Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Kristina Miletić

Lindströmov drugi teorem

Diplomski rad

Zagreb, mjesec godina

Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Kristina Miletić

Lindströmov drugi teorem

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mladen Vuković

Zagreb, mjesec godina

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ____ , predsjednik

2. ____ , član

3. ____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____

2. ____

3. ____

Sadržaj

1 Uvod **1**

1.1 Izomorfizmi σ-struktura 1

1.2 Odlučivost i rekurzivna prebrojivost 5

2 Neki metateoremi o logici prvog reda **9**

2.1 Račun logike prvog reda 9

2.2 Eliminacija funkcijskih simbola 13

2.3 Relativizacija 19

3 Primjeri logičkih sustava **22**

3.1 Logika drugog reda, L_{II} 22

3.2 Beskonačna logika, $L_{\omega_1\omega}$ 24

3.3 Logički sustav L_Q^N 26

4 Logički sustavi **28**

5 Lindströmov drugi teorem **36**

6 Zaključak **42**

A Dodatak **43**

Literatura **45**

1 Uvod

Cilj ovog rada je dokazati drugi Lindströmov teorem. Lindströmovi teoremi služe nam za karakterizaciju logike prvog reda. Na osnovi njih vidjet ćemo da logika prvog reda zauzima jedinstveno mjesto među svim logičkim sustavima.

U ovom poglavlju istaknut ćemo neke osnovne činjenice koje ćemo koristiti u kasnijim razmatranjima. Pojmove i teoreme koje ovdje budemo spominjali nećemo detaljno proučavati. Detaljnija pojašnjenja i dokaze možete pogledati u [6].

1.1 Izomorfizmi σ-struktura

U ovoj točki definirat ćemo neke odnose različitih σ-struktura, te vezano za to navesti neke bitne rezultate. Sve to će nam biti potrebno u zadnjem poglavlju. Prvo definiramo izomorfnost dvaju σ-struktura.

Definicija 1.1. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ-strukture. Svaka bijekcija $\pi : |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{N}|$ je ***izomorfizam*** sa $\mathfrak{M}$ u $\mathfrak{N}$ ako vrijedi:

1.) za svaki n-mjesni relacijski simbol $R \in \sigma$ i $(a_1, ..., a_n) \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi

$$(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{M}} \text{ ako i samo ako } (\pi(a_1), ..., \pi(a_n)) \in R^{\mathfrak{N}},$$

2.) za svaki n-mjesni funkcijski simbol $f \in \sigma$ i $(a_1, ..., a_n) \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi

$$\pi(f^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(\pi(a_1), ..., \pi(a_n)),$$

3.) za svaki konstantski simbol $c \in \sigma$ vrijedi

$$\pi(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}.$$

Kažemo da su σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ ***izomorfne*** ako postoji izomorfizam sa $\mathfrak{M}$ u $\mathfrak{N}$. To označavamo sa $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$.

Sljedeća lema daje nam jednu važnu posljedicu izomorfnosti σ-struktura.

Lema 1.2. ***(Lema o izomorfizmu)***
Ako su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ izomorfne σ-strukture tada za svaku σ-rečenicu φ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \varphi \textit{ ako i samo ako } \mathfrak{N} \models \varphi.$$

Osim ovog standardnog izomorfizma dvaju σ-struktura, postoje još neke vrste izomorfizama. Sada ćemo navesti njihove definicije i neka važna svojstva.

Definicija 1.3. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ-strukture. Svaka injekcija $p : S \subseteq |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{N}|$ je ***parcijalni izomorfizam*** sa $\mathfrak{M}$ u $\mathfrak{N}$ ako vrijedi:

1.) za svaki n-mjesni relacijski simbol $R \in \sigma$ i $(a_1, ..., a_n) \in S$ vrijedi

$$(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{M}} \text{ ako i samo ako } (p(a_1), ..., p(a_n)) \in R^{\mathfrak{N}},$$

2.) za svaki n-mjesni funkcijski simbol $f \in \sigma$ i $(a_1, ..., a_n) \in S$ vrijedi

$$p(f^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(p(a_1), ..., p(a_n)),$$

3.) za svaki konstantski simbol $c \in \sigma$ takav da je $c^{\mathfrak{M}} \in S$ vrijedi

$$p(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}.$$

U nastavku poistovjećujemo preslikavanje p s njegovim grafom $\{(a, p(a)) \mid a \in Dom(p)\}$ te u skladu s tim sa $p \subseteq q$ označavamo da je preslikavanje q proširenje preslikavanja p.

Definicija 1.4. Za σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ kažemo da su ***konačno izomorfne*** ako postoji niz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nepraznih skupova parcijalnih izomorfizama takav da vrijedi:

($forth$) za svaki $p \in I_{n+1}$ i $a \in |\mathfrak{M}|$ postoji parcijalni izomorfizam $q \in I_n$ tako da vrijedi $a \in Dom(q)$ i $q \supseteq p$,

($back$) za svaki $p \in I_{n+1}$ i $b \in |\mathfrak{N}|$ postoji parcijalni izomorfizam $q \in I_n$ tako da vrijedi $b \in Rng(q)$ i $q \supseteq p$.

Neformalno, ($forth$) i ($back$) svojstva možemo izreći na sljedeći način: parcijalni izomorfizmi iz I_{n+1} mogu biti prošireni $(n+1)$ puta; odgovarajuća proširenja leže u $I_n, ..., I_1$ i I_0 redom. Ako niz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava ($forth$) i ($back$) svojstva tada pišemo:

$$(I_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathfrak{M} \simeq_f \mathfrak{N} \quad \text{ili} \quad \mathfrak{M} \simeq_f \mathfrak{N}.$$

Definicija 1.5. Za σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ kažemo da su ***parcijalno izomorfne*** ako postoji neprazan skup I parcijalnih izomorfizama između σ-struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ tako da vrijedi:

($forth$) za svaki $p \in I$ i $a \in |\mathfrak{M}|$ postoji $q \in$ tako da vrijedi $a \in Dom(q)$ i $q \supseteq p$,

($back$) za svaki $p \in I$ i $b \in |\mathfrak{N}|$ postoji $q \in I$ tako da vrijedi $b \in Rng(q)$ i $q \supseteq p$.

Ako postoji skup I iz prethodne definicije, tada pišemo:

$$\mathfrak{M} \simeq_p \mathfrak{N}.$$

Sljedeća lema daje nam relacije među različitim vrstama izomorfizama.

Lema 1.6. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ-strukture. Tada vrijedi:*

a) ako $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$ tada $\mathfrak{M} \simeq_p \mathfrak{N}$.

b) ako $\mathfrak{M} \simeq_p \mathfrak{N}$ tada $\mathfrak{M} \simeq_f \mathfrak{N}$.

c) ako $\mathfrak{M} \simeq_f \mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M}$ konačna tada $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$.

d) ako $\mathfrak{M} \simeq_p \mathfrak{N}$ te su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ prebrojive ili konačne strukture tada $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$. **(Karpov teorem)**

Navodimo sada Fraisséov teorem koji karakterizira elementarnu ekvivalenciju pomoću konačnog izomorfizma.

Teorem 1.7 (*Fraisséov teorem*).
Neka je σ konačan skup nelogičkih simbola te neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ-strukture. Tada vrijedi:

$$\mathfrak{M} \simeq_f \mathfrak{N} \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}.$$

Kao mjeru složenosti formule definiramo kvantifikatorski rang formule. ***Kvantifikatorski rang formule*** φ, oznaka $qr(\varphi)$, definiramo iduktvno:

(i) $qr(\varphi) = 0$ ako je φ atomarna formula,

(ii) $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$,

(iii) $qr(\varphi \vee \psi) = max\{qr(\varphi), qr(\psi)\}$,

(iv) $qr(\exists x \varphi) = qr(\varphi) + 1$.

Kvantifikatorski rang formule je u stvari maksimalan broj ugniježdenih kvantifikatora. Na primjer, $qr(\varphi) = 0$ ako formula φ ne sadrži kvantifikator; kvantifikatorski rang formule $\neg\exists x(\forall y R(x,y) \wedge Q(y))$ je 2. Ovaj pojam, kao i sljedeća definicija, bit će nam potrebni za dokaz drugog Lindströmovog teorema.

Na kraju definiramo još jednu vrstu izomorfnosti σ-struktura.

Definicija 1.8. Za dvije σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ kažemo da su m***-izomorfne*** ako postoji niz $I_0, ..., I_m$ nepraznih skupova parcijalnih izomorfizama sa $\mathfrak{M}$ u $\mathfrak{N}$ takav da vrijedi:

$(forth)$ za $n+1 \leq m$, $p \in I_{n+1}$ i $a \in |\mathfrak{M}|$ postoji parcijalni izomorfizam $q \in I_n$ tako da vrijedi $a \in Dom(q)$ i $q \supseteq p$,

$(back)$ za $n+1 \leq m$, $p \in I_{n+1}$ i $b \in |\mathfrak{N}|$ postoji parcijalni izomorfizam $q \in I_n$ tako da vrijedi $b \in Rng(q)$ i $q \supseteq p$.

Ako postoji niz $I_0, ..., I_m$ koji zadovoljava svojstva iz prethodne definicije tada pišemo:

$$(I_n)_{n \leq m} : \mathfrak{M} \simeq_m \mathfrak{N} \text{ ili } \mathfrak{M} \simeq_m \mathfrak{N}.$$

Za m-izomorfne strukture vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.9. *Neka je σ konačan relacijskih skup nelogičkih simbola te $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ-strukture. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) $\mathfrak{M} \simeq_m \mathfrak{N}$

b) Za svaku σ-rečenicu φ takvu da joj je kvantifikatorski rang manji ili jedanak m, tj. $qr(\varphi) \leq m$, vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \varphi \textit{ ako i samo ako } \mathfrak{N} \models \varphi.$$

1.2 Odlučivost i rekurzivna prebrojivost

U ovom dijelu definirat ćemo pojmove odlučivosti i rekurzivne prebrojivosti. Glavni cilj nam je doći do Trakhtenbrotovog teorema koji nam je potreban za dokaz drugog Lindströmovog teorema. Pojmove i teoreme koje ovdje budemo spominjali nećemo detaljno proučavati. Za detaljnija pojašnjenja i dokaze možete pogledati u [6].

Promotrimo sustav aksioma $\Phi_{gr} = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ za teoriju grupa. Iz teorema potpunosti slijedi da za sve σ_{gr}-rečenice φ vrijedi:

$$\Phi_{gr} \models \varphi \text{ ako i samo ako } \Phi_{gr} \vdash \varphi.$$

Stoga, φ je teorem teorije $Th_{gr} := \{\psi \mid \psi \text{ je } \sigma_{gr}\text{-rečenica i } \Phi_{gr} \models \psi\}$ ako i samo ako postoji izvod za φ iz skupa aksioma Φ_{gr}.

Sistematički primjenjujući sva pravila izvoda možemo generirati sve moguće izvode i time dobiti popis svih teorema teorije grupa. Dakle, σ_{gr}-rečenicu φ dodajemo popisu ako dođemo do izvoda koji završava sa φ. Stoga, postoji *postupak* kojim „mehanički" možemo popisati sve teoreme teorije grupa. Trebalo bi biti moguće da, koristeći prikladno programirano računalo, možemo izvršiti takav postupak. Pri tom bi trebalo biti moguće po potrebi povećavati kapacitet računala budući da izvodi i formule mogu biti proizvoljno dugi.

Za skupove poput Th_{gr} koji se mogu opisati takvim postupkom kažemo da su *rekurzivno prebrojivi.*

Međutim, gornji popstupak donosi i mnoge trivijalnosti, poput $\forall x(x = x \rightarrow x = x)$. Osim toga, ponekad nas samo zanima da li se neka rečenica nalazi u nekom skupu. Na primjer, za σ_{gr}-rečenicu φ želimo znati vrijedi li $\varphi \in Th_{gr}$. Nažalost, u tom slučaju nam rekurzivno prebrojiv postupak, poput ovog kojeg smo prije opisali, nije od velike pomoći. Naime, za danu σ_{gr}-rečenicu φ mogli bi započeti postupak da vidimo pojavljuje li se φ u Th_{gr}. Međutim, ako vrijedi $\varphi \notin Th_{gr}$ gornji postupak nam neće dati tu informaciju budući da pri svakom koraku nismo sigurni da li će se φ pojaviti kasnije ili se uopće neće pojaviti. Stoga nam treba drugačiji postupak koji možemo primijeniti na proizvoljnu σ_{gr}-rečenicu φ takav da on staje nakon konačno koraka dajući pritom odgovor na pitanje da li je $\varphi \in Th_{gr}$ ili nije. Ako takav postupak postoji za danu teoriju, onda tu teorju zovemo *odlučivom.*

Sada ćemo te pojmove i formalno definirati.

Postupak u našem smislu (efektivan postupak, proces, algoritam) radi s konkretnim objektima poput konačnih nizova simbola. U definicijama koje slijede trebamo imati na umu da je pojam postupka intuitivan i uveden pomoću primjera.

Definicija 1.10. Neka je $\mathbb{A}$ alfabet, W neki skup riječi od $\mathbb{A}$, tj. $W \subseteq \mathbb{A}^*$, i $\mathfrak{B}$ postupak.

(a) $\mathfrak{B}$ je ***odlučiv postupak*** za W ako za svaku riječ $\varphi \in \mathbb{A}^*$ postupak $\mathfrak{B}$ nakon nekog vremena stane dajući točno jedan izlazni podatak $\eta \in \mathbb{A}^*$ takav da je

$$\begin{gathered}\eta \text{ je prazna riječ ako } \varphi \in W,\\ \eta \text{ je različit od prazne riječi ako } \varphi \notin W.\end{gathered}$$

(b) W je ***odlučiv*** ako postoji odlučiv postupak za W.

Dakle, kad se primjeni odlučiv postupak za W na neku proizvoljnu riječ φ, on u konačno mnogo koraka daje odgovor na pitanje da li je φ u W. Odgovor je „da" ako je izlazni podatak prazna riječ, a „ne" ako je izlazni podatak neprazna riječ.

Definicija 1.11. Neka je $\mathbb{A}$ alfabet, $W \subseteq \mathbb{A}^*$ i $\mathfrak{B}$ postupak.

