1 Sustavi linearnih jednadžbi

Zadatak 1.1. U ravnini su zadani pravci

$$p_1 \dots\ y = 2x - 1 \qquad \text{i} \qquad p_2 \dots\ y = -x + 5.$$

Odredite točku presjeka tih pravaca.

Rješenje: Točka presjeka je $T = (2, 3)$.

Zadatak 1.2. Ako neki vektor u bazi $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ ima koordinate $[1, 2, 3]$, koje koordinate on ima u bazi $\left\{2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} - 3\vec{c}, -5\vec{a}\right\}$?

Rješenje: Koordinate u novoj bazi su $[3, -1, 1]$.

1.1 Linearne jednadžbe

Definicija 1.1. Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom x je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$ax = b,$$

gdje su a i b zadani brojevi.
Rješenje takve jednadžbe je svaki broj čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanice x daje istinitu numeričku jednakost.

Primjer

- Broj $x = 2$ je rješenje jednadžbe $2x + 3 = 7$.
- Jednadžba $2x + 3 = 4x - 2(x + 3)$ nema rješenja.
- Svaki realni broj x je rješenje jednadžbe $2x+3 = 2(x+1)+1$, tj. ta jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja.

Zadatak 1.3. Cijena majice na sniženju od 35% je 15€. Kolika je bila originalna cijena prije sniženja?

Rješenje: Cijena prije sniženja je $\frac{300}{13} \approx 23.08$€.

Zadatak 1.4. Koliko kilograma vode treba ispariti iz 1 tone celulozne mase koja sadrži 85% vode da bi se dobila masa koja sadrži 75% vode?

Rješenje: Treba ispariti 400kg vode.

Zadatak 1.5. Teretana nudi dvije opcije plaćanja članarine:

(1) upisnina 15€ i mjesečna članarina 25€;

(2) upisnina 5€ i članarina 75€ svaka 3 mjeseca.

Nakon koliko mjeseci članstva je cijena po oba modela jednaka?

Rješenje: Nema rješenja.

Definicija 1.2. Linearna jednadžba s dvije nepoznanice x i y je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$ax + by = c,$$

gdje su a, b i c zadani brojevi. Broj c zove se **slobodnim članom**, a a i b su **koeficijenti** jednadžbe.

Rješenje takve jednadžbe je svaki *uređeni par* brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto brojeva x i y daje istinitu numeričku jednakost.

Zadatak 1.6. Koji od sljedećih uređenih parova su rješenje jednadžbe $3(x-2) = y-4$:

$$(1,1), \qquad (-1,2), \qquad (2,4), \qquad (4,2)?$$

Navedite još neki primjer rješenja zadane jednadžbe. Zapišite i skup svih rješenja (u skupu realnih brojeva).

Rješenje: Parovi $(1,1)$ i $(2,4)$ su rješenja, a $(-1,2)$ i $(4,2)$ nisu rješenja. Rješenje je još i npr. $(0,-2)$. Skup svih rješenja je $\{(t, 3t-2) : t \in \mathbb{R}\}$.

Definicija 1.3. Linearna jednadžba s tri nepoznanice x, y, z je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$ax + by + cz = d$$

gdje su a, b, c i d zadani brojevi.Broj d zove se **slobodnim članom**, a a, b i c su

koeficijenti jednadžbe.

Rješenje takve jednadžbe je svaka *uređena trojka* brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanica x, y i z daje istinitu numeričku jednakost.

Zadatak 1.7. Grupa studenata sjela je u kafić na piće. Svatko od njih naručio je ili espresso za 2€ ili kavu s mlijekom za 2.50€ ili Cedevitu za 3€. Račun iznosi ukupno 16.50€.

Napišite jednadžbu koja modelira navedeni problem. Zapišite skup svih rješenja te jednadžbe. Koja rješenja imaju smisla s obzirom na prirodu problema? Odredite barem jedno smisleno rješenje.

Rješenje: Jednadžba je $2x + 2.5y + 3z = 16.5$. Skup rješenja je $\{(t, s, \frac{1}{3}(16.5 - 2t - 2.5s) : s, t \in \mathbb{R}\}$. Smislena rješenja su ona za koja su x, y i z nenegativni cijeli brojevi, npr. $(0, 3, 3)$.

Definicija 1.4. Linearna jednadžba s n nepoznanica je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ zadani brojevi. Broj b zove se **slobodnim članom**, a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ su **koeficijenti** jednadžbe.

