

1 Realni brojevi

U 19. stoljeću započinje razvoj aksiomatskih sustava za fundamentalna područja matematike, kao što su aritmetika, analiza i geometrija. Aksiomi su temeljne matematičke izjave unutar formalnog matematičkog sustava koje se ne dokazuju, nego se prihvaćaju kao početne pretpostavke. One služe kao polazišna osnova iz koje se, primjenom logičkih pravila zaključivanja, izvode svi ostali iskazi sustava (teoremi). Ako gradite kuću, trebate temelj. Temelj ne stoji na nečemu drugom — on je početna točka. U matematici se ti temelji zovu aksiomi, a teoreme bismo mogli usporediti sa zidovima i krovom. Također, o aksioma možete razmišljati kao o pravilima igre. Primjerice, ako želimo igrati šah, moramo znati kako se figura smije kretati, što znači šah-mat, što je dozvoljen potez. Ta pravila ne dokazujemo — jednostavno ih prihvaćamo kao početnu osnovu igre, a daljnu igru razvijamo koristeći dozvoljena pravila.

1.1 Prirodni brojevi

Aksiome za prirodne brojeve zovemo **Peanovi aksiomi** po talijanskom matematičaru Giuseppeu Peanu (1858. - 1932.).

Pitanje: Kako bismo definirali skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i operacije zbrajanja i množenja na tom skupu, koristeći samo pojam **skupa** i **funkcije**?

Ako bi vas netko pitao koji je istaknuti element skupa prirodnih brojeva, vjerojatno biste rekli da je to broj 1 jer je to najmanji prirodni broj. U osnovnoj školi ste naučili da je broj 2 sljedbenik broja 1, 3 sljedbenik broja 2, itd. Broj 1 nije sljedbenik niti jednog prirodnog broja. Moguće da ste pomislili da je 1 sljedbenik broja 0, ali 0 nije prirodni broj. Koristeći funkciju sljedbenika i 1 kao istaknuti element skupa prirodnih brojeva koji nije sljedbenik niti jednog prirodnog broja, dolazimo do sljedeće definicije skupa prirodnih brojeva.

Definicija. Trojka $(\mathbb{N}, s, 1)$, gdje je $\mathbb{N}$ skup, $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funkcija, $1 \in \mathbb{N}$ se zove Peanova trojka ako zadovoljava sljedeće aksiome:

(P1) Broj 1 nije sljedbenik niti jednog prirodnog broja, tj.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s(n) \neq 1,$$

(P2) Funkcija s je injekcija, tj.

$$m \neq n \Rightarrow s(m) \neq s(n)$$

(Ovdje zapravo piše da različiti prirodni brojevi imaju različite sljedbenike.)

(P3) Ako je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

1. $1 \in S$,
2. Ako je $n \in S$, onda je $s(n) \in S$, tj.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (n \in S \Rightarrow s(n) \in S),$$

tada je $S = \mathbb{N}$.

Aksiome (P1), (P2) i (P3) nazivamo **Peanovi aksiomi**. Aksiom (P3) zovemo **aksiom matematičke indukcije**.

Skup $\mathbb{N} = \{1, s(1), s(s(1)), s(s(s(1))), \dots\}$ kraće zapisujemo kao

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

pri čemu je $2 := s(1)$, $3 := s(2) = s(s(1))$, itd.

Svaki skup za kojeg vrijede Peanovi aksiomi poistovjećujemo sa skupom prirodnih brojeva.

Primjer. Skup

$$P = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$$

možemo poistovjetiti sa skupom $\mathbb{N}$.

Prvi element tog skupa je $\emptyset$ (odgovara broju $1 \in \mathbb{N}$), a funkcija sljedbenika je definirana sa

$$s(x) = \{x\}, \quad x \in P.$$

Domaća zadaća. Razmislite možemo li skup $A = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$ prirodno poistovjetiti sa skupom $\mathbb{N}$? Ako da, na koji način? A skup $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$?

Primjer. Matematičkom indukcijom dokažite da vrijedi

$$\frac{1^2 + 2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{n^2 + (n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{n(2n+3)}{n+1}$$

za sve prirodne brojeve n .

Uvedimo oznaku

$$S_n = \frac{1^2 + 2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{n^2 + (n+1)^2}{n(n+1)}.$$

Baza indukcije: $n = 1$

$$S_1 = \frac{1^2 + 2^2}{1 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1(2+3)}{1+1} = \frac{5}{2}.$$

Indukcijska pretpostavka:

Pretpostavimo da vrijedi

$$S_n = \frac{1^2 + 2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{n^2 + (n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{n(2n+3)}{n+1}.$$

Indukcijski korak: Koristeći induktivnu pretpostavku trebamo dokazati

$$\frac{1^2 + 2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{n^2 + (n+1)^2}{n(n+1)} + \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(2(n+1)+3)}{(n+1)+1}.$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(2n+3)}{n+1} + \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(2n+3)(n+2) + (n+1)^2 + (n+2)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+2)(2n^2 + 3n) + (n+1)^2 + (n+2)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+2)(2n^2 + 3n + n + 2) + (n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2(n+2)(n^2 + 2n + 1) + (n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2(2n+5)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(2n+5)}{n+2} \\ &= \frac{(n+1)(2(n+1)+3)}{(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Time je induksijski korak dokazan pa tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Primjer. Dokažite da za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Primjer. Dokažite da vrijedi

$$\underbrace{\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \cdots + \sqrt{4}}}}}_{n \text{ korijena}} < 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Primjer. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 eura i 5 eura moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu od 8 eura na više.

1.2 Cijeli brojevi

Želimo proširiti skup $\mathbb{N}$ na skup u kojem svaka jednadžba

$$x + n = m, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

ima rješenje. Kako to napraviti koristeći se prirodnim brojevima? Na koji način možemo dobiti cijele brojeve iz prirodnih? Intuitivno, svaki cijeli broj možemo dobiti kao razliku dva prirodna broja. Na primjer

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 1 = 2 - 2 = 3 - 3 = \dots \\ -1 &= 1 - 2 = 2 - 3 = 3 - 4 = \dots, \\ -2 &= 1 - 3 = 2 - 4 = 3 - 5 = \dots \end{aligned}$$

Problem je što još uvijek nismo definirali operaciju oduzimanja.

Međutim, vidimo da bismo broj 0 mogli prirodno poistovjetiti s uređenim parovima prirodnih brojeva $(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots$ (jer je njihova razlika 0), broj -1 poistovjetiti s uređenim parovima $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ (jer je njihova razlika -1) i slično.

Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ definiramo relaciju $\sim$ na sljedeći način:

$$(m, n) \sim (p, q) \iff m + q = n + p.$$

Za zadaću provjerite da je relacija $\sim$ relacija ekvivalencije (refleksivna, simetrična, tranzitivna).

Ako vam se definicija relacije $\sim$ ne čini sasvim intuitivna, možete razmišljati ovako: Uređeni par (m, n) predstavlja cijeli broj $m - n$. Uređeni par (p, q) predstavlja cijeli broj $p - q$. Ta dva cijela broja su jednaka ako i samo ako je $m - n = p - q$, što u terminima zbrajanja možemo zapisati kao $m + q = n + p$. Netko će se možda pitati čemu kompliciranje. Stvar je u tome da cijelu teoriju želimo izgraditi preko aksioma i onda se u ovom trenutku pravimo da ne znamo što je operacija oduzimanja. Dopušteno je koristiti samo prirodne brojeve, operaciju zbrajanja koju smo definirali i svojstva zbrajanja.

Primjer. Vrijedi $(2, 3) \sim (3, 4)$ jer je $2 + 4 = 3 + 3$. Uočimo da oba uređena para, $(2, 3)$ i $(3, 4)$ predstavljaju cijeli broj -1 jer je $2 - 3 = 3 - 4 = -1$.

Skup cijelih brojeva definiramo kao kvocijntni skup

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim,$$

tj. skup klasa ekvivalencije relacije $\sim$.

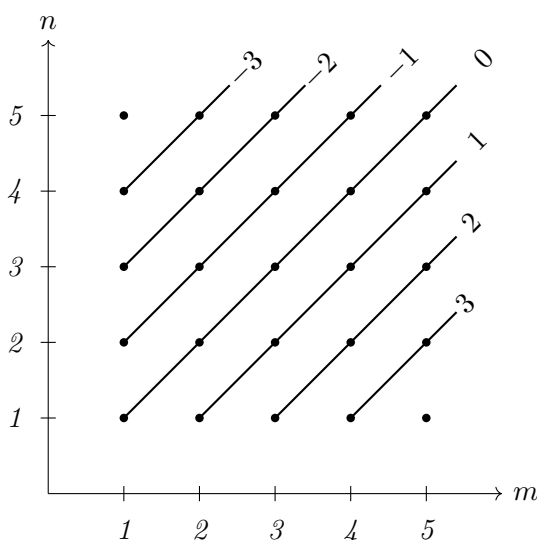
Klasa elementa (m, n) označava se s $[(m, n)]$ i interpretira kao $m - n$.

Primjer.

$$[(1, 1)] = \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\} \quad (\text{označavamo s } 0),$$

$$[(1, 2)] = \{(n, n + 1) : n \in \mathbb{N}\} \quad (\text{označavamo s } -1),$$

$$[(2, 1)] = \{(n + 1, n) : n \in \mathbb{N}\} \quad (\text{označavamo s } 1).$$



1.3 Racionalni brojevi

Želimo proširiti skup $\mathbb{Z}$ na skup u kojem svaka jednačba $x \cdot n = m$, gdje je $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ima rješenje. Iz osnovne škole znamo da su racionalni brojevi kvocijenti cijelih brojeva.