(a) $\mathfrak{B}$ je ***rekurzivno prebrojiv postupak*** ako $\mathfrak{B}$, jednom kad je pokrenut, na kraju daje kao izlazni podatak točno riječi iz W (nekim redoslijedom, moguće s ponavljanjima).

(b) W je ***rekurzivno prebrojiv*** ako postoji rekurzivno prebrojiv postupak za W.

Dakle, neki skup smatramo rekurzivno prebrojivim ako postoji postupak koji, kad se pokrene, kao izlazni podatak daje popis svih riječi iz tog skupa. Za logiku prvog reda vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 1.12. *Skup valjanih rečenica logike prvog reda je rekurzivno prebrojiv.*

Tvrdnja prethodne propozicije jednostavno slijedi iz Gödelovog teorema potpunosti za logiku prvog reda.

Promotrimo sada odnos između odlučivosti i rekurzivne prebrojivosti skupa. Upravo smo vidjeli da se skup valjanih σ-rečenica prvog reda može opisati pomoću rekurzivno prebrojivog postupka. Postavlja se pitanje da li za proizvoljnu σ-rečenicu možemo *odlučiti* da li je ona valjana. Kao i ranije, gornji postupak nam tu ne pomaže. Pokazuje se da skup valjanih σ-rečenica uopće nije odlučiv (to je tzv. Churchov teorem; viditi npr. u [11]). Međutim, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.13. *Svaki odlučiv skup je rekurzivno prebrojiv.*

Kao proširenje prethodnog teorema imamo:

Teorem 1.14. *Podskup $W \subseteq \mathbb{A}^*$ je odlučiv ako i samo ako su i W i $\mathbb{A}^* \backslash W$ rekurzivno prebrojivi.*

Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ dva alfabeta. Postupak koji za svaki ulazni podatak iz $\mathbb{A}^*$ daje riječ iz $\mathbb{B}^*$ određuje funkciju sa $\mathbb{A}^*$ u $\mathbb{B}^*$. Za funkcije čije vrijednosti možemo izračunati na ovaj način pomoću postupka kažemo da su ***izračunljive***.

Definicija 1.15. Neka je σ neki skup nelogičkih simbola.

a) Za σ-rečenicu prvog reda φ kažemo da je ***konačno-ispunjiva*** ako postoji konačna σ-struktura $\mathfrak{M}$ koja je model za φ.

b) Za σ-rečenicu prvog reda φ kažemo da je ***konačno-valjana*** ako je svaka konačna σ-struktura model za φ.

Uvodimo sada i sljedeće oznake:

$$\Phi_{fs} := \{\varphi \mid \varphi \text{ je konačno-ispunjiva } \sigma\text{-rečenica}\}$$
$$\Phi_{fv} := \{\varphi \mid \varphi \text{ je konačno-valjana } \sigma\text{-rečenica}\}$$

Vrijedi sljedeći teorem kojeg nećemo dokazivati (dokaz možete naći u [6]), ali nam je potreban za dokaz Trakhtenbrotovog teorema.

Teorem 1.16. *Skup Φ_{fs} nije odlučiv.*

Sada imamo sve potrebno da bi iskazali i dokazali Trakhtenbrotov teorem.

Teorem 1.17. ***(Trakhtenbrotov teorem)***
Skup svih konačno-valjanih σ-rečenica prvog reda nije rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Sa L_0^σ označimo skup svih σ-rečenica prvog reda. Očito za svaku σ-rečenicu prvog reda φ vrijedi:

$$\varphi \in L_0^\sigma \backslash \Phi_{fs} \quad \text{ako i samo ako} \quad \neg\varphi \in \Phi_{fv}. \tag{$*$}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup Φ_{fv} rekurzivno prebrojiv. Tada je po $(*)$ i $L_0^\sigma \backslash \Phi_{fs}$ rekurzivno prebrojiv: jednostavno započnemo rekurzivno prebrojivi postupak za Φ_{fv} i kad god on navede rečenicu $\neg\varphi$, mi zapišemo φ. Ovim bi dobili i odlučiv postupak za Φ_{fs} na sljedeći način:

Za riječ ζ iz $\mathbb{A}^*$, odlučimo prvo da li je ζ σ-rečenica. Ako jest, započnemo rekurzivno prebrojiv postupak za Φ_{fs} i za $L_0^\sigma \backslash \Phi_{fs}$ i čekamo dok se u jednom od ova dva postupka ne pojavi ζ kao izlazni podatak. Tako dobivamo odluku o tome da li je $\zeta \in \Phi_{fs}$.

Dakle, time smo dobili odlučiv postupak za skup Φ_{fs} pa odatle slijedi i da je Φ_{fs} odlučiv skup, a to je u kontradikciji s teoremom 1.16.

Q.E.D.

2 Neki metateoremi o logici prvog reda

U ovoj točki prvo ćemo se podsjetiti definicije računa logike prvog reda te ćemo navesti neke važne teoreme za logiku prvog reda koji će nam kasnije trebati. Cilj nam je samo prisjetiti se rezultata koji vrijede za logiku prvog reda, stoga te teoreme ovdje nećemo dokazivati; dokaze možete pogledati u [6]. Nakon toga uvodimo pojmove eliminacije funkcijskih simbola i relativizacije te ćemo njih detaljnije proučavati.

2.1 Račun logike prvog reda

U sljedećoj definiciji dajemo aksiome i pravila izvoda kojima ćemo generirati sve valjane formule logike prvog reda.

Definicija 2.1. ***Račun logike prvog reda*** zadan je s pet shema aksioma i dva pravila izvoda.
Sheme aksioma su sljedeće:

(*A1*) $A \to (B \to A)$;
(*A2*) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
(*A3*) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;
(*A4*) $\forall x A(x) \to A(t/x)$, gdje je term t slobodan za varijablu x u formuli A;
(*A5*) $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$, gdje formula A ne sadrži slobodnih nastupa varijable x.

Pravila izvoda su:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad \text{modus ponens}$$

$$\frac{A}{\forall x A} \qquad \text{generalizacija.}$$

Ovako definiran sistem označavamo za RP (račun predikata).

Podsjetimo se sada definicija dokaza u sistemu RP, teorema sistema RP te izvoda u sistemu RP.

Definicija 2.2. Za konačan niz formula $A_1, ..., A_n$ kažemo da je ***dokaz*** za formulu A u sistemu RP ako vrijedi:

1) $A_n \equiv A$,

2) za sve $i \in \{1, ..., n\}$ vrijedi jedno od sljedećeg:

   a) A_i je aksiom sistema RP,

   b) A_i je nastala iz nekih A_j i A_k, pri čemu je $j, k < i$, primjenom nekog pravila izvoda.

Ako za formulu A postoji dokaz u sistemu RP tada kažemo da je A ***teorem sistema*** RP i to označavamo sa $\vdash_{RP} A$. Sa $\nvdash_{RP} A$ označavamo da A nije teorem sistema RP.

Definicija 2.3. Neka je Γ skup formula sistema RP te G neka formula. Za niz formula $G_1, ..., G_n$ kažemo da je ***izvod*** za formulu G iz skupa Γ u sistemu RP ako vrijedi:

a) $G_n \equiv G$,

b) za sve $i \in \{1, ..., n\}$ vrijedi jedno od sljedećeg:

   (a) A_i je aksiom sistema RP,

   (b) $A_i \in \Gamma$,

   (c) A_i je nastala iz nekih A_j i A_k, pri čemu je $j, k < i$, primjenom nekog pravila izvoda.

Oznaka za to je $\Gamma \vdash_{RP} G$.

Sada ćemo navesti teorem adekvatnosti za logiku prvog reda.

Teorem 2.4. ***(Teorem adekvatnosti za sistem*** RP***)***
Svaki teorem sistema RP je valjana formula.

Napomena 2.5. Teorija T prvog reda zadana je svojim jezikom te skupom aksioma i pravila izvoda. Smatramo da je zadan jezik teorije T prvog reda ako je zadan skup nelogičkih simbola, tj. signatura. Jedina pravila izvoda teorije prvog reda su modus ponens i genaralizacija. Znači, promatramo teorije koje moraju imati, i imaju samo ta dva pravila izvoda. Po definiciji smatramo da svaka teorija T prvog reda sadrži sve sheme aksioma sistema RP, tj. logika prvog reda po definiciji je sadržana u svakoj teoriji prvog reda. Aksiomi teorije T koji nisu valjane formule nazivaju se nelogičkim aksiomima. Smatramo da je zadan skup aksioma teorije T ako je zadan skup nelogičkih aksioma.

Dakle, prilikom zadavanja teorije T samo naglašavamo njen skup nelogičkih simbola σ i nelogičke aksiome. Od njih tvorimo teoriju tako da σ dodamo ostali alfabet (onaj dio koji je u svakoj teoriji isti; varijable, logičke simbole i zagrade) čime dobivamo jezik te teorije, a skupu nelogičkih simbola dodajemo aksiome i pravila izvoda iz RP.

Definicija 2.6. Kažemo da je teorija T ***konzistentna*** ako ne postoji formula F takva da su i F i $\neg F$ teoremi teorije T. Inače kažemo da je teorija T ***inkonzistentna***.

Za skup formula Γ jezika teorije T kažemo da je konzistentan ako ne postoji formula F takva da vrijedi $\Gamma \vdash_T F$ i $\Gamma \vdash_T \neg F$. Inače kažemo da je skup formula Γ inkonzistentan.

Sljedeći teorem slijedi direktno iz prethodne definicije i teorema adekvatnosti za teoriju RP.

Teorem 2.7. *Teorija RP je konzistentna.*

Navedimo neka svojstva konzistentnih skupova.

Propozicija 2.8. *Neka je T neka teorija prvog reda i Γ skup formula teorije T. Tada vrijedi:*

a) Skup formula Γ je konzistentan ako i samo ako je svaki konačan podskup od Γ konzistentan.

b) Skup formula Γ je konzistentan ako i samo ako postoji formula F takva da vrijedi $\Gamma \nvdash_T F$.

c) Ako postoji model za Γ tada je Γ konzistentan skup.

Prisjetimo se sada teorema potpunosti, fundamentalnog teorema u matematičkoj logici, koji nam daje i obrat teorema adekvatnosti. Nakon toga navodimo još neke teoreme koji se dobiju kao jednostavne posljedice ovog teorema.

Teorem 2.9. ***(Generalizirani teorem potpunosti)***
Za svaku konzistentnu teoriju T prvog reda postoji prebrojiv model.

Važna posljedica ovog teorema je prvi teorem o potpunosti kojeg je dao Gödel.

Teorem 2.10. ***(Gödelov teorem potpunosti)***
Neka je T teorija prvog reda i F formula pripadnog jezika. Tada vrijedi:

$$\vdash_T F \text{ ako i samo ako je } F \text{ istinita u svim modelima za } T.$$

Posebno: $\vdash_{RP} F$ *ako i samo ako je* F *valjana formula.*

Sljedeći teorem je važan za teoriju modela jer daje korisnu metodu za konstruiranje modela.

Teorem 2.11. ***(Teorem kompaktnosti)***
Neka je Γ skup formula neke teorije T prvog reda. Vrijedi sljedeće:

a) Postoji model za Γ ako i samo ako za svaki konačan podskup od Γ postoji model.

b) $\Gamma \models F$ ako i samo ako postoji konačan podskup Γ' od Γ takav da vrijedi $\Gamma' \models F$.

Na kraju navedimo još dvije važne posljedice generaliziranog teorema potpunosti.

Teorem 2.12. ***(Löwenheim-Skolemov teorem „na dolje”)***
Svaka teorija prvog reda koja ima model ima i prebrojiv model.

Teorem 2.13. ***(Löwenheim-Skolemov teorem „na gore”)***
Neka je λ beskonačan kardinalni broj i T proizvoljna konzistentna teorija prvog reda. Tada za teoriju T postoji model kardinalnosti λ.

Teorem kompaktnosti i Löwenheim-Skolemov teorem „na dolje” su dva ključna svojstva koja se koriste u Lindströmovim teoremima da bi se karakterizirala logika prvog reda. Naime, teorem kompaktnosti i Löwenheim-Skolemov teorem istovremeno ne vrijede u „jačim” logičkim sustavima od logike prvog reda.

2.2 Eliminacija funkcijskih simbola

Iako nam prisutstvo funkcijskih i konstantskih simbola uvelike olakšava zapise raznih formula i tvrdnji u pripadnoj teoriji, i njihovo odsustvo nam često može biti jako korisno. U tu svrhu želimo funkcijske i konstantske simbole „eliminirati”, odnosno zamijeniti ih odgovarajućim relacijskim simbolima. Prirodan način da se to napravi je da umjesto samih funkcija i konstanti promatamo njihove grfove. Time ćemo skup nelogičkih simbola zamijeniti skupom nelogičkih simbola koji sadrži samo relacijske simbole. Takav skup nazivamo ***relacijski***.

Neka je σ neki skup nelogičkih simbola. Za svaki n-mjesni funkcijski simbol $f \in \sigma$ neka je F novi $(n+1)$-mjesni relacijski simbol, te za svaki konstantski simbol $c \in \sigma$ neka je C novi jednomjesni relacijski simbol. Sa σ^r označimo skup koji sadrži relacijske simbole iz σ i nove relacijske simbole koje smo upravo uveli. Kako skup σ^r sadrži samo relacijske simbole, to je relacijski skup.
Sada svakoj σ-strukturi $\mathfrak{M}$ pridružujemo σ^r-strukturu $\mathfrak{M}^r$ zamjenjujući funkcijske i konstantske simbole njihovim grafovima. To činimo na sljedeći način:

a) $|\mathfrak{M}^r| = |\mathfrak{M}|$,

b) za svaki relacijski simbol $R \in \sigma$ definiramo $R^{\mathfrak{M}^r} = R^{\mathfrak{M}}$,

c) za svaki n-mjesni funkcijski simbol $f \in \sigma$ neka je interpretacija novog relacijskog simbola F definirana kao graf funkcije $f^{\mathfrak{M}}$, tj. za sve $a_1, ..., a_n, a_{n+1} \in |\mathfrak{M}|$ definiramo:

$$(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \in F^{\mathfrak{M}^r} \text{ ako i samo ako } f^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) = a_{n+1},$$

d) za svaki konstantski simbol $c \in \sigma$ interpretaciju novog jednomjesnog relacijskog simbola C definiramo pomoću grafa konstantske funkcije $a \mapsto c^{\mathfrak{M}}$, tj. za svaki $a \in |\mathfrak{M}|$ definiramo:

$$a \in C^{\mathfrak{M}^r} \text{ ako i samo ako } c^{\mathfrak{M}} = a.$$

Još nam preostaje svaku σ-formulu transformirati u σ^r-formulu zamjenjujući sve podformule oblika:

a) $A(...f(\vec{x})...)$ sa $F(\vec{x}, y) \rightarrow A(...y/f(\vec{x})...)$

b) $A(...c...)$ sa $C(x) \rightarrow A(...x/c...)$.

