Matematika 2

Vježbe – obične diferencijalne jednadžbe

1. Općenito o običnim diferencijalnim jednadžbama

Zadaci:

1. Provjerite da je familija krivulja
$$x^2 + y^2 - 2Cx = 0$$
opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe
$$2xyy' = y^2 - x^2.$$
Što predstavlja partikularno rješenje za $C = 1$?

2. Dokažite da je funkcija
$$y = C_1 e^{-x} + e^{2x} \left(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x\right)$$
opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe
$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0.$$

3. Odredite običnu diferencijalnu jednadžbu čije je opće rješenje
$$y = Ce^{-x}.$$

4. Odredite običnu diferencijalnu jednadžbu familije kružnica
$$x^2 + y^2 = 2Cx.$$

5. Odredite jednadžbu krivulje čiji graf sadrži točku $T(2, -3)$ ako je zadan koeficijent smjera tangente
$$k(x) = 4x - 3.$$

6. Odredite zakon gibanja tijela duž osi x ako ono počinje gibanje iz točke T brzinom v:

(a) $T(0, 4)$, $v(t) = 2t + 3t^2$,
(b) $T(0, 6)$, $v(t) = 4t - 6t^2$.

7. Dokažite da je funkcija
$$y = Cx^3$$
opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe
$$3y - xy' = 0.$$
Skicirajte integralne krivulje i odredite koja integralna krivulja prolazi točkom
$$\left(1, \frac{1}{3}\right).$$

8. Provjerite je li funkcija

$$y = Ce^{-4x} + e^{-3x} + 2x^2 - x - 1$$

opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$$

9. Dokažite da je

$$y = \frac{C}{1 - Cx}$$

opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y' = y^2.$$

Odredite C ako je zadan početni uvjet $y(0) = 1$. U istom koordinatnom sustavu skicirajte rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi $y' = y^2$ i $y' = y$ uz početni uvjet $y(0) = 1$. Koje rješenje brže raste i zašto?

10. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' = \left(x^3 + 1\right)^2.$$

11. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' = e^{3x}.$$

12. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' = x \cos x.$$

13. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' = x.$$

14. Riješite početni problem

$$\begin{cases} y' = x^3 + 3x^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. ODJ prvog reda

2.1. ODJ prvog reda sa separiranim varijablama

- Standardni oblik je
$$y' = f(x)g(y).$$

- Varijable se odvajaju u obliku
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Zadaci:

1. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' = 2xy.$$

Rješenje.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2x\,dx.$$

Integriranjem dobivamo

$$\ln|y| = x^2 + C,$$

odnosno

$$y = Ce^{x^2}.$$

2. Riješite početni problem

$$(1+e^x)yy' = e^y, \qquad y(0) = 0.$$

Rješenje.

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^y \quad \Longrightarrow \quad ye^{-y}\,dy = \frac{dx}{1+e^x}.$$

Integriranjem dobivamo

$$\int ye^{-y}\,dy = \int \frac{dx}{1+e^x}.$$

Budući da je

$$\int ye^{-y}\,dy = -(y+1)e^{-y}$$

i

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C,$$

slijedi

$$-(y+1)e^{-y} = x - \ln(1+e^x) + C.$$

Iz početnog uvjeta dobivamo

$$-1 = -\ln 2 + C,$$

pa je

$$C = \ln 2 - 1.$$

Dakle,

$$-(y+1)e^{-y} = x - \ln(1+e^x) + \ln 2 - 1.$$

Konačno,

$$(y+1)e^{-y} = 1 - x + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right).$$

3. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$x^3 \sin y \, y' = 2, \qquad \lim_{x\to\infty} y = \frac{\pi}{2}.$$

Rješenje.

$$x^3 \sin y \frac{dy}{dx} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \sin y \, dy = 2x^{-3} \, dx.$$

Integriranjem dobivamo

$$-\cos y = -\frac{1}{x^2} + C.$$

Odnosno,

$$\cos y = \frac{1}{x^2} + C_1.$$

Iz uvjeta

$$\lim_{x\to\infty} y = \frac{\pi}{2}$$

slijedi

$$\lim_{x\to\infty} \cos y = 0,$$

pa je

$$C_1 = 0.$$

Zato je

$$\cos y = \frac{1}{x^2}.$$

4. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' = \sin(x - y).$$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(xy^2 + x) \, dx + (y - x^2 y) \, dy = 0.$$

6. Riješite početni problem

$$(x + 2y)y' = 1, \qquad y(0) = 1.$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju

$$z = x + 2y.$$

Tada je

$$z' = 1 + 2y'.$$

Budući da je

$$y' = \frac{1}{x + 2y} = \frac{1}{z},$$

dobivamo

$$z' = 1 + \frac{2}{z} = \frac{z + 2}{z}.$$

Zato je

$$\frac{z}{z+2}\,dz = dx.$$

Integriranjem slijedi

$$\int \frac{z}{z+2}\,dz = \int dx.$$

Budući da je

$$\frac{z}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2},$$

dobivamo

$$z - 2\ln|z+2| = x + C.$$

Vraćanjem supstitucije dobivamo

$$x + 2y - 2\ln|x+2y+2| = x + C.$$

Odavde slijedi

$$2y - 2\ln|x+2y+2| = C.$$

Preuređivanjem dobivamo

$$x + 2y + 2 = Ke^{y}.$$

Iz uvjeta $y(0) = 1$ slijedi

$$4 = Ke,$$

pa je

$$K = \frac{4}{e}.$$

Stoga je rješenje

$$x + 2y + 2 = 4e^{y-1}.$$

7. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' = 3x - 2y + 5.$$

2.2. Linearne ODJ prvog reda

Linearna obična diferencijalna jednadžba prvog reda ima opći oblik

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Takva jednadžba može se rješavati na više ekvivalentnih načina.

