine h : $V = \frac{1}{3} B h$.

Zadatak 1.5.14 *Usporedite:*

- volumene kocke i stošca (kojemu su promjer i visina jednaki) koje oboje imaju oplošje jednako $(16 + 8\sqrt{5})\pi \text{ cm}^2$.
- oplošja valjka u kojem je kroz sredinu probušena valjkasta rupa (pri čemu je polumjer rupe točno pola polumjera valjka, a potonji je jednak visini valjka) i kvadratne piramide koji oboje imaju volumen $6\pi L$.

Zadatak 1.5.15 Molekula SF_4 ima geometriju tzv. klackalice, što znači da je atom sumpora s četiri atoma fluora vezan tako da dva atoma fluora nalaze u pozicijama vrhova jednakostraničnog trokuta kojemu je pozicija atoma sumpora središte, a preostala dva su u vrhovima pravilne trostrane bipiramide kojoj je spomenuti trokut baza. Pretpostavimo statičnu, prosječnu geometriju u kojoj su veze sumpora i fluora u bazi duljine 154,2 pm, a veze s druga dva atoma fluora duljine 164,3 pm. Izračunajte udaljenosti između svaka dva atoma fluora!

Primjer 1.85 Antiprizme su poliedri definirani kao prizme, samo su baze jedna u odnosu na drugu zaokrenute za n -ti dio punog kuta te su povezane nizom jednakostraničnih trokuta čije osnovice su naizmjenično bridovi donje i gornje baze. Izračunajmo oplošje pravilne šesterostrane antiprizme kojoj svi bridovi imaju duljinu 2 cm. Koliko joj iznosi visina?

Pravilna šesterostrana prizma sa svim bridovima duljine a omeđena je s dva pravilna šesterokuta površine $P_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ te dvaput po šest, tj. dvanaest, jednakostraničnih trokuta površine $P_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Stoga je traženo oplošje:

$$P = 2P_6 + 12P_3 = 3\sqrt{3}a^2 + 3\sqrt{3}a^2 = 6\sqrt{3}a^2 = 24\sqrt{3}\text{ cm}^2 \approx 41,57\text{ cm}^2.$$

Uočite bi da ranija aproksimacija $P_6 \approx 10,39\text{ cm}^2$ i $P_3 \approx 1,732\text{ cm}^2$ dala oplošje $P \approx 41,56\text{ cm}^2$, s greškom reda veličine 10^{-2} .

Za određivanje visine h prvo razmotrimo tlocrt antiprizme prikazan na slici 1.19. Središte na toj slici je tlocrt oba središta baza i h je njihov razmak kojeg tražimo. Uočimo da je središte svake od baza od vrhova te baze udaljeno za a (zašto?). Nadalje, udaljenost središta jedne baze do projekcije pojedinog od vrhova druge baze na ravninu prve baze je isto $a = 2\text{ cm}$ (zašto?). Cilj nam je primijeniti Pitagorin poučak. Jedan moguć pravokutni trokut koji uključuje h bio bi trokut kojeg čine oba središta baza i jedan vrh; u tom slučaju morali bismo računati udaljenost središta pojedine baze do vrha druge baze da dobijemo duljinu hipotenuze. Račun je lakši ako pravokutni trokut biramo ovako: Uzmimo jedan vrh A i jedan vrh B koji je s njime bridom povezan, ali leži u drugoj bazi. Neka je A' projekcija A na ravninu druge baze. Tada je AA' okomito na drugu bazu pa je $h = |AA'|$. Također, trokut $AA'B$ je pravokutan s pravim kutom pri vrhu A . Hipotenuza mu je $\overline{AB}$ duljine a . Dakle, treba nam još duljina katete $\overline{A'B}$, koju lako odredimo koristeći skicu 1.19: ona iznosi $a\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ (pokažite to!). Sad je prema Pitagorinom poučku

$$h^2 + a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a^2,$$

iz čega lako izračunamo h (izračunajte ga!).

Napomenimo ovdje da je volumen pravilne šesterostrane antiprizme sa svim bridovima duljine a iznosi $V = \sqrt{2 + 2\sqrt{3}}a^3$. Jedan od načina kako to pokazati je sljedeći: Neka je S središte antiprizme. Spojimo ga sa svim vrhovima, čime smo antiprizmu rastavili na dvije pravilne šesterostrane piramide visine h i brida a , te dvanaest pravilnih trostranih prizmi s bridom a i nepoznate visine v . Volumen prve dvije piramide su $V_6 = \frac{h}{3}P_6$, a volumen ostalih su $V_3 = \frac{v}{3}P_3$. Dakle, treba nam v , koji je udaljenost S do pobočki. No, izračun v je dosta zahtjevan ako koristimo čisto elementarne tehnike, dok postaje bitno jednostavniji koristeći analitičku geometriju prostora i algebru vektora te ćemo ga izračunati tek u odgovarajućem poglavlju u Matematici 2.

Zadatak 1.5.16 Rompski dodekaedar je geometrijsko tijelo koje je otkrio J. Kepler, a omeđen je s 12 sukladnih rombova. Možemo ga dobiti i na sljedeći način: Krenemo od kocke i na svakoj njenoj strani konstruiramo kvadratni piramidu čija visina je točno pola stranice kocke. Dokažite da tako stvarno dobijemo tijelo čije strane su rombovi, izračunajte kutove u tim rombima i dokažite da tako dobiveni rompski dodekaedar ima točno dvaput veći volumen od polazne kocke.



Platonova tijela (pravilni poliedri) su poliedri kojima su sve strane međusobno sukladni pravilni mnogokuti pri čemu se u svakom vrhu sastaje isti broj strana. Postoji pet Platonovih tijela: pravilni tetraedar (omeđen s četiri pravilna, tj. jednakostranična trokuta), kocka (pravilni heksaedar), pravilni oktaedar (omeđen s osam jednakostraničnih trokuta), pravilni dodekaedar (omeđen s 12 pravilnih peterokuta) i pravilni ikozaedar (omeđen s 20 jednakostraničnih trokuta).

Primjer 1.86 Drvodjelja iz dviju drvenih kocki čiji bridovi su duljine a izrezuje trostrane piramide. Iz jedne kocke izrezat će pravilni tetraedar čiji bridovi su dijagonale strana (ploha) kocke, a vrhovi su mu četiri od osam vrhova kocke. Iz druge kocke će izrezati piramidu takvu da je njezin vrh u jednom vrhu A kocke, a vrhovi baze te piramide su u središtima triju strana (ploha) kocke koje ne sadrže vrh A . Izračunajte omjer volumena tih dviju piramida.

U izračunima se očito pojavljuju jednakostranični i jednakokračni trokuti, njihove visine i površine, pa ako ne znamo napamet, prvo treba (koristeći Pitagorin poučak) izvesti formule:

- Jednakostranični trokut sa stranicom duljinu x ima visinu duljine $h = x \frac{\sqrt{3}}{2}$ i površinu $P = x^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$;
- jednakokračni trokut s osnovicom duljine x i krakovima duljine y ima visinu na osnovicu duljine $h = \frac{1}{2} \sqrt{4y^2 - x^2}$ i površinu $P = \frac{x}{4} \sqrt{4y^2 - x^2}$.

Visina pravilnog tetraedra prolazi kroz jedan njegov vrh i težište nasuprotne strane, a ono težišnicu (koja je za jednakostranični trokut isto što i njegova visina) dijeli u omjeru $2 : 1$ pa je (vidi sliku na prethodnoj strani gore lijevo) visina pravilnog tetraedra $v = \sqrt{b^2 - \frac{4}{9}h^2} = \sqrt{b^2 - \frac{12}{36}b^2} = b \frac{\sqrt{6}}{3} = a \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Stoga mu je volumen

$$V_1 = \frac{1}{3}v B_1 = \frac{a^3}{3}.$$

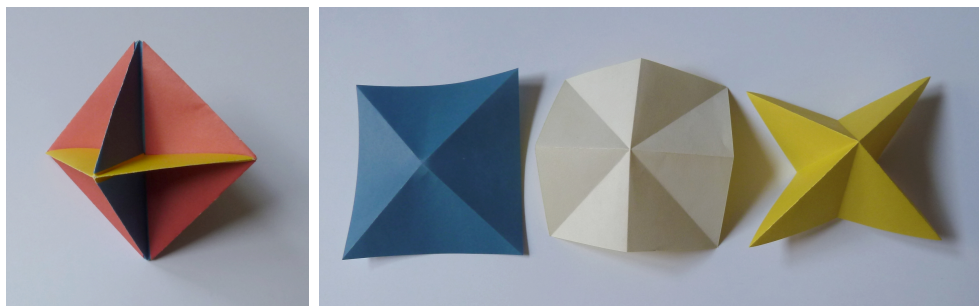
Za drugu piramidu imamo (vidi sliku na prethodnoj strani gore desno) da joj je baza jednakostranični trokut s bridom duljine b , a pobočke su joj jednakokračni trokuti s osnovicom duljine b i krakovima duljine c . S obzirom na pozicije vrhova baze u odnosu na kocku vidimo da je $b = a \frac{\sqrt{2}}{2}$ pa je površina baze $B_2 = a^2 \frac{\sqrt{3}}{8}$. Budući da je baza jednakostranična, visina v ove piramide iz vrha A prolazi kroz težište baze koje težišnicu duljine $h = a \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{\sqrt{6}}{4}$ dijeli u omjeru $2 : 1$ pa je po Pitagorinom poučku $v = \sqrt{\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$. Stoga je volumen druge piramide

$$V_2 = \frac{1}{3}B_2v = \frac{1}{12}a^3.$$

Dakle, omjer volumena je

$$V_1 : V_2 = \frac{1}{3} : \frac{1}{12} = 4 : 1.$$

Zadatak 1.5.17 U kontekstu prethodnog zadatka izračunajte omjer oplošja dviju piramida.



Slika 1.20: Origami model skeletalnog oktaedra.

Primjer 1.87 *Dijamant kristalizira u kubičnom sustavu te se jedinična ćelija dijamanta može odabrati kao kocka brida $a = 3,567 \text{ \AA}$. Pritom se radi o tzv. plošno centriranoj jediničnoj ćeliji (FCC), što znači da možemo odabrati ćeliju tako da su jezgre četiri atoma ugljika u njezinim vrhovima i još šest po jedan u središtu svake strane. Dodatno, još tri atoma ugljika se nalazi u tri od središta šest pravilnih tetraedara koji su određeni s po jednim vrhom i tri susjedna središta strana (dokažite da se stvarno radi o pravilnim tetraedrима), pri čemu su ta tri atoma raspoređeni kao vrhovi jednakostraničnog trokuta. Izračunajte sve udaljenosti po dva najbliža ugljikova atoma u strukturi dijamanta te visinu šesterokutnog prstena kojeg čine tri unutrašnja atoma s tri atoma u središtima strana, tj. razmak ravnina u kojima su prva tri odnosno druga tri atoma.*

Zadatak 1.5.18 *Skeletalni oktaedar je model pravilnog oktaedra koji se sastoji od njegovih triju kvadratnih presjeka (slika 1.20 lijevo). Nije ga teško izraditi tehnikom modularnog origamija: Uzmete šest kvadratnih listova papira iste veličine te ih presavinete duž dijagonala te simetrala stranica,¹⁵ pri čemu pazite da linije pregiba dijagonala gledaju u suprotnom smjeru od linija pregiba simetrala stranica (slika 1.20 desno). Pritom se svaki od tih dijelova, tzv. modula, stisne u „kišobrančić“ kao što je to žuti na slici 1.20 desno. Nakon toga se model složi bez lijepljenja, naizmjeničnim umetanjem trokutastih dijelova jedan u drugi. Ako znate da ste krenuli od listova papira s rubovima duljine 15 cm, izračunajte duljine spojnica središta s vrhovima oktaedra, te oplošje i volumen odgovarajućeg „punog“ oktaedra.*

💡 Sfera je ploha koja se sastoji od svih točaka koje su na istoj udaljenosti (polumjeru sfere) r od jedne točke (središta sfere). Volumen sfere je 0. Sfera skupa s dijelom prostora unutar nje naziva se kugla. Volumen kugle je $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$, a oplošje sfere i kugle je $P = 4r^2 \pi$ (četverostruka površina kruga kojeg dobijemo presjecanjem sfere odnosno kugle ravninom kroz središte).