Sada ćemo malo detaljnije opisati način na koji to radimo.
Prije svega, uočimo da svaki konstantski simbol možemo shvatiti kao specijalni slučaj funkcijskog simbola, točnije kao 0-mjesni funkcijski simbol. U tom smislu, sve što u sljedećem razmatranju napravimo za funkcijske simbole također vrijedi i za konstantske simbole, pa ih stoga nije potrebno promatrati kao poseban slučaj.

Prva činjenica koju trebamo je da je svaka σ-formula logički ekvivalentna σ-formuli u kojoj se svi funkcijski simboli pojavljuju jedino neposredno nakon znaka jednakosti. To znači da se ni jedan funkcijski simbol ne pojavljuje kao argument nekog relacijskog ili funkcijskog simbola, kao ni prije znaka jednakosti, tako da se n-mjesni funkcijski simbol f može pojaviti samo u atomarnim podformulama oblika $y = f(x_1, ..., x_n)$, gdje su y i x_i za $i = 1, ..., n$, ne nužno različite, varijable.

Dokaz toga je lak. Neka je φ neka σ-formula u kojoj se barem jedan funkcijski simbol pojavljuje na mjestu koje nije neposredno nakon znaka jednakosti. U svakom takvom pojavljivanju f je prvi simbol nekog terma t koji se pojavljuje (moguće kao podterm nekog složenijeg terma) u nekoj atomarnoj podformuli $A(t)$. Neka je y proizvoljna varijabla koja se ne pojavljuje u φ. Sa φ^- označimo σ-formulu koju dobijemo od φ zamjenom $A(t)$ s njenim logičkim ekvivalentom $\exists y(y = t \wedge A(y))$. Tada je φ logički ekvivalentna s φ^-, te φ^- sadrži jedno pojavljivanje manje od φ funkcijskog simbola na mjestu koje nije neposredno nakon znaka jednakosti. Ovaj postupak ponavljamo konačno mnogo puta tako da se svaki put riješimo jednog neželjenog nastupa funkcijskog simbola te time dolazimo do σ-formule u kojoj nema ni jednog takvog nastupa i logički je ekvivalentna polaznoj formuli φ.

Iz takve σ-formule lako eliminiramo funkcijske simbole, jedan po jedan. Neka je f n-mjesni funkcijski simbol koji se pojavljuje u takvoj σ-formuli te F pripadni novi $(n+1)$-mjesni relacijski simbol. Sada svaku podformulu oblika $y = f(x_1, ..., x_n)$ u kojoj se pojavljuje f, a to su ujedno i jedina pojavljivanja f, zamijenimo sa $F(x_1, ..., x_n, y)$. Time smo dobili novu formulu u kojoj imamo jedan funkcijski simbol manje. Taj postupak ponovimo za svaki funkcijski simbol koji se pojavljuje u danoj formuli te time dolazimo do željene σ^r-formule u kojoj nema funkcijskih simbola.

Ako je G neka σ-formula, tada s G^r označavamo σ^r-formulu koja je dobivena iz formule G eliminacijom svih funkcijskih i konstantskih simbola.

Teorem 2.14. *Za svaku σ-formulu G i svaku σ-strukturu $\mathfrak{M}$ vrijedi:*

$$\mathfrak{M} \models G \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}^r \models G^r.$$

Dokaz. Neka je G neka σ-formula. Indukcijom po složenosti formule G pokazat ćemo da vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models G \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^r \models G^r.$$

Složenost formule G je broj svih logičkih veznika i kvantifikatora u G računajući ponavljanja. Označavamo ga sa $\kappa(G)$.

Baza indukcije: Neka je $\kappa(G) = 0$, tj. G je atomarna formula. Tada je G je oblika $R(t_1, ..., t_n)$ gdje je $R \in \sigma$ relacijski simbol, a $t_1, ..., t_n$ termi. Bazu indukcije također pokazujemo indukcijom, ali po broju pojavljivanja funkcijskih i konstantskih simbola računajući ponavljanja.
Taj broj označimo sa $m(G)$.

> Baza indukcije: Neka je $m(G) = 0$.
> Tada je $G \equiv R(x_1, ..., x_n)$ gdje su $x_1, ..., x_n$ individualne varijable. Kako u formuli G nema funkcijskih ni konstantskih simbola, to je $G^r = G$. Primijetimo da je $R^{\mathfrak{M}} = R^{\mathfrak{M}^r}$ i $|\mathfrak{M}| = |\mathfrak{M}^r|$. Redom imamo sljedeće ekvivalenicije:
>
> $\mathfrak{M} \models G$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models R(x_1, ..., x_n)$
> ako i samo ako za sve $a_1, ..., a_n \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi $(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{M}}$
> ako i samo ako za sve $a_1, ..., a_n \in |\mathfrak{M}^r|$ vrijedi $(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{M}^r}$
> ako i samo ako $\mathfrak{M}^r \models G^r$.
>
> Pretpostavka indukcije: Neka je $s \in \mathbb{N}, s > 0$, takav da za svaku atomarnu σ-formulu G za koju je $m(G) < s$ vrijedi:
>
> $$\mathfrak{M} \models G \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^r \models G^r.$$
>
> Korak indukcije: Neka je G atomarna σ-formula takva da je $m(G) = s$. Kako je $s > 0$ to u G postoji barem jedan funkcijski ili konstantski simbol. Tada neki od terma $t_1, ..., t_n$ ima funkcijski ili konstantski simbol kao prvi simbol. Neka je to term t_i. Kao u razmatranju prije teorema, imamo da je tada G logički ekvivalentna formuli
>
> $$G^- \equiv \exists y(y = t_i \wedge R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n))$$
>
> gdje je y proizvoljna varijabla koja se ne pojavljuje u G. Kako je G^- logički ekvivalentno G, tada ako je $\mathfrak{M} \models G$, to je $\mathfrak{M} \models G^-$, tj. za svaku valuaciju $v : \{v_0, v_1, ...\} \to |\mathfrak{M}|$ vrijedi
>
> $$\mathfrak{M} \models_v \exists y(y = t_i \wedge R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n)).$$

To po definiciji vrijedi ako i samo ako postoji valuacija v_y takva da vrijedi

$$\mathfrak{M} \models_{v_y} y = t_i \wedge R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n)$$

gdje je v_y valuacija koja je jednaka valuaciji v osim možda u y, tj. $v|_{\{v_0, v_1, ...\} \setminus \{y\}} = v_y|_{\{v_0, v_1, ...\} \setminus \{y\}}$. Ovo posljednje vrijedi ako i samo ako

$$\mathfrak{M} \models_{v_y} y = t_i \quad \text{i} \quad \mathfrak{M} \models_{v_y} R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n).$$

S druge strane $G^r \equiv \exists y((y = t_i)^r \wedge (R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n))^r)$. Ako vrijedi $\mathfrak{M}^r \models G^r$, tj.

$$\mathfrak{M}^r \models \exists y((y = t_i)^r \wedge (R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n))^r),$$

to znači da za svaku valuaciju v vrijedi

$$\mathfrak{M}^r \models_v \exists y((y = t_i)^r \wedge (R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n))^r).$$

Posljednje vrijedi ako i samo ako postoji valuacija v_y takva da je

$$\mathfrak{M}^r \models_{v_y} (y = t_i)^r \wedge (R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n))^r,$$

što vrijedi ako i samo ako

$$\mathfrak{M}^r \models_{v_y} (y = t_i)^r \quad \text{i} \quad \mathfrak{M}^r \models_{v_y} (R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n))^r).$$

Rezimirajmo; da bi pokazali tvrdnju dovoljno je da dokažemo sljedeće:

za svaku valuaciju v postoji valuacija v_y za koju vrijedi:
$\mathfrak{M} \models_{v_y} y = t_i$ i $\mathfrak{M} \models_{v_y} R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n)$
ako i samo ako
$\mathfrak{M}^r \models_{v_y} (y = t_i)^r$ i $\mathfrak{M}^r \models_{v_y} (R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n))^r$.

Dakle, tvrdnju ćemo dobiti ako dokažemo da vrijedi:

1.) $\mathfrak{M} \models_{v_y} y = t_i$ ako i samo ako $\mathfrak{M}^r \models_{v_y} (y = t_i)^r$

2.) $\mathfrak{M} \models_{v_y} R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n)$ ako i samo ako
$\mathfrak{M}^r \models_{v_y} (R(t_1, ..., t_{i-1}, y, t_{i+1}, ..., t_n))^r$.

Uočimo da, kad dokažemo 1.), da smo dokazali i 2.) jer za svaki funkcijski i konstantski simbol koji se pojavljuje u G možemo napraviti gornje razmatranje, tj. eliminirat ga iz argumenta od R, čime dobijemo slučaj 1.). U konačno mnogo koraka sve funkcijske i konstantske simbole eliminirat ćemo iz argumenata od R tako da će svi argumenti od R biti varijable, a za to po bazi indukcije znamo da tvrdnja vrijedi.

Dakle, ostaje pokazati:

$$\mathfrak{M} \models_{v_y} y = t_i \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^r \models_{v_y} (y = t_i)^r.$$

Prisjetimo se da smo na početku poglavlja o eliminaciji funkcijskih i konstantskih simbola za svaki n-mjesni funkcijski simbol $f \in \sigma$ uveli novi $(n+1)$-mjesni relacijski simbol F te za svaki konstantski simbol $c \in \sigma$ novi jednomjesni relacijski simbol C.
Razlikujemo slučajeve:

i) $t_i \equiv c$, tj. $y = c$, gdje je c konstantski simbol. Tada vrijedi:
$\mathfrak{M} \models_{v_y} y = c$ ako i samo ako
postoji $a \in |\mathfrak{M}|$ takav da je $v_y(y) = a$ i $c^{\mathfrak{M}} = a$
ako i samo ako $v_y(y) = a$ i $a \in C^{\mathfrak{M}^r}$, tj. $v_y(y) \in C^{\mathfrak{M}^r}$
ako i samo ako $\mathfrak{M}^r \models_{v_y} C(y) \equiv (y = t_i)^r$.

ii) $t_i \equiv f(t'_1, ..., t'_k)$, odnosno $y = f(t'_1, ..., t'_k)$, gdje je $f \in \sigma$ funkcijski simbol, a $t'_1, ..., t'_k$ termi. Imamo:
$\mathfrak{M} \models_{v_y} y = f(t'_1, ..., t'_k)$ ako i samo ako
postoje $a_1, ..., a_k, b \in |\mathfrak{M}|$ takav da je $v_y(t'_j) = a_j$, za $j = 1, ..., k$, $v_y(y) = b$ i $f^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_k) = b$
ako i samo ako postoje $a_1, ..., a_k, b \in |\mathfrak{M}^r|$ takvi da je $v_y(t'_j) = a_j$, za $j = 1, ..., k$, $v_y(y) = b$ i $(a_1, ..., a_k, b) \in F^{\mathfrak{M}^r}$
ako i samo ako $\mathfrak{M}^r \models_{v_y} F(t'_1, ..., t'_k, y) \equiv (y = t_i)^r$.

Time smo pokazali bazu indukcije, tj. da za svaku atomarnu σ-formulu G vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models G \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^r \models G^r.$$

Pretpostavka indukcije: Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da za sve σ-formule G za koje je $\kappa(G) < m$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models G \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}^r \models G^r.$$

Korak indukcije: Neka je G σ-formula takva da je $\kappa(G) = m$.
Tvrdnju dobivamo koristeći pretpostavku indukcije i sljedeća pravila:

$$(\neg G)^r \equiv \neg G^r,$$
$$(G_0 \vee G_1)^r \equiv {G_0}^r \vee {G_1}^r,$$
$$(\exists x G)^r \equiv \exists x G^r.$$

Ovisno o obliku formule G razlikujemo slučajeve:

$$G \equiv \neg F,\ G \equiv F \vee H,\ G \equiv \exists x F.$$

Za ilustraciju pokažimo tvrdnju za $G \equiv \neg F$, ostali slučajevi dokazuju se analogno.
Neka je dakle $G \equiv \neg F$. Tada je $\kappa(F) < m$ pa imamo:
$\mathfrak{M} \models \neg F$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \not\models F$
ako i samo ako $\mathfrak{M}^r \not\models F^r$ (po pretpostavci indukcije)
ako i samo ako $\mathfrak{M}^r \models \neg F^r \equiv G^r$.

Q.E.D.

Važna posljedica ovog teorema je sljedeći korolar, no prije iznošenja samog korolara prisjetimo se definicije elementarne ekvivalencije dvaju σ-struktura.

Definicija 2.15. Za dvije σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ kažemo da su ***elementarno ekvivalentne***, u oznaci $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, ako za svaku σ-formulu G vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models G \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models G.$$

Korolar 2.16. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ-strukture. Tada vrijedi:*

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N} \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}^r \equiv \mathfrak{N}^r.$$

Dokaz. Neka je $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ te neka je G proizvoljna σ-formula. Iz definicije elementarne ekvivalencije znamo da vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models G \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models G.$$

Koristeći prethodni teorem dobivamo:

$$\mathfrak{M} \models G \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}^r \models G^r$$
$$\mathfrak{N} \models G \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N}^r \models G^r$$

Odavde očito slijedi:

$$\mathfrak{M}^r \models G^r \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N}^r \models G^r.$$

Q.E.D.

2.3 Relativizacija

Ako promatramo vektorski prostor kao strukturu jedne vrste, tada njen nosač sadrži i vektore i skalare. Kada formuliramo aksiome vektorskog prostora u odgovarajućem jeziku potrebno je *relativizirati* aksiome polja na skup skalara te aksiome grupe na skup vektora. Na primjer, za aksiom polja $\forall x(x \cdot 1 = x)$ to možemo napraviti korištenjem novog jednomjesnog relacijskog simbola F za skup skalara i reformuliranjem aksioma na sljedeći način $\forall x(F(x) \to (x \cdot 1 = x))$. Dakle, u ovom poglavlju bavimo se odnosom između formule i njene relativizacije.