Rješenje takve jednadžbe je svaka *uređena n-torka* brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanica daje istinitu numeričku jednakost

1.2 Sustavi linearnih jednadžbi

Definicija 1.5. Sustav linearnih jednadžbi je skup od konačno mnogo linearnih jednadžbi s istim nepoznanicama za koje tražimo zajedničko rješenje. Ako sustav ima m jednadžbi s n nepoznanica, zovemo ga $m \times n$-sustavom.

Rješenje sustava je svaka uređena n-torka brojeva koja zadovoljava sve jednadžbe sustava.

Primjer

Promotrimo sljedeći problem:

> *Za kazališnu predstavu prodaju se regularne ulaznice po* 15 €*, ulaznice za studente po* 7 € *i ulaznice za umirovljenike po* 10 €*. Prodano je ukupno* 100 *ulaznica za* 1049 €*. Koliko kojih ulaznica je prodano?*

Ovaj problem možemo modelirati 2×3-sustavom:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & \text{(ukupan broj ulaznica)} \\ 15x + 7y + 10z = 1049 & \text{(ukupna cijena ulaznica).} \end{cases}$$

Jedno rješenje tog sustava je npr. uređena trojka $(35, 42, 23)$. Uređena trojka $(30, 32, 38)$ nije rješenje sustava (jer zadovoljava samo prvu jednadžbu, ali ne i drugu).

Zadatak 1.8. Studenti Ana i Bruno su, uspoređujući svoje rezultate pismenog ispita, primijetili:

- kada bi Ana imala 20 bodova više, imala bi jednak broj bodova kao Bruno;
- kada bi Bruno imao 30 bodova više, imao bi dvostruko više bodova nego Ana.

Koliko tko ima bodova?

Rješenje: Ana ima 50, a Bruno 70 bodova.

Zadatak 1.9. Koliko otopine etanola koncentracije 85% je potrebno pomiješati sa otopinom etanola koncentracije 50% da bi se dobila 1 litra otopine koncentracije 65%?

Rješenje: Treba pomiješati $\frac{3}{7}$L prve otopine i $\frac{4}{7}$L druge otopine.

Zadatak 1.10. Barbara sama očisti stan za 5 sati. Ako Ante i Barbara rade zajedno, mogu očistiti stan za 3 sata. Koliko vremena je potrebano Anti da sam očisti stan?

Rješenje: Ante očisti stan za 7.5 sati.

1.3 Metoda supstitucije

Sustave iz zadataka 1.8, 1.9 i 1.10 riješili smo **metodom supstitucije**.

Metoda supstitucije: postupak

1. Iz jedne jednadžbe izrazimo neku nepoznanicu.
2. Uvrstimo (*supstituiramo*) dobiveni izraz u ostale jednadžbe
   $\rightsquigarrow$ Imamo jednu nepoznanicu manje i jednu jednadžbu manje!
3. Ponavljamo prethodna dva koraka sve dok nam ne ostane samo jedna jednadžba ili samo jedna nepoznanica.
4. Odredimo rješenje nastalog sustava i uvrstimo ga u sve prethodne supstitucije (od zadnje prema prvoj).

Zadatak 1.11. Novčić mase 7g načinjen je od legure bakra, aluminija i cinka. Aluminija ima 2g više nego cinka. Kada bi bilo dvostruko više bakra, a ne bi bilo aluminija, masa novčića se ne bi promijenila. Koliko je kojeg metala u novčiću?

Rješenje: Novčić ima 3g bakra, 3g aluminija i 1g cinka.

Zadatak 1.12. U dvorištu su crne ovce, bijele ovce i bijele patke. Ako je u dvorištu 101 ovca, 150 bijelih životinja i 504 nogu, koliko ima crnih ovaca?

Rješenje: U dvorištu je 1 crna ovca.

Zadatak 1.13. Odredite sve točke koje leže na presjeku ravnina

$$\pi_1 \ldots x - y + 5z = -4, \quad \pi_2 \ldots x + y - z = 2, \quad \pi_3 \ldots 2x + y + z = 1.$$

Rješenje: Točke presjeka tvore skup $\{(-2t-1, 3t+3, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$, tj. pravac $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{1}$.

Zadatak 1.14. Slastičarnica prodaje tri vrste torti. Dobili su narudžbu za koju će potrošiti 3kg brašna, 950g šećera i 17 jaja. Recepti za torte su sljedeći:

- Za tortu A potrebno je 500g brašna, 200g šećera i 1 jaje.
- Za tortu B potrebno je 400g brašna, 100g šećera i 4 jaja.
- Za tortu C potrebno je 700g brašna, 250g šećera i 3 jaja.

Koliko komada koje torte je naručeno?

Rješenje: Metodom supstitucije na kraju dobivamo jednakost $0 = 1$ koja očito ne vrijedi. Dakle, zadatak nema rješenja.