Primjer.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{k}{2k}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Razlomak $\frac{1}{2}$ možemo poistovjetiti s uređenim parom $(1, 2)$, ali i s uređenim parom $(2, 4)$, kao i sa svakim uređenim parom $(k, 2k)$, gdje je $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Općenito, svaki razlomak možemo poistovjetiti s uređenim parom (brojnik, nazivnik), pri čemu nazivnik možemo izabrati tako da bude prirodan broj, dok je brojnik cijeli broj. Budući da svaki razlomak možemo na beskonačno mnogo načina zapisati kao kvocijent brojnika i nazivnika, sve takve uređene parove poistovjećujemo, odnosno stavljamo ih u istu klasu.

Definiramo relaciju $\sim$ na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ s

$$(x, y) \sim (m, n) \iff xn = ym.$$

Ovo odgovara poznatoj činjenici:

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \iff xn = ym.$$

Relacija $\sim$ identificira sve uređene parove koji predstavljaju isti razlomak. Drugim riječima, dva para smatramo jednakima ako daju isti racionalni broj. Na taj način svaki racionalni broj zapravo predstavlja jednu klasu ekvivalencije uređenih parova.

Ta relacija je relacije ekvivalencije. Skup racionalnih brojeva definiramo kao kvocijentni skup

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) / \sim.$$

Elemente skupa $\mathbb{Q}$ nazivamo racionalnim brojevima. Svaki racionalni broj predstavlja jednu klasu ekvivalencije uređenih parova cijelog broja i prirodnog broja, a zapis $\frac{x}{y}$ koristimo kao standardni predstavnik klase $[(x, y)]$.

Primjer.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= [(1, 2)] = \{(k, 2k) : k \in \mathbb{N}\} \\ -\frac{2}{3} &= [(-2, 3)] = \{(-2k, 3k) : k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

1.4 Uređaji na skupovima $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Primarni ili standardni uređaj na skupu $\mathbb{N}$ definiran je na sljedeći način:

$$m < n \quad \text{ako i samo ako} \quad \exists k \in \mathbb{N} \text{ takav da je } n = m + k.$$

- Na $\mathbb{Z}$:

$$x < y \iff \exists z \in \mathbb{N} \text{ takav da je } x + z = y.$$

- Na $\mathbb{Q}$:

$$\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} \iff mn' < m'n.$$

- Općenito:

$$x \leq y \iff (x < y \text{ ili } x = y).$$

Napomena. Relacija $\leq$ na skupovima $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ima sljedeća svojstva:

1. $(\forall a \in \mathbb{Q}) (a \leq a)$ (refleksivnost)
2. $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) (a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow (a = b)$ (antisimetričnost)
3. $(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}) (a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$ (tranzitivnost)
4. $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) (a \leq b) \vee (b \leq a)$ (linearnost ili totalnost)

$$(1) + (2) + (3) + (4) \Rightarrow \text{totalni uređaj.}$$

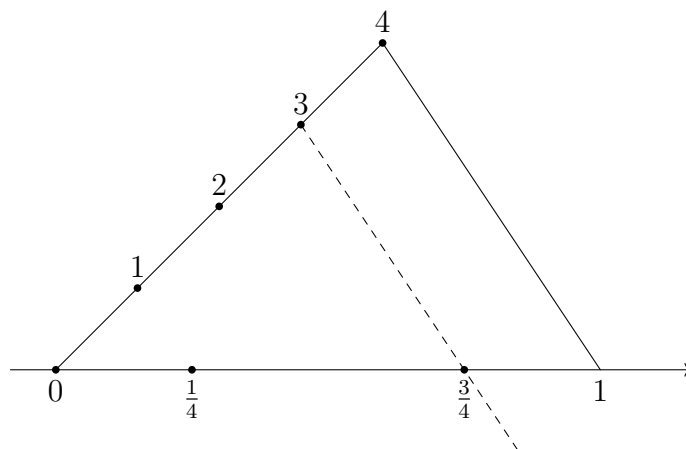
Uređaj na skupu $\mathbb{Q}$ zadovoljava i sljedeća svojstva:

- $\forall a, b \in \mathbb{Q} (a \leq b) \Rightarrow (\forall c \in \mathbb{Q} (a + c \leq b + c))$
- $\forall a, b \in \mathbb{Q} ((0 \leq a) \wedge (0 \leq b) \Rightarrow (0 \leq ab))$

1.5 Brojevni pravac

Pri prikazu racionalnog broja $\frac{m}{n}$, $0 < m < n$, na brojevnom pravcu koristimo Talesov teorem. Na primjer, ako razlomak $\frac{3}{4}$ želimo prikazati na brojevnom pravcu, prvo na pomoćnom pravcu nanesimo četiri jednake dužine. Zatim točku koja predstavlja broj 4 na pomoćnom pravcu spojimo s točkom koja predstavlja broj 1 na brojevnom pravcu. Potom kroz točku koja predstavlja broj 3 na pomoćnom pravcu povučemo paralelu s tom spojnicom. Presjek te paralele s brojevnim pravcem predstavlja broj $\frac{3}{4}$.

Na taj način ravnalom i šestarom možemo na pravcu konstruirati svaki racionalan broj.



Uočimo još da je skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ gust u sebi, tj.

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, q_1 < q_2, \exists q \in \mathbb{Q}$$

takav da je

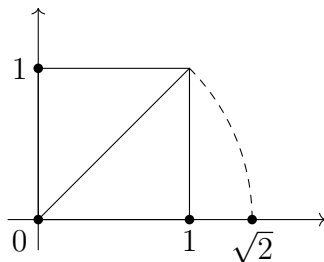
$$q_1 < q < q_2.$$

Na primjer, to vrijedi za

$$q = \frac{q_1 + q_2}{2}.$$

Predstavlja li svaka točka na pravcu neki racionalan broj?

Konstruirajmo točku koja je od 0 udaljena za dužinu dijagonale kvadrata sa stranicama duljine 1. Iz Pitagorinog poučka slijedi da ta točka odgovara broju čiji je kvadrat jednak 2, tj. broju $\sqrt{2}$.



Dokažimo da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Pretpostavimo suprotno tj. da vrijedi

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}.$$

Tada postoje relativno prosti brojevi $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2},$$

odnosno

$$\frac{m^2}{n^2} = 2,$$

odakle slijedi

$$m^2 = 2n^2.$$

Pošto je desna strana posljednje jednakosti prirodan broj djeljiv s 2, tada je i m^2 djeljiv s 2. Tada je i m djeljiv s 2, tj.

$$m = 2m_0$$

za neki $m_0 \in \mathbb{N}$. (Ukoliko bi m bio neparan broj $m = 2m_0 + 1$, vrijedilo bi

$$m^2 = (2m_0 + 1)^2 = 4m_0^2 + 4m_0 + 1,$$

što je neparan broj.)

Sada imamo

$$4m_0^2 = 2n^2,$$

odnosno

$$2m_0^2 = n^2.$$

Oдавде pak zaključujemo da je i $n = 2n_0$ za neki $n_0 \in \mathbb{N}$.

Dakle,

$$m = 2m_0, \quad n = 2n_0,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom da su m i n relativno prosti.

1.6 Aksiomi polja $\mathbb{R}$, potpunost

Do sada smo vidjeli da se cijeli brojevi mogu definirati preko prirodnih brojeva, a racionalni preko cijelih brojeva. Osim toga, kad smo uvodili cijele brojeve, jedna od motivacija za to nam je bila rješavanje jednažbi tipa $x + 3 = 2$. Ta jednažba nema rješenje u skupu prirodnih brojeva, a ima rješenje u skupu cijelih brojeva. Nadalje, jednažba $x \cdot 3 = 2$ nema rješenje u skupu cijelih brojeva, ali ima rješenje u skupu racionalnih brojeva.

Vidjeli smo da postoje brojevi na brojevnom pravcu koji nisu racionalni. Jedan takav primjer je bio broj $\sqrt{2}$ koji je jedno od rješenja jednažbe $x^2 = 2$. Postavlja se pitanje možemo li svaki realni broj dobiti kao rješenje neke algebarske jednažbe

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0,$$

gdje su $a_0, a_1, \dots, a_n$ cjelobrojni koeficijenti? Realni brojevi koji su rješenja takvih jednažbi zovu se **algebarski brojevi**. Međutim, postoje realni brojevi koji nisu algebarski. Takvi realni brojevi se zovu **transcendentni brojevi**. Najpoznatiji transcendentni brojevi su π i e .

Aksiomi polja $\mathbb{R}$

U ovoj točki uvodimo aksiomatiku skupa realnih brojeva koja određuje sva njegova svojstva s obzirom na algebarsku strukturu i uređaj na njemu.

$\mathbb{R}$ je komutativna grupa s obzirom na operaciju zbrajanja

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

A1. Asocijativnost zbrajanja

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

A2. Postoji neutralni element 0

$$(\exists 0 \in \mathbb{R}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 + x = x + 0 = x.$$

A3. Postojanje suprotnog elementa

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\exists (-x) \in \mathbb{R}) \quad x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

A4. Komutativnost zbrajanja

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x + y = y + x.$$

Skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativna grupa s obzirom na množenje

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

A5. Asocijativnost množenja

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x(yz) = (xy)z.$$

A6. Postoji neutralni element 1

$$(\exists 1 \in \mathbb{R}) \quad (1 \neq 0) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

A7. Postojanje multiplikativnog inverza

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (\exists x^{-1} \in \mathbb{R}) \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

A8. Komutativnost množenja

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad xy = yx.$$

A9. Distributivnost

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x(y + z) = xy + xz.$$

Uređenu trojku $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nazivamo **poljem**. Uvjet $1 \neq 0$ naziva se uvjet netrivialnosti jer bi u suprotnom bilo $\mathbb{R} = \{0\}$.

Na skupu $\mathbb{R}$ zadan je linearan (totalan) uređaj $\leq$.

A10. Linearni uređaj

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad (x \leq y) \vee (y \leq x).$$

A11. Antisimetričnost

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y).$$

A12. Tranzitivnost

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z).$$

Uređaj je u skladu s operacijama zbrajanja i množenja.

