

Matematika 1 – vježbe

1 Skupovi

Skup je fundamentalan (temeljni) pojam u matematici koji je u potpunosti određen svojim elementima. Ne dajemo preciznu definiciju skupa, već intuitivno prihvaćamo da je skup *kolekcija* nekih elemenata.

Jezik teorije skupova Teorija skupova kojom ćemo se baviti zasnovana je *aksiomatski*, a izgrađena je na postulatu da postoji fundamentalna relacija " $\in$ ":

za X neki skup, propoziciju " $x \in X$ " čitamo: x element skupa X .

Skup A možemo definirati nabranjem svih njegovih elemenata unutar vitičastih zagrada, primjerice

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{skup koji sadrži elemente 1, 2 i 3 ,}$$

ili pak primjenom tzv. *aksioma separacije* ("opisno"), primjerice

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ paran}\} \quad \text{skup koji se sastoji od parnih prirodnih brojeva .}$$

Daljni jezik teorije skupova gradimo pomoću logičkih operatora:

$$\begin{aligned} \neg(x \in X) & \quad \text{nije } (x \text{ element skupa } X), \text{ što skraćeno pišemo } x \notin X , \\ \forall x \in X & \quad \text{za svaki } x \text{ element skupa } X \text{ (univerzalni kvantifikator) ,} \\ \exists x \in X & \quad \text{postoji } x \text{ element skupa } X \text{ (existencijalni kvantifikator) ,} \\ \exists! x \in X & \quad \text{postoji jedinstveni } x \text{ element skupa } X . \end{aligned}$$

Neka su A i B podskupovi nekog "većeg", ambijentnog, skupa X , što zapisujemo pomoću relacije " $\subseteq$ " kao $A, B \subseteq X$ i formalno definiramo kao

$$A \subseteq X \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in X .$$

Uvedimo sada neke skupovne operacije:

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\} & (\text{unija skupova}) , \\ A \cap B &:= \{x : x \in A \text{ i } x \in B\} & (\text{presjek skupova}) , \\ A \setminus B &:= \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\} & (\text{razlika skupova}) , \end{aligned}$$

Također, često koristimo skraćenu oznaku za komplement skupa A obzirom na ambijentni skup X ,

$$A^c = X \setminus A .$$

Uvodimo i posebnu oznaku za prazan skup (skup koji ne sadrži niti jedan element): $\emptyset$. Dakle

$$\forall x : x \notin \emptyset .$$

Zadatak 1.1. Neka je dan skup $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ i njegovi podskupovi $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Skicirajte Vennov dijagram i odredite:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|------------------------------|-----------------------|
| a $A \cup B$, | d $C \setminus A$, | g $(A \setminus B)^c$, | j $A \cap B \cap C$. |
| b $B \cap C$, | e $C \cap A^c$, | h $C \setminus (A \cup B)$, | |
| c $A \setminus C$, | f $(A \cup B)^c$, | i $A \cup B \cup C$, | |

Zadatak 1.2. Studenti znanosti o okolišu izabiru Matematiku 2 ili Opću paleontologiju za izborni kolegij u ljetnom semestru. Svaki student mora izabrati bar jedan od ta dva kolegija. Matematiku 2 je izabralo 9 studenata, Opću paleontologiju 29 studenata, a njih 6 oba kolegija. Koliko je ukupno studenata znanosti o okolišu?

Zadatak 1.3. Skupovi A, B, C podskupovi su univerzalnog skupa S . Poznato je $|S| = 46$, $|A| = 29$, $|B| = 22$, $|C| = 14$, $|A \cap B| = 13$, $|B \cap C| = 11$, $|A \cap C| = 7$, $|A \cap B \cap C| = 5$. Odredite:

1. $|(A \cup B \cup C)^c|$,
2. $|C \setminus (A \cup B)|$,
3. $|(A \cup B) \setminus C|$.

1.1 Matematička indukcija

Neka je dana neka propozicija P koja ovisi o prirodnom broju $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$. Matematičkom indukcijom može se pokazati da $P(n)$ vrijedi (istinita je) za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$ (osim eventualno za njih konačno mnogo). Princip matematičke indukcije sastoji se od

1. baze indukcije: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : P(n_0)$
 $\rightsquigarrow$ riječima: postoji n_0 prirodan broj takav da je $P(n_0)$ istina;
2. koraka indukcije: $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$
 $\rightsquigarrow$ riječima: ako $P(n)$ vrijedi za neko $n \in \mathbb{N}$ tada P vrijedi i za $n+1$.

Intuitivno, matematička indukcija može se zamisliti kao svojevrsan *domino efekt*. Rušenjem jedne domino pločice na mjestu n_0 (što odgovara provjeri, odnosno dokazu, da tvrdnja vrijedi za n_0), sve pločice na mjestu "iza" n_0 (na mjestu $n > n_0$) će također biti srušene (pločica na mjestu n ruši pločicu na mjestu $n+1$). Formalnije, označimo propoziciju $P(n) \equiv n$ -ta pločica je srušena.

1. Prva (odnosno n_0 -ta) domino pločica mora biti srušena da "pokrene lančanu reakciju". Ako nije srušena, do domino efekta ne može doći. Dakle, $P(n_0)$.
2. Udaljenost među pločicama mora biti dovoljno mala. U protivnom, može se dogoditi da pločica padne bez da sruši iduću u redu, i lančana reakcije se zaustavlja. Jamstvo da je udaljenost između svake dvije pločice dovoljno mala odgovara propoziciji $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Zadatak 1.4. Dokažite da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $2^n > n$.

Zadatak 1.5. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Zadatak 1.6. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj 6^n završava znamenkom 6.

Zadatak 1.7. Dokažite da je broj $2^{2n} - 3n + 8$ djeljiv s 9 za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 1.8. Dokažite da za svaki prirodni broj $n \geq 4$ vrijedi nejednakost: $2^{n-1} > 2n - 1$.

1.1.1 Dodatni zadaci

Zadatak 1.9 (ispit 03/07/2024). Pokažite: $\forall n \in \mathbb{N}: 3^{2n} + 7$ je djeljiv s 8.

Zadatak 1.10 (ispit 24/04/2024). Pokažite: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3: n^2 \geq 3n$.

Zadatak 1.11 (ispit 31/01/2024). Pokažite: $\forall n \in \mathbb{N}: 3^n \geq n^2 + n + 1$.

1.2 Skup $\mathbb{R}$

Sa $\mathbb{R}$ označavamo skup realnih brojeva: $\mathbb{R} = \langle -\infty, \infty \rangle$.

Zadatak 1.12. Na realnom brojevnom pravcu skicirajte sljedeće skupove:

a $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 1 \text{ ili } x > 2\}$

c $C = \{x \in \mathbb{R}: x > 1 \text{ i } x < 0\}$

b $B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 2 \text{ i } x > -2\}$

d $D = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq 3 \text{ ili } x = 5\}$

Zadatak 1.13. Na realnom brojevnom pravcu skicirajte sljedeće skupove:

a $[-4, 5] \cap \langle 0, 6]$

c $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

b $\langle 0, 2 \rangle \cup [1, 4]$

d $\langle -\infty, 0] \cap \langle -2, \infty \rangle$