Primjer 1.88 *Zamislite da imate kuglu veličine Sunca, a oko njenog ekvatora čvrsto je nataknut čelični prsten. Ako bi se duljini (opsegu) tog prstena dodao 1 m te se tako prsten posvud jednako odmakne od kugle, hoćete li između prstena i kugle moći provući*

¹⁵Simetrala dužine je okomica na tu dužinu koja prolazi njezinim polovištem.

igraču kartu? Svoju ruku? Nogometnu loptu? Perilicu rublja? Kako se promijeni Vaš odgovor ako na početku nemate kuglu stvarne veličine Sunca, nego veličine I. Kožarićevog prizemljenog Sunca u Bogovićevoj ulici u Zagrebu?

Neka je d promjer kugle. Njezin opseg, dakle opseg prstena je $d\pi$. Ako d produljimo za 1 m, novi opseg je $d\pi + 1$ m. To je opseg nove, zamišljene kugle koja ima polumjer $\frac{d\pi+1}{2\pi} = \frac{d}{2} + \frac{1}{2\pi}$ m. Dakle, odmak novog prstena od kugle je razlika polumjera, tj. $\frac{d}{2} + \frac{1}{2\pi} - \frac{d}{2} = \frac{1}{2\pi}$ m, tj. odmak je isti (blizu 16 cm) neovisno o veličini polazne kugle i između prstena i kugle se može provući igraća karta ili ruka, nogometna lopta samo uz stiskanje, a perilica rublja nikako.

Primjer 1.89 Jedinična ćelija za minerale koji kristaliziraju u heksagonskom kristalnom sustavu bira se u obliku uspravne rompske prizme, kojoj je baza romb u kom su dva kuta 60° . Duljina brida a baze i visina c jedinične ćelije određuju se eksperimentalno. Izvedite egzaktnu formulu za volumen heksagonske jedinične ćelije.

U heksagonske kristale spadaju i oni metali koji kristaliziraju kao heksagonske guste slagaline (HCP), tj. jedan sloj kao na slici 1.14, na njemu dodirujući ga drugi takav sloj pomaknut tako da atomi („kuglice“) ulegnu u udubine prvog sloja, treći sloj točno iznad prvog, četvrti iznad drugog i t.d. po principu ABABAB... Za njih se standardno jedinična ćelija bira tako da se četiri atoma metala nalaze sa jezgrama u njenim vrhovima. Izvedite egzaktni omjer $\frac{c}{a}$ za HCP, formulu za prosječni polumjer r atoma u takvoj slagalini te izračunajte iznos gustoće HCP (omjer volumena kojeg zauzimaju atomi i njihovi dijelovi unutar jedinične ćelije prema volumenu jedinične ćelije).

Sve rezultate primijenite na titanij, za kojeg je $a = 2,95 \text{ \AA}$ i $c = 4,68 \text{ \AA}$.

Zadatak 1.5.19 Izračunajte prosječni polumjer atoma i gustoću jedinične ćelije za kristale metala (konkretno zlata) koji kristaliziraju u kubičnom sustavu, pa im se jedinična ćelija bira kao kocka brida a (za zlato $a = 4,078 \text{ \AA}$), kojima je kristalna struktura kubična gusta slagalina (CCP), čiji slojevi nastaju slično kao kod HCP: prvi sloj kao na slici 1.14, na njemu dodirujući ga drugi takav sloj pomaknut tako da atomi („kuglice“) ulegnu u udubine prvog sloja, treći sloj iznad drugog tako da atomi ulegnu u njegove udubine, ali da je pritom pomaknut u odnosu na prvi, četvrti iznad prvi, peti iznad drugog i t.d. po principu ABCABC... Pritom prvo dokažite da se kod CCP stvarno možemo odabrati jediničnu ćeliju kao kocku čiji vrhovi, pri čemu dogovorno uzimamo najmanju moguću takvu kocku.

1.6 Linearne jednadžbe i nejednadžbe i njihovi sustavi

1.6.1 Linearne jednadžbe i nejednadžbe s jednom nepoznanicom



Linearna jednačina s jednom nepoznanicom x je jednačina koja se može zapisati u obliku

$$ax = b,$$

gdje su a i b zadani brojevi (u ovom poglavlju realni, ali općenito mogu biti i kompleksni). Rješenje takve jednačine je svaki broj čije uvrštavanje u jednačinu na mjesto nepoznanice x daje istinitu numeričku jednakost.

Primjer 1.90 Jednačina $8x - 3 \cdot (x - 4) = -2x - 6$ je linearna jer ju možemo svesti na oblik $ax = b$:

$$8x - 3 \cdot (x - 4) = -2x - 6,$$

$$8x - 3x + 12 = -2x - 6,$$

$$7x = -18.$$

Rješenje te jednačine je $-\frac{18}{7}$.

Linearne jednačine s jednom nepoznanicom mogu imati jedinstveno rješenje, ali i biti bez rješenja ili pak imati beskonačno mnogo rješenja (u posljednjem slučaju rješenja su svi realni brojevi).

Primjer 1.91 Jednačine $8x - 3(x - 4) = -2x - 6$, $8x - 3(x - 4) = 5x - 6$ i $8x - 3(x - 4) = 5x + 12$ su redom primjeri za tri navedene mogućnosti broja rješenja.

U slučaju jedinstvenog rješenja $x = \frac{b}{a}$ jednačine $ax = b$, po definiciji racionalnih brojeva vidimo da je to rješenje racionalno kad god su a i b cijeli ili općenitije racionalni brojevi. Prije nekoliko primjera zadatka s linearnim jednačinama, iskoristimo ih da poopćimo rezultate iz zadatka 1.7.19. Općenito, da poništimo smanjenje za $p\%$ potrebno je povećanje za $\frac{100p}{100-p}\%$: Ako želimo da $(1 + \frac{q}{100})(1 - \frac{p}{100})x = x$, mora vrijediti

$$\left(1 + \frac{q}{100}\right) \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1.$$

Tražimo q , dakle je q nepoznanica. Kad izmnožimo binome na lijevoj strani dobijemo

$$1 + \frac{q - p}{100} - \frac{pq}{10000} = 1,$$

tj.

$$\frac{q - p}{100} - \frac{pq}{10000} = 0,$$

$$q \cdot \left(\frac{1}{100} - \frac{p}{10000}\right) = \frac{p}{100},$$

$$q = \frac{\frac{p}{100}}{\frac{1}{100} - \frac{p}{10000}} = \frac{\frac{p}{100}}{\frac{100-p}{10000}} = \frac{100p}{100-p}.$$

Analogno, da poništimo povećanje za $p\%$ potrebno je smanjenje za $\frac{100p}{100+p}\%$.

Primjer 1.92 Navijači Tomislav, Krešimir i Stjepan sinoć su se tužni vratili iz Arlingtona gdje su gledali kako Hrvatska gubi od Engleske. Ulaznice su bili kupili od preprodavača Mije i đure, koji su im prije mjesec dana ulaznice naplatili svakom po 1000 €. U međuvremenu su Mijo i đuro shvatili da im preprodaja preslabo ide pa su spustili cijene ulaznica. Kad su usporedili prodaju u dva tjedna prije i poslije sniženja uočili su da su prodali 12 puta više ulaznica, a pritom ostvarili dvostruko veći prihod. želeći zadržati mušterije, jutros su poslali mail Tomislavu, Krešimiru i Stjepanu da su im zabunom naplatili previše. Budući je Mijo trenutno u Torontu zbog utakmice s Panamom, ponudio im je da se sastanu s đurinom koji će im vratiti razliku novaca. Oni pristaju i nalaze se s đurinom, kojemu je Mijo dao stvarni iznos razlike u cijeni. đuro pak nije tako pošten kao Mijo pa je kad se našao s Tomislavom, Krešimirom i Stjepanom dao je svakom po 100 €, a sebi zadržao ostatak. Ako s N € označimo cijenu triju ulaznica nakon opisanog sniženja, a s P € razliku do plaćenih 3000 € koju je Mijo dao đuri, izračunajte N i P . S obzirom na poznato, Tomislav, Krešimir i Stjepan su karte ukupno platili 2700 €, a đuro je zadržao ostatak od $P - 300$ €, što ukupno čini $P + 2400$ €. Je li to jednako 3000 €? Ako da, dokažite, ako ne, objasnite gdje je nestao dio novaca odnosno odakle se stvorio višak.

Neka su po cijeni 1000 € Mijo i đuro prodali n ulaznica. Dakle, ostvarili su prihod od $1000n$ €. Nakon sniženja za $p\%$ ostvarili su prihod $2000n$ €, pri čemu su prodali 12n ulaznica po cijeni $p\%$ 1000 €. Dakle,

$$2000n = 12n \cdot p\% 1000 \Rightarrow 1 = 6 \cdot p\%,$$

dakle cijena je bila snižena za $p\% = \frac{1}{6}$. To znači da je nova cijena triju ulaznica $N = \frac{5}{6} \cdot 3000 = 2500$ €, odnosno Mijo je đuri dao 500 €.

Đuro je stoga sebi zadržao 200 € pa je stoga ukupan iznos onog što su platili Tomislav, Krešimir i Stjepan te što je zadržao đuro 2900 €, dakle fali 100 € do 3000 €. Gdje je tih 100 €? Ovaj zbroj 2900 € niti je zbroj troškova niti je zbroj prihoda — pomiješano je što se s čime zbraja. Stvarna raspodjela novca iz perspektivne kase Mije i đure je: Primili su 3000 €, od čega je 2500 € stvarni iznos ulaznica, 200 € je završilo u đurinom džepu, a 300 € je vraćeno Tomislavu, Krešimiru i Stjepanu. Alternativno, iz perspektive Tomislava, Krešimira i Stjepana, oni su platili 2700 € i imaju 300 €, opet ukupno 3000 €. Raspodjela nekog iznosa novca, ovdje 3000 €, se može pratiti samo kao zbroj imovine i obveza pojedinog subjekta u transakcijama!

Primjer 1.93 Alkuin iz Yorka (ca. 735.–19. 5. 804.) bio je prijatelj i savjetnik franačkog kralja Karla Velikog. Među ostalim bio je zaslužan za prvu srednjovjekovnu reformu školstva s kojom se srednjovjekovna zapadna Europa počinje „izvlačiti“ iz intelektualnog propadanja uslijed uvjeta nakon pada Zapadnog Rimskog Carstva. Njemu se pripisuje i autorstvo najstarije zbirke zabavnih matematičkih zadataka na latinskom jeziku, Propositiones ad acuendos iuvenes, koja sadrži ukupno 53 zadatka. Jedan zadatak iz Propositiones ad acuendos iuvenes glasi: Jedan čovjek sreo je neke učenike i upitao ih: „Koliko vas ima u vašoj školi?“. Jedan od učenika mu je odgovorio: „Ne želim vam direktno odgovoriti, ali reći ću Vam kako možete odrediti taj broj. Udvostručite broj učenika, zatim taj broj utrostručite, te na kraju podijelite broj na četiri dijela. Ako pribrojite mene jednoj od četvrtina, bit će nas sto.“ Koliko je učenika u toj školi?