A13. Usklađenost zbrajanja

$$(x \leq y) \Rightarrow (\forall z \in \mathbb{R}, x + z \leq y + z).$$

A14. Usklađenost množenja

$$(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq xy.$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je **totalno uređeno polje**.

Uočimo da i četvorka $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ zadovoljava svih 14 aksioma. Očito nam tih 14 aksioma nije dovoljno da aksiomatski razlikujemo $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$. Za potpuno aksiomatiku skupa $\mathbb{R}$ će nam trebati još jedan askiom, tzv. aksiom potpunosti. Da bismo uveli taj askiom, prvo trebamo definirati pojam supremuma.

Supremum i infimum skupa, aksiom potpunosti

Definicija. Kažemo da je $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, **odozgo omeđen** u $\mathbb{R}$, ako postoji broj $M \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$(\forall x \in S) \quad x \leq M.$$

Broj M zovemo **gornja međa** ili **majoranta** skupa S .

Kažemo da je $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, **omeđen odozdo** u $\mathbb{R}$, ako postoji broj $m \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$(\forall x \in S) \quad m \leq x.$$

Broj m zovemo **donja međa** ili **minoranta** skupa S .

Skup $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, je **omeđen** u $\mathbb{R}$, ako je omeđen odozdo i odozgo u $\mathbb{R}$.

Ako skup S ima majorantu, onda on ima beskonačno mnogo majoranti jer je svaki veći broj također majoranta. Nas će zanimati najmanja majoranta.

Definicija. Broj $L \in \mathbb{R}$ koji je najmanja gornja međa nepraznog odozgo omeđenog skupa $S \subset \mathbb{R}$ nazivamo **supremum** skupa S i pišemo

$$L = \sup S.$$

$L = \sup S$ je karakteriziran sljedećim svojstvima:

1. $(\forall x \in S) x \leq L$. (Ovdje je zapravo simbolima zapisano da je L gornja međa skupa S .)
2. $(\forall a \in \mathbb{R}) (a < L) (\exists x \in S, a < x)$. (Ovdje je simbolima zapisano da niti jedan element a koji je strogo manji od L nije gornja međa skupa S .)

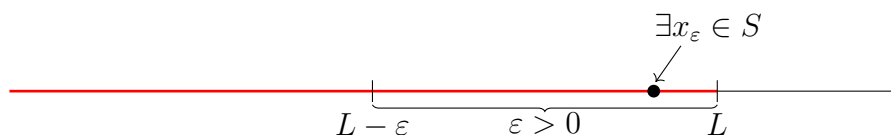
Sve brojeve a koji su manji od L možemo zapisati u obliku $L - \varepsilon$, za neki $\varepsilon > 0$. Onda uvjet 2. možemo zapisati i ovako:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists x_\varepsilon \in S) L - \varepsilon < x_\varepsilon,$$

odnosno $L = \sup S$ je karakteriziran sljedećim svojstvima:

1. $\forall x \in S, x \leq L$ (L je gornja međa skupa S .)
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in S, L - \varepsilon < x_\varepsilon$ (Brojevi manji od L nisu gornje mede skupa S .)

Uvjet 2. bismo još dodatno mogli pojasniti ovako. Ako se pomaknemo za ε lijevo od L , dobit ćemo broj $L - \varepsilon$ koji nije gornja međa skupa S , što znači da je neki element x_ε skupa S veći od $L - \varepsilon$.

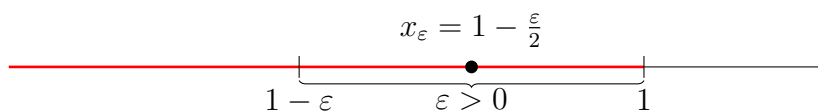


Primjer. Neka je $S = \langle -\infty, 1 \rangle$. Tada je $L = \sup S = 1$.

Dokaz. 1. Za sve $x \in S$ vrijedi $x < 1$.

2. Za $\varepsilon > 0$ možemo naći neki element skupa S koji je veći od $1 - \varepsilon$, npr. aritmetičku sredinu brojeva $1 - \varepsilon$ i 1 .

$$x_\varepsilon = \frac{(1 - \varepsilon) + 1}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$



Supremum koji je u skupu nazivamo **maksimum**, tj. ako je

$$L = \sup S \in S$$

onda je $L = \max S$.

Sada napokon možemo izreći posljednji aksiom skupa $\mathbb{R}$.

A 15. (Aksiom potpunosti):

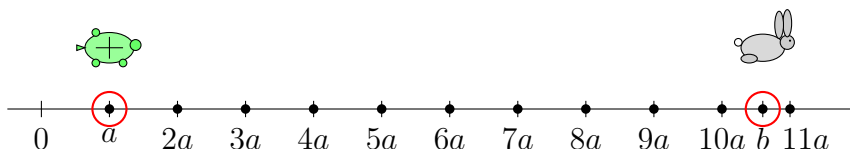
Svaki neprazan odozgo omeđen podskup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

Totalno uređeno polje koje zadovoljava (A15) zovemo **uređeno potpuno polje**. Dakle, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je uređeno potpuno polje.

Teorem 1.1 (Arhimedov aksiom). U skupu $\mathbb{R}$ vrijedi:

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}) (a > 0, b > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) \text{ t.d. } (na > b).$$

Prije nego što dokažemo zadani teorem, pokušat ćemo ga opisati da ga lakše zapamtite. Zamislite da kornjača ima duljinu koraka a , a zec duljinu koraka b . Kao i u Ezopovim basnama, samouvjereni zec je napravio jedan veliki korak duljine b i odlučio odrijemati. Za to vrijeme, vrijedna kornjača radi male korake duljine a . Trebat će joj neko vrijeme da prestigne usnulog zeca, ali nakon nekog broja koraka (ukoliko zec nastavi spavati), sporna i vrijedna kornjača će preći zeca. Taj broj koraka je n .



Na gornjoj slici je $n = 11$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj.

$$(\exists a, b \in \mathbb{R}) \quad (a > 0, b > 0) \text{ t.d. } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad na \leq b.$$

Uvedimo oznaku

$$S := \{na : n \in \mathbb{N}\}.$$

Kako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $na \leq b$, slijedi da je b gornja međa skupa S . Po aksiomu potpunosti postoji

$$L := \sup S.$$

Vrijedi:

$$(i) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad na \leq L.$$

$$(ii) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists x_\varepsilon) \in S \text{ takav da je}$$

$$L - \varepsilon < x_\varepsilon.$$

Pošto je $x_\varepsilon \in S$, onda je $x_\varepsilon = n_\varepsilon a$ za neki $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \text{ t.d. } L - \varepsilon < n_\varepsilon a.$$

Koji $\varepsilon > 0$ izabrati da dođemo do kontradikcije s početnom pretpostavkom? Možemo uzeti onaj $\varepsilon > 0$ za kojeg će $n_\varepsilon a + \varepsilon$ biti element skupa S , npr. $\varepsilon = a$.

Uzmemo li $\varepsilon = a$, onda postoji $n_a \in \mathbb{N}$ takav da

$$L - a < n_a a,$$

odnosno

$$L < (n_a + 1)a.$$

Međutim, kako je $(n_a + 1)a \in S$, dobili smo kontradikciju s (i), da je L gornja međa skupa S .

□



Netko se može zapitati vrijedi li Arhimedov aksiom i u skupu $\mathbb{Q}$ i ako da, možemo li to dokazati bez korištenja aksioma potpunosti? Odgovor je da.

Zadatak. *Dokažite da Arhimedov aksiom vrijedi u skupu $\mathbb{Q}$.*

Rješenje. *Neka su $q, q' \in \mathbb{Q}$, $q, q' > 0$. Tada postoje $m, k, m', k' \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$q = \frac{m}{k}, \quad q' = \frac{m'}{k'}.$$

Treba dokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da

$$nq > q',$$

odnosno

$$n \frac{m}{k} > \frac{m'}{k'},$$

što je ekvivalentno

$$n(mk') > m'k.$$

Uočimo da su brojevi (mk') i $(m'k)$ prirodni brojevi. Dakle dovoljno je pokazati da za svaka dva $a, b \in \mathbb{N}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da

$$na > b.$$

Pretpostavimo suprotno:

$$(\exists a, b \in \mathbb{N}) \text{ t.d. } (\forall n \in \mathbb{N}) na \leq b.$$

Posebno, za $n = b$ imamo

$$ba \leq b \Rightarrow a \leq 1.$$

Dakle $a = 1$, odakle slijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \leq b.$$

Došli smo do kontradikcije (znamo da skup $\mathbb{N}$ nije odozgo omeđen.)

Zadatak. Odredite supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rješenje. Vrijedi

$$(i)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

pa je 1 gornja međa skupa S .

Dokažimo da je 1 supremum. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan.

(ii) Treba dokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &< \frac{n}{n+1}. \\ \Leftrightarrow 1 - \varepsilon &< 1 - \frac{1}{n+1} \\ \Leftrightarrow 1 &< \varepsilon(n+1) \end{aligned}$$

Primjenom Arhimedovog aksioma na 1 („korak zeca“) i $\varepsilon > 0$ („korak kornjače“) dobijemo

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{takav da} \quad n_\varepsilon \varepsilon > 1,$$

odakle slijedi $1 < n_\varepsilon \varepsilon < \varepsilon(n_\varepsilon + 1)$. Dakle postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$1 - \varepsilon < \frac{n_\varepsilon}{n_\varepsilon + 1}.$$

Dokazali smo da je

$$\sup S = 1.$$

Zadatak. Odredite supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{4n-3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rješenje. (i) Vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{4n-3}{2n+1} = \frac{2(2n+1)-5}{2n+1} = 2 - \frac{5}{2n+1} < 2.$$

pa je 2 gornja međa skupa S .