I. **Bernoullijeva supstitucija.**

Uvodi se supstitucija

$$y = uv.$$

Tada je

$$y' = u'v + uv'.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobiva se

$$u'v + u\Big(v' + P(x)v\Big) = Q(x).$$

Funkcija v bira se tako da vrijedi

$$v' + P(x)v = 0.$$

Tada preostaje jednadžba

$$u'v = Q(x),$$

iz koje se određuje u.

II. **Lagrangeova metoda, odnosno metoda varijacije konstante.**

Najprije se riješi pridružena homogena jednadžba

$$y' + P(x)y = 0.$$

Njezino je rješenje

$$y_h = Ce^{-\int P(x)\,dx}.$$

Zatim se konstanta C zamijeni funkcijom $C(x)$, pa se traži rješenje oblika

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}.$$

III. **Eulerova metoda, odnosno metoda integrirajućeg faktora.**

Jednadžba

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

množi se integrirajućim faktorom

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}.$$

Tada lijeva strana postaje derivacija umnoška:

$$\Big(\mu(x)y\Big)' = \mu(x)Q(x).$$

Integriranjem se dobiva

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)\,dx + C.$$

Zadaci:

1. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' = 2y + x.$$

2. Riješite diferencijalnu jednadžbu na intervalu na kojem je $x \neq 1$

$$(x-1)y' + xy = e^{-x}.$$

3. Riješite diferencijalnu jednadžbu na intervalu na kojem je $x \neq 0$

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3.$$

Rješenje.

I. Bernoullijeva supstitucija. Stavimo

$$y = uv.$$

Tada je

$$y' = u'v + uv'.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = x^3,$$

odnosno

$$u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = x^3.$$

Biramo v tako da vrijedi

$$v' + \frac{2}{x}v = 0.$$

Tada je

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2}{x}\,dx,$$

pa možemo uzeti

$$v = x^{-2}.$$

Preostaje

$$u'v = x^3,$$

odnosno

$$u'x^{-2} = x^3.$$

Dakle,

$$u' = x^5.$$

Integriranjem dobivamo

$$u = \frac{x^6}{6} + C.$$

Zato je

$$y = uv = \left(\frac{x^6}{6} + C\right)x^{-2},$$

pa je

$$y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}.$$

II. Lagrangeova metoda. Najprije rješavamo homogenu jednadžbu

$$y' + \frac{2}{x}y = 0.$$

Odvajanjem varijabli dobivamo

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2}{x}\,dx.$$

Integriranjem:

$$\ln|y| = -2\ln|x| + C.$$

Dakle,

$$y_h = \frac{C}{x^2}.$$

Metodom varijacije konstante tražimo rješenje oblika

$$y = \frac{C(x)}{x^2}.$$

Tada je

$$y' = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}.$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu:

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^2} = x^3.$$

Sređivanjem dobivamo

$$\frac{C'(x)}{x^2} = x^3,$$

pa je

$$C'(x) = x^5.$$

Integriranjem slijedi

$$C(x) = \frac{x^6}{6} + C_1.$$

Zato je

$$y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^6}{6} + C_1\right),$$

odnosno

$$y = \frac{x^4}{6} + \frac{C_1}{x^2}.$$

III. Eulerova metoda. Za jednadžbu

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3$$

imamo

$$P(x) = \frac{2}{x}.$$

Integrirajući faktor je

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln|x|} = x^2.$$

Množenjem jednadžbe s x^2 dobivamo

$$x^2y' + 2xy = x^5.$$

Lijeva strana je derivacija umnoška:

$$(x^2y)' = x^5.$$

Integriranjem:

$$x^2 y = \frac{x^6}{6} + C.$$

Stoga je

$$y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}.$$

4. Riješite diferencijalnu jednadžbu za $x > 0$

$$2x\,dy = (2x^3 - y)\,dx.$$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu za $x > 0$, $x \neq 1$

$$y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x.$$

6. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$$

2.3. Autonomne ODJ

Autonomna diferencijalna jednadžba prvog reda ima oblik

$$y' = f(y).$$

Ako je $f(y) \neq 0$, tada se varijable mogu separirati:

$$\frac{dy}{f(y)} = dx.$$

Integriranjem dobivamo opći implicitni oblik rješenja

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C.$$

Zadaci:

1. Riješite autonomnu diferencijalnu jednadžbu

$$y' = y^2(1 - y)^2.$$

2. Riješite autonomnu diferencijalnu jednadžbu

$$y' = y^2(y^2 + 4).$$

3. Riješite autonomnu diferencijalnu jednadžbu na intervalima na kojima je $\tan y$ definirana

$$y' = 1 + \tan y.$$

Rješenje. Jednadžba je autonomna i separabilna, pa imamo

$$\frac{dy}{1+\tan y} = dx.$$

Vrijedi

$$\frac{1}{1+\tan y} = \frac{\cos y}{\cos y + \sin y} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos y - \sin y}{\sin y + \cos y}\right).$$

Zato je

$$\int \frac{dy}{1+\tan y} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\ln|\sin y + \cos y|.$$

Dakle, nekonstantna rješenja implicitno su zadana jednadžbom

$$\frac{1}{2}\left(y + \ln|\sin y + \cos y|\right) = x + C.$$

Osim toga, postoje i stacionarna rješenja. Dobivamo ih iz uvjeta

$$1 + \tan y = 0,$$

odnosno

$$\tan y = -1.$$

Stoga su stacionarna rješenja

$$y = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

2.4. Homogene ODJ prvog reda

Jednadžba oblika

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

je homogena diferencijalna jednadžba ako su funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ homogene funkcije istog stupnja homogenosti.

Funkcija $f(x,y)$ je homogena funkcija m-tog stupnja homogenosti ako vrijedi

$$f(tx,ty) = t^m f(x,y).$$

Ako je jednadžba

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

homogena, tada se može svesti na oblik

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Supstitucijom

$$u = \frac{y}{x}, \qquad y = ux$$

dobiva se

$$y' = u + x\frac{du}{dx}.$$

Zato se homogena jednadžba svodi na jednadžbu

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u,$$

koja se zatim rješava metodom separacije varijabli.

Napomena. Jednadžba oblika

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

može se svesti na homogenu diferencijalnu jednadžbu prenošenjem koordinatnog početka u sjecište (x_0, y_0) pravaca

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

To se postiže supstitucijom

$$x = u + x_0, \qquad y = v + y_0,$$

gdje su u i v nove varijable. Ako su pravci paralelni, tada se jednadžba može svesti na jednadžbu sa separiranim varijablama odgovarajućom supstitucijom, primjerice

$$z = a_1x + b_1y.$$

Zadaci:

1. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(x + y)\,dy - (x - y)\,dx = 0.$$

Rješenje. Jednadžbu zapišemo u obliku

$$(x + y)y' = x - y.$$

Dakle,

$$y' = \frac{x - y}{x + y}.$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika s x dobivamo

$$y' = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}.$$

Uvedemo supstituciju

$$u = \frac{y}{x}, \qquad y = ux.$$

Tada je

$$y' = u + xu'.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$u + xu' = \frac{1 - u}{1 + u}.$$

Odavde slijedi

$$xu' = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{1-2u-u^2}{1+u}.$$

Separacijom varijabli dobivamo

$$\frac{1+u}{1-2u-u^2}\,du = \frac{dx}{x}.$$

Budući da je

$$1-2u-u^2 = 2-(u+1)^2,$$

stavimo $w = u+1$. Tada je

$$\int \frac{1+u}{1-2u-u^2}\,du = \int \frac{w}{2-w^2}\,dw = -\frac{1}{2}\ln|2-w^2|.$$

Zato je

$$-\frac{1}{2}\ln|2-(u+1)^2| = \ln|x| + C.$$

Ekvivalentno,

$$x^2\left(2-\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\right) = C.$$

Konačno rješenje možemo zapisati u obliku

$$2x^2-(x+y)^2 = C.$$

2. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(x+y-2)\,dx + (x-y+4)\,dy = 0.$$

Rješenje. Ovo nije homogena jednadžba u početnom obliku, ali se svodi na homogenu translacijom koordinatnog sustava. Promatramo pravce

$$x+y-2=0, \qquad x-y+4=0.$$

Njihovo sjecište je

$$(x_0, y_0) = (-1, 3).$$

Uvodimo supstituciju

$$x = u-1, \qquad y = v+3.$$

Tada je

$$dx = du, \qquad dy = dv,$$

a jednadžba prelazi u

$$(u+v)\,du + (u-v)\,dv = 0.$$

Odavde je

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u+v}{u-v}.$$

Uvedemo homogenu supstituciju

$$v = tu.$$

Tada je

$$\frac{dv}{du} = t + u\frac{dt}{du}.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$t + u\frac{dt}{du} = -\frac{1+t}{1-t}.$$

Dakle,

$$u\frac{dt}{du} = -\frac{1+t}{1-t} - t = \frac{t^2-2t-1}{1-t}.$$

Separacijom varijabli:

$$\frac{1-t}{t^2-2t-1}\,dt = \frac{du}{u}.$$

Budući da je

$$t^2 - 2t - 1 = (t-1)^2 - 2,$$

stavimo $w = t - 1$. Tada je

$$\int \frac{1-t}{t^2-2t-1}\,dt = \int \frac{-w}{w^2-2}\,dw = -\frac{1}{2}\ln|w^2-2|.$$