Teorem 1.6 (o broju rješenja sustava)**.** Svaki sustav linearnih jednadžbi ili nema rješenja ili ima jedinstveno rješenje ili ima beskonačno mnogo rješenja.

Zadatak 1.15. Izjednačite kemijsku jednadžbu

$$\mathrm{NH_3} + \mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{NO} + \mathrm{H_2O}.$$

Rješenje: Rješenja pripadnog sustava su $\{(t, \frac{5}{4}t, t, \frac{3}{2}t) : t \in \mathbb{R}\}$. Smislena rješenja su ona za koja je t pozitivni cjelobrojni višekratnik od 4. Biramo rješenje u kojem su koeficijenti skraćeni do kraja, pa jednadžba glasi $4\mathrm{NH_3} + 5\mathrm{O_2} \longrightarrow 4\mathrm{NO} + 6\mathrm{H_2O}$.

Napomena. Sustav iz zadatka 1.15 je primjer **homogenog sustava** – sustava u kojem su svi slobodni članovi svih jednadžbi jednaki nuli. Takav sustav uvijek ima **trivijalno rješenje** $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
Ako homogeni sustav ima neko *netrivijalno* rješenje (tj. rješenje u kojem neka nepoznanica nije jednaka nuli), onda taj sustav ima *beskonačno mnogo rješenja*.

Zadatak 1.16. Sendvič sa pršutom košta 5€, sendvič sa šunkom košta 3€, a 3 kiflice koštaju 1€. Ako je kupljeno 100 peciva za 100€, koliko je kojih peciva kupljeno? Odredite sva smislena rješenja. Koje rješenje ima najmanje kiflica?

Rješenje: Sva rješenja sustava su $\{(t, 25 - \frac{7}{4}t, 75 + \frac{3}{4}t) : t \in \mathbb{R}\}$. Rješenja su smislena za $t \in \{0, 4, 8, 12\}$, i to su $(0, 25, 75)$, $(4, 18, 78)$, $(8, 11, 81)$ i $(12, 4, 84)$. Najmanje kiflica je za $(0, 25, 75)$.

Zadatak (DZ). Volonterima na manifestaciji *Dan i noć na PMF-u* podijeljene su zelene, plave i ljubičaste majice. Ukupno ima 102 majice, zelenih ima 30 više nego plavih, a kada bi bilo dvostruko više ljubičastih majica i trostruko više plavih, ukupan broj majica bio bi 174.
Odredite koliko je majica koje boje podijeljeno volonterima. Koliko najmanje, a koliko najviše može biti ljubičastih majica?

1.4 Gaussova metoda eliminacija

Zadatak 1.17. Odredite rješenje sustava

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + 3z = 9 \\ 3x + y - 2z = 4. \end{cases}$$

Rješenje: (4, -2, 3)

Definicija 1.7. Sustavu linearnih jednadžbi oblika

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pridružujemo **(proširenu) matricu sustava**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Primjer

Matrica sustava iz zadatka 1.17 je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Uočimo: retci matrice sustava odgovaraju pojedinim jednadžbama. Prva tri stupca odgovaraju nepoznanicama, a zadnji stupac odgovara slobodnim članovima.

Zadatak 1.18. Odredite sva rješenja sustava čija je matrica

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$

Rješenje: (a) $(3, 5, -1)$; (b) $(x, y, z) \in \{(2t, 3, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Definicija 1.8. **Elementarne transformacije** matrice sustava su:

(1) zamjena dvaju redaka;

(2) množenje nekog retka brojem koji nije nula;

(3) pribrajanje jednog retka drugom.

Napomena. Kombinacijom transformacija (2) i (3) dobivamo sljedeće pravilo:

Ako je $i \neq j$, možemo i-tom retku pribrojiti $\alpha \cdot (j\text{-ti redak})$ za bilo koji $\alpha \in \mathbb{R}$.

Najčešće ćemo koristiti upravo tu transformaciju!

Ako je jedna matrica dobivena iz druge primjenom elementarnih transformacija, kažemo da su te matrice **ekvivalentne** i između njih pišemo znak $\sim$.

Primjer

Sljedeće matrice sustava su ekvivalentne:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -9 & 3 \end{array}\right)$$

Teorem 1.9. Elementarne transformacije matrice sustava ne mijenjaju skup rješenja tog sustava.