Dokažimo da je 2 supremum. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan.

(ii) Treba dokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da

$$2 - \varepsilon < \frac{4n-3}{2n+1}.$$

$$\Leftrightarrow 2 - \varepsilon < 2 - \frac{5}{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow 5 < \varepsilon(2n+1)$$

Primjenom Arhimedovog aksioma na 5 („korak zeca“) i $\varepsilon > 0$ („korak kornjače“) dobijemo

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{takav da} \quad n_\varepsilon \varepsilon > 5,$$

odakle slijedi $5 < n_\varepsilon \varepsilon < \varepsilon(2n_\varepsilon + 1)$. Dakle postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$2 - \varepsilon < \frac{4n_\varepsilon - 3}{2n_\varepsilon + 1}$$

Dokazali smo da je

$$\sup S = 2.$$

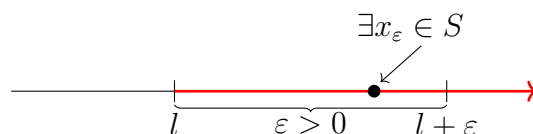
Definicija. Broj $\ell \in \mathbb{R}$ koji je najveća minoranta nepraznog odozdo omeđenog skupa $S \subset \mathbb{R}$ nazivamo **infimum** skupa S i pišemo $\ell = \inf S$.

$\ell = \inf S$ je karakteriziran sljedećim svojstvima:

1. $(\forall x \in S) \quad \ell \leq x$ (Broj ℓ je donja međa skupa S .)
2. $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x_\varepsilon \in S)$ t.d. $x_\varepsilon < \ell + \varepsilon$. (Brojevi veći od ℓ nisu donje međe skupa S .)

Infimum koji je u skupu nazivamo **minimum**, tj. ako je $\ell = \inf S \in S$, onda je

$$\ell = \min S.$$



Uvjet 2. bismo još dodatno mogli pojasniti ovako. Ako se pomaknemo za ε desno od l , dobit ćemo broj $l + \varepsilon$ koji nije donja međa skupa S , što znači da je neki element x_ε skupa S manji od $l + \varepsilon$.

Zadatak. *Odredite supremum i infimum skupa*

$$S = \left\{ \frac{12 - 5n}{n + 3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rješenje. (i) *Vrijedi*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{12 - 5n}{n + 3} = \frac{-5(n + 3) + 27}{n + 3} = -5 + \frac{27}{n + 3} > -5.$$

pa je -5 donja međa skupa S .

Dokažimo da je -5 infimum. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan.

(ii) Treba dokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da

$$-5 + \varepsilon > -5 + \frac{27}{n + 3}.$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{27}{n + 3}$$

$$\Leftrightarrow 27 < \varepsilon(n + 3)$$

Primjenom Arhimedovog aksioma na 27 („korak zeca“) i $\varepsilon > 0$ („korak kornjače“) dobijemo

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{takav da} \quad n_\varepsilon \varepsilon > 27,$$

odakle slijedi $27 < n_\varepsilon \varepsilon < \varepsilon(n_\varepsilon + 3)$. Dakle postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$-5 + \varepsilon < \frac{12 - 5n}{n + 3}$$

Dokazali smo da je

$$\inf S = -5.$$

Kako odrediti supremum? Uvedimo oznaku

$$a_n = \frac{12 - 5n}{n + 3}.$$

Uočimo da za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} n < n + 1 &\implies n + 3 < (n + 1) + 3 \implies \frac{1}{n + 3} > \frac{1}{(n + 1) + 3} \\ &\implies \frac{27}{n + 3} > \frac{27}{(n + 1) + 3} \implies -5 + \frac{27}{n + 3} > -5 + \frac{27}{(n + 1) + 3} \\ &\implies a_n > a_{n+1}. \end{aligned}$$

Stoga je $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, gdje je

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$$

Iz toga vidimo da je maksimum skupa S element $a_1 = \frac{12-5}{1+3} = \frac{7}{4}$. To je ujedno i supremum skupa S , tj. $\sup S = \frac{7}{4}$.

Vidjeli smo da činjenicu kako svaki odozgo omeđen skup u $\mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$ uzimamo kao aksiom, odnosno kao tvrdnju koju ne dokazujemo.

Sada ćemo pokazati da vrijedi i sljedeće: svaki odozdo omeđen skup u $\mathbb{R}$ ima infimum u $\mathbb{R}$. Za razliku od prethodne tvrdnje, ova nije aksiom nego teorem. Njegov dokaz temelji se upravo na aksiomu potpunosti.

Teorem. *Neka je $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, odozdo omeđen skup. Tada postoji $l = \inf S \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. *Neka je*

$$S^- = \{-x : x \in S\}.$$

Kako je S odozdo omeđen, postoji $m \in \mathbb{R}$ t.d.

$$(\forall x \in S) \quad m \leq x.$$

$$\Rightarrow -m \geq -x \quad \forall x \in S.$$

$$\Rightarrow -m \text{ je gornja meda skupa } S^-$$

Po aksiomu potpunosti skup S^- ima supremum. Neka je $L = \sup S^-$.

$$(i) \quad (\forall (-x) \in S^-) \quad -x \leq L \quad / \cdot (-1)$$

$$(ii) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists (-x) \in S^-) \text{ t.d. } L - \varepsilon < -x \quad / \cdot (-1)$$

Množenjem gornjih nejednakosti s -1 dobivamo:

$$(i) \quad (\forall x \in S) \quad x \geq -L$$

$$(ii) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists x \in S) \text{ t.d. } -L + \varepsilon > x$$

Iz prethodne dvije tvrdnje slijedi $-L = \inf S$.

Teorem. *Skup $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$, tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Dokaz. *Pretpostavimo suprotno, tj.*

$$(\exists \varepsilon > 0) (\exists x \in \mathbb{R}) \text{ takvi da je } \langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle \cap \mathbb{Q} = \emptyset.$$

To znači da za svaki $q \in \mathbb{Q}$ vrijedi

$$q \leq x - \varepsilon \quad \text{ili} \quad q \geq x + \varepsilon.$$

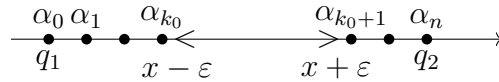
Odaberimo racionalne brojeve $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ takve da vrijedi

$$q_1 \leq x - \varepsilon, \quad q_2 \geq x + \varepsilon.$$

Podijelimo segment $[q_1, q_2]$ na n jednakih dijelova.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= q_1 \\ \alpha_1 &= q_1 + \frac{q_2 - q_1}{n} \\ \alpha_2 &= q_1 + \frac{2(q_2 - q_1)}{n} \\ &\vdots \\ \alpha_n &= q_2. \end{aligned}$$

Svi $\alpha_k = q_1 + \frac{k(q_2 - q_1)}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ su racionalni brojevi.



Po pretpostavci vrijedi

$$\alpha_k \leq x - \varepsilon \quad \text{ili} \quad \alpha_k \geq x + \varepsilon$$

za sve $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Neka je k_0 najveći indeks takav da