Prvo uvodimo pojam podstrukture koji ćemo kasnije koristiti. Podstruktura je u stvari „podskup" dane strukture koji je i sam struktura.

Definicija 2.17. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ-strukture.
σ-strukturu $\mathfrak{N}$ nazivamo ***podstrukturom*** od $\mathfrak{M}$, u oznaci $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, ako vrijedi:

(a) $|\mathfrak{N}| \subseteq |\mathfrak{M}|$

(b) (1) za n-mjesni relacijski simbol $R \in \sigma$ vrijedi $R^{\mathfrak{N}} = R^{\mathfrak{M}} \cap |\mathfrak{N}|^n$, tj. za svake $a_1, ..., a_n \in |\mathfrak{N}|$,

$$(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{N}} \text{ ako i samo ako } (a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{M}},$$

(2) za n-mjesni funkcijski simbol $f \in \sigma$ je $f^{\mathfrak{N}}$ restrikcija od $f^{\mathfrak{M}}$ na $|\mathfrak{N}|$,

(3) za konstantski simbol $c \in \sigma$ je $c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{M}}$.

Definicija 2.18. Neka je $\mathfrak{M}$ neka σ-struktura. Za neprazan skup $S \subseteq |\mathfrak{M}|$ kažemo da je ***σ-zatvoren skup*** u strukturi $\mathfrak{M}$ ako vrijedi:

a) za svaki konstantski simbol $c \in \sigma$ vrijedi $c^{\mathfrak{M}} \in S$,

b) za svaki n-mjesni funkcijski simbol $f \in \sigma$ i sve $a_1, .., a_n \in S$ vrijedi $f^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) \in S$.

Ako je $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ tada je skup $|\mathfrak{N}|$ jedan σ-zatvoren skup u strukturi $\mathfrak{M}$. S druge strane, zbog uvjeta b) u prethodnoj definiciji, svaki σ-zatvoren skup S u σ-strukturi $\mathfrak{M}$ nosač je jedinstvene podstrukture dane strukture $\mathfrak{M}$. Tu podstrukturu označavamo sa $[S]^{\mathfrak{M}}$.

Sada proučavamo pojam relativizacije.

Definicija 2.19. Neka je σ neki skup nelogičkih simbola te U neki jednomjesni relacijski simbol takav da $U \notin \sigma$. Za svaku σ-formulu φ induktivno definiramo $\sigma \cup \{U\}$-formulu φ^U, koju nazivamo ***U-relativizacija od φ***, na sljedeći način:

a) $\varphi^U := \varphi$, ako je φ atomatna formula,

b) $(\neg\varphi)^U := \neg\varphi^U$,

c) $(\varphi \vee \psi)^U := \varphi^U \vee \psi^U$,

d) $(\exists x\varphi)^U := \exists x(U(x) \wedge \varphi)$.

Iz definicije direktno imamo da je

$$(\forall x\varphi)^U = (\neg\exists x\neg\varphi)^U = \neg\exists x(U(x) \wedge \neg\varphi^U),$$

a ta je formula logički ekvivalentna formuli $\forall x(U(x) \to \varphi^U)$.

Želimo vidjeti kakva je veza između istinitosti formule φ i njene relativizacije za dani U. Prvo iznosimo jednu pomoćnu lemu.

Lema 2.20. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ-strukture takve da je $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ te neka je $v : \{v_n | n \in \mathbb{N}\} \to |\mathfrak{N}|$ neka valuacija. Tada za svaku atomarnu formulu φ vrijedi:*

$$\mathfrak{N} \models_v \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \models_v \varphi.$$

Prethodna lema jednostavno slijedi iz definicije.
Bitno je napomenuti da prethodna lema ne vrijedi za proizvoljnu σ-formulu.
To pokazuje sljedeći primjer.
Teorija polja zadana je signaturom $\sigma = \{+, \cdot, 0, 1\}$ i skupom nelogičkih aksioma Q_{fd}:

$$\forall x\forall y\forall z((x + y) + z = x + (y + z)), \forall x\forall y\forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)),$$

$$\forall x\exists y(x + y = 0), \forall x\forall y(x + y = y + x), \neg(0 = 1),$$

$$\forall x(x + 0 = x), \forall x(x \cdot 1 = x), \forall x(\neg(x = 0) \to \exists y(x \cdot y = 1)),$$

$$\forall x\forall y(x \cdot y = y \cdot x), \forall x\forall y\forall z(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)).$$

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 0, 1)$ je podstruktura od srukture $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0, 1)$ u teoriji polja. Formula $\varphi \equiv \exists x(x + 1 = 0)$ vrijedi u $\mathcal{R}$, ali ne i u $\mathcal{N}$.

Sada ćemo iskazati i dokazati lemu o relativizciji koja nam govori o odnosu između istinitosti formule φ i njene relativizacije φ^U. Lema u stvari kaže da relativizacija φ^U ima isto značenje u $\mathfrak{M}$ kao i φ u podstrukturi $[U^{\mathfrak{M}}]^{\mathfrak{M}}$.

Lema 2.21. ***(Lema o relativizaciji)***
Neka je $\mathfrak{M}$ neka $\sigma \cup \{U\}$-struktura, gdje je U jednomjesni relacijski simbol takav da $U \notin \sigma$ te neka je $U^{\mathfrak{M}}$ neki σ-zatvoren skup u struturi $\mathfrak{M}$. Tada za svaku σ-rečenicu φ vrijedi:

$$[U^{\mathfrak{M}}]^{\mathfrak{M}} \models \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \models \varphi^U.$$

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule φ dokazujemo tvrdnju:

Za sve valuacije $v : \{v_n | n \in \mathbb{N}\} \to U^{\mathfrak{M}}$ vrijedi

$$[U^{\mathfrak{M}}]^{\mathfrak{M}} \models_v \varphi \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \models_v \varphi^U.$$

Baza indukcije: Ako je φ atomarna formula tada je po definiciji $\varphi^U = \varphi$ pa tvrdnja slijedi iz prethodne leme.

Pretpostavka indukcije: Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da za sve σ-rečenice φ čija je složenost $\kappa(\varphi) < n$ vrijedi:

$$[U^{\mathfrak{M}}]^{\mathfrak{M}} \models_v \varphi \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \models_v \varphi^U.$$

Korak indukcije: Neka je φ σ-formula takva da je $\kappa(\varphi) = n$.
Za $\varphi \equiv \neg\varphi_0$ i $\varphi \equiv \varphi_0 \vee \varphi_1$ tvrdnja slijedi direktno iz pretpostvke indukcije za φ_0 i φ_1. Za $\varphi \equiv \exists x \varphi_0$ imamo:

> $[U^{\mathfrak{M}}]^{\mathfrak{M}} \models_v \exists x \varphi_0$ vrijedi ako i samo ako postoji $a \in U^{\mathfrak{M}}$ takav da je $[U^{\mathfrak{M}}]^{\mathfrak{M}} \models_{v_{a/x}} \varphi_0$. Kako je $\kappa(\varphi_0) < n$, to po pretpostavci indukcije vrijedi:
>
> $$[U^{\mathfrak{M}}]^{\mathfrak{M}} \models_{v_{a/x}} \varphi_0 \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \models_{v_{a/x}} \varphi_0^U.$$
>
> Nadalje, $\mathfrak{M} \models_{v_{a/x}} \varphi_0^U$ vrijedi ako i samo ako je $\mathfrak{M} \models_{v_{a/x}} U(x) \wedge \varphi_0$. Po definiciji istinitosti formule, to vrijedi ako i samo ako $\mathfrak{M} \models_v \exists x(U(x) \wedge \varphi_0)$, odnosno $\mathfrak{M} \models_v \varphi^U$.

Q.E.D.

3 Primjeri logičkih sustava

Logika prvog reda jako je važna za osnove matematike gdje je postala standardnom formalnom logikom aksiomatskih sustava. Njena izražajna moć dovoljna je za formaliziranje nekih važnih matematičkih teorija poput Zermelo-Fraenkelove teorije skupova. Međutim, nijedan sustav aksioma u logici prvog reda nije dovoljno jak da se opišu beskonačne strukture poput prirodnih ili realnih brojeva. U njoj čak ne možemo formalizirati ni neke relativno jednostavne pojmove kao na primjer „biti konačan" ili „biti prebrojiv". Primjeri poput ovih potiču nas na uvođenje i proučavanje jezika sa jačom izražajnom moći od jezika logike prvog reda. Postoji i dodatni razlog za proučavanje izražajnijih jezika. Pokazalo se da su rezultati poput teorema kompaktnosti, za kojeg smo vidjeli da vrijedi za logiku prvog reda, korisni u, primjerice, algebarskim istraživanjima. Stoga se čini vrijednim truda istražiti druge izražajnije jezike u nadi da ćemo doći do još nekih alata sa dalekosežnim primjenama u matematici. U ovom poglavlju navodimo nekoliko logičkih sustava koje promatramo imajući na umu gore navedene ciljeve. Teoreme koje ovdje budemo navodili nećemo dokazivati; dokaze možete pogledati u [6].

3.1 Logika drugog reda, L_{II}

Logika drugog reda je proširenje logike prvog reda u smislu da, dok u logici prvog reda kvantificiramo isključivo po individualnim varijablama, u logici drugog reda osim po individualnim varijablama kvantifikaciju možemo provoditi i po „svojstvima". Ta svojstva možemo poistovjetiti sa skupovima tako da nam logika drugog reda u stvari omogućuje kvantifikaciju po skupovima. Ovo proširenje jezika povećava njegovu izražajnu moć bez dodavanja novih nelogičkih simbola.

Definicija 3.1. Neka je σ skup nelogičkih simbola. ***Alfabet logike drugog reda*** sastoji se od alfabeta logike prvog reda kojem je dodano još za svaki $n \in \mathbb{N}$ prebrojivo mnogo n-mjesnih relacijskih varijabli $V_1^n, V_2^n, V_3^n, \ldots$ Te relacijske varijable najčešće označavamo sa $X, Y, \ldots$

Skup ***formula logike drugog reda*** dobijemo od skupa formula logike prvog reda tako da definiciji za formule logike prvog reda dodamo još dva sljedeća pravila:

a) Ako je X n-mjesna relacijska varijabla i $t_1, ..., t_n$ σ-termi tada je $X(t_1, ..., t_n)$ σ-formula.

b) Ako je G σ-formula te X relacijska varijabla tada je i $\exists XG$ σ-formula.

Nakon što smo definirali alfabet i formule logike drugog reda, sada definiramo istinitost formule za logiku drugog reda.

Definicija 3.2. ***Valuacija drugog reda*** v u σ-strukturi $\mathfrak{M}$ je preslikavanje koje svakoj individualnoj varijabli v_i pridružuje neki element iz $|\mathfrak{M}|$ te svakoj n-mjesnoj relacijskoj varijabli V_i^n n-mjesnu relaciju na $|\mathfrak{M}|$.

Istinitost formule drugog reda definiramo kao proširenje definicije istinitosti σ-formule logike prvog reda dodavanjem još sljedećih dvaju pravila:

Neka je $\mathfrak{M}$ σ-struktura te v valuacija drugog reda na $\mathfrak{M}$.

a′) $\mathfrak{M} \models_v X(t_1, ..., t_n)$ ako i samo ako vrijedi $v(X)(v(t_1), ..., v(t_n))$,

b′) ako je X n-mjesna relacijska varijabla i G σ-formula logike drugog reda tada vrijedi:

> $\mathfrak{M} \models_v \exists XG$ ako i samo ako postoji $C \subseteq |\mathfrak{M}|^n$ takav da je $\mathfrak{M} \models_{v_{\frac{C}{X}}} G$ gdje je $v_{\frac{C}{X}}$ valuacija koja je jednaka v svugdje osim u X kojeg preslikava u C.

Upravo opisani logički sustav nazivamo ***logikom drugog reda*** i označavamo je sa L_{II}. Napomenimo da za logiku prvog reda koristitimo oznaku FO.

Na sličan način kao za logiku prvog reda definirali bi slobodne i vezane nastupe varijabli i relacijskih varijabli u σ-formulama drugog reda te model za σ-formulu drugog reda.

Formula $\forall XG$ označava pokratu za formulu $\neg\exists\neg XG$. Za nju vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models_v \forall XG \text{ ako i samo ako za svaki } C \subseteq |\mathfrak{M}|^n \text{ vrijedi } \mathfrak{M} \models_{v_{\frac{C}{X}}} G.$$

Sada, u logici drugog reda, možemo formalizirati Peanove aksiome:

(P1) $\forall x \neg(s(x) = 0)$
(P2) $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$
(P3) $\forall X((X(0) \land \forall x(X(x) \rightarrow X(s(x)))) \rightarrow \forall y X(y))$

Ovo su $\{s, 0\}$-formule logike drugog reda. Odavde odmah vidimo da smo prelaskom s logike prvog reda na logiku drugog reda uistinu povećali izražajnu moć jezika jer znamo da aksiom matematičke indukcije nismo mogli formalizirati u jeziku logike prvog reda. Međutim, cijena koju u ovom slučaju plaćamo da bismo mogli kvantificirati po objektima drugog reda je gubitak nekih centralnih svojstava o čemu nam govori sljedeći teorem.

Teorem 3.3. *Teorem kompaktnosti i Löwenheim-Skolemov teorem ne vrijede za logički sustav L_{II}.*

Na početku ovoga poglavlja naveli smo dva cilja kao motivaciju za proučavanje izražajnijih jezika, a to su lakša formalizacija matematičkih tvrdnji i pronalaženje novih alata za matematička istraživanja. Već smo uočili da smo s logikom drugog reda uistinu dobili izražajniji sustav pa smo u određenom smislu napravili neki napredak k prvom cilju. Međutim, što se drugog tiče, logika drugog reda L_{II} neće biti baš zadovoljavajuća. Naime, izražajna moć jezika drugog reda je toliko velika da već rezultati poput teorema kompaktnosti i Löwenheim-Skolemovog teorema, koji su od velike važnosti u matematičkim primjenama, ne vrijede. Ovo nas potiče da proučavamo i neka druga proširenja logike prvog reda.