Cilj Gaussove metode eliminacija je matricu sustava primjenom elementarnih transformacija svesti na oblik što sličniji

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \end{array}\right)$$

jer iz te matrice možemo lako očitati rješenja sustava:

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad \dots \quad x_n = c_n.$$

Gaussova metoda eliminacija: postupak

1. Krećemo od stupca $i = 1$. Ako je to nulstupac, prelazimo na sljedeći stupac (dok ne dođemo do stupca slobodnih članova).
2. U i-tom stupcu zamjenom redaka dovedemo neki ne-nul element iz retka ispod i-tog na dijagonalnu poziciju (i, i).
3. Ako je na dijagonalnoj poziciji broj $\alpha \neq 1$, pomnožimo i-ti redak s $\frac{1}{\alpha}$ tako da na dijagonalnoj poziciji bude 1.
4. Poništimo sve elemente u i-tom stupcu osim dijagonalnog (tako da svim retcima dodamo/oduzmemo i-ti redak pomnožem odgovarajućim brojem).
5. Prelazimo na stupac $i + 1$ i ponavljamo postupak sve dok ne "potrošimo" sve dijagonalne elemente.
6. Ako dobijemo redak $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$, možemo ga ispustiti.
7. Ako dobijemo redak $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{array}\right)$ za $c \neq 0$, sustav nema rješenja.
8. Na kraju postupka dobivamo matricu oblika

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{1 \text{ ili } 0} & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * & c_1 \\ 0 & \boxed{1 \text{ ili } 0} & \dots & 0 & * & \dots & * & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{1 \text{ ili } 0} & * & \dots & * & c_n \end{array}\right)$$

Ako matrica ima samo jedinice na dijagonali i nema "dodatnih" stupaca desno, sustav ima jedinstveno rješenje. Ako se u matrici pojavio nulstupac ili ima dodatne stupce, sustav ima beskonačno mnogo rješenja (i to s onoliko slobodnih parametara koliko ima takvih stupaca).

Zadatak 1.19. Gaussovom metodom eliminacija riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

(a) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

(c) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 - 15x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 4 \\ 4x_1 + 12x_2 - 20x_3 = 8 \end{cases}$

Rješenje: (a) $(1,1,0)$; (b) $(\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4})$; (c) nema rješenja; (d) $\{(t,t,-t,t) : t \in \mathbb{R}\}$; (e) $\{(2-3s+5t) : s,t \in \mathbb{R}\}$.

Zadatak 1.20. U ovisnosti o parametru λ riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

(a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = \lambda \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9 \end{cases}$

Rješenje: (a) Za $\lambda \neq 8$ rješenje je $\{(2-\frac{3}{2}t, t, -1, 0) : t \in \mathbb{R}\}$, a za $\lambda = 8$ rješenje je $\{(2-\frac{3}{2}s - t, s, 1, t) : s,t \in \mathbb{R}\}$; (b) Za $\lambda = 5$ rješenje je $\{(t, \frac{-5}{2} - 2t, 4+t) : t \in \mathbb{R}\}$, a za $\lambda \neq 5$ nema rješenja.

Zadatak 1.21. Odredite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{cases} x + 2y = \alpha \\ 4x + \beta y = 5 \end{cases}$$

ima

(a) jedno rješenje;

(b) beskonačno mnogo rješenja;

(c) nema rješenja.

Rješenje: Imamo $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \alpha \\ 4 & \beta & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-4) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \beta-8 & 5-4\alpha \end{array}\right)$. Ako je $\beta = 8$ i $\alpha \neq \frac{5}{4}$, sustav nema rješenja. Ako je $\beta = 8$ i $\alpha = \frac{5}{4}$, možemo ispustiti drugi redak i dobivamo jednadžbu $x + 2y = \alpha = \frac{5}{4}$ koja ima beskonačno mnogo rješenja. Ako je pak $\beta \neq 8$, imamo $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \beta-8 & 5-4\alpha \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{\beta-8} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & \frac{5-4\alpha}{\beta-8} \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{\alpha\beta-10}{\beta-8} \\ 0 & 1 & \frac{5-4\alpha}{\beta-8} \end{array}\right)$ i sustav ima jedinstveno rješenje $x = \frac{\alpha\beta-10}{\beta-8}$, $y = \frac{5-4\alpha}{\beta-8}$.

2 Vektorski prostori, linearni operatori i matrice

2.1 Vektorski prostori

Definicija 2.1. (Realan) vektorski prostor je skup V na kojem su zadane operacije zbrajanja i množenja skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:

(1) $(v + w) + u = v + (w + u)$, za sve $v, w, u \in V$;

(2) Postoji **nulvektor** $\mathbf{0}_V \in V$ takav da je $v + \mathbf{0}_V = v$ za sve $v \in V$;

(3) Za svaki $v \in V$ postoji $-v \in V$ takav da je $v + (-v) = \mathbf{0}_V$;

(4) $v + w = w + v$ za sve $v, w \in V$;

(5) $1 \cdot v = v$ za sve $v \in V$;

(6) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $v \in V$;

(7) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ i $v, w \in V$;

(8) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $v \in V$.

