

MATEMATIČKA ANALIZA 1

2. kolokvij – 26. siječnja 2026.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Dozvoljeno je pozvati se na sljedeće limese:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^{ax}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad p, a > 0.$$

Zadatak 1. (ukupno 12 bodova)

- (a) (9 bodova) Niz (a_n) zadan je rekurzivno na sljedeći način:

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{3 - 6a_n}{a_n - 4}.$$

Konvergira li niz (a_n) ? Ako konvergira, odredite mu limes.

- (b) (3 boda) Konstruirajte primjer niza čiji je skup gomilišta $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ te dokažite da su mu je to skup gomilišta.

Rješenje.

- (a) Ako niz (a_n) konvergira tada mu limes mora zadovoljavati $L = \frac{3-6L}{L-4}$ odnosno $(L-1)(L+3) = 0$. Pretpostavimo da je $a_n < -3$ za neki $n \in \mathbb{N}$ onda je

$$a_{n+1} = \frac{3 - 6a_n}{a_n - 4} = -6 - \frac{21}{a_n - 4} < -6 - \frac{21}{-3 - 4} = -3,$$

a kako je $a_2 = \frac{3-30}{5-4} = -27 < -3$ po principu matematičke indukcije zaključujemo da je $a_n < -3$ za svaki $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq a_n \Leftrightarrow \\ \frac{3 - 6a_n}{a_n - 4} &\geq a_n \Leftrightarrow \\ \frac{a_n^2 + 2a_n - 3}{a_n - 4} &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{(a_n - 1)(a_n + 3)}{a_n - 4} &\leq 0. \end{aligned}$$

Budući da smo pokazali da je $a_n < -3$ za svaki $n \geq 2$ zadnja nejednakost vrijedi za svaki $n \geq 2$ pa zaključujemo da je niz (a_n) rastući za $n \geq 2$. Budući da je rastući i ograničen zaključujemo da je konvergentan te mu je limes $L = -3$.

(b) Moglo se takav primjer konstruirati na puno načina, a jedan je

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{za } n \equiv 1 \pmod{5} \\ 2, & \text{za } n \equiv 2 \pmod{5} \\ 3, & \text{za } n \equiv 3 \pmod{5} \\ 4, & \text{za } n \equiv 4 \pmod{5} \\ 5, & \text{za } n \equiv 0 \pmod{5}. \end{cases}$$

Vidimo da je $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gomilište ovog niza jer je podniz $(b_{5n+k})_{n \in \mathbb{N}}$ konstantan niz pa konvergira prema k . Pretpostavimo da je x gomilište niza (b_n) . Tada postoji podniz $(b_{p(n)})$ takav da je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{p(n)} = x$. Beskonačno mnogo članova niza $p(n)$ moraju davati isti ostatak modulo 5, označimo taj ostatak s l . Tada vidimo da postoji podniz od $b_{p(n)}$ koji je konstantan i svi njegovi članovi su jednaki l ako je $l \in \{1, 2, 3, 4\}$, odnosno 5 ako je $l = 0$. Budući da svi podnizovi konvergentnog niza (b_n) moraju konvergirati prema x zaključujemo da je $x = l$ ako je $l \in \{1, 2, 3, 4\}$, odnosno 5 ako je $l = 0$, pa je $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Zaključujemo da je skup gomilišta niza (b_n) upravo skup $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Zadatak 2. (ukupno 13 bodova) Dokažite da sljedeći nizovi imaju limes i izračunajte ga

(a) (6 bodova)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin((n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1}) \frac{2^{n+2}}{5n^4 + 2n + 7},$$

(b) (7 bodova)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{5^k + 2^k(\cos(k) + 1)^k}}{n}.$$

Rješenje.

(a) Budući da je $2 > 1$ i s vježbi (Zadatak 2.23) znamo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{2^n} = 0,$$

slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n^4 + 3n^2 + 1}{2^n} = 0.$$

Na predavanjima je pokazano da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0,$$

pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin((n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1})}{(n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1}} = 1.$$

Korištenjem pravila za produkt limesa i dijeljenjem brojnika i nazivnika u drugom faktoru sa n^4 zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin((n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1}) \frac{2^{n+2}}{5n^4 + 2n + 7} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin((n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1})}{(n^4 + 3n^2 + 1)2^{-n+1}} \frac{(n^4 + 3n^2 + 1)2^3}{5n^4 + 2n + 7} &= \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

(b) Ako označimo sa $a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{5^k + 2^k(\cos(k) + 1)^k}$ i sa $b_n = n$, budući da je b_n strogo rastući i neograničen po Cesaro-Stolzovom teoremu ako postoji limes

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 2^n(\cos(n) + 1)^n}$$

tada je niz iz zadatka konvergentan i limes mu je jednak L . Budući da je $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ imamo

$$5 \leq \sqrt[n]{5^n + 2^n(\cos(n) + 1)^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 2^n \cdot 2^n} \leq 5 \sqrt[n]{2}.$$

Budući da po Zadatku 2.19 s vježbi znamo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ po teoremu o sendviču slijedi da je $L = 5$.