Sada ćemo navesti još jedan logički sustav koji je dosta sličan logici drugog reda. To je ***slaba logika drugog reda***, L_{II}^W, koja se od logike drugog reda L_{II} razlikuje samo u definiciji istinitosti formule oblika $\exists XG$. Neka je $\mathfrak{M}$ σ-struktura te v neka valuacija drugog reda na $\mathfrak{M}$. Neka je X neka n-mjesna relacijska varijabla i G formula logike drugog reda. Tada za logiku L_{II}^W definiramo:

$\mathfrak{M} \models_v \exists XG$ ako i samo ako postoji konačan $S \subseteq |\mathfrak{M}|^n$ takav da je $\mathfrak{M} \models_{v\frac{S}{X}} G$.

Teorem 3.4. *Za logiku L_{II}^W ne vrijedi teorem kompaktnosti, ali Löwenheim-Skolemov teorem vrijedi.*

3.2 Beskonačna logika, $L_{\omega_1\omega}$

Veću izražajnu moć jezika postižemo i dopuštajući beskonačne konjunkcije i disjunkcije. To su obilježja takozvanih beskonačnih jezika. U najjednostavnijem slučaju ograničavamo se na prebrojive konjunkcije i disjunkcije. Time dolazimo do beskonačne logike $L_{\omega_1\omega}$.

Definicija 3.5. ***Beskonačnu logiku*** $L_{\omega_1\omega}$ dobivamo iz logike prvog reda, čiji je skup nelogičkih simbola σ, tako da dodamo sljedeće:

i) skupu logičkih simbola logike prvog reda dodajemo novi simbol $\bigvee$ (za beskonačnu disjunkciju);

ii) definiciji formula logike prvog reda dodajemo:

 Ako je Γ najviše prebrojiv skup σ-formula tada je $\bigvee \Gamma$ σ-formula (disjunkcija formula iz Γ);

iii) definiciji istinitosti formula logike prvog reda za danu σ-struktiru $\mathfrak{M}$ i valuaciju v dodajemo:

 Ako je Γ najviše prebrojiv skup formula iz $L^{\sigma}_{\omega_1\omega}$ (skup svih formula logičkog sustava $L_{\omega_1\omega}$) tada vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models_v \bigvee \Gamma \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \models_v G, \text{ za neku } \sigma\text{-formulu } G \in \Gamma.$$

Postoje mnoge klase struktura koje nismo mogli formalizirati u logici prvog reda, ali u $L_{\omega_1\omega}$ možemo. Takve su, primjerice, klasa polja kojima je karakteristika prost broj te klasa struktura izomorfnih sa $(\mathbb{N}, s, 0)$.

Ako je Γ najviše prebrojiv skup σ-formula tada je $\bigwedge \Gamma$ pokrata za $L_{\omega_1\omega}$-formulu $\neg \bigvee \{\neg G | G \in \Gamma\}$. Tada vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \bigwedge \Gamma \text{ ako i samo ako za sve } G \in \Gamma \text{ vrijedi } \mathfrak{M} \models G.$$

Formulu $\bigwedge \Gamma$ zovemo konjunkcijom formula iz Γ.

Pogledajmo sada kakva je situacija s teoremom kompaktnosti i Löwenheim-Skolemovim teoremom za $L_{\omega_1\omega}$.

Teorem 3.6. *Teorem kompaktnosti ne vrijedi za $L_{\omega_1\omega}$, tj. postoji skup formula logike $L_{\omega_1\omega}$ koji je konačno ispunjiv, ali nije ispunjiv.*

Međutim, sa Löwenheim-Skolemovim teoremom je ovdje drugačije.

Teorem 3.7. *Za beskonačnu logiku $L_{\omega_1\omega}$ vrijedi Löwenheim-Skolemov teorem, tj. svaki skup formula logičkog sustava $L_{\omega_1\omega}$ koji ima model ima i konačan ili prebrojiv model.*

3.3 Logički sustav L_Q^N

Osim dodavanja novih logičkih veznika skupu logičkih simbola, veću izražajnu moć jezika možemo dobiti i ako skupu logičkih simbola dodamo novi kvantifikator. Upravo to činimo u logičkom sustavu L_Q^N kojem dodajemo novi kvantifikator Q. Interpretacija formule QxG je „postoji neprebrojivo mnogo x koji zadovljavaju formulu G".

Definicija 3.8. Logički sustav L_Q^N dobivamo iz logike prvog reda, čiji je skup nelogičkih simbola σ, tako da dodamo sljedeće:

i) skupu logičkih simbola kvantifikator Q;

ii) definiciji formule logike prvog reda pravilo:

Ako je G σ-formula tada je i QxG formula.

iii) definiciji istinitosti formula logike prvog reda za danu σ-strukturu $\mathfrak{M}$ i valuaciju v slučaj:

Ako je G σ-formula tada vrijedi:
$\mathfrak{M} \models_v QxG$ ako i samo ako je skup $\{a \in |\mathfrak{M}| \mid \mathfrak{M} \models_{v\frac{a}{x}} G\}$ neprebrojiv.

Jasno je da je logički sustav L_Q^N izražajniji od logike prvog reda. Na primjer, za razliku od logike prvog reda, u L_Q^N možemo opisati pojam „biti najviše prebrojiv" formulom $\neg Qx(x = x)$.

Uočimo također da formula $Qx(x = x)$ ima neprebrojiv model, ali nema najviše prebrojiv model. Odavde odmah slijedi:

Teorem 3.9. *Za logiku L_Q^N ne vrijedi Löwenheim-Skolemov teorem, tj. postoji formula logike L_Q^N koja ima model, ali nema konačan ili prebrojiv model.*

Teorem kompaktnosti za sistem L_Q^N vrijedi samo ako je skup formula prebrojiv, općenito ne vrijedi.

Teorem 3.10. *Neka je Γ skup formula logičkog sustava L_Q^N. Tada vrijedi:*

a) ako je Γ prebrojiv tada za Γ vrijedi teorem kompaktnosti, tj. Γ ima model ako i samo ako svaki konačan podskup od Γ ima model.

b) ako je Γ neprebrojiv tada za njega općenito ne vrijedi teorem kompaktnosti.

Sada ćemo kratko navesti još neke logičke sustave, vrlo slične logičkom sustavu L_Q^N.

Logički sustav L_Q^P dobivamo dodavanjem alfabetu logike prvog reda novog kvantifikatora Q, pri čemu je interpretacija formule QxG definirana sa „postoji prebrojivo mnogo x koji zadovoljavaju formulu G". Za logiku L_Q^P ne vrijedi teorem kompaktnosti, ali vrijedi Löwenheim-Skolemov teorem.

U logičkom sustavu L_Q^K formulu QxG interpretiramo sa „postoji samo konačno x koji zadovoljavaju G". Za logiku L_Q^K ne vrijedi teorem kompaktnosti, ali vrijedi Löwenheim-Skolemov teorem.

Kod logičkog sustava L_Q^D interpretacija formule QxG definirana je sa „postoje barem dva različita x koji zadovoljavaju G". Za logički sustav L_Q^D ne vrijede ni teorem kompaktnosti ni Löwenheim-Skolemov teorem.

Na kraju ćemo kroz tablicu sumirati rezultate ovog poglavlja koje smo dobili promatrajući različita proširenja logike prvog reda.

Logički sustav	Löwenheim-Skolemov teorem	Teorem kompaktnosti: Općenito	Teorem kompaktnosti: za prebrojive skupove formula
FO	$+$	$+$	$+$
L_{II}	$-$	$-$	$-$
L_{II}^W	$+$	$-$	$-$
$L_{\omega_1\omega}$	$+$	$-$	$-$
L_Q^N	$-$	$-$	$+$
L_Q^P	$+$	$-$	$-$
L_Q^K	$+$	$-$	$-$
L_Q^D	$-$	$-$	$-$

Vidimo da ni za jedan gore navedeni logički sustav koji je izražajniji od logike prvog reda ne vrijede istovremeno teorem kopmaktnosti i Löwenheim-Skolemov teorem. Prirodno se nameće pitanje da li postoji izražajniji logički sustav od logike prvog reda za koji bi vrijedili i teorem kompaktnosti i Löwenheim-Skolemov teorem. Odgovor na to pitanje daju nam upravo Lindströmovi teoremi.

4 Logički sustavi

U prethodna dva poglavlja promatrali smo nekoliko logičkih sustava. Pri tom razmatranju mogli smo uočiti da postoje određena svojstva tih sustava koja su im svima zajednička. U ovom poglavlju obuhvatit ćemo ta svojstva jednom definicijom i tako dobiti pojam općenitog logičkog sustava.

Definicija 4.1. ***Logički sustav*** $\mathfrak{L}$ sastoji se od funkcije L i binarne relacije $\models_{\mathfrak{L}}$. Funkcija L svakom skupu nelogičkih simbola σ pridružuje neki skup $L(\sigma)$, koji nazivamo skupom σ-rečenica, pri čemu vijedi:

a) Ako je $\sigma \subseteq \sigma'$ tada je $L(\sigma) \subseteq L(\sigma')$.

b) Ako su $\mathfrak{M}$ i φ u relaciji $\models_{\mathfrak{L}}$, što kratko označavamo sa $\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \varphi$, tada postoji skup σ takav da je $\mathfrak{M}$ σ-struktura i $\varphi \in L(\sigma)$.

c) Ako vrijedi $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \varphi$ tada vrijedi $\mathfrak{N} \models_{\mathfrak{L}} \varphi$. (svojstvo izomorfnosti)

d) Ako je $\sigma \subseteq \sigma'$, $\varphi \in L(\sigma)$ i $\mathfrak{M}$ σ'-struktura tada vrijedi

$$\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \restriction \sigma \models_{\mathfrak{L}} \varphi,$$

pri čemu je sa $\mathfrak{M} \restriction \sigma$ označeno σ-suženje od $\mathfrak{M}$. (svojstvo suženja)

$FO, L_{II}, L_{II}^{W}, L_{\omega_1\omega}$ i L_Q jesu logički sustavi. Na primjer, u slučaju logike prvog reda, FO, neka je L_1 funkcija koja svakom skupu nelogičkih simbola σ pridružuje skup $L_1(\sigma)$ svih σ-rečenica prvog reda te $\models_{FO}$ uobičajena relacija $\models$ između struktura i rečenica prvog reda.

Neka je $\mathfrak{L}$ logički sustav i $\varphi \in L(\sigma)$. Sa $Mod(\sigma, \mathfrak{L})(\varphi)$ označavamo skup svih modela za rečenicu φ, tj.

$$Mod(\sigma, \mathfrak{L})(\varphi) := \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \text{ je } \sigma\text{-struktura i } \mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \varphi\}.$$

Skup $Mod(\sigma, \mathfrak{L})(\varphi)$ nam omogućuje uspoređivanje dvaju različitih logičkih sustava. Na koji način to činimo govori nam sljedeća definicija.

Definicija 4.2. Neka su $\mathfrak{L}$ i $\mathfrak{L}'$ dva logička sustava.

i) Kažemo da je logički sustav $\mathfrak{L}'$ ***izražajan barem*** kao logički sustav $\mathfrak{L}$, i pišemo $\mathfrak{L} \leq \mathfrak{L}'$, ako za svaki skup nelogičkih simbola σ i za svaku rečenicu $\varphi \in L(\sigma)$ postoji rečenica $\psi \in L'(\sigma)$ takva da vrijedi:

$$Mod(\sigma, \mathfrak{L})(\varphi) = Mod(\sigma, \mathfrak{L}')(\psi).$$

ii) Kažemo da su logički sustavi $\mathfrak{L}$ i $\mathfrak{L}'$ ***jednako izražajni***, i pišemo $\mathfrak{L} \sim \mathfrak{L}'$, ako vrijedi $\mathfrak{L} \leq \mathfrak{L}'$ i $\mathfrak{L}' \leq \mathfrak{L}$.

Sada ćemo na osnovu prethodne definicije usporediti neke od logičkih sustava koje smo promatrali u prethodnom poglavlju:

1.) $FO \leq L_{II}^W$ jer je svaka rečenica logike prvog reda ujedno i rečenica slabe logike drugog reda. Isti argument vrijedi i za $FO \leq L_{II}$, $FO \leq L_Q$ i $FO \leq L_{\omega_1\omega}$.

2.) $L_{II}^W \leq L_{II}$ slijedi iz definicije istinitosti u L_{II} i L_{II}^W, ali ne vrijedi $L_{II} \leq L_{II}^W$.

3.) Iz činjenice da u FO nismo mogli opisati pojmove „biti konačan", „biti prebrojiv" te „biti neprebrojiv" imamo da ne vrijedi $L_{II} \leq FO$, $L_Q \leq FO$, $L_{\omega_1\omega} \leq FO$.

Sada za općenit slučaj navodimo još neka svojstva logičkih sustava za koja znamo da vrijede u logičkim sustavima koje smo do sada promatrali.

Definicija 4.3. Kažemo da je ***logički sustav $\mathfrak{L}$ zatvoren za bulovske veznike***, te pišemo $Boole(\mathfrak{L})$, ako vrijedi:

a) Za svaki skup σ i svaku rečenicu $\varphi \in L(\sigma)$ postoji rečenica $\psi \in L(\sigma)$ takva da za svaku σ-strukturu $\mathfrak{M}$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \psi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \not\models_{\mathfrak{L}} \varphi.$$

b) Za svaki skup σ te $\varphi, \psi \in L(\sigma)$ postoji rečenica $\chi \in L(\sigma)$ takva da za svaku σ-strukturu $\mathfrak{M}$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \chi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \varphi \text{ i } \mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \psi.$$

Ako postoji rečenica ψ iz uvjeta a) tada nju označavamo sa $\neg\varphi$. Rečenicu iz uvjeta b), ako postoji, oznčavamo sa $\varphi \wedge \psi$.
Analogno bi mogli definirati i rečenice $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ i $\varphi \leftrightarrow \psi$.

Sada ćemo definirati još relativizaciju te eliminaciju funkcijskih i konstantskih simbola za proizvoljan logički sustav.

Prisjetimo se relativizacije za logiku prvog reda: Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna σ-struktura te U jednomjesni relacijski simbol takav da $U \notin \sigma$. Ako je $U^{\mathfrak{M}}$

σ-zatvoren skup u strukturi $\mathfrak{M}$ tada sa $[U^{\mathfrak{M}}]^{\mathfrak{M}}$ označavamo podstrukturu od $\mathfrak{M}$ s nosačem $U^{\mathfrak{M}}$. Sa $(\mathfrak{M}, U^{\mathfrak{M}})$ označavamo $\sigma \cup \{U\}$-strukturu kod koje je $U^{\mathfrak{M}}$ σ-zatvoren skup u strukturi $\mathfrak{M}$.