Primjeri: vektorski prostori

1. V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$

   Uz standardne operacije zbrajanja $\vec{v} + \vec{w}$ i množenja skalarom $\alpha\vec{v}$ te nulvektor $\vec{0}$

2. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$

   Uz standardno zbrajanje i množenje; nulvektor je broj 0

3. Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$

   Slično kao $\mathbb{R}$

4. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, skup svih **uređenih n-torki** realnih brojeva

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

   je realan vektorski prostor s operacijama

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\text{i} \quad \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

   Nulvektor je $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n}$

5. Skup svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operacijama zbrajanja i $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ i množenja skalarom $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

   Pripadni nulvektor je funkcija $f(x) = 0$.

6. Skup $\mathcal{P}$ svih polinoma s realnim koeficijentima, s operacijama zbrajanja polinoma, npr. $(3x+5) + (x^3 - x + 1) = x^3 + 2x + 6$, i množenja skalarom, npr. $\frac{1}{3}(3x+5) = x + \frac{5}{3}$.

   Pripadni nulvektor je nulpolinom $p(x) = 0$.

7. **Nul-prostor** $\{\mathbf{0}\}$ s operacijama $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ i $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ za sve $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definicija 2.2. Neka je V realan vektorski prostor, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ i $v_1, \ldots, v_n \in V$. Izraz

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

zove se **linearna kombinacija** vektora $v_1, \ldots, v_n$ s koeficijentima $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Primjeri: linearne kombinacije

1. Jedna linearna kombinacija vektora $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ i $v_2 = (0, 1, 0, -1)$ iz $\mathbb{R}^4$ je

$$2v_1 + 4v_2 = (2, 4, 6, 8) + (0, 4, 0, -4) = (2, 8, 6, 4).$$

2. Linearna kombinacija vektora $\vec{u} = [1, 0]$ i $\vec{w} = [1, 2]$ s koeficijentima 2 i 1 je vektor $\vec{v} = 2 \cdot [1, 0] + 1 \cdot [1, 2] = [3, 2]$.

3. Linearna kombinacija polinoma $p_1(x) = x^3 + x$, $p_2(x) = x^2 + 3$ i $p_3(x) = 2x$ s koeficijentima 1, 2 i $\frac{3}{2}$ je polinom

$$1(x^3 + x) + 2(x^2 + 3) + \frac{3}{2}(2x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 6.$$

Zadatak 2.1. Neka je $(\vec{a}, \vec{b})$ neka fiksirana baza za V^2. Prikažite vektor $[3, -1]$ kao linearnu kombinaciju vektora $[1, -5]$ i $[-1, 3]$.

Rješenje: $[3, -1] = (-4) \cdot [1, -5] + (-7) \cdot [-1, 3]$.

Zadatak 2.2. Prikažite polinom $p(x) = 3x^2 + 4$ kao linearnu kombinaciju polinoma $p_1(x) = x^2 + 2x + 2$, $p_2(x) = x + 3$ i $p_3(x) = x^2 - x + 1$.

Rješenje: $p(x) = p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + 2p_3(x)$.

Definicija 2.3. Konačan skup S vektora u nekom vektorskom prostoru V je **linearno zavisan** ako se neki vektor iz S može zapisati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz S.

Ako skup vektora nije linearno zavisan, kažemo da je **linearno nezavisan**.

Napomena. Skup $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ je linearno nezavisan ako i samo ako je jedino rješenje jednadžbe

$$x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = \mathbf{0}_V$$

dano sa

$$x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

Zadatak 2.3. Odredite jesu li sljedeći skupovi vektora linearno nezavisni:

(a) $\{(1,1),(4,5)\}$

(b) $\{(1,3),(4,5),(0,6)\}$

(c) $\{(1,2,3),(1,3,0),(1,1,6)\}$

(d) $\{(1,\sqrt{2},1),(1,1,\pi),(0,0,0)\}$

Rješenje: (a) DA; (b) NE; (c) NE; (d) NE.

Definicija 2.4. Najveći broj elemenata kojeg u vektorskom prostoru V može sadržavati neki linearno nezavisan skup vektora zove se **dimenzija** prostora V i označava se s $\dim V$.

Baza prostora V je bilo koji linearno nezavisan skup vektora koji ima $\dim V$ elemenata.