Ako je x traženi broj učenika, upute koje je učenik dao svode se na

$$100 = 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 2x,$$

dakle u školi je $x = 66$ učenika.

Zadatak 1.6.1 Vreća ima masu od 10,50 kg plus pola svoje mase. Kolika je masa vreće?

Linearne jednačbe s jednom nepoznanicom usko su povezane s pravcima u koordinatnoj ravnini. Konkretno, sjecište pravca poznate jednačbe s koordinatnim osima dobijemo uvrštavanjem $x = 0$ odnosno $y = 0$ u jednačbu pravca, nakon čega preostaje linearna jednačba s jednom nepoznanicom.

Primjer 1.94 Odredimo sjecišta pravca koji prolazi točkama $(1, 2)$ i $(-5, 3)$ s koordinatnim osima i implicitnu jednačbu pravca kroz ishodište koji je paralelan tom pravcu.

Koeficijent smjera tog pravca je $k = \frac{3-2}{-5-1} = -\frac{1}{6}$ pa je jednačba traženog pravca $y - 2 = -\frac{1}{6} \cdot (x - 1)$, tj. $y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{6}$.

Sjecište s osi apscisa ima ordinatu 0, dakle tražimo x takav da je $0 = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{6}$, dakle $x = 13$, tj. sjecište s osi apscisa je $(13, 0)$.

Sjecište s osi ordinata ima apscisu 0, dakle tražimo y takav da je $y = -\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{13}{6}$, dakle $y = \frac{13}{6}$, tj. sjecište s osi ordinata je $(0, \frac{13}{6})$.

Pravac paralelan ovom pravcu koji prolazi kroz ishodište ima jednačbu $y - 0 = k(x - 0)$ s istim k , dakle $y = -\frac{1}{6}x$.



Međusobno paralelni pravci u pravokutnom koordinatnom sustavu imaju jednake koeficijente smjera. U Kartezijevom, ali ne i u općem pravokutnom koordinatnom sustavu, pravci okomiti na pravac s koeficijentom smjera $k \neq 0$ imaju koeficijent smjera $-\frac{1}{k}$. Naravno, pravci okomiti na vertikalne pravce su horizontalni pravci i obrnuto (u svakom pravokutnom koordinatnom sustavu).

Primjer 1.95 Pravac $x = 2$ je okomit na pravac $y = 5$, a paralelan pravcu $x = -1$.

U standardnim matematičkim zadacima često se podrazumijeva da je koordinatni sustav Kartezijev, ali budući da je u prirodnim znanostima Kartezijev koordinatni sustav često neprikladan, u ovom udžbeniku se za koordinatni sustav u ravnini, ako nije drugačije navedeno, podrazumijeva samo da je pravokutni.

Zadatak 1.6.2 Ako je zadan Kartezijev koordinatni sustav, odredimo jednačbu pravca kroz ishodište koji je okomit na pravac koji os apscisa siječe u točki $(3, 0)$, a os ordinata u točki $(0, -2)$ te odredite njihovo sjecište. Skicirajte oba pravca u općem pravokutnom koordinatnom sustavu u kojem je jedinica duljine na osi apscisa dvaput dulja nego na osi ordinata i uvjerite se da tada ta dva pravca nisu međusobno okomiti.

Kad imamo zahtjeve da dva broja ne budu jednaka nego jedan od njih iznosi više ($>$), barem ($\geq$), najviše ($\leq$) ili manje ($<$) od drugog, ukoliko jedan od tih dvaju brojeva sadrži i nepoznanicu, govorimo o nejednačbama.



Linearna nejednadžba s jednom nepoznanicom x je nejednadžba koja se može zapisati u obliku

$$ax < b \quad \text{ili} \quad ax \leq b \quad \text{ili} \quad ax \geq b \quad \text{ili} \quad ax > b$$

gdje su a i b zadani brojevi (u ovom poglavlju realni, ali općenito mogu biti i kompleksni). Rješenje takve nejednadžbe je, uz uvjet $a \neq 0$, (neograničeni) interval realnih brojeva s rubom u rješenju odgovarajuće jednadžbe, a za $a = 0$ rješenje je ili prazan skup $\emptyset$ ili $\mathbb{R}$.

Osnovna tehnika u sređivanju nejednadžbi je, kao i kod rješavanja jednadžbi, pribrajanje istog broja objema stranama (ako je jedna strana manja ili veća od druge, pribrajanje istog broja očito čuva vrstu nejednakosti, čak i ako pribrajamo negativan broj) te množenje obje strane istim brojem (različitim od nule). Pritom, budući da množenje pozitivnim brojem čuva odnos manji-veći (npr., ako je $a < 5$ onda je i dvostruki a manji od 10), pri množenju pozitivnim brojem se čuva tip nejednakosti. No, pri množenju negativnim brojem se mijenja odnos manji-veći (npr., ako je $a \geq 1$ onda je $-2a$ broj koji je manji ili jednak -2) pa pri množenju nejednadžbi s negativnim brojem treba obrnuti nejednakost.

Primjer 1.96 Pripremate tulum i možete potrošiti najviše 100 €. Svakako želite kupiti čipsa, a vrećica čipsa košta 2 €. Već ste kupili kolač za 30 €. Koliko vrećica čipsa možete kupiti?

Neka je x broj vrećica čipsa koje ćete kupiti. Za njih ćete platiti $2x$ € pa iz teksta zadatka proizlazi uvjet $2x + 30 \leq 100$. Pribrojimo -30 , tj. oduzmemo 30 od obje strane: $2x \leq 70$. Pomnožimo s $\frac{1}{2}$, tj. podijelimo s 2 obje strane: $x \leq 35$. Dakle, rješenje nejednažbe $2x + 30 \leq 100$ je interval $\langle -\infty, 35 \rangle$. No, uzevši u obzir kontekst zadatka, rješenje zadatka je da možete kupiti najviše 35 vrećica čipsa, odnosno njih nijednu, jednu, dvije i t.d. do trideset i pet.

Primjer 1.97 Nejednadžba $2x - 1 \leq 5 - x + 3x$ kao rješenje ima cijeli $\mathbb{R}$ jer je ekvivalentna nejednakosti $-1 \leq 5$ koja je istinita za svaki x , dok nejednadžba $5 - x < x - 5 - 2x$ kao rješenje ima $\emptyset$ jer je ekvivalentna nejednakosti $5 < -5$ koja nije istinita ni za koji x .

Primjer 1.98 Riješimo nejednadžbu $-1 - 3x < 2x + 4$. Članove s x je zgodnije prebaciti na desnu stranu da bi bili pomnoženi s pozitivnim brojem, a s obzirom na to da želimo nejednakost tipa kao u gornjoj definiciji, to znači da 4 prebacujemo na lijevu stranu, dakle nejednadžbi pribrajamo $3x - 4$ i ona poprima ekvivalentni oblik $-5 < 5x$. Podijelimo li ju s 5, dobivamo $-1 < x$, tj. rješenje je interval $\langle -1, +\infty \rangle$.

Primjer 1.99 Laborant treba pripremiti 10 L otopine sumporne kiseline koja ne smije imati volumnu koncentraciju σ , tj. omjer volumena kiseline prema cijeloj otopini, veću od 42 %. Na raspolaganju su mu dovoljne količine otopina sumporne kiseline s volumnim koncentracijama 30 % i 50 %, no budući da 30 %-tne otopine ima samo desetak kutara, a 50 %-tne otopine ima jako puno, želi pritom koristiti što više 50 %-tne i što manje 30 %-tne otopine. Koliko koje otopine će uzeti?

Podrazumijevat ćemo mjernu jedinicu L pa ju nećemo pisati do kraja zadatka. Neka je x volumen 30 %-tne otopine koju će uzeti. Tada je $10 - x$ volume 50 %-tne otopine koju će uzeti. Dakle, uzet će volumen sumporne kiseline u iznosu $0,3x + 0,5(10 - x) = 5 - 0,2x$. To ne smije premašiti 4,2 pa imamo uvjet $4 - 0,2x \leq 4,2$. Dakle, $x \geq 4$, odnosno mora uzeti bar 4 litre 30 %-tne otopine i razliku od 10 litara od 50 %-tne. Stoga je odgovor na pitanje taj da će uzeti 4 litre 30 %-tne otopine i 6 litara od 50 %-tne.

 Kad za više (ne)jednadžbi, ne samo linearni, tražimo zajedničko rješenje, govorimo o sustavu (ne)jednadžbi.

Primjer 1.100 Želite ograditi dio dvorišta širine 5 m. Ograde imate dovoljno za opseg od najviše 60 m. No, zbog strukturalne stabilnosti opseg ne smije biti manji od 20 m. Koje su moguće duljine ograđenog dijela ako želite da im iznosi budu cjelobrojni?

Iz teksta zadatak proizlazi sustav dvije linearne nejednadžbe s jednom nepoznanicom (duljinom x ograđenog dijela, u metrima): $2 \cdot (5 + x) \leq 60$, $2 \cdot (5 + x) \geq 20$, tj. $2x \leq 50$, $2x \geq 10$. Dakle, x mora iznositi bar 5 i najviše 25 te je odgovor na pitanje da dulja stranica može imati duljinu od 5, 6, ..., 25 metara.

1.6.2 Linearne jednadžbe i nejednadžbe s dvije nepoznanice

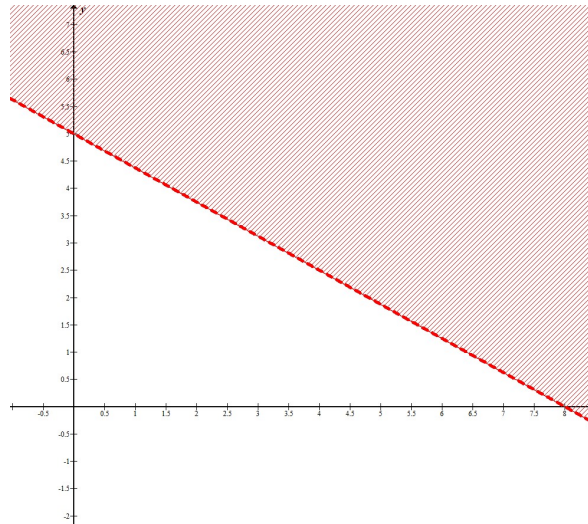
 Linearna jednadžba s dvije nepoznanice x i y je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$ax + by = c,$$

gdje su a , b i c zadani brojevi, pri čemu broj c nazivamo slobodnim članom. Rješenje takve jednadžbe je svaki uređeni par brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesta nepoznanica x i y daje istinitu numeričku jednakost.

Primjer 1.101 Jednadžba $2x - 5y = 3$ je linearna jednadžba s dvije nepoznanice. Uređeni par $(4, 1)$ je jedno njeno rješenje, dok par $(1, 4)$ nije rješenje te jednadžbe. Važno je o rješenju govoriti kao uređenom paru, ne samo jer su nam za rješenje potrebna dva broja (par), nego i jer je bitno koji je prvi, a koji je drugi.