Definicija 4.4. Kažemo da ***logički sustav $\mathfrak{L}$ dopušta relativizaciju***, i pišemo $Rel(\mathfrak{L})$, ako za svaki skup σ, svaku rečenicu $\varphi \in L(\sigma)$ i svaki jednomjesni relacijski simbol $U \notin \sigma$ postoji neka rečenica $\psi \in L(\sigma \cup \{U\})$ takva da za svaku σ-strukturu $\mathfrak{M}$ i svaki σ-zatvoren skup $U^{\mathfrak{M}}$ u strukturi $\mathfrak{M}$ vrijedi:

$$(\mathfrak{M}, U^{\mathfrak{M}}) \models_{\mathfrak{L}} \psi \text{ ako i samo ako } [U^{\mathfrak{M}}]^{\mathfrak{M}} \models_{\mathfrak{L}} \varphi.$$

Ako vrijedi $Rel(\mathfrak{L})$ tada rečenicu ψ iz prethodne definicije označavamo sa φ^U.

Prisjetimo se da smo u logici prvog reda pri eliminaciji funkcijskih i konstantskih simbola sa σ^r označavali skup nelogičkih simbola koji smo dobili od skup σ tako da smo sve funkcijske i konstantske simbole u njemu zamijenili novim relacijskim simbolima.

Definicija 4.5. Kažemo da ***logički sustav $\mathfrak{L}$ dopušta eliminaciju*** funkcijskih i konstantskih simbola, tj. njihovu zamjenu novim relacijskim simbolima, i pišemo $Elim(\mathfrak{L})$, ako za svaki skup σ nelogičkih simbola i za svaku rečenicu $\varphi \in L(\sigma)$ postoji rečenica $\psi \in L(\sigma^r)$ takva da za svaku σ-strukturu $\mathfrak{M}$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^r \models_{\mathfrak{L}} \psi.$$

Ako vrijedi $Elim(\mathfrak{L})$ tada sa φ^r označavamo rečenicu ψ iz prethodne definicije.

Definicija 4.6. Za logički sustav $\mathfrak{L}$ kažemo da je ***regularan logički sustav*** ako za njega vrijede svojstva $Boole(\mathfrak{L}), Rel(\mathfrak{L})$ i $Elim(\mathfrak{L})$.

Svi logički sustavi koje smo do sada promatrali su regularni. Na primjer, za logiku prvog reda jasno je da vrijedi $Boole(FO)$, a teorem 2.14 i lema 2.21 pokazuju da vrijede $Elim(FO)$ i $Rel(FO)$. Na sličan način može se dokazati regularnost i ostalih ranije spomenutih logičkih sustava.

Prešutno preuzimamo neke semantičke pojmove čije se definicije mogu proširiti iz logike prvog reda na općenit slučaj. Na primjer, kažemo da je $\varphi \in L(\sigma)$ ***ispunjiva*** ako je $Mod(\sigma, \mathfrak{L}) \neq \emptyset$ te da je ***valjana*** ako je $Mod(\sigma, \mathfrak{L})$ klasa svih σ-struktura. Nadalje, ako je $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(\sigma)$ kažemo da rečenica φ ***logički slijedi*** iz skupa Γ, i pišemo $\Gamma \models_{\mathfrak{L}} \varphi$, ako za svaku σ-strukturu $\mathfrak{M}$ za koju vrijedi $\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \Gamma$ vrijedi i $\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \varphi$.

Uvodimo sljedeće oznake:

(a) $L\ddot{o}Sko(\mathfrak{L})$ označava činjenicu da za logički sustav $\mathfrak{L}$ vrijedi Löwenheim-Skolemov teorem, tj. za svaku ispunjivu rečenicu iz $\mathfrak{L}$ postoji konačan ili prebrojiv model.

(b) $Comp(\mathfrak{L})$ označava činjenicu da za logički sustav $\mathfrak{L}$ vrijedi teorem kompaktnosti, tj. ako je S skup rečenica iz $\mathfrak{L}$ takav da je svaki konačan podskup od S ispunjiv, tada je i S ispunjiv.

Sada u ovoj terminologiji možemo iskazati prvi Lindströmov teorem:

Teorem 4.7. ***(Lindströmov prvi teorem)***
Neka je $\mathfrak{L}$ regularan logički sustav takav da je $FO \leq \mathfrak{L}$. Ako vrijedi LöSko*($\mathfrak{L}$) i* Comp*($\mathfrak{L}$) tada je $\mathfrak{L} \sim FO$.*

Budući da Lindströmov prvi teorem nije glavni cilj ovoga rada, njegov dokaz ovdje nećemo navoditi. Za dokaz možete pogledati u [6] ili [7]. Međutim, detaljnim proučavanjem toga dokaza dolazi se do leme koja nam je potrebana za dokaz drugog Lindströmovog teorema. Prije same leme prisjetimo se teorije uređaja koju spominjemo u lemi.

Teorija uređaja
Struktura $\mathfrak{M} = (M, <^{\mathfrak{M}})$ zove se ***uređaj*** ako je ona model za sljedeće rečenice:

$$\Phi_{ord} \begin{cases} \forall x(\neg(x < x)) \\ \forall x \forall y \forall z(((x < y) \wedge (y < z)) \rightarrow x < z) \\ \forall x \forall y((x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)) \end{cases}$$

$(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$ i $(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}})$ su primjeri uređaja. Ako $\mathbb{C}$ označava skup kompleksnih brojeva i $<^{\mathbb{C}}$ je definirana sa:

$$z_1 <^{\mathbb{C}} z_2 \text{ ako i samo ako } z_1, z_2 \in \mathbb{R} \text{ i } z_1 <^{\mathbb{R}} z_2$$

tada $(\mathbb{C}, <^{\mathbb{C}})$ nije uređaj jer treći aksiom iz Φ_{ord} ne vrijedi.
Ako za strukturu $\mathfrak{M} = (M, <^{\mathfrak{M}})$ definiramo

$$dom(<^{\mathfrak{M}}) := \{a \in M |\text{ postoji } b \in M \text{ takav da je } a <^{\mathfrak{M}} b \text{ ili } b <^{\mathfrak{M}} a\}$$

tada za $(\mathbb{C}, <^{\mathbb{C}})$, $dom(<^{\mathbb{C}}) = \mathbb{R}$ i $(dom(<^{\mathbb{C}}), <^{\mathbb{C}})$ je uređaj.

Kažemo da je $<^{\mathfrak{M}}$ ***parcijalni uređaj*** na M ako je $(dom(<^{\mathfrak{M}}), <^{\mathfrak{M}})$ model za Φ_{ord}, odnosno ako $(M, <^{\mathfrak{M}})$ zadovoljava:

$$\Phi_{pord}\begin{cases}\forall x(\neg(x < x)) \\ \forall x\forall y\forall z(((x < y) \wedge (y < z)) \to x < z) \\ \forall x\forall y((\exists u(x < u \vee u < x) \wedge \exists v(y < v \vee v < y)) \to \\ \qquad \to ((x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)))\end{cases}$$

Lema 4.8. *Neka je $\mathfrak{L}$ regularan logički sustav takav da je $FO \leq \mathfrak{L}$ i vrijedi* LöSko*($\mathfrak{L}$). Pretpostavimo da za svaki konačan skup σ relacijskih simbola postoji $\psi \in L(\sigma)$ takva da za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoje σ-strukture $\mathfrak{M}_m$ i $\mathfrak{N}_m$ takve da vrijedi:*

$$\mathfrak{M}_m \simeq_m \mathfrak{N}_m, \quad \mathfrak{M}_m \models_{\mathfrak{L}} \psi \quad i \quad \mathfrak{N}_m \models_{\mathfrak{L}} \neg\psi.$$

Tada se u $\mathfrak{L}$ klasa konačnih uređaja može opisati u sljedećem smislu:

Postoji konačan skup nelogičkih simbola σ_1, koji sadrži simbole $<, c$ i rečenicu $\chi_1 \in L(\sigma_1)$, tako da vrijedi (a) i (b):

(a) Ako je $\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \chi_1$ tada je $(|\mathfrak{M}|, <^{\mathfrak{M}})$ parcijalni uređaj i $c^{\mathfrak{M}}$ je element $dom(<^{\mathfrak{M}})$ sa samo konačno mnogo $<^{\mathfrak{M}}$-prethodnika.

(b) Za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji model $\mathfrak{M}$ od χ_1 u kojem $c^{\mathfrak{M}}$ ima barem m $<^{\mathfrak{M}}$-prethodnika.

Dokaz. Neka su σ i ψ kao u pretpostavci leme, tj. σ je konačan skup relacijskih simbola za koje postoji rečenica $\psi \in L(\sigma)$ takva da za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoje σ-strukture $\mathfrak{M}_m$ i $\mathfrak{N}_m$ tako da vrijedi:

$$\mathfrak{M}_m \simeq_m \mathfrak{N}_m, \quad \mathfrak{M}_m \models_{\mathfrak{L}} \psi \quad \text{i} \quad \mathfrak{N}_m \models_{\mathfrak{L}} \neg\psi. \tag{$*$}$$

Neka su $(I_n)_{n\leq m}$ neprazni skupovi parcijalnih izomorfizama koji zadovoljavaju $(forth)$ i $(back)$ svojstva, odnosno:

$$(I_n)_{n\leq m} : \mathfrak{M}_m \simeq_m \mathfrak{N}_m \tag{1.}$$

Sada ćemo definirati rečenicu χ i konstantski simbol c, slično kako je to napravljeno u dokazu prvog Lindströmovog teorema u [6]:

Prije svega, možemo pretpostaviti da je $|\mathfrak{M}_m| \cap |\mathfrak{N}_m| = \emptyset$ (inače, po svojstvu izomorfnosti, uzmemo izomorfnu kopiju od $\mathfrak{N}_m$).
Definiramo novi skup σ^+ nelogičkih simbola tako da skupu σ dodamo sljedeće nove simbole: jednomjesni funkcijski simbol f i relacijske simbole P, U, V (jednomjesne), $<, I$(dvomjesne) i G(tromjesni). Definiramo σ^+-strukturu $\mathfrak{C}$ za koju želimo da sadrži strukture $\mathfrak{M}_m$ i $\mathfrak{N}_m$ te parcijalne izomorfizme iz $I_n, n \leq m$. Pa neka je:

(a) $|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{M}_m| \cup |\mathfrak{N}_m| \cup \{0, ..., m\} \cup \bigcup_{n \leq m} I_n$

(b) $U^{\mathfrak{C}} := |\mathfrak{M}_m|$ i $[U^{\mathfrak{C}}]^{\mathfrak{C} \restriction \sigma} = \mathfrak{M}_m$

(c) $V^{\mathfrak{C}} := |\mathfrak{N}_m|$ i $[V^{\mathfrak{C}}]^{\mathfrak{C} \restriction \sigma} = \mathfrak{N}_m$

(d) $<^{\mathfrak{C}}$ je prirodni uređaj na $\{0, ..., m\}$ i $f^{\mathfrak{C}} \restriction \{0, ..., m\}$ funkcija prethodnika na $\{0, ..., m\}$

(e) $P^{\mathfrak{C}} = \bigcup_{n \leq m} I_n$

(f) $I^{\mathfrak{C}}(n, p)$ ako i samo ako $n \in \{0, ..., m\}$ i $p \in I_n$

(g) $G^{\mathfrak{C}}(p, a, b)$ ako i samo ako $P^{\mathfrak{C}}(p), a \in Dom(p)$ i $p(a) = b$

Tada je $\mathfrak{C}$ model za formulu χ koju definiramo kao konjunkciju sljedećeg konačnog skupa formula iz $L(\sigma^+)$:

(i) $\forall p(P(p) \to \forall x \forall y(G(p, x, y) \to (U(x) \wedge V(y))))$

(ii) $\forall p(P(p) \to \forall x \forall y \forall x' \forall y'((G(p, x, y) \wedge G(p, x', y')) \to (x = x' \leftrightarrow y = y')))$

(iii) za svaki n-mjesni relacijski simbol $R \in \sigma$:
$\forall p(P(p) \to \forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_n((G(p, x_1, y_1) \wedge ... \wedge G(p, x_n, y_n)) \to$
$\to (R(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow R(y_1, ..., y_n))))$

((i),(ii) i (iii) kažu da za fiksni $p \in P$, $G(p, ., .)$ opisuje graf parcijalnog izomorfizma sa σ-podstrukture inducirane s U na σ-podstrukturu induciranu s V)

(iv) aksiomi ϕ_{pord} (parcijalnog uređaja) i
$\forall x(\exists y(y < x) \to (f(x) < x \wedge \neg \exists z(f(x) < z \wedge z < x)))$
(tj. $(dom(<^{\mathfrak{C}}), <^{\mathfrak{C}})$ je uređaj s funkcijom prethodnika)

(v) $\forall x(\forall y(x < y \wedge y < x) \to \exists p(P(p) \wedge I(x, p)))$
(tj. ako je x u $dom(<^{\mathfrak{C}})$ tada je $I_x = \{p | P(p) \wedge I(x, p)\}$ neprazan)

(vi) $\forall x \forall p \forall u((f(x) < x \wedge I(x,p) \wedge U(u)) \rightarrow \exists q \exists v(I(f(x),q) \wedge G(q,u,v) \wedge \forall x' \forall y'(G(p,x,y) \rightarrow G(q,x,y))))$
(tj. $(forth)$-svojstvo iz definicije parcijalnog izomorfizma)

(vii) $\forall x \forall p \forall v((f(x) < x \wedge I(x,p) \wedge V(v)) \rightarrow \exists q \exists u(I(f(x),q) \wedge G(q,u,v) \wedge \forall x' \forall y'(G(p,x,y) \rightarrow G(q,x,y))))$
(tj. $(back)$-svojstvo iz definicije parcijalnog izomorfizma)

(viii) $\forall x U(x) \wedge \forall y V(y) \wedge \psi^U \wedge (\neg\psi)^V$
(prisjetimo se da je $U^{\mathfrak{C}} = |\mathfrak{M}_m|, V^{\mathfrak{C}} = |\mathfrak{N}_m|, \mathfrak{M} \vDash_{\mathfrak{L}} \psi, \mathfrak{N} \vDash_{\mathfrak{L}} \neg\psi$)

Izaberimo novu konstantu c te definirajmo skup $\sigma_1 := \sigma^+ \cup \{c\}$, tj. $\sigma_1 = \sigma \cup \{f, P, U, V, <, I, G\} \cup \{c\}$. Budući da je σ konačan po pretpostavci leme, tada je i σ_1 konačan skup nelogičkih simbola i on očito sadrži $<$ i c.