Primjeri

1. Nulprostor $\{\mathbf{0}\}$ ima dimenziju 0 i jedina njegova baza je $\emptyset$.
2. Prostor V^2 (odnosno $V^2(O)$) ima dimenziju 2. Njegovu bazu čine bilo koja dva nekolinearna vektora.
3. Prostor V^3 (odnosno $V^3(O)$) ima dimenziju 3. Njegovu bazu čine bilo koja tri nekomplanarna vektora.

Teorem 2.5. Za konačan podskup $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ netrivijalnog vektorskog prostora V ekvivalentno je:

(i) $\mathcal{B}$ je baza za V;

(ii) $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan i za svaki $v \in V$ postoje skalari $x_1, x_2, \dots, x_n$ takvi da je $v = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n$;

(iii) za svaki $v \in V$ postoje jedinstveni skalari $x_1, x_2, \dots, x_n$ takvi da je $v = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n$.

Zadatak 2.4. Odredite dimenziju i jednu bazu realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}$.

Rješenje: Svaki kompleksan broj $z \in \mathbb{C}$ se može zapisati kao $\operatorname{Re} z \cdot 1 + \operatorname{Im} z \cdot i$, tj. kao linearna kombinacija od 1 i i, i to na jedinstven način. Prema teoremu 2.5 (iii), skup $\{1, i\}$ je (jedna) baza za $\mathbb{C}$ i $\dim \mathbb{C} = 2$.

Zadatak 2.5. Odredite dimenziju i jednu bazu realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Rješenje: Svaka uređena trojka $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se može zapisati kao

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot (1, 0, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0) + x_3 \cdot (0, 0, 1).$$

Kako je skup $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ linearno nezavisan, prema teoremu 2.5 (ii) taj skup je jedna baza za $\mathbb{R}^3$ i $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Tu bazu zovemo **kanonska baza** za $\mathbb{R}^3$.

Zadatak 2.6. Je li skup

$$\{(1, 2, 3), (2, 2, 3), (0, 1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

baza za $\mathbb{R}^3$?

Rješenje: Kako je $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ i zadani skup ima 3 elementa, dovoljno je provjeriti da je linearno nezavisan. Pripadni homogeni sustav ima samo trivijalno rješenje, dakle zadani skup jest linearno nezavisan i one je baza za $\mathbb{R}^3$.

Definicija 2.6. Neka je V vektorski prostor. Za podskup S od V kažemo da je **potprostor** od V i pišemo $S \leq V$ ako je S također vektorski prostor s obzirom na iste operacije zbrajanja i množenja skalarom koje su definirane na V.

Teorem 2.7. Za podskup S vektorskog prostora V ekvivalentno je:

(i) S je potprostor od V;

(ii) sve linearne kombinacije elemenata iz S su također elementi iz S (tj. S je "zatvoren na linearne kombinacije");

(iii) $v + w \in S$ i $\alpha v \in S$ za sve $v, w \in S$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.7. Za svaki od sljedećih skupova odredite je li potprostor realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$:

(a) $A = \{(x_1, x_2) : x_1 = 2x_2\}$;

(b) $B = \{(x_1, x_2) : x_2 = x_1^2\}$;

(c) $C = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Rješenje: (a) DA; (b) NE jer npr. $(1,1) \in B$, ali $2 \cdot (1,1) = (2,2) \notin B$; (c) NE jer je npr. $(1,1) \in C$, ali $\frac{1}{2} \cdot (1,1) \notin C$.

Primjer

Potprostori od $V^2(O)$

- dimenzije 0: $\{\vec{0}\}$
- dimenzije 1: pravci kroz ishodište
- dimenzije 2: $V^2(O)$.

Primjer

Potprostori od $V^3(O)$

- dimenzije 0: $\{\vec{0}\}$
- dimenzije 1: pravci kroz ishodište
- dimenzije 2: ravnine kroz ishodište
- dimenzije 3: $V^3(O)$.

Zadatak 2.8. Za svaki od sljedećih skupova odredite je li potprostor od $\mathbb{R}^3$. Ako jest, odredite mu dimenziju i jednu bazu.

(a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;

(b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$;

(c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$.

Rješenje: (a) DA, $\dim A = 2$, baza: $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$; (b) NE; (c) DA, $\dim C = 1$, baza: $\{(1, 1, 1)\}$.

Napomena. Skup R svih rješenja $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ homogenog sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

je potprostor od $\mathbb{R}^n$, i pritom vrijedi

- $\dim R =$ broj slobodnih parametara
- Koeficijenti uz pojedine slobodne parametre u zapisu rješenja čine vektore jedne baze za R

Zadatak 2.9. Odredite dimenziju i jednu bazu prostora R rješenja sustava

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Rješenje: $\dim R = 3$, baza: $\{(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$.

