MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 5. rujna 2025.

Zadatak 1. *(ukupno 24 boda)*

Dana je funkcija

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x^2 - 2x}\right).$$

(a) (8 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije f.

(b) (8 bodova) Je li funkcija rastuća/padajuća na intervalu $\langle \frac{5}{2}\pi, 3\pi\rangle$? Dokažite.

(c) (8 bodova) Odredite $f(\langle \frac{5}{2}\pi, 3\pi\rangle)$.

Rješenje.

(a) Zbog logaritamske funkcije $\frac{\sin x}{x^2-2x} > 0$ te je zbog nazivnika $x^2 - 2x \neq 0$. Dakle, $\sin x > 0$ i $x^2 - 2x > 0$ ili $\sin x < 0$ i $x^2 - 2x < 0$.

U prvom slučaju dobije se

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} \langle 2k\pi, 2k\pi + \pi\rangle \cup \langle 2, \pi\rangle,$$

a u drugom slučaju prazan skup. Konačno rješenje je

$$\mathcal{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} \langle 2k\pi, 2k\pi + \pi\rangle \cup \langle 2, \pi\rangle.$$

(b) Funkcija $\sin x$ je strogo padajuća na intervalu $\langle \frac{5}{2}\pi, 3\pi\rangle$, a funkcija $x^2 - 2x$ je strogo rastuća na tom intervalu. Dakle, $\frac{\sin x}{x^2-2x}$ je strogo padajuća na danom intervalu. Budući da je ln strogo rastuća funkcija, slijedi da je $\ln(\frac{\sin x}{x^2-2x})$ strogo padajuća na $\langle \frac{5}{2}\pi, 3\pi\rangle$.

(c) Budući da je funkcija strogo padajuća i neprekidna na danom intervalu, slijedi da je dovoljno izračunati vrijednost funkcije u rubovima intervala.

Vrijedi $f(\frac{5}{2}\pi) = \ln(\frac{4}{5\pi(5\pi-4)})$ te $\lim_{x\to 3\pi^-} \ln(\frac{\sin x}{x^2-2x}) = \ln(\lim_{x\to 3\pi^-} \frac{\sin x}{x^2-2x}) = \ln(0^+) = -\infty$. Dakle, $f(\langle \frac{5}{2}\pi, 3\pi\rangle) = \langle -\infty, \ln(\frac{4}{5\pi(5\pi-4)})\rangle$.

Zadatak 2. *(ukupno 24 boda)*

(a) (12 bodova) Niz (x_n) zadan je rekurzivno s

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\{x_n\}.$$

Dokažite da niz (x_n) konvergira i odredite mu limes.

(b) (12 bodova) Izračunajte limes

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}} + e^{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} + \ldots + e^{\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right).$$

Rješenje.

(a) Kako je $\{x_n\} \in [0,1)$, iz rekurzivne relacije slijedi $x_{n+1} \in [1, \frac{3}{2})$. Dakle, za svaki $n \geq 1$ imamo $x_n \in [1,2)$, odakle slijedi $\lfloor x_n \rfloor = 1$, odnosno $\{x_n\} = x_n - 1$. Dana rekurzivna relacija prelazi u

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2}.$$

Sada nije teško vidjeti da je niz (x_n) padajuć. Zaista,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1 - x_n}{2} \leq 0,$$

Kako je niz (x_n) omeđen odozdo s 1, on mora biti konvergentan, stoga mu označimo limes s L. Iz rekurzivne relacije slijedi jednadžba

$$L = \frac{L+1}{2},$$

čijim rješavanjem dobivamo $L = 1$.

(b) Uočimo da možemo napisati

$$\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}} + e^{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} + \ldots + e^{\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{a_n}{b_n},$$

gdje su nizovi (a_n) i (b_n) definirani kao

$$a_n = e^{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}} + e^{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} + \ldots + e^{\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}} - n, \quad b_n = \sqrt{n}.$$

Niz (b_n) strogo je rastuć i neograničen, stoga primjenom Cesaro–Stolzovog teorema dobivamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} - 1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} = 1,$$

pri čemu smo u posljednjoj jednakosti iskoristili da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Zadatak 3. *(ukupno 26 bodova)*

(a) (14 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \left(\frac{m}{n}\right)^2 - \frac{4m}{3n} : m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \right\}.$$

(b) (12 bodova) Za skupove $A, B \subset \mathbb{R}$ definiramo

$$A - B := \{a - b : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Vrijedi li $\sup(A - B) = \sup A - \sup B$?