$$\alpha_{k_0} \leq x - \varepsilon.$$

Tada je

$$\alpha_{k_0+1} \geq x + \varepsilon.$$

Odavde slijedi

$$2\varepsilon \leq \alpha_{k_0+1} - \alpha_{k_0} = \frac{q_2 - q_1}{n}.$$

Dakle

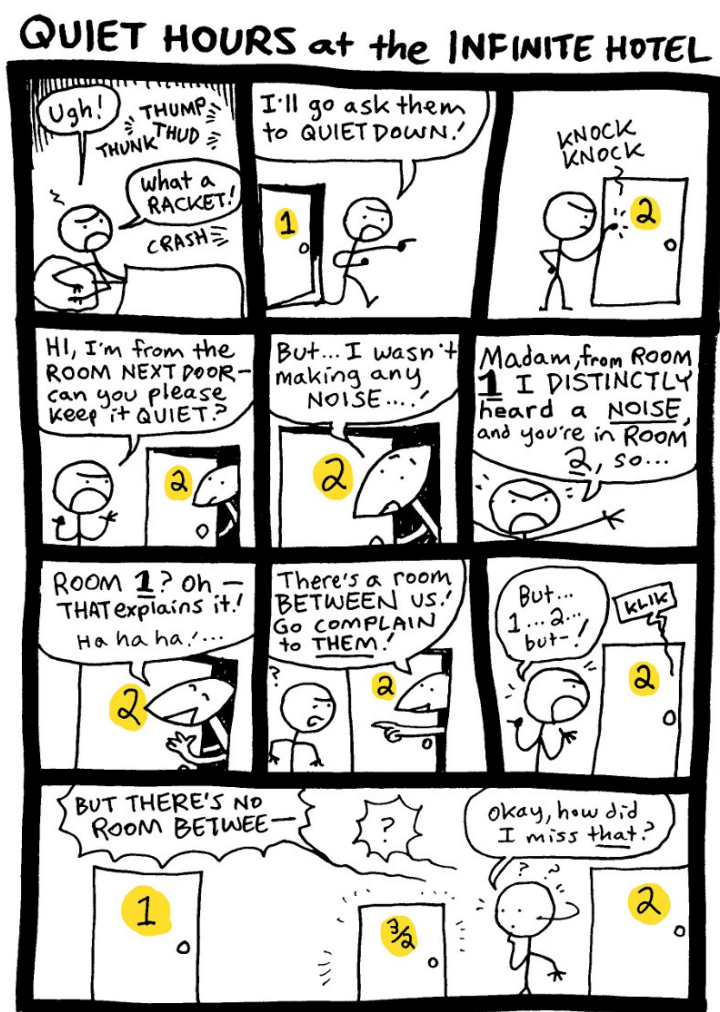
$$2\varepsilon \cdot n \leq q_2 - q_1$$

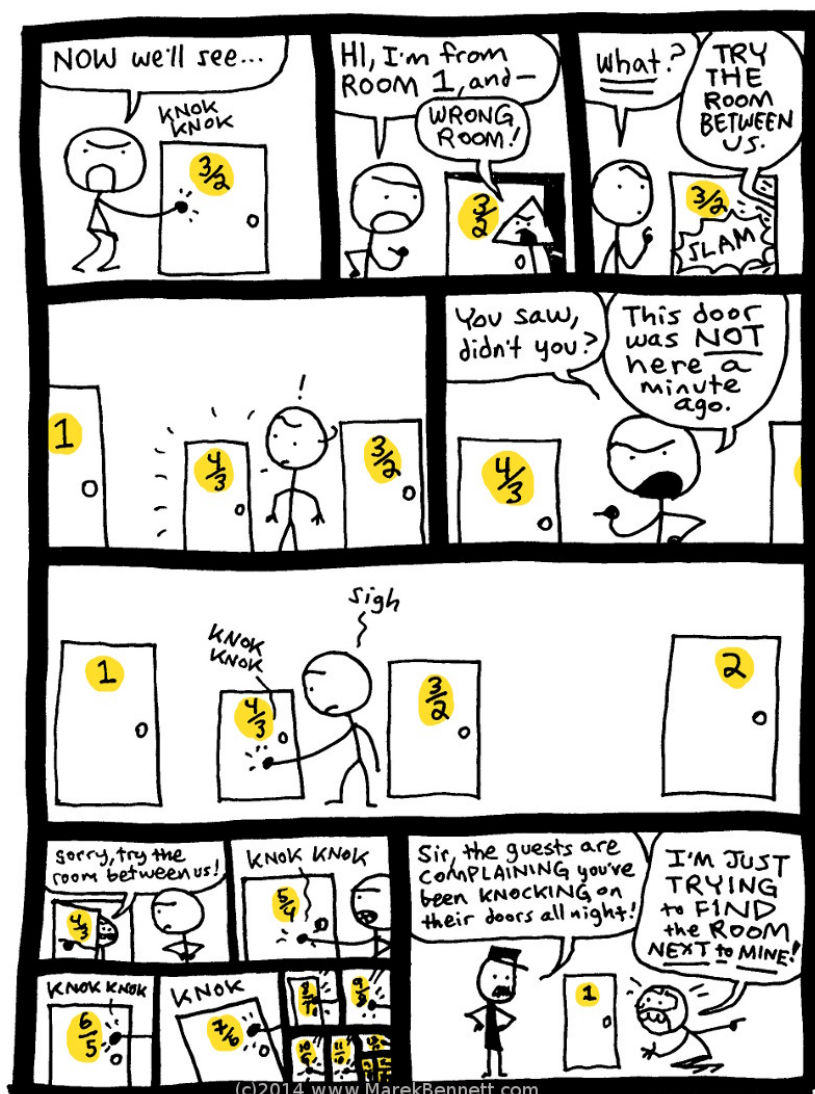
za sve $n \in \mathbb{N}$. Došli smo do kontradikcije s Arhimedovim askiomom. Naime, primjenom Arhimedovog aksioma na $2\varepsilon > 0$ i $q_2 - q_1 > 0$ zaključujemo da postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je

$$2\varepsilon \cdot n_\varepsilon > q_2 - q_1.$$

Dakle,

$$\langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

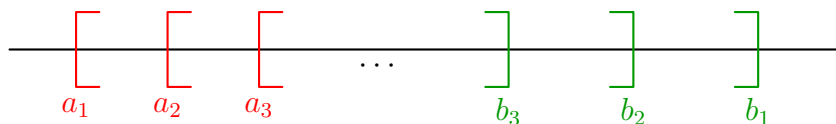




Teorem (Cantorov aksiom). *Dani su segmenti $[a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $x \in [a_n, b_n]$ za sve $n \in \mathbb{N}$.



Dokaz.

Uvedimo oznake

$$A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Skupovi A i B su ograničeni, odozdo s a_1 , odozgo s b_1 , pa postoji $\sup A$ i $\inf B$. Dokažimo da je

$$\sup A \leq \inf B.$$

Najprije ćemo dokazati da je

$$a_n \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

1. Za $n = m$ je to očito.
2. Za $n < m \Rightarrow m = n + k$ za neki $k \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq \cdots \leq a_{n+k} = a_m \leq b_m \Rightarrow a_n \leq b_m.$$

3. Za $n > m \Rightarrow n = m + k$ za neki $k \in \mathbb{N}$:

$$b_m \geq b_{m+1} \geq \cdots \geq b_{m+k} = b_n \geq a_n \Rightarrow a_n \leq b_m.$$

Prema tome, za sve $n \in \mathbb{N}$ je a_n donja međa skupa B , a iz tog slijedi da je

$$a_n \leq \inf B$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ (jer je infimum najveća donja međa).

Iz toga možemo zaključiti da je $\inf B$ gornja međa skupa A , a onda je $\sup A \leq \inf B$ (jer je supremum najmanja gornja međa). Dakle

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq \sup A \leq \inf B \leq b_n,$$

odnosno

$$[\sup A, \inf B] \subseteq [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $x \in [\sup A, \inf B]$ proizvoljan. Tada je $x \in [a_n, b_n]$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Napomena. Druga moguća aksiomatika polja $\mathbb{R}$ se dobije ako aksiom potpunosti zamijenimo s Arhimedovim aksiomom i Cantorovim aksiomom.

1.7 Ekvipotentni skupovi, prebrojivost

Definicija. Za skupove A i B kažemo da su *jednakobrojni* ili *ekvipotentni* ako postoji bijekcija $f : A \rightarrow B$. Tada kažemo da A i B imaju jednak kardinalni broj i pišemo

$$k(A) = k(B) \quad \text{ili} \quad A \sim B.$$

Na kolegiju **Uvod u matematiku** ste dokazali da je ekvipotentnost relacija ekvivalencije, tj.:

$$(i) A \sim A$$

$$(ii) A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

$$(iii) (A \sim B) \text{ i } (B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$$

Definicija. Kažemo da je beskonačan skup S *prebrojiv* ako je ekvipotentan skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. U suprotnom kažemo da je S *neprebrojiv*.

Drugim riječima, prebrojivi su oni beskonačni skupovi čije elemente možemo nanizati (poredati u niz), bez da ikoga preskočimo.

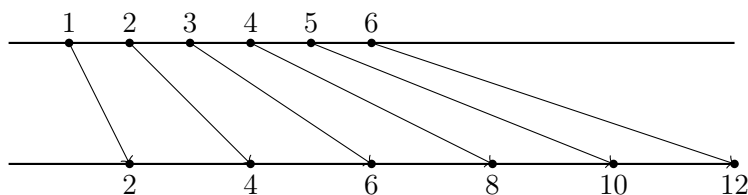
Primjeri:

$$1. \mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$$

Funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$

$$f(n) = 2n$$

je bijekcija.



Parne brojeve smo nanizali na sljedeći način

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

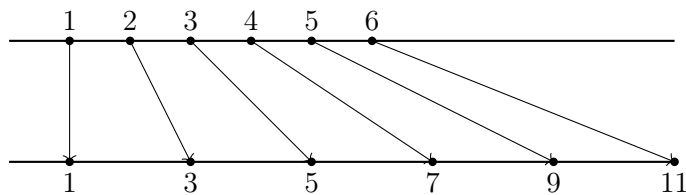
i pri tome niti jedan parni broj nismo preskočili.

$$2. \mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} - 1 = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$$

Funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N} - 1$

$$f(n) = 2n - 1$$

je bijekcija.



Neparne brojeve smo nanizali na sljedeći način

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

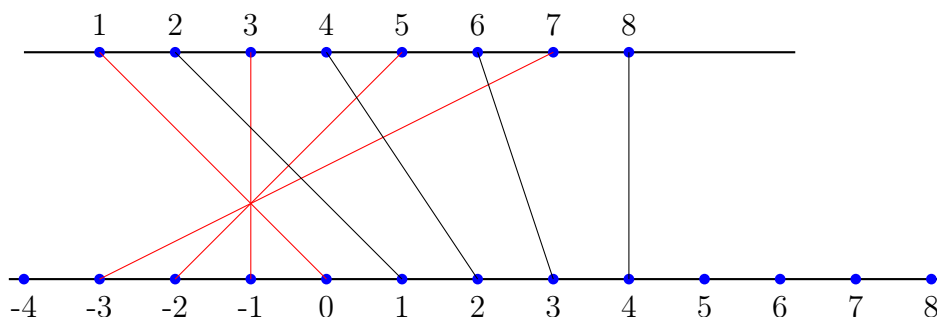
i pri tome niti jedan neparni broj nismo preskočili.

3. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

Funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definirana s

$$f(2n) = n, \quad f(2n - 1) = -n + 1$$

je bijekcija.



Ukratko, parne prirodne brojeve smo preslikali u njihove polovice, a neparne prirodne brojeve oblika $2n - 1$ smo preslikali u $-n + 1$. Time smo sve pozitivne cijele brojeve dobili kao slike parnih prirodnih brojeva, a negativne cijele brojeve i nulu smo dobili kao slike neparnih prirodnih brojeva.

Cijele brojeve smo nanizali na sljedeći način

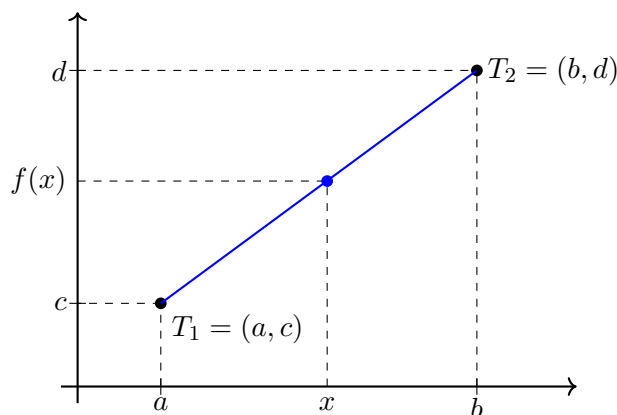
$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$$

i pri tome niti jedan cijeli broj nismo preskočili.