Geometrijski, linearnu jednadžbu $ax + by = c$ s dvije nepoznanice (zapravo, skup njenih rješenja) možemo interpretirati kao pravac u koordinatnoj ravnini (tj. kao njegovu implicitnu jednadžbu), vidi odjeljak 1.3. Pravac se sastoji od beskonačno mnogo točaka te tako vidimo da svaka linearna jednadžba s dvije nepoznanice ima beskonačno mnogo rješenja (parova brojeva koji ju zadovoljavaju, tj. koordinata točaka na pravcu koji ju predstavlja). Stoga linearne nejednadžbe s dvije nepoznanice, tj. njihovi skupovi rješenja, su geometrijski gledani poluravnine s jedne strane od pravca kojeg dobijemo zamjenom nejednakosti s jednakosti. Pritom kod strogih nejednakosti taj pravac nije uključen u poluravninu, a kod nestrogih nejednakosti jest. Koja je prava strana za poluravninu, najlakše se utvrdit provjerom zadovoljava li jedna točka (koja nije na rubnom pravcu) nejednadžbu: Ako da, strana te točke je prava strana, a ako ne, onda je prava strana ona druga.

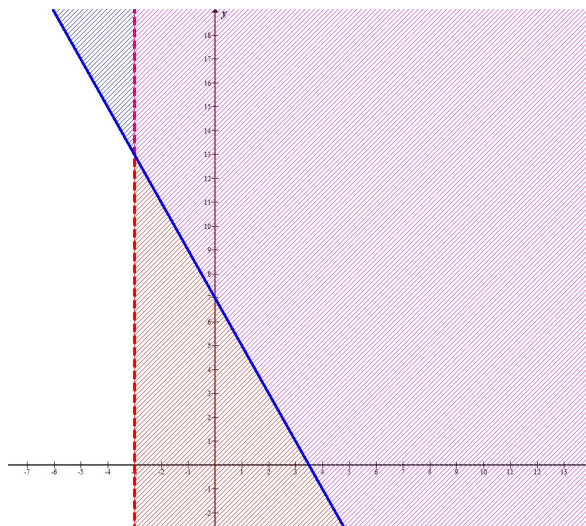
Slika 1.21: Skup rješenja nejednadžbe $5x + 8y > 40$.

Primjer 1.102 Skicirajmo skup rješenja nejednadžbe $5x + 8y > 40$. Njegov rub je pravac $5x + 8y = 40$, tj. pravac kroz točke $(0, 5)$ i $(8, 0)$. Nejednakost je stroga, pa sam pravac nije dio skupa rješenja što naznačavamo tako da ga nacrtamo crtkanom crtom. Ishodište nije na tom pravcu i ne zadovoljava nejednadžbu, dakle je skup rješenja ove nejednadžbe poluravnina iznad tog pravca, vidi sliku 1.21.

Primjer 1.103 Skicirajmo skup rješenja sustava $-2x < 6$, $y \geq 7 - 2x$. Rubni pravci su pravci $x = -3$ (nije uključen) i $y = 7 - 2x$ (jest uključen u skup rješenja). Da imamo samo prvu nejednadžbu, skup rješenja bi bila poluravnina desno od prvog pravca, a da imamo samo drugu skup rješenja bi bila poluravnina iznad drugog pravca. Sustav znači da treba biti zadovoljeno i jedno i drugo, dakle je skup rješenja četvrtina koordinatne ravnine koja je istovremeno desno od crvenog i iznad plavog pravca, ružičasto šrafirana na slici 1.22. Brži način za to utvrditi je da odmah uočimo da ta dva pravca dijele ravninu na četiri dijela i testiramo po jednu točku iz njih zadovoljava li sustav ili ne: Prva četvrtina (bijelo na slici ??) nije rješenje jer primjerice točka $(-5, 0)$ koja je u njoj ne zadovoljava sustav; druga četvrtina (crveno na slici ??) nije rješenje jer primjerice točka $(0, 0)$ koja je u njoj ne zadovoljava sustav; treća četvrtina (ružičasto na slici ??) je rješenje jer primjerice točka $(10, 0)$ koja je u njoj zadovoljava sustav; za kontrolu još se uvjerimo da plavu četvrtinu isto ne uzimamo u skup rješenja, jer primjerice točka $(5, 20)$ jest u njoj, ali ne zadovoljava sustav.

Zadatak 1.6.3 Skicirajte skup rješenja sustava $x - 7 \leq 7y - 6x \leq 14 + x$.

1.6.3 Sustavi linearnih jednadžbi



Slika 1.22: Skup rješenja sustava $-2x < 6$, $y \geq 7 - 2x$.

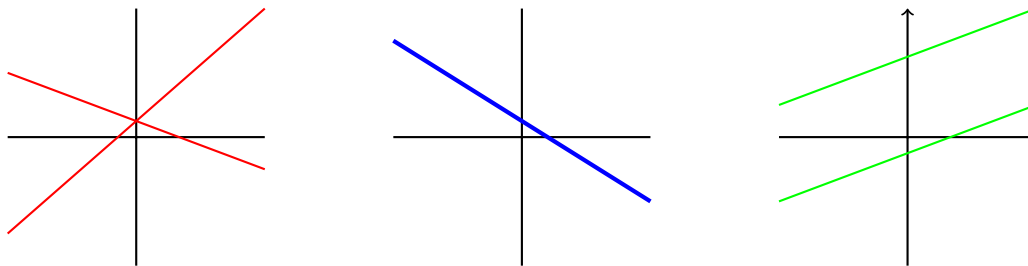
💡 Sustav linearnih jednadžbi je skup od dvije ili više linearnih jednadžbi (s istim nepoznicama) kojima tražimo zajedničko rješenje. Sustav linearnih jednadžbi nazivamo homogenim ako su svi slobodni članovi svih jednadžbi sustava jednaki nula.

Kao što smo rekli, jedna linearna jednadžba s dvije nepoznane predstavlja pravac u ravnini, dakle dvije takve jednadžbe predstavljaju dva pravca u ravnini, tri jednadžbe s dvije nepoznane predstavljaju tri pravca u ravnini i t.d. Rješavanjem sustava tražimo zajednička rješenja jednadžbi, dakle u slučaju sustava linearnih jednadžbi s dvije nepoznane tražimo zajedničke točke svih tih pravaca. Iz geometrije ravnine jasno je da imamo tri mogućnosti:

- Svi pravci se sijeku u jednoj točki — sustav ima jedinstveno rješenje (uređeni par koordinata te točke).
- Sve jednadžbe predstavljaju jedan te isti pravac — sustav ima beskonačno mnogo rješenja (sve točke tog jednog pravca su rješenja).
- U svim ostalim slučajevima sustav nema rješenja.

Navedene tri situacije su za sustave dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznane (kratko, 2×2 -sustavi) ilustrirane slikom 1.6.3.

Najjednostavnija metoda rješavanja sustava linearnih jednadžbi, osobito zgodna za sustave s malo nepoznanica i jednadžbi, je **metoda supstitucije**. Ona se može koristiti i za rješavanje drugačijih sustava jednadžbi, a ne samo sustava linearnih jednadžbi. Metoda supstitucije se sastoji u tome da iz jedne jednadžbe izrazimo jednu od nepoznanica i uvrstimo dobiveni izraz na mjesto te nepoznanice u svim ostalim jednadžbama. Time smo smanjili broj jednadžbi i broj nepoznanica za po jedan. Po potrebi se postupak nastavlja sve dok ne dođemo ili do kontradikcije ili do samo jedne jednadžbe.



Slika 1.23: 2×2 -sustavi s jedinstvenim rješenjem (lijevo), s beskonačno mnogo rješenja (sredina) i bez rješenja (desno).

Primjer 1.104 *Riješimo sustav*

$$x + y = 7, \quad 675x + 300y = 2850$$

metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je $y = 7 - x$ pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo redom

$$675x + 300(7 - x) = 2850,$$

tj. $375x = 750$. Dakle, $x = 2$. Budući da je sustav imao dvije nepoznanice, rješenje mora biti uređen par. Drugi dio para odredimo iz formule supstitucije tj.

$$y = 7 - x = 7 - 2 = 5.$$

Dakle, rješenje sustava je uređeni par $(2, 5)$.

Primjer 1.105 *Sustav*

$$x + 2y = -4, \quad 2x + 4y = 0$$

rješavamo metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je $x = -4 - 2y$ što daje

$$2(-4 - 2y) + 4y = 0,$$

tj. $-8 = 0$, što je nemoguće (kontradiktorno). Slijedi da sustav nema rješenja.

Primjer 1.106 *Sustav*

$$4x + 2y = 6, \quad -8x - 4y = -12$$

rješavamo metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je $y = 3 - 2x$ što daje

$$-8x - 4(3 - 2x) = -12$$

tj. $-12 = -12$. Ta jednakost sigurno vrijedi, dakle je druga jednadžba bila suvišna. Preostaje nam samo jednadžba $y = 3 - 2x$, dakle sustav ima beskonačno mnogo rješenja i ona su svi uređeni parovi oblika $(x, 3 - 2x)$ s proizvoljnim $x \in \mathbb{R}$, odnosno sve točke pravca $y = 3 - 2x$.

Primjer 1.107 U vodi je otopljeno 0,6190 g smjese natrijeva klorida i kalijeve klorida te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je 1,3211 g srebrova klorida. Treba odrediti masene udjele natrijeva i kalijeve klorida u polaznoj smjesi.

Molarna masa NaCl je $58,45 \text{ g mol}^{-1}$, molarna masa KCl je $74,56 \text{ g mol}^{-1}$, a molarna masa AgCl je $143,34 \text{ g mol}^{-1}$. Neka je x masa NaCl u smjesi, a y masa KCl u smjesi. Iz uvjeta zadatka proizlazi da je (x, y) rješenje sustava od dvije linearne jednačbe s dvije nepoznanice:

$$x + y = 0,6190 \text{ g}$$

$$\frac{143,34}{58,45}x + \frac{143,34}{74,56}y = 1,3211 \text{ g}.$$

Riješimo sustav metodom supstitucije. Iz prve jednačbe je $y = 0,6190 \text{ g} - x$ pa uvrštavanje u drugu jednačbu daje

$$2,452x + 1,922(0,6190 \text{ g} - x) = 1,3211 \text{ g}$$

iz čega dobijemo

$$x = 0,2479 \text{ g}$$

te

$$y = 0,3711 \text{ g}.$$

Budući da su bili traženi maseni udjeli, dobivamo

$$w(\text{NaCl}) = \frac{0,2479}{0,6190} = 0,4005 = 40,05 \%$$

i

$$w(\text{KCl}) = \frac{0,3711}{0,6190} = 0,5995 = 59,95 \%.$$

Opisane ideje lako se i intuitivno poopćuju na slučajeve s više nepoznanica. Za njih također vrijedi da čim imaju više od jednog rješenja moraju ih imati beskonačno mnogo. Uočimo da homogeni sustavi linearnih jednačbi uvijek imaju bar jedno rješenje (tzv. trivijalno rješenje u kojem sve nepoznanice imaju iznos nula). Pritom, kao što su rješenja linearnih jednačbi i njihovih sustava s dvije nepoznanice uređeni parovi, za slučaj triju nepoznanica rješenja su uređene trojke, za slučaj četiriju nepoznanica uređene četvorke i t.d.

Primjer 1.108 Sustav

$$x + y + z = 0, \quad x - y = 0$$

je primjer homogenog sustava (dviju) linearnih jednačbi (s tri nepoznanice). Supstitucija $y = x$ iz druge u prvu jednačbu svodi sustav na jednu linearnu jednačbu $2x + z = 0$ s dvije nepoznanice. Ona ima beskonačno mnogo rješenja (x, z) , gdje je $z = -2x$. Stoga i polazni sustav ima beskonačno mnogo rješenja (x, y, z) koja su oblika $(x, x, -2x)$, gdje je x bilo koji realan broj. Uočimo da se među njima nalazi i trivijalno rješenje, koje dobijemo za $x = 0$.