Rješenje.

1. Primijetimo da je $S \subset T$, gdje je

   $$T = \{x^2 - \frac{4}{3}x : x \in [0, 1]\}.$$

   pa vrijedi $\sup S \leq \sup T$ i $\inf S \geq \inf T$. Primijetimo li

   $$x^2 - \frac{4}{3}x = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9},$$

   vidimo da tražena kvadratna funkcija postiže minimum u $x_{\min} = \frac{2}{3}$ i jednak je $-\frac{4}{9}$ pa je $\inf T = \min T = -\frac{1}{4}$. Kako se navedena vrijednost postiže npr. za $m = 1$, $n = 2$, slijedi da je $\inf S = \min S = -\frac{1}{4}$.

   S druge strane, dana kvadratna funkcija postiže maksimum u rubovima 0 ili 1. Uvrštavanjem slijedi $\sup T = \max T = 0$ i postiže se u $x_{\max} = 0$. Dakle, vrijedi $\sup S \leq 0$. Međutim, uzimanjem $m = 1$ i primjećivanjem da je

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{4}{3n} = 0$$

   slijedi da je $\sup S = 0$.

2. Tvrdnja ne vrijedi. Uzmimo $A = B = \{0, 1\}$. Tada je $A - B = \{-1, 0, 1\}$ pa je $\sup(A - B) = 1$. S druge strane je $\sup A - \sup B = 1 - 1 = 0$.

Zadatak 4. *(ukupno 26 bodova)* Neka je $f : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirana sa $f(x) = x(e^{\frac{\sin x}{x}} - 1)$.

(a) (14 bodova) Odredite postoje li limesi $\lim_{x\to 0} f(x)$ i $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(b) (12 bodova) Odredite je li funkcija f ograničena.

Rješenje.

(a) Izračunajmo prvo $\lim_{x\to 0} f(x)$. Koristeći limes $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, neprekidnost funkcije $x \mapsto e^x$ i limes produkta slijedi

$$\lim_{x\to 0} x(e^{\frac{\sin x}{x}} - 1) = 0 \cdot (e^1 - 1) = 0.$$

Za računanje $\lim_{x\to\infty} f(x)$ koristimo sljedeći raspis, koji vrijedi za $x \neq 2\pi$:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{\sin x}{x}} - 1}{\frac{\sin x}{x}} \cdot \sin x$$

Koristeći $|\sin(x)| \leq 1$ i teorem o sendviču slijedi $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Definiramo $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ i $y_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$. Koristeći poznati limes $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 0$ slijedi

$$\lim_{n\to} \frac{e^{\frac{\sin x_n}{x}} - 1}{\frac{\sin x_n}{x_n}} = 1$$

te identičan rezultat za y_n. Prema tome, koristeći $\sin x_n = 1$ i $\sin y_n = -1$ slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to} \frac{e^{\frac{\sin x_n}{x}} - 1}{\frac{\sin x_n}{x_n}} \cdot \sin x_n = 1$$

i

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\sin y_n}{x}} - 1}{\frac{\sin y_n}{y_n}} \cdot \sin y_n = -1.$$

Dakle, traženi limes ne postoji.

(b) Budući da je $x \mapsto e^x$ rastuća funkcija i $\sin x \leq 1$, slijedi:

$$|f(x)| \leq x(e^{\frac{1}{x}} - 1) =: g(x).$$

Budući da je

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1,$$

po definiciji limesa slijedi da postoji $c > 0$ takav da za sve $x \geq c$ vrijedi $|g(x) - 1| \leq 1$. Odatle slijedi da je $g(x) \leq 2$ za sve $x \geq c$ pa vrijedi i $|f(x)| \leq 2$ za sve $x \geq c$. S druge strane, budući da je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, postoji $\delta > 0$ takav da je $|f(x)| \leq 2$ za sve $x \in \langle 0, \delta\rangle$. Konačno, kako je f neprekidna na intervalu $[\delta, c]$, ona je po Bolzano-Weierstrassovom teoremu i apsolutno ograničena sa nekim M. Kombiniranjem navedenih ocjena, za sve $x > 0$ vrijedi

$$|f(x)| \leq \max\{M, 2\}.$$

Dakle, f je ograničena.