Matematika 1 – vježbe

1 Skupovi

Skup je fundamentalan (temeljni) pojam u matematici koji je u potpunosti određen svojim elementima. Ne dajemo preciznu definiciju skupa, već intuitivno prihvaćamo da je skup *kolekcija* nekih elemenata.

Jezik teorije skupova Teorija skupova kojom ćemo se baviti zasnovana je *aksiomatski*, a izgrađena je na postulatu da postoji fundamentalna relacija "$\in$":

$$\text{za } X \text{ neki skup, propoziciju} \qquad " \ x \in X \ " \qquad \text{čitamo: } x \text{ element skupa } X.$$

Skup A možemo definirati nabrajanjem svih njegovih elemenata unutar vitičastih zagrada, primjerice

$$A = \{1, 2, 3\} \qquad \text{skup koji sadrži elemente 1, 2 i 3 ,}$$

ili pak primjenom tzv. *aksioma separacije* ("opisno"), primjerice

$$A = \{n \in \mathbb{N} \colon n \text{ paran}\} \qquad \text{skup koji se sastoji od parnih prirodnih brojeva .}$$

Daljni jezik teorije skupova gradimo pomoću logičkih operatora:

$$\begin{aligned}
&\neg(x \in X) && \text{nije } (x \text{ element skupa } X), \text{ što skraćeno pišemo} \quad x \notin X \ , \\
&\forall x \in X && \text{za svaki } x \text{ element skupa } X \text{ (univerzalni kvantifikator) ,} \\
&\exists x \in X && \text{postoji } x \text{ element skupa } X \text{ (existencijalni kvantifikator) ,} \\
&\exists! x \in X && \text{postoji jedinstveni } x \text{ element skupa } X \ .
\end{aligned}$$

Neka su A i B podskupovi nekog "većeg", ambijentnog, skupa X, što zapisujemo pomoću relacije "$\subseteq$" kao $A, B \subseteq X$ i formalno definiramo kao

$$A \subseteq X \Leftrightarrow \forall x \in A \colon x \in X \ .$$

Uvedimo sada neke skupovne operacije:

$$\begin{aligned}
&A \cup B \coloneqq \{x \colon x \in A \text{ ili } x \in B\} && \text{(unija skupova) ,} \\
&A \cap B \coloneqq \{x \colon x \in A \text{ i } x \in B\} && \text{(presjek skupova) ,} \\
&A \backslash B \coloneqq \{x \colon x \in A \text{ i } x \notin B\} && \text{(razlika skupova) ,}
\end{aligned}$$

Također, često koristimo skraćenu oznaku za komplement skupa A obzirom na ambijentni skup X,

$$A^{\mathsf{c}} = X \backslash A \ .$$

Uvodimo i posebnu oznaku za prazan skup (skup koji ne sadrži niti jedan element): $\varnothing$. Dakle

$$\forall x \colon x \notin \varnothing \ .$$

Zadatak 1.1. Neka je dan skup $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$ i njegovi podskupovi
$A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Skicirajte Vennov dijagram i odredite:

a $A \cup B$, b $B \cap C$, c $A \backslash C$, d $C \backslash A$, e $C \cap A^c$, f $(A \cup B)^c$, g $(A \backslash B)^c$, h $C \backslash (A \cup B)$, i $A \cup B \cup C$, j $A \cap B \cap C$.

Zadatak 1.2. Studenti znanosti o okolišu izabiru Matematiku 2 ili Opću paleontologiju za izborni kolegij u ljetnom semestru. Svaki student mora izabrati bar jedan od ta dva kolegija. Matematiku 2 je izabralo 9 studenata, Opću paleontologiju 29 studenata, a njih 6 oba kolegija. Koliko je ukupno studenata znanosti o okolišu?

Zadatak 1.3. Skupovi A, B, C podskupovi su univerzalnog skupa S. Poznato je $|S| = 46$, $|A| = 29$, $|B| = 22$, $|C| = 14$, $|A \cap B| = 13$, $|B \cap C| = 11$, $|A \cap C| = 7$, $|A \cap B \cap C| = 5$. Odredite:

1. $|(A \cup B \cup C)^c|$,
2. $|C \backslash (A \cup B)|$,
3. $|(A \cup B) \backslash C|$.

1.1 Matematička indukcija

Neka je dana neka propozicija P koja ovisi o prirodnom broju $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$. Matematičkom indukcijom može se pokazati da $P(n)$ vrijedi (istinita je) za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$ (osim eventualno za njih konačno mnogo). Princip matematičke indukcije sastoji se od

1. baze indukcije: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $P(n_0)$
   $\rightsquigarrow$ riječima: postoji n_0 prirodan broj takav da je $P(n_0)$ istina;
2. koraka indukcije: $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
   $\rightsquigarrow$ riječima: ako $P(n)$ vrijedi za neko $n \in \mathbb{N}$ tada P vrijedi i za $n+1$.