Primjer 1.109 Riješimo sljedeći zadatak o orijentalnom trgovcu iz Alkuniove *Propositiones ad acuendos iuvenes* (vidi primjer 1.93): Jedan trgovac ja na putu na Orijent kupio 100 odabranih životinja za 100 libri. Svaku devu platilo je pet linri, svakog magarca po jednu libru, a za 20 ovci platilo je jednu libru. Koliko deva, magaraca i ovaca je kupio taj trgovac?

Neka su x , y i z traženi brojevi deva, magaraca i ovaca. Ukupno ih je kupljeno 100, dakle je

$$x + y + z = 100.$$

Nadalje, za 100 libara je kupljeno x deva po 5 libara, y magaraca po 1 libar i z ovaca po $\frac{1}{20}$ libara, dakle je

$$5x + y + \frac{1}{20}z = 100.$$

Oduzmemo li prvu jednadžbu od druge, ostaje

$$4x = \frac{19}{20}z,$$

dakle je $x = \frac{19}{80}z$ te stoga $y = 100 - x - z = 100 - \frac{99}{80}z$. Pritom, x , y i z moraju biti prirodni brojevi, dakle je z sigurno višekratnik od 80 i $100 > \frac{99}{80}z$, tj. $z < \frac{8000}{99} = 80,8\bar{0}$. Dakle, $z = 80$ pa je $x = 19$ i $y = 1$: Trgovac je kupio 19 deva, 1 magarca i 80 ovaca.

Uz metodu supstitucije, popularna je (a za veće sustave i preglednija) **metoda eliminacije**. U njoj je osnovna ideja u svakom koraku iz sustava eliminirati po jednu nepoznanicu, tako da se u svim jednadžbama prvo postigne da su koeficijenti uz tu nepoznanicu, do na eventualno predznak, jednaki. To se lako postigne množenjem jednadžbi s prikladnim brojevima (ako imamo jednažbu oblika $L = D$, množenje¹⁶ bilo kojim nenul brojem daje ekvivalentnu jednadžbu). Nakon toga se jedna jednadžba pribroji ili oduzme od svih ostalih, tako da se ponište svi članovi koji sadrže odabranu nepoznanicu (to je također korektno jer ako imamo dvije jednadžbe $L = D$ i $L' = D'$, njihovim zbrajanjem ili oduzimanjem dobivamo novu jednadžbu $L \pm L' = D \pm D'$, iz koje je opet oduzimanjem ili zbrajanjem s jednom od polazne dvije moguće rekonstruirati drugu).

Primjer 1.110 Sustav

$$3x + 2y = 1, \quad -2x + 4y = 0$$

rješavamo metodom eliminacije. Eliminirajmo x . Uz nju su koeficijenti 3 i -2 pa prvu jednadžbu množimo s 2, a drugu s 3, čime dobijemo ekvivalentan sustav

$$6x + 4y = 2, \quad -6x + 12y = 0.$$

Pribrojimo li prvu jednadžbu drugoj, preostaje nam $16y = 2$, dakle je $y = \frac{1}{8}$. To uvrstimo u bilo koju od prethodnih jednažbi, recimo u $-2x + 4y = 0$, da odredimo x : $-2x + \frac{4}{8} = 0$ daje $x = \frac{1}{4}$. Dakle, ovaj sustav ima jedinstveno rješenje $(x, y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$.

Metoda eliminacije često se provodi u obliku poznatom kao Gaußova metoda eliminacije. To podrazumijeva da prvo sustav zapišemo uredno, tako da su potpisane istoimene

¹⁶Uočite da je ovime dozvoljeno i dijeljenje, jer je dijeljenje isto što i množenje s recipročnim brojem.

nepoznanice i znakovi jednakosti. Nakon toga prvo eliminiramo prvu nepoznanicu iz svih jednadžbi osim prve, zatim drugu iz svih jednadžbi osim prve i druge, treću iz svih jednadžbi osim prve tri i t.d. dok na dnu ne preostanu samo jedna ili više jednadžbi s jednom nepoznanicom. Nakon toga se uvrštavanjem odozdo nagore dobije rješenje. Ovisno o koeficijentima u sustavu, ponekad je tijekom Gaußove metode eliminacija zgodno mijenjati redoslijed jednadžbi.

Primjer 1.111 *Primijenimo Gaußovu metodu eliminacije na sustav*

$$x + 5y + 2z = -1$$

$$x + 2y - z = 2$$

$$3x + 3y + 4z = -11.$$

U prvom stupcu želimo eliminirati dva od tri x -a. To je najlakše ako postignemo da su koeficijenti uz sve x -eve isti, što postignemo množeći prve dvije jednadžbe s 3:

$$3x + 15y + 6z = -3$$

$$3x + 6y - 3z = 6$$

$$3x + 3y + 4z = -11.$$

Sad prvu jednadžbu oduzmemo od druge dvije:

$$3x + 15y + 6z = -3$$

$$-9y - 9z = 9$$

$$-12y - 2z = -8.$$

Podijelimo prvu jednadžbu s 3, drugu s -9 i treću s -2 :

$$x + 5y + 2z = -1$$

$$y + z = -1$$

$$6y + z = 4.$$

Još treba eliminirati y u zadnjoj jednadžbi, dakle pomnožimo drugu jednadžbu s 6:

$$x + 5y + 2z = -1$$

$$6y + 6z = -6$$

$$6y + z = 4.$$

Oduzmimo drugu jednadžbu od treće:

$$x + 5y + 2z = -1$$

$$6y + 6z = -6$$

$$-5z = 10.$$

Podijelimo drugu jednadžbu s 6 i treću s -5 :

$$x + 5y + 2z = -1$$

$$y + z = -1$$

$$z = -2.$$

Gaußove eliminacije su sad gotove. Iz zadnje jednadžbe vidimo da je $z = -2$, što uvrstimo u prve dvije jednadžbe te ostaje $x + 5y - 4 = -1$ i $y - 2 = -1$, odnosno $x + 5y = 3$ i $y = 1$. Sad iz druge jednadžbe vidimo da je $y = 1$, što uvrstimo u prvu i ostaje $x + 5 = 3$, dakle je $x = -2$: Rješenje sustava je jedinstveno i to je uređena trojka $(-2, 1, -2)$.

Zadatak 1.6.4 Gaußovom metodom eliminacija riješite sustav $2x + y = 4$, $-4x - 2y = -8$, $16x + 8y = 32$.

Uočimo da je u prethodnom zadatku odmah moguće uočiti da će sustav imati beskonačno mnogo rješenja (s jednim slobodnim parametrom). Naime, sve tri jednadžbe su proporcionalne, što znači da ćemo odabirom prikladnih faktora sigurno eliminirati dvije od njih te će ostati jedna, recimo $2x + y = 4$. Dakle, $y = 4 - 2x$ pa je rješenje sustava skup svih parova $(x, 4 - 2x)$ kad je x proizvoljan realan broj. Da je primjerice u drugoj jednadžbi slobodan član bio neki drugi broj, a ne -8 , imali bismo situaciju da imamo jednadžbe s proporcionalnim lijevim, ali neproporcionalnim desnim stranama, što znači da bismo mogli eliminirati lijeve strane, ali se pritom desne ne bi poništile pa sustav ne bi imao rješenja.

Primjer 1.112 Sustav $x - y + z = 2$, $3x - 3y + 3z = 4$ nema rješenja jer kad prvu jednadžbu pomnožimo s 3 i oduzmemo ju od druge, preostat će nam kontradiktorna jednakost $0 = 2$.

Zadatak 1.6.5 U najpoznatijem starokineskom matematičkom tekstu, *Devet poglavlja umijeća računanja*, datirano između 200. g. pr. Kr. i 300. g. n. e., nalazimo sljedeći zadatak: Iz tri snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos 39 dou.¹⁷ Iz dva snopa dobrog žita, tri snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos 34 dou. Iz jednog snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i tri snopa lošeg žita dobije se prinos 26 dou. Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita? Postavite odgovarajući sustav linearnih jednadžbi i riješite ga Gaußovom metodom eliminacije.

¹⁷Dou je kineska mjera volumena, u to doba iznosila je otprilike današnjih 2 L.

1.7 Zadaci iz elementarne matematike

1.7.1 Zadaci vezani za racionalne brojeve, postotke i vjerojatnost

Zadatak 1.7.1 Izračunajte vrijednosti sljedećih izraza i rezultate zapišite kao neskratljive razlomke:

$$(a) \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^2 \right] : \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} - \left(-\frac{2}{3} \right)^2$$

$$(b) \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}{\left(\frac{1}{5} \right)^2} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{-2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) : \left(-\frac{3}{4} \right)$$

Rješenje. (a) $\frac{2}{3}$; (b) $\frac{16}{9}$

Zadatak 1.7.2 Voćar ima određenu količinu jabuka namijenjenu prodaji na tržnici. Prvog dana prodao je $\frac{2}{5}$ ukupne količine jabuka, a drugog dana prodao je $\frac{3}{4}$ preostale količine.

(a) Izrazite masu jabuka preostalu nakon drugog dana kao neskratljivi razlomak ukupne početne količine.

(b) Ako je nakon drugog dana ostalo 12 kg jabuka, koliko je kilograma jabuka prodano drugog dana?

Rješenje. (a) $\frac{2}{20}$; (b) 36 kg.

Zadatak 1.7.3 Na pismenom ispitu iz Matematike $\frac{3}{5}$ svih studenata koji su izašli ostvarilo je prolaznu ocjenu. Među studentima koji su prošli ispit, $\frac{1}{6}$ je dobila ocjenu izvrstan (5). Ako je ukupno 12 studenata dobilo ocjenu izvrstan (5), koliko je ukupno studenata prošlo ispit? Koliko je studenata pisalo ispit?

Rješenje. 72 studenta su prošla ispit; 120 studenata je pisalo ispit.

Zadatak 1.7.4 U pogonu tvornice strojevi rade na obradi materijala. Stroj A samostalno završi cijeli posao za 6 sati, a stroj B samostalno završi posao za 8 sati. U pogon je pušten i novi stroj C za kojeg još nije poznato koliko je vremena potrebno da samostalno završi posao.

Sva tri stroja započnu raditi zajedno te rade 2 sata, nakon čega se stroj A zaustavi. Strojevi B i C nastave raditi te im je za dovršetak preostalog dijela posla potrebno još točno 2 sata.

(a) Izračunajte koliko bi sati stroju C bilo potrebno da samostalno obavi cijeli posao.

(b) Koliki je dio ukupnog posla obavio svaki od strojeva tijekom cijelog procesa?

Rješenje. (a) Stroj C samostalno obavi posao za 24 sata. (b) Stroj A obavio je $\frac{1}{3}$ posla, stroj B $\frac{1}{2}$ posla, a stroj C $\frac{1}{6}$ posla.

Zadatak 1.7.5 Verižni razlomci su razlomci čiji nazivnici su zbrojevi cijelih brojeva s drugim razlomcima. Pritom i cijele brojeve i obične razlomke ubrajamo u verižne razlomke. Ako su svi brojnici u verižnom razlomku jednaki 1, govorimo o jednostavnom verižnom razlomku. Broj uključenih dijeljenja nazivamo redom verižnog razlomka. Primjerice,

$$1, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

su jednostavni verižni razlomci redova 0, 1, 2 i 3. Koji razlomci se ne mogu zapisati kao jednostavni verižni razlomci reda 2?

Rješenje. Mogu se zapisati samo brojevi oblika $1 + \frac{p}{q}$ pri čemu je $p < q$ i q daje ostatak 1 pri dijeljenju sa p ; svi ostali brojevi se ne mogu zapisati.