Zato je

$$-\frac{1}{2}\ln|(t-1)^2-2| = \ln|u| + C.$$

Ekvivalentno,

$$u^2\left[\left(\frac{v}{u}-1\right)^2 - 2\right] = C.$$

Dakle,

$$(v-u)^2 - 2u^2 = C.$$

Vraćanjem supstitucije $u = x+1$, $v = y-3$, dobivamo

$$(y-x-4)^2 - 2(x+1)^2 = C.$$

3. Riješite početni problem

$$\begin{cases} xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right), \\ y(1) = e^{-1/2}. \end{cases}$$

4. Riješite diferencijalne jednadžbe:

(a)

$$(3x+4y+1)y' + (2x+3y+1) = 0.$$

(b)

$$(2x+3y)y' + (x+2y+1) = 0.$$

2.5. Bernoullijeve ODJ

Opći oblik Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe je

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

gdje su $P(x)$ i $Q(x)$ neprekidne funkcije u području integracije, a n je konstanta takva da je

$$n \neq 0, \qquad n \neq 1.$$

Ako je $n = 0$ ili $n = 1$, jednadžba se svodi na linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda.

Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu možemo riješiti na više načina.

I. Supstitucijom

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$$

jednadžba se svodi na linearnu jednadžbu u funkciji z. Budući da je

$$z' = (1-n)y^{-n}y',$$

dobiva se linearna jednadžba

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x),$$

odnosno ekvivalentno

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

II. Bernoullijevom supstitucijom

$$y(x) = u(x)v(x)$$

biramo funkciju v tako da zadovoljava pripadnu homogenu linearnu jednadžbu

$$v' + P(x)v = 0.$$

Tada se za funkciju u dobiva jednadžba sa separiranim varijablama.

III. Lagrangeovom metodom varijacije konstante najprije riješimo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y' + P(x)y = 0,$$

a zatim proizvoljnu konstantu u homogenom rješenju zamijenimo funkcijom od x.

Zadaci:

1. Riješite Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu za $x \neq 0$

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$$

Rješenje. Za $x \neq 0$ dijeljenjem s x dobivamo

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}.$$

Uočimo da je $y = 0$ posebno rješenje. U nastavku tražimo rješenja za koja je $y > 0$.

I. Supstitucija $z = y^{1-n}$. Ovdje je

$$P(x) = -\frac{4}{x}, \qquad Q(x) = x, \qquad n = \frac{1}{2}.$$

Zato uzimamo

$$z = y^{1-n} = y^{1/2} = \sqrt{y}.$$

Tada je

$$y = z^2, \qquad y' = 2zz'.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$

dobivamo

$$2zz' - \frac{4}{x}z^2 = xz.$$

Za $z \neq 0$ dijelimo sa z:

$$2z' - \frac{4}{x}z = x.$$

Dakle,

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}.$$

To je linearna diferencijalna jednadžba. Integrirajući faktor je

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}\,dx} = x^{-2}.$$

Množenjem jednadžbe s x^{-2} dobivamo

$$\left(zx^{-2}\right)' = \frac{1}{2x}.$$

Integriranjem slijedi

$$zx^{-2} = \frac{1}{2}\ln|x| + C.$$

Zato je

$$z = x^2\left(C + \frac{1}{2}\ln|x|\right).$$

Budući da je $z = \sqrt{y}$, dobivamo

$$y = x^4\left(C + \frac{1}{2}\ln|x|\right)^2.$$

Uz to, posebno rješenje je

$$y = 0.$$

II. Bernoullijeva supstitucija $y = uv$. Stavimo

$$y = uv.$$

Tada je

$$y' = u'v + uv'.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$

dobivamo

$$u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{uv}.$$

Sredimo lijevu stranu:

$$u'v + u\left(v' - \frac{4}{x}v\right) = x\sqrt{uv}.$$

Biramo v tako da vrijedi

$$v' - \frac{4}{x}v = 0.$$

Odvajanjem varijabli dobivamo

$$\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}\,dx,$$

pa možemo uzeti

$$v = x^4.$$

Tada preostaje

$$u'x^4 = x\sqrt{ux^4}.$$

Na promatranom intervalu vrijedi $\sqrt{x^4} = x^2$, pa je

$$u'x^4 = x^3\sqrt{u}.$$

Dakle,

$$u' = \frac{\sqrt{u}}{x}.$$

Separacijom varijabli dobivamo

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}.$$

Integriranjem:

$$2\sqrt{u} = \ln|x| + C_1.$$

Zato je

$$\sqrt{u} = C + \frac{1}{2}\ln|x|.$$

Dakle,

$$u = \left(C + \frac{1}{2}\ln|x|\right)^2.$$

Budući da je $y = uv$, dobivamo

$$y = x^4\left(C + \frac{1}{2}\ln|x|\right)^2.$$

Uz to, posebno rješenje je

$$y = 0.$$

III. Lagrangeova metoda varijacije konstante. Prvo riješimo pripadnu homogenu jednadžbu
$$y' - \frac{4}{x}y = 0.$$
Odvajanjem varijabli:
$$\frac{dy}{y} = \frac{4}{x}\,dx.$$
Integriranjem dobivamo
$$\ln|y| = 4\ln|x| + C,$$
pa je homogeno rješenje
$$y_h = Cx^4.$$
Metodom varijacije konstante tražimo rješenje u obliku
$$y = C(x)x^4.$$
Tada je
$$y' = C'(x)x^4 + 4C(x)x^3.$$
Uvrštavanjem u jednadžbu
$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$
dobivamo
$$C'(x)x^4 + 4C(x)x^3 - \frac{4}{x}C(x)x^4 = x\sqrt{C(x)x^4}.$$
Lijeva strana se skrati na
$$C'(x)x^4.$$
Budući da je $\sqrt{x^4} = x^2$, slijedi
$$C'(x)x^4 = x^3\sqrt{C(x)}.$$
Dakle,
$$C'(x) = \frac{\sqrt{C(x)}}{x}.$$
Separacijom varijabli:
$$\frac{dC}{\sqrt{C}} = \frac{dx}{x}.$$
Integriranjem dobivamo
$$2\sqrt{C(x)} = \ln|x| + C_1.$$
Zato je
$$C(x) = \left(C + \frac{1}{2}\ln|x|\right)^2.$$
Konačno,
$$y = x^4\left(C + \frac{1}{2}\ln|x|\right)^2.$$
Uz to, posebno rješenje je
$$y = 0.$$

2. Riješite Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu za $x \neq 0$

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2y^3.$$

3. Riješite Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu

$$y' + y = xy^2.$$

4. Riješite Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu za $x \neq 0$

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2y^2.$$

2.6. Riccatijeve ODJ

Riccatijeva diferencijalna jednadžba prvog reda ima oblik

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x).$$

Općenito se Riccatijeva jednadžba rješava kada je poznato jedno njezino partikularno rješenje y_p. Tada se uvodi supstitucija

$$y = y_p + \frac{1}{u}.$$

Nakon uvrštavanja dobiva se linearna diferencijalna jednadžba za funkciju u:

$$u' + \Big(2a(x)y_p + b(x)\Big)u = -a(x).$$

Zadaci:

1. Riješite Riccatijevu diferencijalnu jednadžbu

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1,$$

ako je jedno partikularno rješenje

$$y_p = x.$$

Rješenje. Uvodimo supstituciju

$$y = x + \frac{1}{u}.$$

Tada je

$$y' = 1 - \frac{u'}{u^2}.$$

Desna strana jednadžbe postaje

$$\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - 2x\left(x + \frac{1}{u}\right) + x^2 + 1 = \frac{1}{u^2} + 1.$$

Zato vrijedi
$$1-\frac{u'}{u^2}=1+\frac{1}{u^2}.$$
Odavde slijedi
$$-\frac{u'}{u^2}=\frac{1}{u^2},$$
pa je
$$u'=-1.$$
Integriranjem dobivamo
$$u=C-x.$$
Vraćanjem supstitucije slijedi
$$y=x+\frac{1}{C-x}.$$
Uz to, posebno rješenje je
$$y=x.$$

2. Riješite Riccatijevu diferencijalnu jednadžbu
$$y'=y^2-(2x+1)y+x^2+x+1,$$
ako je jedno partikularno rješenje
$$y_p=x.$$

3. Riješite Riccatijevu diferencijalnu jednadžbu
$$y'=y^2+y-2,$$
Rješenje. Uvodimo supstituciju
$$y=1+\frac{1}{u}.$$
Tada je
$$y'=-\frac{u'}{u^2}.$$
Desna strana jednadžbe postaje
$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^2+\left(1+\frac{1}{u}\right)-2=\frac{3}{u}+\frac{1}{u^2}.$$
Zato vrijedi
$$-\frac{u'}{u^2}=\frac{3}{u}+\frac{1}{u^2}.$$
Množenjem s u^2 dobivamo
$$-u'=3u+1,$$
odnosno
$$u'+3u=-1.$$

To je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda. Integrirajući faktor je

$$\mu(x) = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}.$$

Množenjem jednadžbe s e^{3x} dobivamo

$$\left(e^{3x}u\right)' = -e^{3x}.$$

Integriranjem slijedi

$$e^{3x}u = -\frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

Dakle,

$$u = Ce^{-3x} - \frac{1}{3}.$$

Vraćanjem supstitucije dobivamo

$$y = 1 + \frac{1}{Ce^{-3x} - \frac{1}{3}}.$$

ako je jedno partikularno rješenje

$$y_p = 1.$$

4. Riješite Riccatijevu diferencijalnu jednadžbu

$$y' = y^2 - 1,$$

ako je jedno partikularno rješenje

$$y_p = 1.$$

2.7. Egzaktne ODJ i integracijski faktori

Jednadžba je zadana u obliku

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Kažemo da je egzaktna ako vrijedi

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Tada tražimo funkciju potencijala $\Phi(x,y)$ takvu da je

$$\Phi_x = M, \qquad \Phi_y = N.$$

Rješenje je implicitno zadano jednadžbom

$$\Phi(x,y) = C.$$

U praksi se najčešće integrira M po x, doda se nepoznata funkcija $h(y)$, zatim se derivira po y i usporedi s N.

