MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 13. rujna 2024.

Zadatak 1. (35 bodova)

(a) (15 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$$

te skicirajte njen graf.

(b) (10 bodova) Odredite $F : \langle 0, \pi \rangle \longrightarrow \mathbf{R}$, gdje je $F(x)$ primitivna funkcija od f takva da je $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(c) (5 bodova) Je li funkcija F klase $C^3(\langle 0, \pi \rangle)$?

(d) (5 bodova) Izračunajte površinu lika koji se nalazi između pravaca $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$ i kojeg omeđuju graf funkcije f i tangenta na graf povučena u točki $x = \frac{\pi}{2}$.

Rješenje.

(a)

(b) Supstitucija $t = \operatorname{tg} x$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} \operatorname{tg} x\right) + c, \quad c = \frac{-\pi}{2\sqrt{2}}$$

(c) Da. Prva derivacija od F je funkcija f, za koju smo u a) dijelu vidjeli da je dva pua derivabilna na cijelom $\mathbf{R}$ i njene derivacije su također neprekidne funkcije.

(d) Površina ispod grafa funkcije f je jednaka $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Kada oduzmemo površinu ispod tangente dobijemo

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 13. rujna 2024.

Zadatak 2. (15 bodova) Izračunajte:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n^2+2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2+4n+4}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2+6n+9}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{5}}\right).$$

Rješenje. Namještamo izraz da bude jednak integralnoj sumi funkcije $f(x)=\frac{1}{2+2x+x^2}$ na intervalu $[0,1]$:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2+2\frac{i}{n}+\left(\frac{i}{n}\right)^2}} \\ &= \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+2x+x^2}}=\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 13. rujna 2024.

Zadatak 3. Ispitajte konvergenciju reda

a) (12 bodova)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)! 2^n}$$

b) (12 bodova)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$$

Rješenje. a) Označimo $a_n = \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)! 2^n}$. Sada je

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =& \frac{(n+1)!^2 3^{n+1}}{(n!)^2 3^n} \frac{(2n)! 2^n}{(2n+2)! 2^{n+1}} \\ =& (n+1)^2 \cdot 3 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)2} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Red konvergira.

b)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \end{aligned}$$

Red divergira jer opći član ne teži u 0.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 13. rujna 2024.

Zadatak 4.

a) (16 bodova) Razvijte funkciju u red potencija oko 0, odredite radijus konvergencije i ispitajte konvergenciju u rubovima

$$f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right).$$

b) (10 bodova) Izračunajte sumu

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{2^{n-1}}.$$

Rješenje. Oko 0

$$\begin{aligned} f(x) =& \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}}\right) = \ln(1-\frac{x}{2}) - \ln(1+\frac{x}{2}) \\ =& \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(-x/2)^n}{n} - \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(x/2)^n}{n} \\ =& \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}((-1)^n-1)x^n \\ =& \sum_{k\geq 0}\frac{-2}{(2k+1)2^{2k+1}}x^{2k+1} \end{aligned}$$

Radijus konvergencije je

$$R = \frac{1}{\lim_k(\frac{2}{(2k+1)2^{2k+1}})^{\frac{1}{2k+1}}} = \frac{\lim_k(2k+1)^{\frac{1}{2k+1}}\cdot 2}{\lim_k 2^{\frac{1}{2k+1}}} = 2$$

Za $x = 2$ imamo red

$$\sum_{k\geq 0}\frac{-2}{(2k+1)} = -2\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)}$$

koji je divergentan zbog

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)} \geq \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+2)} = 2\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(k+1)} = +\infty$$

Za $x = -2$ također imamo divergentan red $\sum_{k\geq 0}\frac{2}{(2k+1)} = 2\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)}$.

b)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \quad /' \implies \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} \implies \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^n \quad /' \implies$$

$$\frac{(1-x)^2 - x\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \sum_{n\geq 1} n^2x^{n-1}$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 1} n^2x^{n-1} \quad / \quad x = 1/2$$

$$12 = \sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{2^{n-1}}$$