Zadatak 1.7.6 Dokažite da racionalni brojevi imaju svojstvo gustoće: Između svaka dva racionalna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Uputa: Skup $\mathbb{Q}$ je zatvoren s obzirom na četiri osnovne računske operacije, izuzev dijeljenja s nulom, tj. rezultati osnovni računskih operacija primijenjeni na racionalne brojeve rezultiraju racionalnim brojevima.

Rješenje. $a, b \in \mathbb{Q}, c = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \Rightarrow a < c < b \text{ \& } c \in \mathbb{Q}$

Zadatak 1.7.7 Godišnji globalni promet podataka na internetu u početnoj godini promatranja iznosio je $V_0 = 1,20 \cdot 10^{21}$ B. U idućem trogodišnjem razdoblju promet se mijenjao na sljedeći način:

- U prvoj godini promet se povećao za nepoznati postotak.
- U drugoj godini promet se povećao za dvostruko veći postotak nego u prvoj godini.
- U trećoj godini, zbog primjene novih algoritama za kompresiju, promet se smanjio za 10% u odnosu na drugu godinu.

Nakon sva tri koraka, godišnji promet podataka u trećoj godini iznosio je $V_3 = 1,4256 \cdot 10^{21}$ B.

- Izračunajte promet na kraju prve i druge godine te ga izrazite u terabajtima (TB, 1 TB = 10^{12} B) i petabajtima (PB, 1 PB = 10^{15} B) u znanstvenom zapisu.
- Koliko bi pametnih telefona pojedinačnog kapaciteta pohrane od 256 GB bilo potrebno da se pohrani cjelokupni promet u trećoj godini? Rezultat zapišite u znanstvenom zapisu i navedite njegov red veličine.

Rješenje. (a) $V_1 \approx 1,32 \cdot 10^{21}$ B = $1,32 \cdot 10^9$ TB = $1,32 \cdot 10^6$ PB; $V_2 \approx 1,58 \cdot 10^{21}$ B = $1,58 \cdot 10^9$ TB = $1,58 \cdot 10^6$ PB; (b) Broj pametnih telefona $N \approx 5,57 \cdot 10^9$.

Zadatak 1.7.8 Zadan je izraz

$$\frac{\frac{1}{11} + \frac{1}{12}}{\frac{1}{11} - \frac{1}{12}}.$$

- (a) Izračunajte točnu vrijednost gornjeg izraza.
- (b) Razlomke $\frac{1}{11}$ i $\frac{1}{12}$ zapišite decimalno i zaokružite na tri decimale. S tim zaokruženim vrijednostima izračunajte približnu vrijednost gornjeg izraza. Odredite relativne greške zaokruživanja brojeva $\frac{1}{11}$ i $\frac{1}{12}$, nazivnika izraza te relativnu grešku rezultata. Zašto je relativna greška rezultata puno veća od relativnih grešaka zaokruženih brojeva?
- (c) Ponovite račun iz (b), ali zaokružite $\frac{1}{11}$ i $\frac{1}{12}$ na šest decimala. Kolika je sada relativna greška rezultata?

Rješenje. (a) Točna vrijednost izraza je 23; (b) Približna vrijednost izraza je 21,75; relativne greške: 0,1 % (za $\frac{1}{11}$), 0,4 % (za $\frac{1}{12}$), 5,6 % (za nazivnik), $\approx 5,43$ % (za rezultat); (c) Približna vrijednost 22,99921, relativna greška $\approx 0,0034$ %.

Zadatak 1.7.9 Zadan je izraz

$$\frac{1}{\frac{1}{12} - \frac{1}{13}}.$$

- (a) Izračunajte točnu vrijednost gornjeg izraza.
- (b) Razlomke $\frac{1}{12}$ i $\frac{1}{13}$ zaokružite redom na jednu, dvije, tri i četiri decimale. Za svaki slučaj pomoću zaokruženih vrijednosti izračunajte približnu vrijednost izraza (ako je definirana) i njezinu relativnu grešku. Koliko je najmanje decimala potrebno da relativna greška rezultata bude manja od 1 %?
- (c)* Pri zaokruživanju na n decimala apsolutna greška svakog broja je najviše $\frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$, pa je apsolutna greška razlike dvaju zaokruženih brojeva najviše 10^{-n} . Koristeći to, odredite najmanji broj decimala n za koji unaprijed možemo biti sigurni da će relativna greška izraza biti manja od 1 %. Usporedite to s rezultatom iz (b). Možete li objasniti razliku?

Rješenje. (a) Točna vrijednost je 156; (b) Jedna i dvije decimale: razlika u nazivniku je 0, izraz nije definiran. Tri decimale: približna vrijednost 166,6, relativna greška $\approx 6,84$ %. Četiri decimale: približna vrijednost 156,25, relativna greška $\approx 0,16$ %. Da bi greška bila manja od 1 % potrebne su barem četiri decimale. (c) Najveća moguća relativna greška je $\frac{156 \cdot 10^{-n}}{1 - 156 \cdot 10^{-n}}$, što za $n = 4$ iznosi $\approx 1,58$ %, a za $n = 5 \approx 0,16$ %. Potrebno pet decimala da bismo unaprijed bili sigurni da je greška ispod 1 %. Kod računa s četiri decimale u (b) greške su se djelomično poništile jer su oba broja zaokružena “prema dolje”, pa je stvarna greška puno manja od maksimalne moguće greške.

Zadatak 1.7.10 Jedan kanistar sadrži vodenu otopinu neke kiseline, pri čemu se volumeni kiseline i vode odnose kao 1 : 3. Drugi kanistar sadrži vodenu otopinu iste kiseline, pri čemu se volumeni kiseline i vode odnose kao 3 : 5. Treći kanistar je prazan. Iz prvog i drugog kanistra uzimate jednake volumene vode i ulijete ih u treći kanistar. Koliki je nakon toga volumni udio kiseline u trećem kanistru?

Rješenje. Udio kiseline je $\frac{5}{16}$, odnosno $0,3125 = 31,25\%$.

Zadatak 1.7.11 *Uzorak legure mase 480 g sastoji se od bakra i cinka čije se mase odnose kao 5 : 3. Koliko grama cinka treba dodati u postojeću leguru kako bi novi omjer mase bakra i cinka iznosio 4 : 3?*

Rješenje. 45 g

Zadatak 1.7.12 *U nekoj vojnoj utvrdi služi 12 tribuna, 26 protribuna, 50 centuriona i 32 procenturiona koji među sobom imaju raspodijeliti 1810 zlatnika plijena i to tako da ako tribun dobije 10 protribun dobije 8, centurion 6, a procenturion 3. Koliko će zlatnika koji dobiti?¹⁸*

Rješenje.

$$T : PT : C : PC = 10 : 8 : 6 : 3$$

$$1810 = 12 \cdot 10x + 26 \cdot 8x + 50 \cdot 6x + 32 \cdot 3x \Rightarrow x = 2,5$$

Svaki tribun dobije 25 zlatnika, svaki protribun 20, svaki centurion 15, a svaki procenturion 7,5.

Zadatak 1.7.13 *Kemijskom analizom minerala utvrđeno je da sadrži kalcij, ugljik i kisik sa sljedećim masenim udjelima:*

$$w(\text{Ca}) = 40,04\%, \quad w(\text{C}) = 12,00\%, \quad w(\text{O}) = 47,96\%.$$

(Molarne mase: $M_{\text{Ca}} = 40,08 \text{ g/mol}$, $M_{\text{C}} = 12,01 \text{ g/mol}$, $M_{\text{O}} = 16,00 \text{ g/mol}$.)

(a) *Odredite empirijsku formulu spoja $\text{Ca}_i\text{C}_j\text{O}_k$.*

(b) *U reakcijski spremnik zabunom je dodano 0,30 mol kalcija više nego što je predviđeno. Koliko ugljika i kisika treba naknadno dodati kako bi se omjer množina elemenata u smjesi vratio na točan omjer definiran empirijskom formulom?*

Rješenje. (a) $i : j : k \approx 0,9990 : 0,9992 : 2,9975 \approx 1 : 1 : 3$, empirijska formula je CaCO_3 ;
(b) Potrebno je dodati 0,30 mol ugljika i 0,90 mol kisika.

Zadatak 1.7.14 *Vaši kolege su u računima koristili procjene iznosa raznih veličina. Koje od sljedećih procjena su smislene? Kojim izračunima biste ih provjerili [14]?*

- *Kupio sam paket od jednog kilograma šećera. Sestra, s kojom živim, i ja za svoje kave stavljamo po dvije žličice šećera i pijemo po četiri kave dnevno. Paket šećera nam je dovoljan za jednomjesečno kampiranje.*
- *Veliki vodopad je širok 170 metara, a izmjereno je da u njegovoj sredini svake minute prođu 124 kubika (kubna metra) vode. Dakle, procjenjujem da svaki sat kroz vodopad oteču 632 tone vode.*

¹⁸Ovaj zadatak je iz istog udžbenika kao zadatak 1.1.14.

- *Moj povrtnjak je pravokutnog oblika, širine 9,5 metara i duljine 11 metara. Testiram dva kvadratna metra njegove zemlje i nađem 53 crva u jednom od njih, a 42 u drugom. Dakle, procjenjujem da u zemlji mog povrtnjaka ima 5000 crva.*

Zadatak 1.7.15 *Zbog inflacije, cijena kruha je u posljednjih pet godina porasla za 58 %. Ako mali bijeli kruh sad košta 1,25 eura te ako znamo da je pri zamjeni kuna u eure fiksni tečaj konverzije bio 7,53450 kuna za 1 euro, kolika je cijena malog bijelog kruha bila prije pet godina?*

Rješenje. 5,96 kuna

Zadatak 1.7.16 *Cijena tenisica najprije je povećana za 20%, a zatim je nova cijena smanjena za 15%.*

- (a) *Je li konačna cijena veća ili manja od početne cijene? Izrazite ukupnu promjenu cijene u postocima.*
- (b) *Ako konačna cijena tenisica nakon obje promjene iznosi 122,40 eura, kolika je bila početna cijena?*

Rješenje. (a) Cijena se povećala za 2%; (b) Početna cijena je bila 120 eura.

Zadatak 1.7.17 *Laboratorijski uzorak vodene otopine natrijeva klorida (NaCl) početne mase $m_0 = 500$ g ima maseni udio otopljene tvari $w_0 = 12,0\%$. Tijekom prvog dana je iz početne otopine isparila nepoznata masa vode. Toj otopini dodano je 200 g destilirane vode. Sljedećeg dana je iz razrijeđene otopine isparilo dvostruko manje vode nego prvog dana. Nakon drugog dana izmjereno je maseni udio NaCl u konačnoj otopini $w = 15,0\%$. Odredite masu vode koja je isparila tijekom prvog dana i maseni udio NaCl na kraju prvog dana (prije razrjeđivanja).*

Rješenje. Tijekom prvog dana isparilo je 200 g vode, nakon čega je maseni udio NaCl iznosio $0,2 = 20\%$.

Zadatak 1.7.18 *U boci je 6 L 30-postotne otopine alkohola. Nakon što je ishlapljela dvostruko veća količina alkohola nego što je ishlapljelo vode, u boci je ostao 25-postotni alkohol. Koliko je litara otopine ostalo u boci?*

Rješenje. 5,28 L

Zadatak 1.7.19 *U kemijskom postrojenju prerađuje se ruda koja sadrži određenu količinu korisnog minerala M , dok ostatak čine nečistoće. Poznato je da je maseni udio minerala M manji od $\frac{1}{2}$. Mehaničkim procesom odstrani se 50% ukupne mase nečistoća, dok masa minerala M ostaje nepromijenjena. Time se maseni udio minerala M u obogaćenoj rudi poveća za 15 postotnih bodova u odnosu na početni udio. Nakon toga se obogaćena ruda podvrgava kemijskoj ekstrakciji u kojoj se izvuče 90% prisutnog minerala M , čime se dobije točno 360 kg čistog minerala. Izračunajte početni maseni udio čistog minerala u sirovoj rudi i ukupnu masu sirove rude na početku procesa.*

Rješenje. Početni maseni udio je 25%. Početna masa sirove rude iznosi 1600 kg.