Zadatak 2.10. Odredite dimenziju i jednu bazu prostora R rješenja sustava

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Rješenje: $\dim R = 1$, baza: $\{(-2, -3, 1)\}$.

2.2 Linearni operatori

Definicija 2.8. Neka su V i W vektorski prostori. **Linearan operator** je funkcija $\hat{A} : V \to W$ koja ima sljedeća dva svojstva:

(1) $\hat{A}(v + w) = \hat{A}(v) + \hat{A}(w)$, za sve $v, w \in V$

(2) $\hat{A}(\alpha v) = \alpha \hat{A}(v)$, za sve $v \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$

Ako je $W = \mathbb{R}$, linearan operator zovemo **linearnim funkcionalom**.

Zadatak 2.11. Ispitajte je li zadana funkcija linearni operator:

(a) $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\hat{A}(x, y) = 2x + y$

(b) $\hat{B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\hat{B}(x) = x + 2$

Rješenje: (a) DA; (b) NE.

Primjeri

1. Rotacija vektora za 90° oko ishodišta $\hat{R} : V^2(O) \to V^2(O)$

Primjeri

2. **Linerana funkcija** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, npr. $f(x, y, z) = 2x + 3y - z$
3. **Deriviranje polinoma** $\frac{d}{dx} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$
4. **Jedinični operator** ili **identiteta** $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{id}_V(v) = v$
5. **Nuloperator** $\hat{O} : V \to W$, $\hat{O}(v) = \mathbf{0}_W$.

Teorem 2.9 (Svojstva linearnih operatora)**.** Za svaki linearan operator $\hat{A} : V \to W$ vrijedi:

(1) $\hat{A}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$

(2) Za bilo koje $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ i $v_1, \dots, v_n \in V$ vrijedi

$$\hat{A}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \hat{A}(v_i) + \cdots + \alpha_n \hat{A}(v_n).$$

Zadatak 2.12. Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ neka baza za $V^3(O)$ i neka je $\hat{A} : V^3(O) \to V^3(O)$ linearan operator takav da je

$$\hat{A}(\vec{a}) = -\vec{b}, \qquad \hat{A}(\vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{c} \qquad \text{i} \qquad \hat{A}(\vec{c}) = \vec{b} + \vec{c}.$$

Odredite $\hat{A}(\vec{v})$ za $\vec{v} = [1, 2, 3]$.

Rješenje: $\hat{A}(\vec{v}) = [4, 2, 5]$.

Prisjetimo se: $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ je baza za V ako i samo ako za svaki $v \in V$ postoje jedinstveni skalari $x_1, x_2, \dots, x_n$ takvi da je $v = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n$.

Definicija 2.10. Neka je $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ baza vektorskog prostora V.
Koordinate vektora $v = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n \in V$ u bazi $\mathcal{B}$ su

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}.$$

Teorem 2.11 (Zadavanje operatora na bazi)**.** Linearni operator $\hat{A} : V \to W$ je potpuno zadan svojim djelovanjem na jednoj bazi od V, tj. potpuno je zadan koordinatama slika svih vektora odabrane baze od V s obzirom na odabranu bazu od W.

2.3 Matrice

2.3.1 Matrica linearnog operatora

(Realna) matrica tipa (dimenzije) $m \times n$ je pravokutna tablica brojeva

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gdje je $a_{ij} \in \mathbb{R}$ za sve $i \in \{1, \ldots, m\}$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definicija 2.12. Matrica linearnog operatora $\hat{A} : V \to W$ s obzirom na odabrane baze $\mathcal{B}_V$ i $\mathcal{B}_W$ domene i kodomene je matrica A u kojoj se redom u stupcima nalaze koordinate slika vektora baze $\mathcal{B}_V$ u bazi $\mathcal{B}_W$. Ako je $V = W$ i $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W = \mathcal{B}$, govorimo o matrici linearnog operatora s obzirom na bazu $\mathcal{B}$.

Primjeri

1. Matrica operatora $\hat{A}$ iz zadatka 2.12 s obzirom na bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Matrica nuloperatora $\hat{O} : V \to W$ (za npr. $\dim V = 4$ i $\dim W = 2$) je **nulmatrica**

$$O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Matrica jediničnog operatora $\mathrm{id}_V = V \to V$ (za npr. $\dim V = 3$) je **jedinična matrica**

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 2.13. Odredite matricu linearnog operatora $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\hat{A}(x, y) = (-x, y)$$

s obzirom na

(a) kanonsku bazu za $\mathbb{R}^2$;

(b) bazu $\mathcal{B} = ((-1, 1), (2, 0))$.

