

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit - 1. rok – 26. siječnja 2026.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Dozvoljeno je pozvati se na sljedeće limese:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^{ax}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad p, a > 0.$$

Zadatak 1. (ukupno 24 boda) Dana je funkcija

$$f(x) = \ln \left(\frac{3-x}{\operatorname{tg} x - 1} \right).$$

- (a) (8 bodova) Odredite prirodnu domenu $\mathcal{D}_f$ funkcije f .
- (b) (8 bodova) Odredite najveći interval I koji sadrži točku $-\frac{5\pi}{8}$ na kojem je f injektivna.
- (c) (8 bodova) Koliko f ima nultočaka većih od $-\frac{\pi}{2}$, a manjih od $\frac{7\pi}{2}$? Dokažite.

Rješenje.

- (a) • $\frac{3-x}{\operatorname{tg} x - 1} > 0$
• $\operatorname{tg} x - 1 \neq 0$ (sadržano u prvom uvjetu)

Dakle, ili je $3-x > 0$, $\operatorname{tg} x - 1 > 0$ ili $3-x < 0$, $\operatorname{tg} x - 1 < 0$.

Slijedi da je

$$\mathcal{D}_f = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle \cap \langle -\infty, 3 \rangle \right) \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle \cap \langle 3, +\infty \rangle \right)$$

- (b) Najveći interval oko $-\frac{5\pi}{8}$ na kojem je f definirana je $\langle -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \rangle$

Na tom intervalu je $3-x$ strogo padajuća pozitivna funkcija. Također, $\operatorname{tg} x - 1$ je na tom intervalu strogo rastuća i pozitivna.

Slijedi da je $\frac{3-x}{\operatorname{tg} x - 1}$ strogo padajuća pozitivna funkcija na danom intervalu.

Konačno, budući da je $\ln$ strogo rastuća funkcija i dobro je definirana na danom intervalu, $\ln(\frac{3-x}{\operatorname{tg} x - 1})$ je strogo padajuća, pa je i injektivna.

Dakle, traženi interval je

$$I = \left\langle -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

(c) Da bi x bila nultočka funkcije f , nužno je i dovoljno

$$\frac{3-x}{\operatorname{tg} x - 1} = 1,$$

tj.

$$\operatorname{tg} x = 4 - x.$$

Promotrimo funkciju $g(x) = \operatorname{tg} x + x - 4$ na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle$, za neki $k \in \mathbb{Z}$.

Ta funkcija je neprekidna i

$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} + k\pi} g(x) = \pm \infty.$$

Slijedi da postoje $a, b \in \langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle$ takvi da je $a < b$ i $g(a) < 0$, $g(b) > 0$.

Sada je $g([a, b]) \supseteq [g(a), g(b)] \ni 0$.

Po teoremu o međuvrijednosti, g postiže vrijednost 0 na intervalu $\langle a, b \rangle$, tj.

$$\operatorname{tg} c = 4 - c.$$

Također, g je zbroj strogo rastućih funkcija $\operatorname{tg} x$ i $x - 4$, pa je strogo rastuća.

Slijedi da ima točno jednu nultočku na danom intervalu.

Dakle, f ima ukupno 4 nultočke između $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{7}$.

Zadatak 2. (ukupno 26 bodova) Dokažite da sljedeći nizovi imaju limes i izračunajte ga

(a) (12 bodova)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin((n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1}) \frac{2^{n+2}}{5n^4 + 2n + 7},$$

(b) (14 bodova)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{5^k + 2^k(\cos(k) + 1)^k}}{n}.$$

Rješenje.

(a) Budući da je $2 > 1$ i s vježbi (Zadatak 2.23) znamo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{2^n} = 0,$$

slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n^4 + 3n^2 + 1}{2^n} = 0.$$

Na predavanjima je pokazano da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0,$$

pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin((n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1})}{(n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1}} = 1.$$

Korištenjem pravila za produkt limesa i dijeljenjem brojnika i nazivnika u drugom faktoru sa n^4 zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin((n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1}) \frac{2^{n+2}}{5n^4 + 2n + 7} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin((n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1})}{(n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1}} \frac{(n^4 + 3n^2 + 1)2^3}{5n^4 + 2n + 7} &= \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

(b) Ako označimo sa $a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{5^k + 2^k(\cos(k) + 1)^k}$ i sa $b_n = n$, budući da je b_n strogo rastući i neograničen po Cesaro-Stolzovom teoremu ako postoji limes

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 2^n(\cos(n) + 1)^n}$$

tada je niz iz zadatka konvergentan i limes mu je jednak L . Budući da je $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ imamo

$$5 \leq \sqrt[n]{5^n + 2^n(\cos(n) + 1)^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 2^n \cdot 2^n} \leq 5 \sqrt[n]{2}.$$

Budući da po Zadatku 2.19 s vježbi znamo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ po teoremu o sendviču slijedi da je $L = 5$.