Zadatak 1.7.20 Ako je nešto pojeftinilo za 25 %, za koji postotak treba poskupiti da se cijena vrati na razinu prije pojeftinjenja? Ako je nešto poskupilo za 50 %, za koji postotak treba pojeftiniti da se cijena vrati na razinu prije pojeftinjenja?

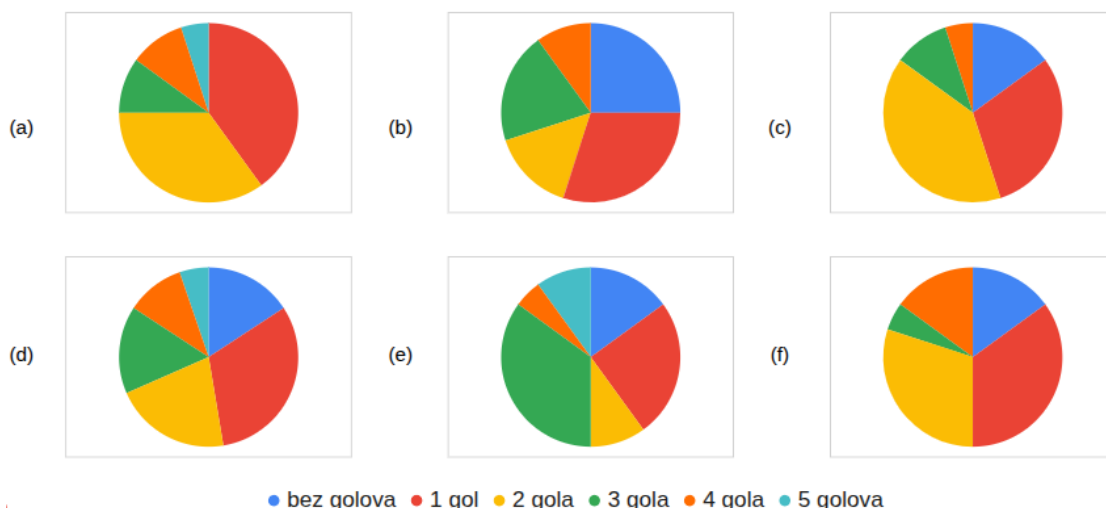
Rješenje. $x - 25 \%x = 75 \%x$, $y \cdot 0,75x = x$, $y = \frac{4}{3}$; $x + 50 \%x = 1,5x$, $y \cdot 1,5x = x$, $y = \frac{2}{3}$

Zadatak 1.7.21 Veliki spremnik sadrži 14 litara otopine u kojoj volumni udio 25 % čini antifriz, a ostatak je voda. Koliko antifrizu trebamo dodati da otopina u spremniku sadrži volumni udio od 30 % antifrizu?

Rješenje. $V_0 = 14 \text{ L}$, $V_{0,a} = 3,5 \text{ L}$, $V_{1,a} = 3,5 + x = 0,3 \cdot (14 + x)$, dakle treba dodati 1 L.

Zadatak 1.7.22 Četiri od šest kružnih dijagrama na slici 1.24 prikazuju broj postignutih pogodaka po utakmici u prvih 20 odigranih utakmica Premier lige u sezoni 2025/26. Povežite klub s odgovarajućim dijagramom ako je poznato:

- Manchester City je u 50 % utakmica postigao barem 3 pogotka;
- Arsenal je u 25 % utakmica postigao barem 3 pogotka;
- Liverpool ima jednak broj utakmica bez pogodaka i utakmica s barem 3 pogotka;
- Brentford je svaki postignuti broj pogodaka postigao na barem dvije utakmice.

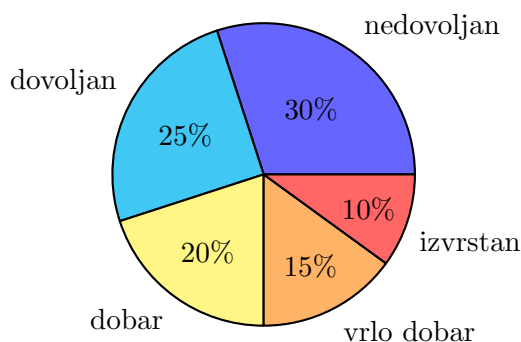


Slika 1.24: Kružni dijagrami za podatke iz zadatka 1.7.21.

Rješenje. Manchester City: (e), Arsenal: (a), Liverpool: (c), Brentford: (b).

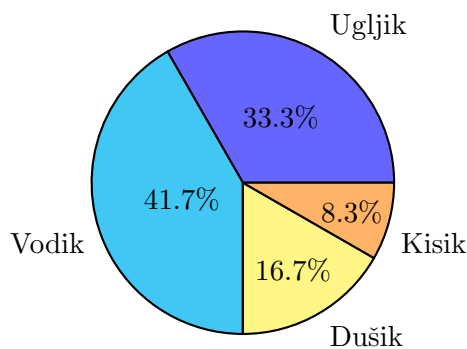
Zadatak 1.7.23 Ispit iz Matematike 1 pisalo je 60 studenata. Njih 18 nije prošlo ispit. Među studentima koji su prošli, 6 ih je dobilo ocjenu izvrstan (5), 9 ocjenu vrlo dobar (4), 12 ocjenu dobar (3), a ostali ocjenu dovoljan (2). Odredite postotke studenata koji su dobili pojedinu ocjenu i nacrtajte kružni dijagram raspodjele ocjena na ispitu.

Rješenje. nedovoljan 30 % (108°), dovoljan 25 % (90°), dobar 20 % (72°), vrlo dobar 15 % (54°), izvrstan 10 % (36°).



Zadatak 1.7.24 Molekulska formula kofeina je $C_8H_{10}N_4O_2$. Izrazite udjele atoma pojedinih elemenata u ukupnom broju atoma u molekuli kofeina u postocima i nacrtajte pripadni kružni dijagram. Postotke zaokružite na jednu decimalu.

Rješenje. C $\approx 33,3\%$ (120°), H $\approx 41,7\%$ (150°), N $\approx 16,7\%$ (60°), O $\approx 8,3\%$ (30°).



Zadatak 1.7.25 Promatramo paralelno izvođenje dvaju pokusa: Bacanje dodekaedarske kockice (kockice s 12 sukladnih strana) i para običnih kockica. Za dodekaedarsku kockicu bilježimo iznos koji padne, za par običnih kockica bilježimo zbrojeve koji padnu. Jesu li pojedinačni ishodi oba ta pokusa jednako vjerojatni? Zašto? Izračunajte vjerojatnosti ishoda 12 te ishoda 7 za oba pokusa.

Rješenje. $P_d(12) = P_d(7) = \frac{1}{12}$; $P_{oo}(12) = \frac{1}{36}$, $P_{oo}(7) = \frac{1}{6}$.

Zadatak 1.7.26 Jedan od zadataka koje je engleski književnik Lewis Carroll (19. st.) zapisao u svojim „Pillow Problems” je sljedeći: U neprozirnoj vrećici su dvije kuglice. Jedino što znate je da je svaka od kuglica bilo crna bilo bijela. Ako ne smijete otvoriti vrećicu, kojih su boja? Riješite Carrollov zadatak.

Zadatak 1.7.27 Prirodni klor ima dva stabilna izotopa: ^{35}Cl (relativna zastupljenost $p = 75\%$) i ^{37}Cl (relativna zastupljenost $q = 25\%$). Pretpostavimo da se pri nastajanju molekula klora Cl_2 izotopi spajaju potpuno nasumično.

- (a) Odredite skup svih elementarnih događaja i njihove vjerojatnosti.
- (b) Izračunajte vjerojatnost da je nasumično odabrana molekula Cl_2 homonuklearna ($^{35}\text{Cl}^{35}\text{Cl}$ ili $^{37}\text{Cl}^{37}\text{Cl}$), odnosno heteronuklearna ($^{35}\text{Cl}^{37}\text{Cl}$).

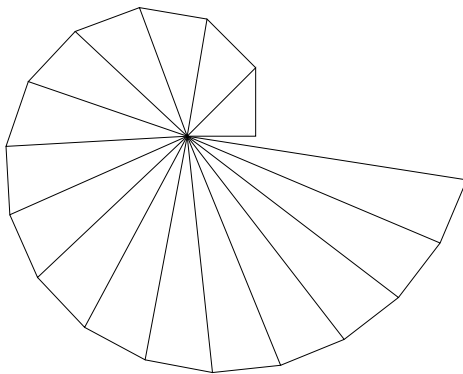
Rješenje. (b) $P(\text{homonuklearna}) = \frac{5}{8} = 62,5\%$; $P(\text{heteronuklearna}) = \frac{3}{8} = 37,5\%$

1.7.2 Zadaci vezani uz iracionalne brojeve i algebarske izraze

Zadatak 1.7.28 Znameniti omjer zlatnog reza definira se kao omjer koji dobijemo na sljedeći način: Za zadanu dužinu na njoj je odabrana točka takva da je omjer cijele dužine prema većem dijelu jednak omjeru većeg dijela prema manjem i taj omjer nazivamo omjerom zlatnog reza i označavamo s ϕ . Izračunajte ϕ i dokažite da je to iracionalan broj.

Rješenje.

Zadatak 1.7.29 Teodor iz Kirene (ca. 465.–398. pr. Kr.) je Platonov bio učitelj, a iz Platonovog dijaloga „Teetet” saznajemo da je Teodor dokazao o „stranicama kvadrata od tri kvadratne jedinice i od pet kvadratnih jedinica, da one nisu izmjerive jediničnom duljinom. Tako je prošao sve kvadratne korijene pojedinačno do kvadrata od sedamnaest kvadratnih jedinica, na kojem je stao“. Vidimo dakle da iz moderne perspektive Platon Teodoru pripisuje dokaz iracionalnosti $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ i $\sqrt{17}$. Uočljivo je da ne spominje kvadrat površine dvije kvadratne jedinice — očigledno je nesumjerljivost stranice i dijagonale kvadrata, tj. ono što danas nazivamo iracionalnošću broja $\sqrt{2}$, u to doba već bila opće poznata. Razlog zašto je stao na kvadratu sa 17 kvadratnih jedinica nije poznat, ali jedna od popularnijih teorija je da je u pozadini Teodorova spirala koja nastaje tako da krenemo jednakokračnog pravokutnog trokuta koji je pola jediničnog kvadrata (dakle, hipotenuza mu je duljine $\sqrt{2}$). Sad se iterativno konstruiraju pravokutni trokuti tako da hipotenuza prethodnog postaje dulja kateta sljedećeg, a kraća kateta im je svima 1 (dakle, hipotenuze su redom duljina $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ...), kao na slici 1.25. Pravokutni trokut hipotenuze duljine $\sqrt{17}$ je u takvoj konstrukciji zadnji koji se još ne preklapa ni s kojim od ranijih. Iskoristite Teodorovu spiralu za dokaz iracionalnosti $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ i $\sqrt{17}$.



Slika 1.25: Teodorova spirala.

Zadatak 1.7.30 Izračunajte egzaktnu vrijednost zadanih izraza i zapišite ju u racionaliziranom obliku:

$$(a) \sqrt{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}};$$

$$(b) \sqrt{2\sqrt{5} - 2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{8}}.$$

Rješenje.