Integracijski faktor koji ovisi samo o x ili samo o y. Ako jednadžba nije egzaktna, ponekad se može pomnožiti integracijskim faktorom μ tako da nova jednadžba postane egzaktna.

Ako izraz
$$\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$$
ovisi samo o x, tada je
$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}.$$
Ako izraz
$$\frac{N_x - M_y}{M} = g(y)$$
ovisi samo o y, tada je
$$\mu(y) = e^{\int g(y)\,dy}.$$
Nakon množenja jednadžbe s μ, jednadžba se rješava kao egzaktna.

Eulerov multiplikator. Ako su M i N homogene funkcije istog stupnja u jednadžbi
$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0,$$
tada se može koristiti Eulerov multiplikator
$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM + yN},$$
ako je $xM + yN \neq 0$. Nakon množenja jednadžba postaje egzaktna. **Zadaci:**

1. Riješite diferencijalnu jednadžbu
$$(2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy = 0.$$

Rješenje. Ovdje je
$$M(x,y) = 2xy + y^2, \qquad N(x,y) = x^2 + 2xy.$$
Vrijedi
$$M_y = 2x + 2y, \qquad N_x = 2x + 2y,$$
pa je jednadžba egzaktna. Tražimo Φ takvu da je $\Phi_x = M$. Integriranjem po x dobivamo
$$\Phi(x,y) = \int (2xy + y^2)\,dx = x^2y + xy^2 + h(y).$$
Zatim
$$\Phi_y = x^2 + 2xy + h'(y).$$
Usporedbom s $N = x^2 + 2xy$ slijedi
$$h'(y) = 0.$$
Zato je
$$\Phi(x,y) = x^2y + xy^2.$$
Rješenje je
$$x^2y + xy^2 = C.$$

2. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(e^x \cos y + 2x)\, dx + (-e^x \sin y + 3y^2)\, dy = 0.$$

Rješenje. Ovdje je

$$M(x, y) = e^x \cos y + 2x, \qquad N(x, y) = -e^x \sin y + 3y^2.$$

Vrijedi

$$M_y = -e^x \sin y, \qquad N_x = -e^x \sin y,$$

pa je jednadžba egzaktna. Integriramo M po x:

$$\Phi(x, y) = \int (e^x \cos y + 2x)\, dx = e^x \cos y + x^2 + h(y).$$

Sada je

$$\Phi_y = -e^x \sin y + h'(y).$$

Usporedbom s N dobivamo

$$h'(y) = 3y^2,$$

pa je

$$h(y) = y^3.$$

Rješenje je

$$e^x \cos y + x^2 + y^3 = C.$$

3. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(3x^2y + 2xy^2 + 1)\, dx + (x^3 + 2x^2y + \cos y)\, dy = 0.$$

4. Riješite početni problem

$$(2x + y)\, dx + (x + 2y)\, dy = 0, \qquad y(0) = 1.$$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(y \cos x + 2x)\, dx + (\sin x + 2y)\, dy = 0.$$

6. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$4xy\, dx + x^2\, dy = 0.$$

7. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$((3x^2 + 2x)y)\, dx + x^2\, dy = 0.$$

Rješenje. Ovdje je

$$M(x, y) = (3x^2 + 2x)y, \qquad N(x, y) = x^2.$$

Računamo

$$M_y = 3x^2 + 2x, \qquad N_x = 2x.$$

Jednadžba nije egzaktna jer je $M_y \neq N_x$. Provjerimo integracijski faktor koji ovisi samo o x:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x^2 + 2x - 2x}{x^2} = 3.$$

Dakle,

$$\mu(x) = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}.$$

Množenjem jednadžbe s e^{3x} dobivamo egzaktni oblik

$$e^{3x}(3x^2 + 2x)y\,dx + e^{3x}x^2\,dy = 0.$$

Tražimo Φ. Iz $\Phi_y = e^{3x}x^2$ slijedi

$$\Phi(x, y) = x^2 e^{3x} y + h(x).$$

Deriviranjem po x dobivamo

$$\Phi_x = e^{3x}(3x^2 + 2x)y + h'(x).$$

Usporedbom s novim M slijedi $h'(x) = 0$. Stoga je rješenje

$$x^2 e^{3x} y = C.$$

8. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y^2\,dx + x(y^2 + 2y)\,dy = 0.$$

Rješenje. Ovdje je

$$M(x, y) = y^2, \qquad N(x, y) = x(y^2 + 2y).$$

Računamo

$$M_y = 2y, \qquad N_x = y^2 + 2y.$$

Jednadžba nije egzaktna. Provjerimo integracijski faktor koji ovisi samo o y:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{y^2 + 2y - 2y}{y^2} = 1.$$