Neka je:

$$\chi_1 := \chi \wedge \text{"}c \text{ je u } dom(<^{\mathfrak{C}})\text{"}.$$

Očito je $\chi_1 \in L(\sigma_1)$.

Još trebamo dokazati da vrijede uvjeti *(a)* i *(b)* iz iskaza leme.

Pokažimo prvo *(b)*.

Neka je dan $m \in \mathbb{N}$ te neka su $\mathfrak{M}_m$ i $\mathfrak{N}_m$ kao u $(*)$. Neka je $\mathfrak{C}$ jedna σ^+-struktura kako smo je prije definirali. Definiramo σ_1-strukturu $\mathfrak{C}_1$ tako da je ona jednaka strukturi $\mathfrak{C}$ uz $c^{\mathfrak{C}_1} := m$. Tada je očito struktura $\mathfrak{C}_1$ model za χ_1 i $c^{\mathfrak{C}_1}$ ima m $<^{\mathfrak{C}_1}$-prethodnika.

Dokaz za *(a)*.

Pretpostavimo suprotno, tj. postoji model $(\mathfrak{D}, c^{\mathfrak{D}})$ za χ_1 u kojem $c^{\mathfrak{D}}$ ima beskonačno mnogo $<^{\mathfrak{D}}$-prethodnika. Dakle, $|\mathfrak{D}|$ sadrži beskonačan padajući lanac, recimo $...(f^2(c))^{\mathfrak{D}} <^{\mathfrak{D}} (f(c)) <^{\mathfrak{D}} c^{\mathfrak{D}}$. Tada je $(\mathfrak{D}, c^{\mathfrak{D}})$ model za skup:

$$\Psi = \{\chi\} \cup \{(f^{n+1}(c))^{\mathfrak{D}} <^{\mathfrak{D}} (f^n(c))^{\mathfrak{D}} | n \in \mathbb{N}\}.$$

Mi želimo prebrojiv model s ovim svojstvom. Budući da se ovdje radi o beskonačnom skupu formula, ne možemo direktno primijeniti $LöSko(\mathfrak{L})$. To rješavamo uvođenjem novog relacijskog simbola Q.

Definiramo $L(\sigma_1 \cup \{Q\})$-rečenicu

$$\vartheta \equiv Q(c) \wedge \forall x(Q(x) \rightarrow (f(x) < x \wedge Q(f(x))))$$

(tj. Q sadrži c i svaki element iz Q ima neposrednog $<$-prethodnika u Q, stoga je Q podskup od $dom(<^{\mathfrak{D}})$).

Ako je $Q^{\mathfrak{D}} = \{(f^n(c))^{\mathfrak{D}} | n \in \mathbb{N}\}$ tada

$$(\mathfrak{D}, c^{\mathfrak{D}}, Q^{\mathfrak{D}}) \models_{\mathfrak{L}} \vartheta \wedge \chi$$

tj. formula $\chi \wedge \vartheta$ ima model, pa po $LöSko(\mathfrak{L})$ postoji konačan ili prebrojiv model $(\mathfrak{C}, c^{\mathfrak{C}}, Q^{\mathfrak{C}})$ za $\chi \wedge \vartheta$. Budući da vrijedi (viii), u $\mathfrak{C}$ to imamo $U^{\mathfrak{C}} \neq \emptyset$ i $V^{\mathfrak{C}} \neq \emptyset$. Pošto je σ relacijska signatura, tada su $U^{\mathfrak{C}}$ i $V^{\mathfrak{C}}$ domene podstruktura. Stoga definiramo:

$$\mathfrak{M}' := [U^{\mathfrak{C}}]^{\mathfrak{C}\restriction\sigma} \text{ i } \mathfrak{N}' := [V^{\mathfrak{C}}]^{\mathfrak{C}\restriction\sigma} \tag{2.}$$

i one su, kao podstrukture od $\mathfrak{C}$, konačne ili prebrojive.
Po (viii) vrijedi $\mathfrak{C} \models_{\mathfrak{L}} \psi^U$ i $\mathfrak{C} \models_{\mathfrak{L}} (\neg\psi)^V$ te odatle slijedi

$$\mathfrak{M}' \models_{\mathfrak{L}} \psi \text{ i } \mathfrak{N}' \models_{\mathfrak{L}} \neg\psi \tag{3.}$$

Po (i), (ii) i (iii) znamo da svakom $p \in P$ odgovara parcijalni izomorfizam sa $\mathfrak{M}'$ na $\mathfrak{N}'$. Budući da je $(\mathfrak{C}, c^{\mathfrak{C}}, Q^{\mathfrak{C}}) \models_{\mathfrak{L}} \vartheta$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ element $e_n := (f^n(c))^{\mathfrak{C}}$ pripada $Q^{\mathfrak{C}}$ i e_n čine padajući lanac $...e_3 < e_2 < e_1 < e_0$.

Neka je $I := \{p | \text{postoji } n \in \mathbb{N} \text{ takav da } I^{\mathfrak{C}}(e_n, p)\}$. Koristeći (v), vidimo da je $I \neq \emptyset$, te po (vi) i (vii) imamo da I zadovoljava $(forth)$ i $(back)$-svojstvo. Primjerice, za $(forth)$-svojstvo imamo:

ako je $p \in I$, neka je $I^{\mathfrak{C}}(e_n, p)$ i $a \in |\mathfrak{M}'| = U^{\mathfrak{C}}$ tada po (vi) postoji q takav da $I^{\mathfrak{C}}(e_{n+1}, q)$ (stoga je $q \in I$), $q \supseteq p$ i $a \in Dom(q)$.

Dakle, vrijedi:

$$I : \mathfrak{M}' \simeq_p \mathfrak{N}'.$$

Budući da su $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{N}'$ konačne ili prebrojive, po Karpovom teoremu, odnosno lemi 1.6, imamo

$$\mathfrak{M}' \simeq \mathfrak{N}'.$$

Po svojstvu izomorfnosti iz definicije logičkog sustava imamo da vrijedi:
Ako je $\mathfrak{M}' \simeq \mathfrak{N}'$ i $\mathfrak{M}' \models_{\mathfrak{L}} \psi$ tada vrijedi i $\mathfrak{N}' \models_{\mathfrak{L}} \psi$.
A to je kontradikcija s (3.), gdje imamo da je $\mathfrak{M}' \models_{\mathfrak{L}} \psi$ i $\mathfrak{N}' \models_{\mathfrak{L}} \neg\psi$.

Q.E.D.

5 Lindströmov drugi teorem

U našem razmatranju logičkih sustava sada posebnu pažnju posvećujemo sintaktičkom aspektu. U vezi s tim definirat ćemo neka svojstva proizvoljnog logičkog sustava koja smo imali prije za logiku prvog reda.

Definicija 5.1. Neka je $\mathfrak{L}$ logički sustav. Kažemo da je $\mathfrak{L}$ ***efektivan logički sustav*** ako za svaki odlučiv skup σ nelogičkih simbola skup $L(\sigma)$ je odlučiv, te za svaku σ-rečenicu $\varphi \in L(\sigma)$ postoji konačan $\sigma_0 \subseteq \sigma$ takav da vrijedi $\varphi \in L(\sigma_0)$.

Logički sustavi FO, L_{II}, L_{II}^W i L_Q su efektivni, ali $L_{\omega_1\omega}$ nije.

Definicija 5.2. Neka su $\mathfrak{L}$ i $\mathfrak{L}'$ dva efektivna logička sustava.

a) $\mathfrak{L} \leq_{eff} \mathfrak{L}'$ ako za svaki odlučiv skup σ postoji izračunljiva funkcija $*$ koja svakoj rečenici $\varphi \in L(\sigma)$ pridružuje neku rečenicu $\varphi^* \in L'(\sigma)$ takvu da vrijedi:
$$Mod(\sigma, \mathfrak{L})(\varphi) = Mod(\sigma, \mathfrak{L}')(\varphi^*).$$

b) $\mathfrak{L} \sim_{eff} \mathfrak{L}'$ ako vrijedi $\mathfrak{L} \leq_{eff} \mathfrak{L}'$ i $\mathfrak{L}' \leq_{eff} \mathfrak{L}$.

Primjerice, imamo $FO \leq_{eff} L_{II}^W$ i $L_{II}^W \leq_{eff} L_{II}$.

Definicija 5.3. Neka je $\mathfrak{L}$ neki logički sustav. Kažemo da je $\mathfrak{L}$ ***efektivno regularan logički sustav*** ako je efektivan i ako za svaki odlučiv skup σ nelogičkih simbola vrijedi:

a) Postoji izračunljiva funkcija koja svakoj rečenici $\varphi \in L(\sigma)$ pridružuje neku rečenicu $\neg\varphi$ takvu da za svaku σ-strukturu $\mathfrak{M}$ vrijedi:
$$\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \neg\varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \not\models_{\mathfrak{L}} \varphi.$$

Postoji izračunljiva funkcija koja svim parovima rečenica $\varphi, \psi \in L(\sigma)$ pridružuje neku rečenicu $\varphi \wedge \psi \in L(\sigma)$ takvu da za svaku σ-strukturu $\mathfrak{M}$ vrijedi:
$$\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \varphi \wedge \psi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \varphi \text{ i } \mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \psi.$$

b) Za svaki jednomjesni relacijski simbol U, takav da $U \notin \sigma$, postoji izračunljiva funkcija koja svakoj rečenici $\varphi \in L(\sigma)$ pridružuje rečenicu $\varphi^U \in L(\sigma)$ takvu da za svaku σ-strukturu $\mathfrak{M}$ i svaki σ-zatvoren skup $U^{\mathfrak{M}}$ vrijedi:

$$(\mathfrak{M}, U^{\mathfrak{M}}) \models_{\mathfrak{L}} \varphi^U \text{ ako i samo ako } [U^{\mathfrak{M}}]^{\mathfrak{M}} \models_{\mathfrak{L}} \varphi.$$

c) Postoji izračunljiva funkcija koja svakoj rečenici $\varphi \in L(\sigma)$ pridružuje rečenicu $\varphi^r \in L(\sigma^r)$ tako da za svaku σ-strukturu $\mathfrak{M}$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^r \models_{\mathfrak{L}} \varphi^r.$$

FO, L_{II}^W i L_Q su efektivno regularni logički sustavi.

Definicija 5.4. Neka je $\mathfrak{L}$ neki efektivno regularan logički sustav. Kažemo da je $\mathfrak{L}$ ***rekurzivno prebrojiv za valjanost*** ako je za svaki odlučiv skup σ nelogičkih simbola skup svih valjanih σ-rečenica, tj. $\{\varphi \in L(\sigma) \mid \models_{\mathfrak{L}} \varphi\}$, rekurzivno prebrojiv.

Očito, ako $\mathfrak{L}$ ima adekvatan dokazni račun, tada je $\mathfrak{L}$ rekurzivno prebrojiv za valjanost. Primjeri su FO i L_Q.

Lindströmov drugi teorem nam kaže da ni jedno pravo proširenje logike prvog reda za koje vrijedi Löwenheim-Skolemov teorem ne može imati adekvatan dokazni račun. No, prije nego što krenemo s dokazom Lindströmovog drugog teorema, dokazat ćemo sljedeću lemu koju koristimo u tom dokazu.

Lema 5.5. *Neka je σ neki skup nelogičkih simbola. Ako za neku rečenicu $\psi \in L(\sigma)$ ne postoji σ-rečenica prvog reda sa istim modelima kao i ψ, tada za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoje strukture $\mathfrak{M}_m$ i $\mathfrak{N}_m$ takve da vrijedi:*

$$\mathfrak{M}_m \simeq_m \mathfrak{N}_m, \quad \mathfrak{M}_m \models_{\mathfrak{L}} \psi \quad i \quad \mathfrak{N}_m \models_{\mathfrak{L}} \neg\psi.$$

Dokaz. Neka je $\psi \in L(\sigma)$ takva da ima model, tj. $Mod(\sigma, \mathfrak{L})(\psi) \neq \emptyset$. (Inače, $Mod(\sigma, \mathfrak{L})(\psi) = Mod(\sigma, FO)(\exists x \neg(x = x))$.)

Pretpostavimo suprotno, tj. postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za svake dvije σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ vrijedi:

$$\text{Ako } \mathfrak{M} \simeq_m \mathfrak{N} \text{ tada } (\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \psi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{N} \models_{\mathfrak{L}} \psi). \qquad (1.)$$

Neka su $\varphi_0, ..., \varphi_k$ σ-rečenice prvog reda kojima je kvantifikatorski rang $\leq m$. Tada po teoremu 1.9 imamo:

$$\mathfrak{M} \simeq_m \mathfrak{N} \text{ ako i samo ako za } i = 0, ..., k \text{ vrijedi} \\ \mathfrak{M} \models \varphi_i \text{ ako i samo ako } \mathfrak{N} \models \varphi_i. \tag{2.}$$

Za σ-strukturu $\mathfrak{M}$ neka je $\varphi_{\mathfrak{M}}$ konjunkcija formula iz skupa $\{\varphi_i \mid i = 0, ..., k, \mathfrak{M} \models \varphi_i\}$. Tada po (2.), za proizvoljnu $\mathfrak{N}$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \simeq_m \mathfrak{N} \text{ ako i samo ako } \mathfrak{N} \models \varphi_{\mathfrak{M}}. \tag{3.}$$

Neka je φ disjunkcija $\varphi_{\mathfrak{M}}$ za koje je $\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \psi$, tj.

$$\varphi = \bigvee\{\varphi_{\mathfrak{M}} \mid \mathfrak{M}\ \sigma\text{-struktura},\ \mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \psi\}. \tag{4.}$$

(Uočimo da je to disjunkcija samo konačno mnogo $\varphi_{\mathfrak{M}}$, iako σ-struktura $\mathfrak{M}$ ima beskonačno. Naime, budući da imamo samo konačno mnogo σ-rečenica φ_i, točnije k, možemo imati samo konačno mnogo njihovih kombinacija. Dakle, samo konačno mnogo $\varphi_{\mathfrak{M}}$ su logički neekvivalentne. Stoga je disjunkcija
u (4.) konačna.)