4. $[a, b] \sim [c, d]$.

Bijekcija $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ je dana linearnom funkcijom

$$f(x) = \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c.$$



Pitanje: Je li $[a, b] \sim \langle a, b \rangle$ za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$?

Idući teorem navodimo bez dokaza i iskoristit ćemo ga da bismo dokazali da je $[a, b] \sim \langle a, b \rangle$.

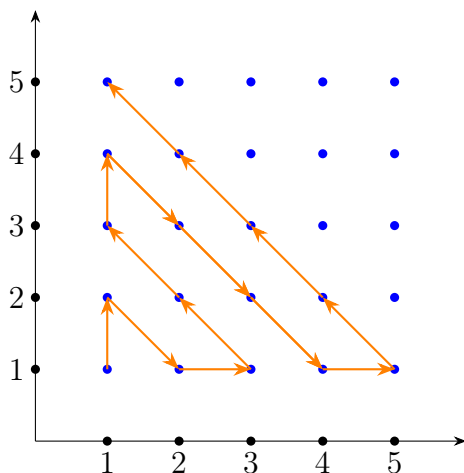
Teorem (Cantor–Bernstein–Schröder). *Ako postoje injekcije $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow A$, onda je $A \sim B$.*

Odaberemo proizvoljni segment $[c, d] \subset \langle a, b \rangle$. Vidjeli smo da je $[a, b] \sim [c, d]$, odnosno da postoji bijekcija $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$. Ako kodomenu povećamo, to neće utjecati na injektivnost. Dakle, funkcija $f : [a, b] \rightarrow \langle a, b \rangle$ je injekcija. S druge strane, funkcija $\text{id} : \langle a, b \rangle \rightarrow [a, b]$ ($\text{id}(x) = x$) je injekcija.

Iz Cantor–Bernstein–Schröderovog teorema slijedi $\langle a, b \rangle \sim [a, b]$.

Sada ćemo pokazati da je skup $\mathbb{Q}$ prebrojiv, odnosno da njegove elemente možemo nanizati. Da bismo to dokazali, treba nam nekoliko međukoraka.

- $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$



Iz prethodne slike je jasno da elemente skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ možemo nanizati onako kako pokazuju strelice, odnosno da je $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Prvih nekoliko elemenata tog niza su

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 1), \dots$$

Ovaj postupak se, iz očitog razloga, naziva dijagonalni postupak.

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Definiramo

$$f(m, n) = \begin{cases} (k, n), & m = 2k \\ (-k + 1, n), & m = 2k - 1 \end{cases}$$

što je bijekcija, pa vrijedi

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.$$

Dakle,

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}.$$

Propozicija. Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv skup.

Dokaz. Imamo

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, (m, n) = 1 \right\}.$$

Funkcija definirana s

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = (m, n),$$

je injekcija. S druge strane, pošto je $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ prebrojiv skup, postoji bijekcija $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pa je $g \circ f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ injekcija (kompozicija injekcija je injekcija). Također, $\text{id} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ je injekcija. Iz Cantor–Bernstein–Schröderovog teorema slijedi

$$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N},$$

odnosno $\mathbb{Q}$ je prebrojiv skup.

Teorem. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Segment $[a, b]$ je neprebrojiv.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \rightarrow [a, b]$.

Ideja: Konstruirat ćemo niz padajućih segmenata unutar zadanog segmenta $[a, b]$

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

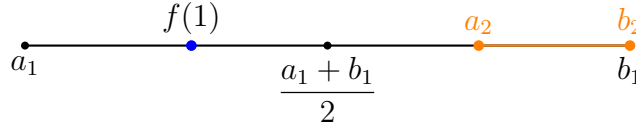
takvih da $f(n) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Definiramo $a_1 := a$, $b_1 := b$.

Korak 1: Ako je $f(1)$ lijevo od sredine segmenta $[a_1, b_1]$, odnosno ako je

$$f(1) \leq \frac{a_1 + b_1}{2},$$

onda stavimo

$$a_2 := \frac{\frac{a_1 + b_1}{2} + b_1}{2}, \quad b_2 := b_1.$$

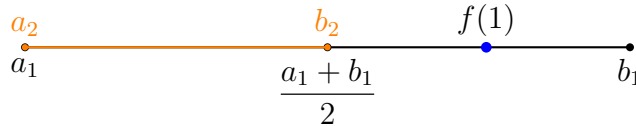


Ako je pak $f(1)$ desno od sredine segmenta $[a_1, b_1]$, odnosno ako je

$$f(1) > \frac{a_1 + b_1}{2},$$

onda stavimo

$$a_2 := a_1, \quad b_2 := \frac{a_1 + b_1}{2}.$$



U oba slučaja smo osigurali da $f(1) \notin [a_2, b_2]$ i da je $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2]$.

Korak 2: Ukoliko $f(2) \notin [a_2, b_2]$, onda možemo uzeti $a_3 := a_2$, $b_3 := b_2$. Ako je $f(2) \in [a_2, b_2]$, onda segment $[a_3, b_3]$ konstruiramo kao i u 1. koraku.

Nastavljamo postupak i dobijemo niz segmenata $[a_n, b_n]$ takvih da je

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], \quad f(n) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Po Cantorovom aksiomu postoji

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Kako je f bijekcija, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f(m) = x$. Ali tada

$$x = f(m) \notin [a_{m+1}, b_{m+1}],$$

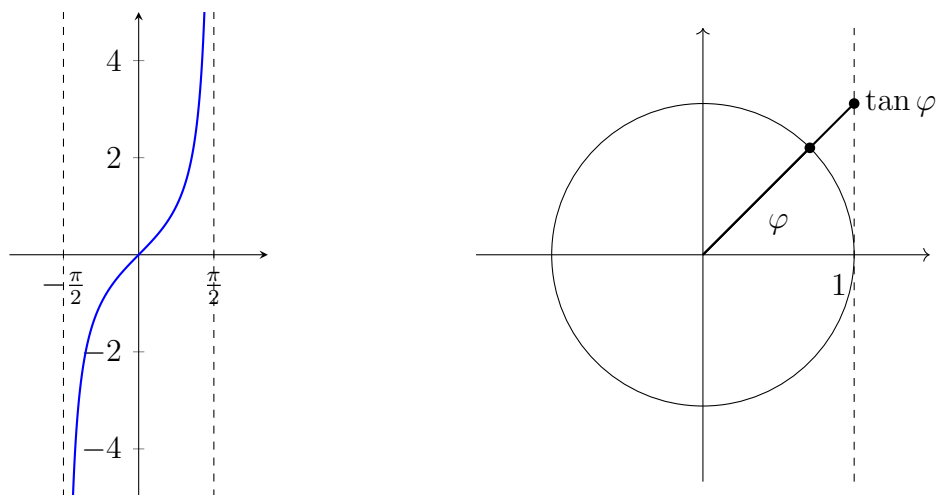
što je u kontradikciji s činjenicom

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Dakle, segment $[a, b]$ je neprebrojiv skup.

Korolar. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je neprebrojiv.

Dokaz. Uočimo da je $\tan : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ bijekcija.



Stoga je

$$\mathbb{R} \sim \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \sim \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Kako je segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ neprebrojiv skup, onda je i skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv.

Za dodatnu ilustraciju obrađene tematike preporučujemo sljedeći video:
Hilbertov hotel



Slika 1: Hilbertov hotel

2 Nizovi u $\mathbb{R}$

2.1 Niz i podniz

Definicija. Funkciju $a : \mathbb{N} \rightarrow S$ zovemo *niz* u S .

Radi jednostavnosti uvodimo oznaku $a_n := a(n)$, a niz ćemo označavati oznakama

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (a_n)_n, \quad (a_n)$$

Definicija. Neka je (a_n) niz u $\mathbb{R}$.

- Niz je *rastući* ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$.
- Niz je *strogo rastući* ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n < a_{n+1}$.
- Niz je *padajući* ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \geq a_{n+1}$.
- Niz je *strogo padajući* ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n > a_{n+1}$.

Definicija. Za niz $b : \mathbb{N} \rightarrow S$ kažemo da je *podniz* niza $a : \mathbb{N} \rightarrow S$ ako postoji strogo rastući niz $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takav da je

$$b = a \circ p.$$

Primjer. Funkcija $p(n) = 2n$ je strogo rastući niz u skupu $\mathbb{N}$. Stoga je

$$b(n) = (a \circ p)(n) = a(2n) = a_{2n}$$

podniz niza (a_n) .