Zadatak 3. (ukupno 12 bodova)

(a) (9 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{(m+1)^2 \cdot 2^m}{m!} : m \in \mathbb{N} \right\}$$

(b) (3 boda) Neka je S ograničen skup te neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.

Vrijedi li nužno da je

$$f(S) = [f(\inf S), f(\sup S)]?$$

Rješenje.

(a) Vidimo da je $\frac{(m+1)^2 \cdot 2^m}{m!} \geq 0$, za $m \in \mathbb{N}$.

Također,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)^2 \cdot 2^m}{m!} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m^2 + 2m + 1}{m(m-1)} \cdot \frac{2^{m-2}}{(m-2)!} \cdot 4 \right) = 0.$$

Slijedi da je $0 = \inf S$.

Provjerimo je li niz $a_m = \frac{(m+1)^2 \cdot 2^m}{m!}$ monoton.

Računamo:

$$\begin{aligned} \frac{(m+1)^2 \cdot 2^m}{m!} &\leq \frac{(m+2)^2 \cdot 2^{m+1}}{(m+1)!} \\ \iff (m+1)^3 &\leq (m+2)^2 \cdot 2 \\ \iff m^3 + m^2 - 5m - 7 &\leq 0 \end{aligned}$$

Sada vidimo da je za $m \geq 3$,

$$m^3 \geq 9m > 5m, \quad m^2 \geq 9 > 7,$$

pa je niz padajući za $m \geq 3$.

Uvrštavanjem $m = 1, 2$ vidimo da je niz rastući za $m = 1, 2$.

Dakle, maksimum se postiže za $m = 3$ i vrijednost je $\frac{16 \cdot 8}{6} = \frac{64}{3}$.

Slijedi da je $\sup S = \frac{64}{3}$.

(b) Ne vrijedi. Npr. $S = [1, 2] \cup [5, 6]$, $f(x) = x$.

Tada je $\inf S = 1$, $\sup S = 6$, pa je $[f(\inf S), f(\sup S)] = [1, 6]$.

Međutim, $f(S) = [1, 2] \cup [5, 6] \neq [1, 6]$.

Zadatak 4. (ukupno 13 bodova)

(a) (7 bodova) Odredite postoji li limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x} \cos(x)}{x^2}.$$

(b) (6 bodova) Odredite sve realne brojeve $c \in \mathbb{R}$ za koje postoji nekonstantna, neprekidna i periodična funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $f(x+1) = cf(x)$.

Rješenje.

(a) Primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{e - e^{\cos x} \cos(x)}{x^2} &= \frac{e - e^{\cos x}}{x^2} + e^{\cos x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ &= e \frac{1 - e^{\cos x - 1}}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x^2} + e^{\cos x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \end{aligned}$$

Koristeći neprekidnost funkcije $\cos$ u 0 slijedi da $\cos x - 1 \rightarrow 0$ pa koristeći poznate limese:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

i teorem o limesu produkta slijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0} e \frac{1 - e^{\cos x - 1}}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x^2} = e \cdot (-1) \cdot \frac{-1}{2} = \frac{e}{2}.$$

Nadalje, koristeći neprekidnost eksponencijalne funkcije u 1 i teorem o limesu produkta slijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\cos x} \frac{1 - \cos x}{x^2} = e \cdot \frac{1}{2} = \frac{e}{2}.$$

Konačno, iz prethodnog prikaza i teorema o limesu zbroja slijedi da je traženi limes jednak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x} \cos(x)}{x^2} = \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e.$$

(b) Dokažimo da su $c \in \{-1, 1\}$ jedine mogućnosti. Najprije primijetimo da za $c = 1$ funkcija $f(x) = \sin(2\pi x)$ zadovoljava uvjete zbog 2π -periodičnosti funkcije $\sin$. Za $c = -1$ i funkciju $f(x) = \sin(\pi x)$ vrijedi

$$f(x+1) = \sin(\pi(x+1)) = -\sin(\pi x) = -f(x), \quad \text{i} \quad f(x+2) = \sin(\pi(x+2)) = \sin(\pi x) = f(x)$$

pa zaključujemo da je ona 2-periodična i zadovoljava uvjet.

Dokažimo da tvrdnja ne vrijedi za $c \neq \pm 1$. Periodična neprekidna funkcija je ograničena jer je $f(\mathbb{R}) = f([0, \tau])$, gdje je τ period funkcija, a neprekidna funkcija je ograničena na $[0, \tau]$ po teoremu s predavanja. Neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) \neq 0$ (takav x mora postojati jer je funkcija nekonstantna). U slučaju $|c| > 1$ primijetimo da je $|f(x+n)| = |c|^n |f(x)| \rightarrow \infty$ pa dobivamo kontradikciju s tim da je f ograničena. S druge strane, za $|c| < 1$ primijetimo da je $|f(x-n)| = |c|^{-n} |f(x)| \rightarrow \infty$, što je opet kontradikcija sa ograničenošću.