Dakle,

$$\mu(y) = e^{\int 1\,dy} = e^y.$$

Množenjem jednadžbe s e^y dobivamo

$$y^2 e^y\,dx + x(y^2 + 2y)e^y\,dy = 0.$$

Sada tražimo Φ. Iz $\Phi_x = y^2 e^y$ slijedi

$$\Phi(x, y) = xy^2 e^y + h(y).$$

Deriviranjem po y dobivamo

$$\Phi_y = x(2ye^y + y^2 e^y) + h'(y) = x(y^2 + 2y)e^y + h'(y).$$

Usporedbom s novim N slijedi $h'(y) = 0$. Rješenje je

$$xy^2 e^y = C.$$

9. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y\,dx + x(y+1)\,dy = 0.$$

10. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$2y\,dx + x\,dy = 0.$$

Rješenje. Ovdje je

$$M(x,y) = 2y, \qquad N(x,y) = x.$$

Jednadžba nije egzaktna jer je

$$M_y = 2, \qquad N_x = 1.$$

Funkcije M i N homogene su funkcije istog stupnja, pa koristimo Eulerov multiplikator

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM + yN}.$$

Budući da je

$$xM + yN = x \cdot 2y + y \cdot x = 3xy,$$

imamo

$$\mu(x,y) = \frac{1}{3xy}.$$

Množenjem jednadžbe s μ dobivamo

$$\frac{2}{3x}\,dx + \frac{1}{3y}\,dy = 0.$$

Ta je jednadžba egzaktna. Integriranjem dobivamo

$$\frac{2}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|y| = C.$$

Množenjem s 3 slijedi

$$2\ln|x| + \ln|y| = C.$$

Ekvivalentno,

$$x^2 y = C.$$

11. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(3x+2y)\,dx + x\,dy = 0.$$

12. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0.$$

3. ODJ višeg reda

3.1. ODJ višeg reda koje se rješavaju neposrednim integriranjem

- Ovaj se tip prepoznaje po tome što je najviša derivacija izolirana, primjerice

$$y''' = \sin x \qquad \text{ili} \qquad y^{(4)} = 24.$$

- Jednadžba se rješava uzastopnim integriranjem. Ako je ODJ reda n, u općem rješenju treba biti n proizvoljnih konstanti.
- Pri svakom integriranju treba dodati novu konstantu integracije.

Zadaci:

1. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' = 6x - 4.$$

Rješenje. Integriranjem dobivamo

$$y' = \int (6x - 4)\, dx = 3x^2 - 4x + C_1.$$

Ponovnim integriranjem slijedi

$$y = \int (3x^2 - 4x + C_1)\, dx = x^3 - 2x^2 + C_1 x + C_2.$$

Dakle,

$$y = x^3 - 2x^2 + C_1 x + C_2.$$

2. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y''' = e^{2x}.$$

3. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y^{(4)} = 24.$$

3.2. ODJ višeg reda koje se rješavaju sniženjem reda jednadžbe

- Ako jednadžba sadrži $x, y', y'', \ldots$, ali ne sadrži samu funkciju y, uvodi se supstitucija

$$p = y'.$$

Tada je

$$y'' = p', \qquad y''' = p'', \qquad \ldots$$

Najprije se rješava jednadžba za $p(x)$, a zatim se integrira $y' = p(x)$.

- Ako jednadžba sadrži $y, y', y'', \ldots$, ali ne sadrži eksplicitno x, uvodi se

$$p = p(y) = y'.$$

Tada vrijedi

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Zadaci – jednadžba ne sadrži y:

1. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y' = 0.$$

Rješenje. Stavimo

$$p = y'.$$

Tada je $y'' = p'$, pa jednadžba postaje

$$p' + p = 0.$$

Odvajamo varijable:

$$\frac{dp}{p} = -dx.$$

Integriranjem dobivamo

$$\ln|p| = -x + C,$$

odnosno

$$p = Ce^{-x}.$$

Budući da je $p = y'$, slijedi

$$y' = Ce^{-x}.$$

Još jednom integriramo:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2.$$

2. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$xy'' = y'.$$

3. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 2y' = e^x.$$

Zadaci – jednadžba ne sadrži x:

1. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$yy'' = (y')^2.$$

Rješenje. Uvodimo supstituciju

$$p = p(y) = y'.$$

Tada je

$$y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2.$$

Ako je $p = 0$, dobivamo konstantna rješenja. Za $p \neq 0$ dijelimo s p:

$$y\frac{dp}{dy} = p.$$

Odvajanjem varijabli:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}.$$

Integriranjem:

$$\ln|p| = \ln|y| + C,$$

pa je

$$p = Cy.$$

Budući da je $p = y'$, dobivamo

$$y' = Cy.$$

Zato je

$$\frac{dy}{y} = C\,dx,$$

pa slijedi

$$\ln|y| = Cx + C_1.$$

Dakle,

$$y = Ae^{Bx}.$$

2. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' = (y')^2.$$

3. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$yy'' + (y')^2 = 0.$$

3.3. Homogene linearne ODJ višeg reda s konstantnim koeficijentima

- Standardni oblik je
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$
gdje su koeficijenti konstante.
- Traži se rješenje oblika
$$y = e^{\lambda x}.$$
Time se dobiva karakteristični polinom.
- Realni različiti korijeni daju članove $e^{\lambda x}$. Višestruki korijen λ daje članove
$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad x^2 e^{\lambda x}, \ldots$$
- Kompleksni korijeni $\lambda = \alpha \pm i\beta$ daju realni oblik
$$e^{\alpha x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \right).$$