Zadatak 3. (ukupno 24 boda)

(a) (18 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{(m+1)^2 \cdot 2^m}{m!} : m \in \mathbb{N} \right\}$$

(b) (6 bodova) Neka je S ograničen skup te neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.

Vrijedi li nužno da je

$$f(S) = [f(\inf S), f(\sup S)]?$$

Rješenje.

(a) Vidimo da je $\frac{(m+1)^2 \cdot 2^m}{m!} \geq 0$, za $m \in \mathbb{N}$.

Također,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)^2 \cdot 2^m}{m!} = 0.$$

Slijedi da je $0 = \inf S$.

Provjerimo je li niz $a_m = \frac{(m+1)^2 \cdot 2^m}{m!}$ monoton.

Računamo:

$$\begin{aligned} \frac{(m+1)^2 \cdot 2^m}{m!} &\leq \frac{(m+2)^2 \cdot 2^{m+1}}{(m+1)!} \\ \iff (m+1)^3 &\leq (m+2)^2 \cdot 2 \\ \iff m^3 + m^2 - 5m - 7 &\leq 0 \end{aligned}$$

Sada vidimo da je za $m \geq 3$,

$$m^3 \geq 9m > 5m, \quad m^2 \geq 9 > 7,$$

pa je niz padajući za $m \geq 3$.

Uvrštavanjem $m = 1, 2$ vidimo da je niz rastući za $m = 1, 2$.

Dakle, maksimum se postiže za $m = 3$ i vrijednost je $\frac{16 \cdot 8}{6} = \frac{64}{3}$.

Slijedi da je $\sup S = \frac{64}{3}$.

(b) Ne vrijedi. Npr. $S = [1, 2] \cup [5, 6]$, $f(x) = x$.

Tada je $\inf S = 1$, $\sup S = 6$, pa je $[f(\inf S), f(\sup S)] = [1, 6]$.

Međutim, $f(S) = [1, 2] \cup [5, 6] \neq [1, 6]$.

Zadatak 4. (ukupno 26 bodova)

(a) (14 bodova) Odredite postoji li limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x} \cos(x)}{x^2}.$$

(b) (12 bodova) Odredite sve realne brojeve $c \in \mathbb{R}$ za koje postoji nekonstantna neprekidna i periodična funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $f(x+1) = cf(x)$.

Rješenje.

(a) Primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{e - e^{\cos x} \cos(x)}{x^2} &= \frac{e - e^{\cos x}}{x^2} + e^{\cos x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ &= e \frac{1 - e^{\cos x - 1}}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x^2} + e^{\cos x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \end{aligned}$$

Koristeći neprekidnost funkcije $\cos$ u 0 slijedi da $\cos x - 1 \rightarrow 0$ pa koristeći poznate limese:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

i teorem o limesu produkta slijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0} e \frac{1 - e^{\cos x - 1}}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x^2} = e \cdot (-1) \cdot \frac{-1}{2} = \frac{e}{2}.$$

Nadalje, koristeći neprekidnost eksponencijalne funkcije u 1 i teorem o limesu produkta slijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\cos x} \frac{1 - \cos x}{x^2} = e \cdot \frac{1}{2} = \frac{e}{2}.$$

Konačno, iz prethodnog prikaza i teorema o limesu zbroja slijedi da je traženi limes jednak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x} \cos(x)}{x^2} = \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e.$$

(b) Dokažimo da su $c \in \{-1, 1\}$ jedine mogućnosti. Najprije primijetimo da za $c = 1$ funkcija $f(x) = \sin(2\pi x)$ zadovoljava uvjete zbog 2π -periodičnosti funkcije $\sin$. Za $c = -1$ i funkciju $f(x) = \sin(\pi x)$ vrijedi

$$f(x+1) = \sin(\pi(x+1)) = -\sin(\pi x) = -f(x), \quad \text{i} \quad f(x+2) = \sin(\pi(x+2)) = \sin(\pi x) = f(x)$$

pa zaključujemo da je ona 2-periodična i zadovoljava uvjet.

Dokažimo da tvrdnja ne vrijedi za $c \neq \pm 1$. Periodična neprekidna funkcija je ograničena jer je $f(\mathbb{R}) = f([0, \tau])$, gdje je τ period funkcija, a neprekidna funkcija je ograničena na $[0, \tau]$ po teoremu s predavanja. Neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) \neq 0$ (takav x mora postojati jer je funkcija nekonstantna). U slučaju $|c| > 1$ primijetimo da je $|f(x+n)| = |c|^n |f(x)| \rightarrow \infty$ pa dobivamo kontradikciju s tim da je f ograničena. S druge strane, za $|c| < 1$ primijetimo da je $|f(x-n)| = |c|^{-n} |f(x)| \rightarrow \infty$, što je opet kontradikcija sa ograničenošću.