1.7.3 Zadaci iz planimetrije i stereometrije

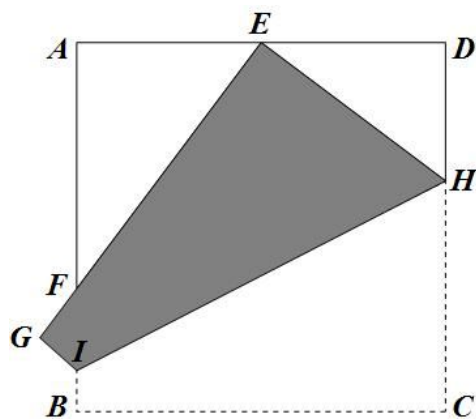
Zadatak 1.7.31 Izračunajte duljinu dijagonale u pravilnom peterokutu te duljine dijagonala u pravilnom šesterokutu.

Rješenje.

Zadatak 1.7.32 List papira ima oblik kvadrata $ABCD$. Vrh C savijte na polovište nasuprotne stranice $\overline{AD}$ (slika 1.26). Ako uzmemo da je duljina stranice polaznog kvadrata jedinična, dokažite da je $|AF| = \frac{2}{3}$ (taj rezultat poznat je kao Hagin teorem). Koliko iznose $|DH|$, $|EF|$, $|GI|$, $|FI|$ i $|HI|$?

Rješenje.

Primjer 1.113 Bakar kristalizira u kubičnom sustavu te se jedinična ćelija bakra može odabrati kao kocka brida $a = 3,615 \text{ \AA}$. Pritom se radi o tzv. plošno centriranoj jediničnoj ćeliji, što znači da možemo odabrati ćeliju tako da su jezgre četiri atoma bakra u njezinim vrhovima i još šest po jedan u središtu svake strane. Izračunajte gustoću strukture bakra, tj. omjer volumena kojeg unutar jedne ćelije zauzimaju dijelovi atoma bakra koji su unutar nje i volumena cijele ćelije.



Slika 1.26: Hagin teorem.

1.7.4 Zadaci vezani za linearne jednađbe i nejednađbe

Bibliografija

- [1] Apostol, T. M. (2000). Irrationality of The Square Root of Two—A Geometric Proof. *The American Mathematical Monthly*, 107(9), 841–842. <https://doi.org/10.1080/00029890.2000.12005280>
- [2] P. ATKINS, J. DE PAULA, *Physical Chemistry*. Oxford University Press, 2006.
- [3] A. CUNNINGHAM, R. WHELAN, *Maths for Chemists*. Univ. of Birmingham, Univ. of Leeds, 2014.
- [4] T. CVITAŠ, materijali iz fizikalne kemije, ftp://ftp.chem.pmf.hr/download/cvitas/Fiz_Kem/, pristupljeno 2. listopada 2009.
- [5] P. DAWKINS, Paul's Online Math Notes. <http://tutorial.math.lamar.edu/>, pristupljeno 1. rujna 2025.
- [6] G. JUST, D. OELSCHLÄGEL, *Mathematik für Chemiker*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1981.
- [7] S. KUREPA, *Matematička analiza 2. Tehnička knjiga*, Zagreb, 1971.
- [8] R. G. MORTIMER, *Mathematics for Physical Chemistry*, 3rd ed., Elsevier, 2005.
- [9] G. PÓTA, *Mathematical Problems for Chemistry Students*. Elsevier, 2006.
- [10] E. A. REINSCH, *Mathematik für Chemiker*. Teubner, 2004.
- [11] V. SIMEON, *Kemijska termodinamika*, 1. poglavlje, primjerak za studentsku uporabu. Zagreb, 2004.
- [12] E. STEINER, *The Chemistry Maths Book*. Oxford University Press, 2008.
- [13] H. TIJMS, *Understanding Probability*. Cambridge Univ. Press, 2007.
- [14] University of Cambridge: NRICH enriching mathematics. <http://nrich.maths.org/>, pristupljeno 1. rujna 2025.

Kazalo

- 0^0 , 4
- $\approx$, 14
- $\mathbb{N}_0$, 1
- $\mathbb{Q}$, 1
- $\mathbb{N}$, 1
- $\mathbb{Z}$, 1
- π , 38
- π , 24
- e , 22

- algoritam, Euklidov, 24
- analitička geometrija ravnine, 30
- antiprizma, 50
- apscisa, 27

- binom, 32
- broj, 5
- broj decimala, 6
- broj, cijeli, 1
- broj, decimalan, 5–7
- broj, iracionalan, 24, 25
- broj, prirodan, 1, 41
- broj, racionalan, 1, 2, 6, 10, 25, 54
- broj, recipročni, 3
- broj, suprotni, 2
- brojavni sustav, seksagezimalni, 6
- brojevni sustav, binarni, 5
- brojka, 5
- brojnost, 1

- dijagonala, 39
- dijagram, kružni, 12, 42
- dijeljenje, 1, 2, 14
- dijeljenje polinoma, 36
- djelitelj, najveći zajednički, 24
- dogđaj, elementarni, 16
- dogđaj, slučajni, 16
- dogđaj, elementarni, 15, 20
- dogđaj, slučajni, 15, 17
- dogđaj, slučajni, 15
- dužina, 22

- dužina, 37
- duljina, 22, 37

- element, neutralni, 1

- formula, binomna, 34
- formula, empirijska, 9
- formula, Heronova, 39
- fraktal, 47
- frekvencija, relativna, 19

- Gaußova metoda eliminacije, 63
- greška aproksimacije, 13, 14
- greška aproksimacije, apsolutna, 14
- greška aproksimacije, relativna, 14
- greška mjerenja, 14
- gustoća racionalnih brojeva, 67

- homogeni sustav linearnih jednadžbi, 60, 62

- interval, 26
- ishodište, 27
- isječak, kružni, 12, 42
- izraz, algebarski, 32

- jedinica, mjerna, 1
- jednadžba pravca, 31, 56
- jednadžba pravca, eksplicitna, 30
- jednadžba pravca, implicitna, 31, 58
- jednadžba, linearna s dvije nepoznanice, 58
- jednadžba, linearna, 54, 58
- jednadžba pravca, 31

- karakteristika, 7
- kocka, 47, 51
- koeficijent proporcionalnosti, 10
- koeficijent, binomni, 18
- koeficijent, kladionički, 21
- komutativnost, 2
- koncentričnost, 42
- konstanta, Avogadrova, 7

- koordinate, 27
- koordinatni sustav, Kartezijev, 27, 56
- koordinatni sustav, pravokutni, 27, 56
- korijen, kubni, 22
- korijen, kvadratni, 22
- korjenovanje, 22
- kosinus, 39
- kraćenje, 2
- kružni isječak, 12
- kružnica, 42
- krug, 42
- kub binoma, 34
- kugla, 52
- kut, 12, 37
- kut, šiljasti, 38
- kut, ispruženi, 12
- kut, obodni, 42
- kut, pravi, 12, 38
- kut, puni, 12, 38
- kut, središnji, 42
- kut, tupi, 38
- kvadar, 47
- kvadranti, 28
- kvadrat, 39
- kvocijent proporcionalnosti, 8
- lik, geometrijski, 38
- luk kružnice, 42
- mantisa, 7
- metoda eliminacije, 63
- metoda supstitucije, 60
- metoda, Heronova, 22
- mjera kuta, 38
- mjerna jedinica, 8
- množenje, 1, 2, 14
- množenje i dijeljenje razlomaka, 2
- mnogokut, 39
- mnogokut, pravilni, 41
- monom, 33, 36
- naboj elektrona, 7
- nejednadžba, linearna, 57
- nejednadžba, linearna s dvije nepoznanice, 58
- nejednadžba, linearna, 57
- nenegativnost, 14
- notacija, znanstvena, 7
- nula, 1, 3
- očekivanje, 20
- odsječak, kružni, 42
- oduzimanje, 1, 2, 14
- okomitost, 38
- omjer, 8, 10
- omjer zlatnog reza, 71
- opseg, 38
- ordinata, 27
- osi, koordinatne, 27
- osnovne računske operacije, 1
- označavanje osi, 28
- par, uređeni, 58
- par, uređeni, 27
- paralelnost, 38
- paralelogram, 39
- pH, 1
- piramida, 49
- planiranje prostora za crtanje, 29
- ploha, 52
- ploha geometrijskog tijela, 46
- pokus, Bernoullijev, 18
- pokus, slučajni, 15, 16, 18, 20
- poliedar, 46
- poliedar, pravilan, 51
- poligon, 39
- polinom, 36
- polumjer kružnice, 42
- polupravac, 37
- popločenje, pravilno, 41
- postotak, 10, 11, 13, 14, 54, 70
- potenciranje, 4, 7, 22, 25
- poučak, Pitagorin, 39
- površina, 38
- pravac, 30, 37, 56, 58
- pravac, brojevni, 22
- pravac, horizontalni, 28
- pravac, vertikalni, 28
- pravilo, trapezno, 40
- presjek skupova, 26
- princip deve, 4
- prizma, 47
- proširivanje, 1, 4
- promil, 14
- promjer kružnice, 42
- proporcionalnost, 8, 10, 12

- prsten, kružni, 42
- racionalizacija, 27
- radijan, 37
- raspodjela, binomna, 18, 19
- razlika kubova, 34
- razlika kvadrata, 33
- razlomak, 1, 2
- razlomak, dvostruki, 2
- razlomak, jedinični, 2
- razlomak, verižni, 66
- razmjer, 8
- razmjernost, 8
- red veličine, 7
- redoslijed računskih operacija, 4
- rješenje, trivijalno, 62
- rješenje linearne jednadžbe, 54, 58
- rješenje linearne nejednadžbe, 57
- rješenje sustava linearnih jednadžbi, 62
- romb, 39
- simetrala, 52
- sinus, 39
- sjecište pravaca, 38
- sredina, aritmetička, 4, 23
- sredina, geometrijska, 23
- sredina, harmonijska, 4, 23
- statistika, 19
- stehiometrija, 9, 62
- stereometrija, 46
- stožac, 49
- stupanj, 37
- sustav (ne)jednadžbi, 58
- sustav linearnih jednadžbi, 60, 62
- svođenje na potpun kvadrat, 33
- tangens, 39
- temperatura, 10
- teorem, binomni, 34
- teorem, Talesov, 42
- tetiva, 42
- tetraedar, 49
- tetraedar, pravilni, 51
- tijelo, geometrijsko, 46
- tijelo, Platonovo, 51
- točka, decimalna, 6
- točka, 37
- trapez, 39
- trapez, jednakokračni, 39
- trinom, 32
- trojka, uređena, 65
- trokut, 39
- trokut, jednakokračni, 39
- trokut, jednakokranični, 39, 41
- trokut, pravokutan, 39
- valjak, 47
- varijable, slučajna, 20
- veličina, skalarna, 8
- veličina, skalarna, 1
- vjerojatnost, 14, 16, 17, 19–21
- vjerojatnost a posteriori, 19
- vjerojatnost a priori, 19
- vjerojatnost suprotnog događaja, 17
- vjerojatnost, geometrijska, 45
- vrhovi mnogokuta, 39
- vrijednost, apsolutna, 14
- zakon velikih brojeva, 19
- zaokruživanje, 14, 26
- zapis, decimalni, 5, 6, 14
- zapis, dekadski, 5
- zareza, decimalni, 6
- zbrajanje, 1, 14
- zbrajanje i oduzimanje razlomaka, 1
- zbroj kutova u mnogokutu, 39
- značajne znamenke, 14
- znamenka, 5
- znamenke, značajne, 7
- zraka, 37
- član, slobodni, 58