Zadaci:

1. Riješite diferencijalnu jednadžbu
$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$
Rješenje. Tražimo rješenje oblika
$$y = e^{\lambda x}.$$
Karakteristična jednadžba je
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$
Faktoriziranjem dobivamo
$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0.$$
Dakle,
$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 3.$$
Zato je opće rješenje
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

2. Riješite diferencijalnu jednadžbu
$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$
Rješenje. Pripadna karakteristična jednadžba glasi
$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Faktoriziranjem dobivamo

$$(\lambda + 2)^2 = 0.$$

Dakle,

$$\lambda = -2$$

je dvostruka nultočka karakteristične jednadžbe.

Za dvostruku nultočku (λ) pripadna dva linearno nezavisna rješenja su

$$e^{\lambda x} \quad \text{i} \quad xe^{\lambda x}.$$

Zato je opće rješenje

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Odnosno,

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

3. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Rješenje. Pripadna karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Rješavanjem dobivamo

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

Dakle, karakteristična jednadžba ima kompleksno-konjugirane nultočke oblika

$$\lambda = \alpha \pm i\beta,$$

gdje je

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 2.$$

Zato je opće rješenje

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

4. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$$

3.4. Homogene Eulerove linearne ODJ višeg reda

- Eulerova jednadžba prepoznaje se po tome što uz derivaciju $y^{(k)}$ stoji potencija x^k. Tipičan oblik je

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0.$$

- Traži se rješenje oblika

$$y = x^r.$$

- Korisno je pamtiti

$$xy' = rx^r, \qquad x^2y'' = r(r-1)x^r, \qquad x^3y''' = r(r-1)(r-2)x^r.$$

- Dvostruki korijen r daje rješenja x^r i $x^r \ln|x|$. Kompleksni korijeni $r = \alpha \pm i\beta$ daju

$$x^\alpha \left(C_1 \cos(\beta \ln|x|) + C_2 \sin(\beta \ln|x|)\right).$$

Zadaci:

1. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Rješenje.

Tražimo rješenje oblika

$$y = x^r.$$

Tada je

$$y' = rx^{r-1}, \qquad y'' = r(r-1)x^{r-2}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} - 2xrx^{r-1} + 2x^r = 0.$$

Dakle,

$$\Big(r(r-1) - 2r + 2\Big)x^r = 0.$$

Karakteristična jednadžba za r je

$$r(r-1) - 2r + 2 = 0,$$

odnosno

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Faktoriziranjem:

$$(r-1)(r-2) = 0.$$

Zato je

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 2.$$

Opće rješenje je

$$y = C_1 x + C_2 x^2.$$

2. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$x^2y'' - xy' + y = 0.$$

Rješenje. Tražimo rješenje oblika

$$y = x^r.$$

Tada vrijedi

$$y' = rx^{r-1}, \qquad y'' = r(r-1)x^{r-2}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo

$$x^2r(r-1)x^{r-2} - xrx^{r-1} + x^r = 0.$$

Odnosno,

$$r(r-1)x^r - rx^r + x^r = 0.$$

Izlučimo (x^r):

$$\left(r(r-1) - r + 1\right)x^r = 0.$$

Budući da je $(x^r \neq 0)$, slijedi

$$r(r-1) - r + 1 = 0.$$

Sređivanjem:

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Dakle,

$$(r-1)^2 = 0.$$

Zato je

$$r = 1$$

dvostruka nultočka.

Kod Eulerove jednadžbe dvostruka nultočka (r) daje rješenja

$$x^r \quad \text{i} \quad x^r \ln x.$$

Stoga je opće rješenje

$$y = C_1x + C_2x\ln x.$$

Odnosno,

$$y = x(C_1 + C_2\ln x).$$

3. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

Rješenje. Kod Eulerove jednadžbe tražimo rješenje oblika

$$y = x^r.$$

Tada je

$$y' = rx^{r-1}, \qquad y'' = r(r-1)x^{r-2}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + xrx^{r-1} + x^r = 0.$$

Odnosno,

$$r(r-1)x^r + rx^r + x^r = 0.$$

Izlučimo (x^r):

$$(r(r-1) + r + 1)\, x^r = 0.$$

Budući da je $(x^r \neq 0)$, dobivamo karakterističnu jednadžbu

$$r(r-1) + r + 1 = 0.$$

Sređivanjem:

$$r^2 + 1 = 0.$$

Dakle,

$$r = \pm i.$$

To su kompleksno-konjugirane nultočke oblika

$$r = \alpha \pm i\beta,$$

gdje je

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 1.$$

Zato je opće rješenje Eulerove jednadžbe

$$y = x^{\alpha} \left(C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x) \right).$$

U ovom slučaju dobivamo

$$y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x).$$

4. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' = 0.$$