Za podnizove vrijedi

$$b_n = a_{p(n)} = a_{p_n}.$$

Sljedeća lema je vrlo jednostavna za dokazati, a koristit ćemo je u nekim dokazima kasnije. Ako je (p_n) strogo rastući niz u $\mathbb{N}$, tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$n \leq p_n.$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Uočimo da je promatrani niz (p_n) niz u $\mathbb{N}$.

$$p_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \leq p_1,$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$, tj. da je $k \leq p_k$. Kako je niz (p_n) strogo rastući, imamo

$$p_{k+1} > p_k \geq k,$$

iz čega slijedi $p_{k+1} > k$. Znamo da je $p_{k+1} \in \mathbb{N}$ pa mora vrijediti

$$p_{k+1} \geq k + 1.$$

2.2 Limes niza u $\mathbb{R}$

Definicija. Niz realnih brojeva (a_n) *konvergira* ili *teži* prema realnom broju L ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

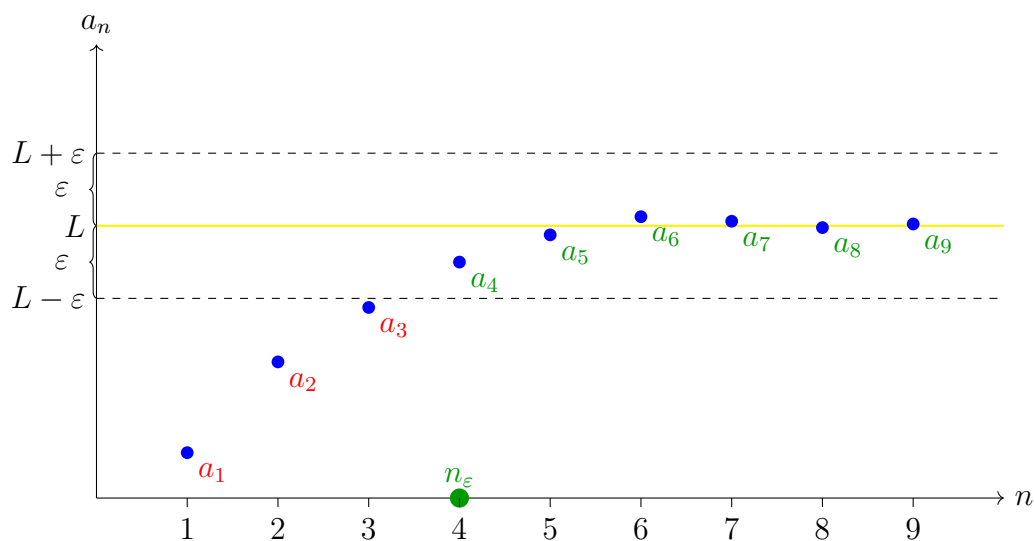
Tada broj L zovemo *granična vrijednost* ili *limes* niza (a_n) i pišemo

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ako niz ne konvergira, kažemo da divergira.

Drugim riječima, broj L je limes niza (a_n) ako za svaki $\varepsilon > 0$ gotovo svi članovi niza pripadaju ε -okolini broja L . Pod gotovo svi mislimo svi osim konačno mnogo njih, a pod ε -okolina mislimo na otvoreni interval

$$\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle.$$



Idući teorem nam garantira da svaki konvergentni niz ima samo jedan limes.

Teorem. Konvergentan niz u $\mathbb{R}$ ima samo jednu graničnu vrijednost.

Dokaz. Pretpostavimo da niz (a_n) ima dvije granične vrijednosti $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ otvoreni interval $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ sadrži gotovo sve članove niza (a_n) . Međutim, pošto je i b limes niza, otvoreni interval $\langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle$ također sadrži gotovo sve članove niza (a_n) . Sada je dovoljno

uzeti neki $\varepsilon > 0$ za kojeg su ta dva otvorena intervala disjunktna. Npr. možemo uzeti ε koji je jednak polovini udaljenosti brojeva a i b

$$\varepsilon = \frac{|a - b|}{2}$$

ili bilo koji manji broj. Tada otvoreni interval $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ sadrži gotovo sve članove niza (a_n) , što znači da izvan tog intervala može biti samo konačno mnogo članova. Budući da je interval $\langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle$ disjunktan s intervalom $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ za

$$\varepsilon = \frac{|a - b|}{2},$$

slijedi da se za taj ε u intervalu $\langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle$ nalazi samo konačno mnogo članova niza (a_n) .

No tada b ne može biti limes niza (a_n) , što je kontradikcija.

U sljedećim zadacima limes ćemo određivati koristeći definiciju limesa.

Zadatak. Odredite koristeći definiciju limes niza $a_n = \frac{1}{n}$.

Rješenje. Tvrdimo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Želimo dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

tj. da

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Po Arhimedovom aksiomu, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je $1 < n_\varepsilon \cdot \varepsilon$. Za $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $1 < n_\varepsilon \cdot \varepsilon \leq n \cdot \varepsilon$, odakle slijedi $1 < n \cdot \varepsilon$ tj.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Dokazali smo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Na primjer, za $\varepsilon = 1$, možemo uzeti $n_\varepsilon = 2$, za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ možemo uzeti $n_\varepsilon = 3$, dok za $\varepsilon = \frac{11}{70}$ možemo uzeti $n_\varepsilon = 7$.

Zadatak. Odredite koristeći definiciju limes niza $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

Rješenje. Uočimo da je

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Tvrdimo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2.$$

Želimo dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

tj. da

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Po Arhimedovom aksiomu, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je $1 < n_\varepsilon \cdot \varepsilon$. Za $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $1 < n_\varepsilon \cdot \varepsilon < (n+1) \cdot \varepsilon$, odakle slijedi $1 < (n+1) \cdot \varepsilon$ tj.

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Dokazali smo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2.$$

Zadatak. Odredite koristeći definiciju limes niza $a_n = \frac{3-n^2}{n^2+1}$.

Rješenje. Uočimo da je

$$\frac{3-n^2}{n^2+1} = \frac{4-(n^2+1)}{n^2+1} = \frac{4}{n^2+1} - 1.$$

Tvrdimo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-n^2}{n^2+1} = -1.$$

Želimo dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{3-n^2}{n^2+1} - (-1) \right| < \varepsilon,$$

tj. da

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow \frac{4}{n^2+1} < \varepsilon.$$

Po Arhimedovom aksiomu, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je $4 < n_\varepsilon \cdot \varepsilon$. Za $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $4 < n_\varepsilon \cdot \varepsilon < (n_\varepsilon^2 + 1) \cdot \varepsilon \leq (n^2 + 1) \cdot \varepsilon$, odakle slijedi $4 < (n^2 + 1) \cdot \varepsilon$ tj.

$$\frac{4}{n^2 + 1} < \varepsilon.$$

Dokazali smo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - n^2}{n^2 + 1} = -1.$$

Teorem. Konvergentan niz u $\mathbb{R}$ je ograničen.

Dokaz. Neka je (a_n) konvergentan niz u $\mathbb{R}$ i neka je L njegov limes. Htjeli bismo pokazati da postoji $M > 0$ takav da $|a_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon,$$

Posebno za $\varepsilon = 1$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - L| < 1,$$

odakle slijedi

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L| \quad (*)$$

za sve $n \geq n_1$. Time smo dokazali da je broj $1 + |L|$ gornja meda skupa

$$\{|a_n| : n \geq n_1\} = \{|a_{n_1}|, |a_{n_1+1}|, |a_{n_1+2}|, \dots\}.$$

Mi bismo htjeli pronaći gornju medu za skup $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$. To lako možemo učiniti stavimo li

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_1-1}|, 1 + |L|\}.$$

Jasno sada je $|a_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

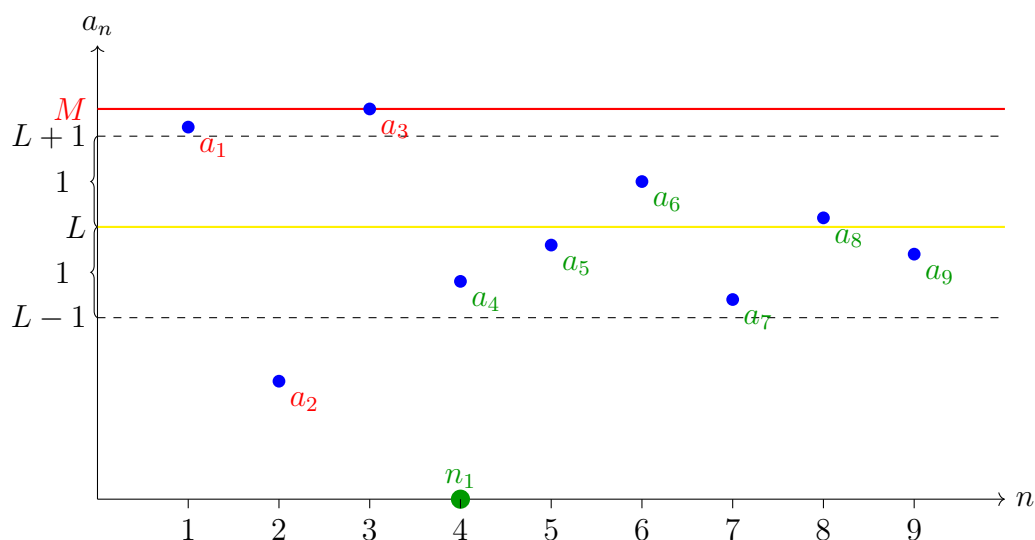
Napomena. Izbor $\varepsilon = 1$ u dokazu nije od posebne važnosti; mogao se uzeti proizvoljan $\varepsilon > 0$. Bitno je da su svi osim konačno mnogo članova niza ograničeni, dok se konačno mnogo preostalih članova može ograničiti uzimanjem maksimuma. Za $\varepsilon = 1$ postoji indeks $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_1$ vrijedi

$$|a_n - L| < 1,$$

odnosno

$$L - 1 < a_n < L + 1.$$

Dakle, svi članovi niza od mjesta n_1 nadalje nalaze se između brojeva $L - 1$ i $L + 1$. Budući da je preostalo još samo konačno mnogo članova $a_1, \dots, a_{n_1-1}$, možemo uzeti broj M koji je veći ili jednak apsolutnim vrijednostima svih tih članova, kao i broju $1 + |L|$. Tada vrijedi $|a_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.



Primjer. Ograničenost nije dovoljna za konvergenciju. Na primjer, niz

$$a_n = (-1)^n$$

je ograničen niz koji ne konvergira.

Teorem. Svaki podniz konvergentnog niza u $\mathbb{R}$ je također konvergentan i ima istu graničnu vrijednost kao i početni niz.

Dokaz. Označimo

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Ako je (a_{p_n}) podniz, tada zbog $p_n \geq n$ vrijedi

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow p_n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_{p_n} - L| < \varepsilon.$$

Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{p_n} = L.$$

Napomena. Iz prethodnog teorema slijedi da je niz $a_n = (-1)^n$ divergentan. Naime, vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = -1.$$

Budući da su (a_{2n}) i (a_{2n-1}) podnizovi niza (a_n) s različitim limesima, slijedi da niz (a_n) ne može biti konvergentan.