Intuitivno, matematička indukcija može se zamisliti kao svojevrstan *domino efekt*. Rušenjem jedne domino pločice na mjestu n_0 (što odgovara provjeri, odnosno dokazu, da tvrdnja vrijedi za n_0), sve pločice na mjestu "iza" n_0 (na mjestu $n > n_0$) će također biti srušene (pločica na mjestu n ruši pločicu na mjestu $n+1$). Formalnije, označimo propoziciju $P(n) \equiv n$-ta pločica je srušena.

1. Prva (odnosno n_0-ta) domino pločica mora biti srušena da "pokrene lančanu reakciju". Ako nije srušena, do domino efekta ne može doći. Dakle, $P(n_0)$.
2. Udaljenost među pločicama mora biti dovoljno mala. U protivnom, može se dogoditi da pločica padne bez da sruši iduću u redu, i lančana reakcije se zaustavlja. Jamstvo da je udaljenost između svake dvije pločice dovoljno mala odgovara propoziciji $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Zadatak 1.4. Dokažite da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $2^n > n$.

Zadatak 1.5. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Zadatak 1.6. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj 6^n završava znamenkom 6.

Zadatak 1.7. Dokažite da je broj $2^{2n} - 3n + 8$ djeljiv s 9 za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 1.8. Dokažite da za svaki prirodni broj $n \geqslant 4$ vrijedi nejednakost: $2^{n-1} > 2n - 1$.

1.1.1 Dodatni zadaci

Zadatak 1.9 (ispit 03/07/2024)**.** Pokažite: $\forall n \in \mathbb{N}\colon 3^{2n} + 7$ je djeljiv s 8.

Zadatak 1.10 (ispit 24/04/2024)**.** Pokažite: $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant 3\colon n^2 \geqslant 3n$.

Zadatak 1.11 (ispit 31/01/2024)**.** Pokažite: $\forall n \in \mathbb{N}\colon 3^n \geqslant n^2 + n + 1$.

1.2 Skup $\mathbb{R}$

Sa $\mathbb{R}$ označavamo skup realnih brojeva: $\mathbb{R} = \langle -\infty, \infty \rangle$.

Zadatak 1.12. Na realnom brojevnom pravcu skicirajte sljedeće skupove:

a $A = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 < x < 1 \text{ ili } x > 2\}$

b $B = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leqslant 2 \text{ i } x > -2\}$

c $C = \{x \in \mathbb{R}\colon x > 1 \text{ i } x < 0\}$

d $D = \{x \in \mathbb{R}\colon\ -3 \leqslant x \leqslant 3 \text{ ili } x = 5\}$

Zadatak 1.13. Na realnom brojevnom pravcu skicirajte sljedeće skupove:

a $[-4, 5] \cap \langle 0, 6]$

b $\langle 0, 2\rangle \cup [1, 4]$

c $\mathbb{R}\backslash[-1, 1]$

d $\langle -\infty, 0] \cap \langle -2, \infty\rangle$

2 Funkcije

DEFINICIJA. Neka su X i Y neprazni. Funkcija sa X u Y je pridruživanje elemenata skupa X elementima skupa Y tako da je **svakom** elementu iz X pridružen **točno** jedan element iz Y. Pišemo

$$f\colon X \to Y\ .$$

Skup X zovemo *domena* ili *područje definicije* funkcije f, a skup Y područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. Domenu od f označavamo s $\mathscr{D}(f)$. Sliku funkcije f definiramo s

$$\mathscr{R}(f) = \{f(x) \in Y\colon x \in X\} \subseteq Y\ .$$

$\rightsquigarrow$ Ako je f dana nekom formulom $f(x)$, pri čemu je x realan broj, tada je **prirodna domena** (ili *prirodno područje definicije*) od f najveći mogući podskup od $\mathbb{R}$ takav da je f dobro definirana formulom $f(x)$.

Zadatak 2.1. Odredite prirodne domene sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{3 - 2x - x^2}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{1 - |x-1|}$.

2.1 Svojstva funkcija

DEFINICIJA. Za funkciju $f\colon \langle -a, a\rangle \to \mathbb{R}$ kažemo da je

1. *parna* na $\langle -a, a\rangle$ ako $\forall x \in \langle -a, a\rangle\colon f(-x) = f(x)$
2. *neparna* na $\langle -a, a\rangle$ ako $\forall x \in \langle -a, a\rangle\colon f(-x) = -f(x)$.