Rješenje: (a) $A_{KB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Zadatak 2.14. Odredite matricu linearnog operatora $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x, y, z) = (x - y + z, 2x + z, x + y - z)$$

s obzirom na

(a) kanonsku bazu za $\mathbb{R}^3$

(b) bazu $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$.

Rješenje: (a) $A_{KB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; (b) $A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Zadatak 2.15. Neka je $\hat{M} : V^2(O) \to V^2(O)$ osna simetrija s obzirom na pravac $y = \sqrt{3}x$. Odredite matricu operatora $\hat{M}$ s obzirom na

(a) kanonsku bazu $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ za $V^2(O)$;

(b) bazu $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, 2\vec{\jmath})$.

Rješenje: (a) $M_{KB} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; (b) $M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3}/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Zadatak 2.16. Linearan operator $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojom matricom u kanonskoj bazi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Izračunajte $\hat{A}(1,2,3)$.

(b) Izračunajte $\hat{A}(x,y,z)$ za proizvoljne $x, y, z, \in \mathbb{R}$.

Rješenje: (a) $\hat{A}(1,2,3) = (4,5,-1)$; (b) $\hat{A}(x,y,z) = (x+z, y+z, 2x-z)$.

Simetrija molekule je linearan operator $V^3(O) \to V^3(O)$ s takav da nije moguće razlikovati izgled molekule prije i poslije njegova djelovanja na točke molekule (točnije, na njihove radij-vektore).

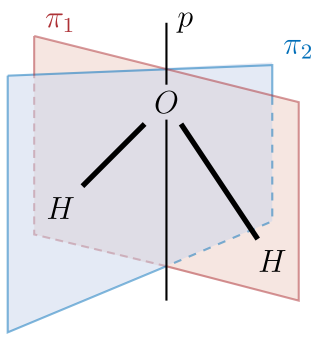
Npr. molekula vode ima 4 simetrije:

(1) Jedinični operator

(2) Zrcaljenje s obzirom na ravninu π_1 koja sadrži sva tri atoma

(3) Zrcaljenje s obzirom na ravninu π_2 okomitu na π_1 koja sadrži atom kisika i raspolavlja kut među atomima vodika

(4) Rotacija reda 2 (tj. za 180°) oko pravca p koji leži na presjeku ravnina π_1 i π_2.



Zadatak 2.17. Za stacionarni model molekule amonijaka (uspravna pravilna trostrana piramida s bazom u kojoj se nalaze atomi vodika) odredite dvije međusobno različite netrivijalne simetrije $\hat{A}$ i $\hat{B}$.

(a) Odaberite neku (pogodnu) bazu za $V^3(O)$, precizno ju opišite i odredite matrice operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$ s obzirom na tu bazu.

(b) S obzirom na tu bazu odredite koordinate jednog od atoma vodika koji pri tim objema simetrijama mijenja poziciju i koordinate njegove slike nakon djelovanja simetrije. (Uzmite kao poznato da je visina piramide NH_3 jednaka $0,62$Å, a razmak po dva atoma vodika je $1,63$Å.)

Rješenje: Za $\hat{A}$ možemo odabrati rotaciju reda 3, tj. za $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ oko osi koja prolazi kroz atom dušika i okomita je da ravninu u kojoj leže atomi vodika. Za $\hat{B}$ možemo odabrati zrcaljenje s obzirom na ravninu koja sadrži os rotacije i točno jedan atom vodika (pa raspolavlja spojnicu druga dva atoma vodika).

(a) Promatrat ćemo ortonormiranu bazu $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ takvu da vektor $\vec{k}$ leži na osi rotacije, a npr. vektor $\vec{\jmath}$ leži u ravnini zrcaljenja. Tada su tražene matrice

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ & 0 \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Smjestimo ishodište u središte trokuta kojeg čine atomi vodika i za jediničnu duljinu odaberimo visinu piramide, tj. $0,62$Å. Tada su $(0,0,1)$ koordinate atoma dušika s obzirom na bazu $\mathcal{B}$. Atomi vodika tvore jednakostranični trokut u xy-ravnini kojem je jedan vrh na y-osi. Duljina stranice trokuta je $1,63$Å, odnosno $\frac{1{,}63}{0{,}62} = 2,63 =: a$ jedinične duljine. Vrhovi trokuta tada imaju koordinate $(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, 0)$, $(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0)$ i $(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0)$. Sva tri vrha mijenjaju položaj pri djelovanju rotacije, a pri djelovanju zrcaljenja položaj mijenjaju samo vrhovi s koordinatama $(\pm\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0)$. Množenjem matrica dobijemo $\hat{A}(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0) = (0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, 0)$ i $\hat{B}(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0) = (-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0)$.