Vidjeli smo da su svi konvergentni nizovi u $\mathbb{R}$ ograničeni. S druge strane, ograničeni nizovi u $\mathbb{R}$ ne moraju biti konvergentni. Međutim, ako je ograničeni niz dodatno i monoton, onda će biti konvergentan.

Teorem. *Svaki ograničen i monoton niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan.*

Dokaz. *Pretpostavimo da je (a_n) rastući niz, tj. da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$. Definirajmo skup*

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Budući da je niz (a_n) ograničen odozgo, skup A ima supremum. Označimo taj supremum s L .

$$L = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Vrijedi:

1. $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n \leq L$,
2. $(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})$ takav da je

$$L - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}.$$

Za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi:

$$L - \varepsilon < \underbrace{a_{n_\varepsilon} \leq a_n}_{\text{rastući niz}} \leq L < L + \varepsilon,$$

odnosno

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \sup A.$$

Analogno se pokazuje da za padajući niz vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Primjer. *Monotonost nije nužan uvjet za konvergenciju. Na primjer, niz*

$$\frac{(-1)^n}{n}$$

konvergira prema 0, ali nije monoton.

2.3 Operacije s konvergentnim nizovima

Teorem. Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi u $\mathbb{R}$ te neka vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Vrijede sljedeća svojstva:

1. Niz $(a_n \pm b_n)$ je konvergentan niz i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

2. Niz $(a_n \cdot b_n)$ je konvergentan niz i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = ab.$$

3. Ako je $b_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $b \neq 0$, tada je i niz $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

4. Niz $(|a_n|)$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$$

Dokaz. Iz definicije konvergencije niza (a_n) slijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_{\varepsilon, a} \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_{\varepsilon, a}) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon, \quad (1)$$

a iz definicije konvergencije niza (b_n) slijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_{\varepsilon, b} \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_{\varepsilon, b}) \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon. \quad (2)$$

1. Htjeli bismo pokazati da niz $(a_n \pm b_n)$ konvergira prema $a \pm b$, tj. da za svaki ε postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| < \varepsilon.$$

Iz nejednakosti trokuta dobivamo:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|,$$

odnosno

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) - (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |-(b_n - b)| = |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Htjeli bismo namjestiti $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

za sve $n \geq n_\varepsilon$. Kako to možemo postići? Uočimo da je $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Ako (1) i (2) primijenimo na $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, dobivamo

$$\begin{aligned} (\exists n_{\frac{\varepsilon}{2},a} \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2},a}) &\Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ (\exists n_{\frac{\varepsilon}{2},b} \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2},b}) &\Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Stavimo $n_\varepsilon := \max\{n_{\frac{\varepsilon}{2},a}, n_{\frac{\varepsilon}{2},b}\}$. Za $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

odnosno

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

2. Za produkt koristimo procjenu:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|.$$

Budući da je (a_n) konvergentan niz, on je ograničen, tj. postoji $M > 0$ takav da je $|a_n| \leq M$. Stoga je

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq M |b_n - b| + |b| |a_n - a|.$$

Htjeli bismo namjestiti $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je

$$M |b_n - b| + |b| |a_n - a| < \varepsilon$$

za sve $n \geq n_\varepsilon$. Kako to možemo postići?

Ako (1) i (2) primijenimo na $\varepsilon' > 0$, dobivamo

$$\begin{aligned} (\exists n_{\varepsilon',a} \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_{\varepsilon',a}) &\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon', \\ (\exists n_{\varepsilon',b} \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_{\varepsilon',b}) &\Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon' \end{aligned}$$

Koji $\varepsilon' > 0$ namjestiti da dobijemo ono što želimo, a to je

$$M |b_n - b| + |b| |a_n - a| < \varepsilon?$$

Znamo da je

$$M |b_n - b| + |b| |a_n - a| < M\varepsilon' + |b|\varepsilon'$$

za $n_\varepsilon := \max\{n_{\varepsilon',a}, n_{\varepsilon',b}\}$. Primijetimo da se u procjeni pojavljuju koeficijenti M i $|b|$, pa ne možemo izravno uzeti $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ kao kod zbroja nizova. Zato biramo ε' tako da vrijedi

$$M\varepsilon' + |b|\varepsilon' = \varepsilon,$$

odnosno uzmimo

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M + |b|}$$

i $n_\varepsilon := \max\{n_{\varepsilon',a}, n_{\varepsilon',b}\}$. Za $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi:

$$|a_n b_n - ab| \leq M |b_n - b| + |b| |a_n - a| < M\varepsilon' + |b|\varepsilon' = (M + |b|) \frac{\varepsilon}{M + |b|} = \varepsilon.$$

Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

Korak	Zbroj nizova	Produkt nizova
Procjena izraza	$ (a_n + b_n) - (a + b) \leq a_n - a + b_n - b $	$ a_n b_n - ab \leq a_n b_n - b + b a_n - a $
Dodatni alat	nije potreban	(a_n) je ograničen $\Rightarrow a_n \leq M$
Strategija za ε	$\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$	$\varepsilon = M\varepsilon' + b \varepsilon'$
Izbor parametra	$\frac{\varepsilon}{2}$	$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M + b }$
Primjena definicije	$ a_n - a < \frac{\varepsilon}{2}$ i $ b_n - b < \frac{\varepsilon}{2}$	$ a_n - a < \varepsilon'$ i $ b_n - b < \varepsilon'$
Indeks	$n_\varepsilon = \max\{n_{\varepsilon/2,a}, n_{\varepsilon/2,b}\}$	$n_\varepsilon = \max\{n_{\varepsilon',a}, n_{\varepsilon',b}\}$

3. *Dokaz koji slijedi nešto je tehnički zahtjevniji i služi prije svega za ilustraciju primjene definicije limesa u složenijoj situaciji. Nije ga potrebno učiti napamet, već je važno razumjeti osnovnu ideju i korake koji se u njemu koriste.*

Kod kvocijenta nizova najprije dokazujemo da niz recipročnih vrijednosti $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ konvergira prema $\frac{1}{b}$, a zatim tvrdnju o kvocijentu dobivamo primjenom pravila za produkt.

Najprije ćemo pokazati da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

Promotrimo izraz

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| |b|}.$$

1. korak: Želimo izraz $\frac{1}{|b_n|}$ ograničiti odozgo, odnosno pokazati da je $|b_n|$ odozdo ograničen pozitivnom konstantom. Kako to napraviti?

Neka je $\varepsilon' > 0$. Tada iz definicije limesa slijedi da postoji $n_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_{\varepsilon'}$ vrijedi

$$|b_n - b| < \varepsilon'.$$

Iz nejednakosti trokuta imamo

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n|,$$

odakle slijedi

$$|b| - |b_n - b| \leq |b_n|.$$

Sada imamo

$$|b_n| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \varepsilon'$$

za sve $n \geq n_{\varepsilon'}$. Sada želimo da desna strana bude pozitivna, tj.

$$|b| - \varepsilon' > 0.$$

To možemo postići ako uzmemo bilo koji

$$\varepsilon' < |b|.$$

Na primjer, možemo uzeti

$$\varepsilon' = \frac{|b|}{2}.$$

Tada za sve $n \geq n_{\varepsilon'}$ vrijedi

$$|b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Dakle, niz $(|b_n|)$ je odozdo ograničen pozitivnom konstantom:

$$|b_n| \geq \frac{|b|}{2} \quad \text{za sve } n \geq n_{\varepsilon'}.$$

Stoga za sve $n \geq n_{\varepsilon'}$ vrijedi

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| |b|} \leq \frac{|b_n - b|}{\frac{|b|^2}{2}} = \frac{2}{|b|^2} |b_n - b|.$$

Htjeli bismo namjestiti $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon$$

za sve $n \geq n_\varepsilon$.

Ako definiciju limesa za niz (b_n) primijenimo na $\varepsilon'' > 0$, dobivamo

$$(\exists n_{\varepsilon''} \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_{\varepsilon''}) \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon''.$$

Znamo da vrijedi

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \varepsilon'',$$

za $n \geq \max\{n_{\varepsilon'}, n_{\varepsilon''}\}$.

Želimo namjestiti $\varepsilon'' > 0$ tako da bude

$$\frac{2}{|b|^2} \varepsilon'' = \varepsilon.$$

Zato uzimamo

$$\varepsilon'' = \frac{|b|^2}{2} \varepsilon.$$

Stavimo

$$n_\varepsilon := \max\{n_{\varepsilon'}, n_{\varepsilon''}\}.$$

Tada za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \varepsilon'' = \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2} \varepsilon = \varepsilon.$$

Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

Sada primijenimo pravilo za produkt. Budući da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad i \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b},$$

slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b},$$

odnosno,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

4. Želimo pokazati da vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$$

Promotrimo izraz

$$||a_n| - |a||.$$

Iz obratne nejednakosti trokuta slijedi da za sve realne brojeve x, y vrijedi

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Primijenimo li to na $x = a_n$ i $y = a$, dobivamo

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|.$$

Htjeli bismo namjestiti $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je

$$||a_n| - |a|| < \varepsilon$$

za sve $n \geq n_\varepsilon$.

Ako definiciju limesa za niz (a_n) primijenimo na $\varepsilon > 0$, dobivamo

$$(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Tada za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$$

Napomena. Kada dokazujemo konvergenciju izraza s više nizova, slijedimo ove korake:

- najprije procijenimo izraz (najčešće pomoću nejednakosti trokuta),
- zatim podijelimo ε na manje dijelove,
- na svaki dio primijenimo definiciju limesa,
- i na kraju uzmemo najveći indeks kako bi svi uvjeti vrijedili odjednom.