Zadatak 2.2. Ispitajte koje su od sljedećih funkcija parne, koje neparne, a koje niti jedno od toga:

a) $f(x) = x^2 + 1$; b) $f(x) = x^3 - x$; c) $f(x) = x^2 + x$.

DEFINICIJA. Za funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je

- (strogo) rastuća na $I \subseteq \mathbb{R}$ ako

$$\forall x_1, x_2 \in I\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \qquad (\text{ strogo rastuća ako } f(x_1) < f(x_2))$$

- (strogo) padajuća na $I \subseteq \mathbb{R}$ ako

$$\forall x_1, x_2 \in I\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2) \qquad (\text{ strogo padajuća ako } f(x_1) > f(x_2))$$

Za funkciju koja je (strogo) rastuća ili padajuća kažemo da je (strogo) monotona.

Zadatak 2.3. Koristeći definiciju ispitajte monotonost sljedećih funkcija na $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = x$; c) $f(x) = x^3 + x$; d) $f(x) = x^2$.

DEFINICIJA. Za funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je

- ograničena odozdo na $I \subseteq \mathbb{R}$ ako

$$\exists m \in \mathbb{R}\colon \forall x \in I\colon f(x) \geqslant m$$

- ograničena odozgo na $I \subseteq \mathbb{R}$ ako

$$\exists M \in \mathbb{R}\colon \forall x \in I\colon f(x) \leqslant M$$

Za funkciju koja je ograničena odozgo i odozdo, kažemo da je ograničena.

Zadatak 2.4. Ispitajte ograničenost sljedećih funkcija na $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = -x^2$ d) $f(x) = x^3$

$\rightsquigarrow$ Graf funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, definiramo s

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x))\colon x \in \mathscr{D}(f)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \,.$$

Zadatak 2.5. Skicirajte grafove sljedećih funkcija:

a) $f(x) = x + |x|$, b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & : x \neq 1 \\ 1 & : x = 1 \end{cases}$, c) $f(x) = \begin{cases} x & : x \leqslant 0 \\ x+1 & : x > 0 \end{cases}$.

2.2 Kompozicija funkcija

DEFINICIJA. Neka je $f\colon A \to B$ and $g\colon C \to D$. Ako je $\mathscr{R}(f) \subseteq C = \mathscr{D}(g)$, definiramo kompoziciju funkcija

$$g \circ f\colon A \to D \,,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \,,\ \forall x \in A \,.$$

Napomena 2.1. Općenito, $f \circ g \neq g \circ f$.

Zadatak 2.6. Neka su dane funkcije

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$,
- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$,
- $h\colon [0, \infty\rangle \to [0, \infty\rangle$, $h(x) = \sqrt{x}$.

Odredite

a) $f \circ g$, b) $g \circ h$, c) $f \circ h$, d) $f \circ g \circ h$.

2.3 Injekivnost i surjektivnost

DEFINICIJA. Neka je $f\colon A \to B$. Za f kažemo da je

- *injekcija* ako $\forall x_1, x_2 \in A$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{ili, ekvivalentno}$$
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- *surjekcija* ako $\mathscr{R}(f) = B$, tj.

$$\forall y \in B\colon \exists x \in A\colon y = f(x)\ ,$$

- *bijekcija* ako je injekcija i surjekcija, tj.

$$\forall y \in B\colon \exists! x \in A\colon y = f(x)\ ,$$

Zadatak 2.7. Ispitajte injektivnost sljedećih funkcija:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$,

b) $g\colon \mathbb{R}\backslash\{-4/3\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{-2x+1}{3x+4}$,

c) $h\colon [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + x$,

Zadatak 2.8. Ispitajte injektivnost/surjektivnost i odredite koje od sljedećih funkcija su bijekcije:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

b) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = 4n - 1$

2.3.1 Dodatni zadaci (u ovom trenutku na predavanjima obrađeni su polinomi, racionalne funkcije, apsolutne vrijednosti)

Zadatak 2.9. Odredite prirodne domene sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x-6}$ b) $g(x) = \dfrac{1-x}{x^2-x+6}$ c) $h(x) = \dfrac{1}{x^3+x^2-6x}$

Zadatak 2.10. Odredite slike sljedećih funkcija:

a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$; b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$; c) $h\colon \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

Zadatak 2.11. Odredite prirodne domene sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{|x-2| - |x+2|}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{|x - |x-2|| - 1}$ c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - |x-1|}$

DEFINICIJA. Funkciju $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ definiranu pravilom pridruživanja $\mathrm{id}_A(x) = x$ zovemo **identiteta** na A.

DEFINICIJA. Neka je $f\colon A \to B$ funkcija. Funkciju $g\colon B \to A$ takvu da je $g \circ f = \mathrm{id}_A$ i $f \circ g = \mathrm{id}_B$ nazivamo **inverzom** funkcije f i označavamo s f^{-1}.

Drugim riječima

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \qquad \text{znači} \qquad g(f(x)) = x \ , \ \forall x \in A \ ,$$
$$f \circ g = \mathrm{id}_B \qquad \text{znači} \qquad f(g(y)) = y \ , \ \forall y \in B \ .$$

Napomena 2.2. f ima inverz ako i samo ako je bijekcija. Inverz je jedinstven

Zadatak 2.12. Pokažite da su sljedeće funkcije bijekcije te im odredite inverze:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$

b) $g\colon \mathbb{R}\backslash\{-4/3\} \to \mathbb{R}\backslash\{-\frac{2}{3}\}$, $g(x) = \dfrac{-2x+1}{3x+4}$ (usporediti sa Zadatkom 2.7)

2.4 Elementarne funkcije (korijeni, eksponencijalna, logaritmi)

2.4.1 Korijeni

Promatramo potencije s neparnim eksponentima, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n+1}$ za $n \in \mathbb{N}$:

- $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathscr{R}(f) = \mathbb{R}$
- neparna, strogo rastuća, bijektivna

$\rightsquigarrow$ f ima inverz, $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ (također neparna, strogo rastuća, bijektivna)

Potencije s parnim eksponentima, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$ za $n \in \mathbb{N}$

- $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathscr{R}(f) = [0, \infty\rangle$
- parna, nisu injekcije
- strogo padajuća na $\langle -\infty, 0]$, a strogo rastuća na $[0, \infty\rangle$

Restrikcija od f na $[0, \infty\rangle$ (i na $\langle -\infty, 0]$) jest bijekcija pa ima inverz:

$$f_+ \coloneqq f\Big|_{[0,\infty\rangle}\colon [0, \infty\rangle \to [0, \infty\rangle \qquad \Rightarrow \qquad (f_+)^{-1}\colon [0, \infty\rangle \to [0, \infty\rangle \ , \ f_+^{-1}(x) = \sqrt[2n]{x}$$
$$f_- \coloneqq f\Big|_{\langle -\infty,0]}\colon \langle -\infty, 0] \to [0, \infty\rangle \qquad \Rightarrow \qquad (f_-)^{-1}\colon [0, \infty\rangle \to \langle -\infty, 0] \ , \ f_-^{-1}(x) = -\sqrt[2n]{x}$$

$\rightsquigarrow$ općenito, za $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{x}$ zovemo n-ti korijen

Zadatak 2.13. Odredite prirodne domene sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt[3]{x+3}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ c) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Zadatak 2.14. Odredite jesu li sljedeće funkcije bijekcije te, ako jesu, odredite im inverz.

a) $f\colon [4, \infty\rangle \to [0, \infty\rangle$, $f(x) = \sqrt{x-4}$ c) $f\colon [0, \infty\rangle \to [4, \infty\rangle$, $f(x) = (\sqrt{x}+2)^2$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^3$

2.4.2 Eksponencijalna funkcija

DEFINICIJA. Neka je $a > 0$, $a \neq 1$. Funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s $f(x) = a^x$ zovemo eksponencijalna funkcija s bazom a

- za $a < 1$ f je strogo padajuća, a za $a > 1$ f je strogo rastuća (pa i injektivna)
- $\mathscr{R}(f) = \langle 0, \infty \rangle$, pa je $f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ bijekcija

Kako je $f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ bijekcija, f ima inverz $f^{-1}\colon \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$ koji označavamo s $\log_a$. Ako je $a = e$ pišemo $\ln = \log_e$ i tu funkciju zovemo prirodni logaritam.

Uočimo

$$\log_a a^x = f^{-1}(f(x)) = x \ , \ x \in \mathbb{R} \ ,$$
$$a^{\log_a x} = f(f^{-1}(x)) \ , x > 0 \ .$$

Dakle $\log_a y = x$ ako i samo ako je $y = a^x$.

Zadatak 2.15. Odredite prirodne domene sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln|x|}$ c) $f(x) = \sqrt{1 - \ln(x)}$

Zadatak 2.16. Odredite prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x) = \ln \dfrac{x-2}{x+3} + 1$. Pokažite da je f injektivna i odredite inverz funkcije $f\colon \mathscr{D}(f) \to \mathscr{R}(f)$.

Zadatak 2.17. Odredite je li funkcija $g\colon \langle 2, \infty \rangle \to \langle -2, \infty \rangle$, $g(x) = \exp(x^4 - 4x^2) - 3$, bijekcija.