Sada ćemo pokazati da vrijedi:

$$Mod(\sigma, \mathfrak{L})(\psi) = Mod(\sigma, FO)(\varphi) \tag{5.}$$

čime dobivamo kontradikciju s pretpostavkom leme.

Pretpostavimo prvo da je $\mathfrak{N}$ model za ψ. Tada je $\varphi_{\mathfrak{N}}$ član disjunkcije u (4.), te budući da je $\mathfrak{N} \models \varphi_{\mathfrak{N}}$ imamo $\mathfrak{N} \models \varphi$.

Obrat, ako je $\mathfrak{N} \models \varphi$ tada postoji $\mathfrak{M}$ takva da je $\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \psi$ i $\mathfrak{N} \models \varphi_{\mathfrak{M}}$. Tada po (3.) vrijedi $\mathfrak{M} \simeq_m \mathfrak{N}$ te konačno po (1.), $\mathfrak{N} \models_{\mathfrak{L}} \psi$.

Q.E.D.

Sada imamo sve što nam je potrebno da bi iskazali i dokazali drugi Lindströmov teorem.

Teorem 5.6. ***(Lindströmov drugi teorem)***
Neka je $\mathfrak{L}$ neki efektivno regularan logički sustav takav da vrijedi $FO \leq_{eff} \mathfrak{L}$. Ako vrijedi LöSko($\mathfrak{L}$), te je $\mathfrak{L}$ rekurzivno prebrojiv za valjanost, tada je $FO \sim_{eff} \mathfrak{L}$.

Dokaz. Neka je $\mathfrak{L}$ efektivno regularan logički sustav takav da $FO \leq_{eff} \mathfrak{L}$, te neka vrijedi $L\ddot{o}Sko(\mathfrak{L})$ i $\mathfrak{L}$ je rekurzivno prebrojiv za valjanost.

Trebamo dokazati $\mathfrak{L} \leq_{eff} FO$.

To ćemo napraviti u dva koraka.

Prvo pokazujemo:

> Za svaki odlučiv skup nelogičkih simbola σ i za svaku rečenicu $\psi \in L(\sigma)$ postoji σ-rečenica φ prvog reda koja ima iste modele kao i ψ, tj. $Mod(\sigma, \mathfrak{L})(\psi) = Mod(\sigma, FO)(\varphi)$. (+)

Nakon toga ćemo pokazati da se prijelaz od ψ do φ može provesti efektivno:

Za dani odlučiv skup σ, definirat ćemo postupak koji za svaku rečenicu $\psi \in L(\sigma)$ određuje σ-rečenicu prvog reda φ koja ima iste modele kao i ψ.

Budući da je $\mathfrak{L}$ efektivan logički sustav, uvjet (+) je dovoljno pokazati za konačan odlučiv skup σ. Nadalje, ovdje se možemo ograničiti na relacijski skup nelogičkih simbola σ. Naime, ako pretpostavimo da (+) vrijedi za relacijski skup σ, onda za proizvoljan skup nelogičkih simbola imamo sljedeću argumentaciju:

Neka je $\psi \in L(\sigma)$ proizvoljna rečenica. Neka je $\mathfrak{M}$ σ-struktura takva da je $\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \psi$ (inače, $\varphi \equiv \exists x \neg (x = x)$). Budući da je $\mathfrak{L}$ efektivno regularan logički sustav to po svojstvu c) iz definicije efektivno regularnog logičkog sustava imamo da postoji rečenica $\psi^r \in L(\sigma^r)$ (gdje je σ^r relacijski skup nelogičkih simbola dobiven od σ zamjenom svih funkcijskih i konstantskih simbola novim relacijskim simbolima kao u drugom poglavlju) takva da je:

$$\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \psi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^r \models_{\mathfrak{L}} \psi^r.$$

Kako tvrdnja (+) vrijedi za relacijski skup nelogičkih simbola, to imamo da postoji σ^r-rečenica φ^r prvog reda takva da vrijedi:

$$\mathfrak{M}^r \models_{\mathfrak{L}} \psi^r \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^r \models \varphi^r.$$

Nadalje, po teoremu o eliminaciji funkcijskih i konstantskih simbola, teorem 2.14, imamo:

$$\mathfrak{M}^r \models \varphi^r \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \models \varphi.$$

Dakle, imamo: $Mod(\sigma, \mathfrak{L})(\psi) = Mod(\sigma, FO)(\varphi)$.

Time smo dokazali tvrdnju (+) uz pretpostavku da ona vrijedi za relacijski skup nelogičkih simbola.

Stoga možemo pretpostaviti da je σ odlučiv, konačan i relacijski skup nelogičkih simbola. Za takav σ dokazujemo tvrdnju (+).

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji rečenica $\psi \in L(\sigma)$ za koju ne potoji σ-rečenica prvog reda s istim modelima. Tada po lemi 5.5 imamo da za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoje strukture $\mathfrak{M}_m$ i $\mathfrak{N}_m$ takve da vrijedi:

$$\mathfrak{M}_m \simeq_m \mathfrak{N}_m, \quad \mathfrak{M}_m \models_{\mathfrak{L}} \psi \quad \text{i} \quad \mathfrak{N}_m \models_{\mathfrak{L}} \neg\psi.$$

Sada su nam ispunjeni uvjeti leme 4.8 pa za neki konačan skup nelogičkih simbola σ_1 postoji rečenica $\chi_1 \in L(\sigma_1)$ koja opisuje klasu konačnih uređaja, kako je to opisano u lemi 4.8.

Proširujemo σ_1 dodavanjem novog jednomjesnog relacijskog simbola W i promatramo $L(\sigma_1 \cup \{W\})$-rečenicu:

$$\vartheta \equiv \chi_1 \wedge \exists x W(x) \wedge \forall x (W(x) \to x < c).$$

Po svojstvima χ_1 (iz leme 4.8) imamo:

(a) Ako je $\mathfrak{M}$ neka $\sigma_1 \cup \{W\}$-struktura takva da je $\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \vartheta$ tada je $W^{\mathfrak{M}}$ konačan i neprazan.

(b) Za svaki $m \geq 1$ postoji model $\mathfrak{M}$ za ϑ takav da $W^{\mathfrak{M}}$ sadrži točno m elemenata.

Stoga, dok $\mathfrak{M}$ ide po modelima od ϑ, $W^{\mathfrak{M}}$ ide po konačnim skupovima (svojstvo izomorfizma). Sada ćemo koristeći (a) i (b) zajedno s Trakhtenbrotovim teoremom pokazati da $\mathfrak{L}$ nije rekurzivno prebrojiv što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema.

Po Trakhtenbrotovom teoremu postoji odlučiv skup simbola σ_2 takav da skup svih konačno-valjanih formula nije rekurzivno prebrojiv. Možemo pretpostaviti da je σ_2 relacijski i disjunktan s $\sigma_1 \cup \{W\}$.

Neka je $*$ izračunljiva funkcija koja svakoj σ_2-rečenici prvog reda φ pridružuje rečenicu $\varphi^* \in L(\sigma_2)$ koja ima iste modele (takva funkcija postoji jer po pretpostavci teorema vrijedi $FO \leq_{eff} \mathfrak{L}$).

Tvrdimo da za neku σ_2-rečenicu φ logike prvog reda vrijedi:

$$\varphi \text{ je konačno-valjana ako i samo ako } \models_{\mathfrak{L}} \vartheta \to (\varphi^*)^W. \qquad (\circ)$$

Da bi dokazali $(\circ)$, pretpostavimo prvo da je φ istinita u svim konačnim strukturama. Ako je $\mathfrak{M}$ $(\sigma_1 \cup \{W\} \cup \sigma_2)$-struktura takva da vrijedi $\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} \vartheta$ tada je $W^{\mathfrak{M}}$ konačna po (a) i stoga $[W^{\mathfrak{M}}]^{\mathfrak{M}\restriction\sigma_2} \models_{\mathfrak{L}} \varphi^*$ te po lemi o relativizaciji, tj. lemi 2.21, je $\mathfrak{M} \models_{\mathfrak{L}} (\varphi^*)^W$.

Obrat dobijemo slično koristeći (b).

Ekvivalencija u $(\circ)$ nam omogućuje da od rekurzivno prebrojivog postupka $\mathfrak{B}$ za skup valjanih $L(\sigma_1 \cup \{W\} \cup \sigma_2)$-rečenica (koji postoji jer je po pretpostavci teorema $\mathfrak{L}$ rekurzivno prebrojiv za valjanost) dobijemo rekurzivno prebrojiv postupak $\mathfrak{Q}$ za konačno-valjane σ_2-rečenice prvog reda, što dovodi do kontradikcije s Trakhtenbrotovim teoremom.

Postupak $\mathfrak{Q}$ dobijemo na sljedeći način za $n = 1, 2, 3, ...$:

pretpostavimo da su prvih (leksikografski) n rečenica $\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}$ iz $L(\sigma_2)$ generirane i $L(\sigma_1 \cup \{W\} \cup \sigma_2)$-rečenice $\vartheta \to (\varphi_i^*)^W$, za $i = 0, ..., n-1$, su formirane. (Prisjetimo se da je preslikavanje $*$ izračunljivo te da su operacije relativizacije i implikacije efektivne.) Stoga, koristeći $\mathfrak{B}$, generiramo prvih n valjanih $L(\sigma_1 \cup \{W\} \cup \sigma_2)$-rečenica, te zapisujemo φ_i za koje se $\vartheta \to (\varphi_i^*)^W$ pojavljuje. Ovim završavamo dokaz za $(+)$.

Sada, za odlučiv skup σ, opisujemo efektivan postupak koji svakoj rečenici $\psi \in L(\sigma)$ pridružuje rečenicu prvog reda φ s istim modelima.

Neka je $\mathfrak{B}$ rekurzivno prebrojiv postupak za skup valjanih $L(\sigma)$-rečenica i $*$ izračunljiva funkcija koja svakoj σ-rečenici prvog reda χ pridružuje $L(\sigma)$-rečenicu χ^* za istim modelima ($*$ postoji jer je $FO \leq_{eff} \mathfrak{L}$). Za danu $\psi \in L(\sigma)$ imamo sljedeće:

za $n = 1, 2, 3, ...$ koristimo $\mathfrak{B}$ da bi generirali prvih n valjanih rečenica $\psi_0, ..., \psi_{n-1}$ iz $L(\sigma)$, zatim generiramo prvih (leksikografski) n rečenica $\varphi_0, ...,$ φ_{n-1} iz FO, te konačno formuliramo $L(\sigma)$-rečenice $\psi \leftrightarrow \varphi_0^*, ..., \psi \leftrightarrow \varphi_{n-1}^*$.

Postavlja se pitanje postoje li i, j takvi da je $\psi_i \equiv \psi \leftrightarrow \varphi_j^*$. Po $(+)$ slijedi da se ovo u nekom trenutku mora dogoditi. Tada stavimo da je φ_j upravo φ pridružen ψ.

Q.E.D.

6 Zaključak

Lindströmovi rezultati potaknuli su niz istraživanja svojstava logičkih sustava i veza među njima u općenitom okružju. Na ovaj način bilo je moguće staviti značajne aspekte tih svojstava u bolji uvid, te time dobiti novi pogled na konkretne logičke sustave pa čak i na logiku prvog reda. Dokaze Lindströmovih teorema možete pronaći i u [1], [6] te [8].

Nova disciplina u matematičkoj logici, čiji su početak upravo Lindströmovi teoremi, naziva se *apstraktna teorija modela*. Ona se bavi proučavanjem različitih logičkih sustava i njihovih svojstava na apstraktnom nivou. Jedan od ciljeva apstraktne teorije modela je razviti klasifikaciju logičkih sustava na temelju njihovih najvažnijih svojstava, a to zahtjeva jako dobro razumjevanje odnosa među tim svojstvima. Više o tome možete pronaći u [1].

U posljednje vrijeme intenzivirana su istraživanja vezana uz Lindströmove teoreme za fragmente logike prvog reda. Primjerice, Lindströmovi teoremi za fragment logike prvog reda s konačno mnogo varijabli dokazani su u [3], zatim Lindströmovi teoremi za modalnu logiku razmatraju se u [3] i [10].

A Dodatak

Budući da je ovaj diplomski rad posvećen upravo Lindströmovom rezultatu, a Per Lindström je umro prošle godine, odlučili smo ovdje navesti Lindströmovu biografiju. To je zapravo prijevod memoriama iz Newsletter of ASL.

Per (Pelle) Lindström, švedski logičar, umro je u Gothenburgu, Švedska, 21. kolovoza 2009. godine, nakon kratke bolesti. Rodio se 9. travnja 1936. godine. Većinu svoga akademskog života proveo je na Odjelu za filozofiju, Sveučilišta u Gothenburgu, gdje je radio najprije kao predavač ('docent') i, od 1991. do umirovljenja 2001., kao profesor logike.

Lindström je najpoznatiji po svom radu u teoriji modela. 1964. godine napravio je svoj prvi veliki doprinos, tzv. Lindströmov test za potpunost modela (Chang & Keiser, *Model Theory*, 3. izdanje, teorem 3.5.8: ako prebrojiv skup rečenica prvog reda ima samo beskonačne modele, kategorički je na neku beskonačnu potenciju te je takav da je skup njegovih modela zatvoren na unije lanaca, tada je on modelno potpun.)

Godine 1966. dokazao je da nije moguće definirati dobar uređaj u $L_{\omega_1\omega}$ (što je neovisno i općenitije dobio i Lopez-Escobar), jedan rani primjer upotrebe teorije rekurzija da bi se dobili rezultati u teoriji modela. Iste godine uveo je i koncept Lindströmovog kvantifikatora, koji je sad postao standardan u teoriji modela, teoriji računalne znanosti te formalnoj semantici. Taj rad također sadrži i karakterizaciju elementarne logike među logikama sa generaliziranim kvantifikatorima, generalizirajući time rezultate Mostowskog. Dokaz koristi Lindströmovu verziju onoga što je danas poznato kao Ehrenfeucht-Fraisseove (EF) igre, koncept do kojeg je on došao neovisno.

Jedan drugi rad iz 1966. godine („O relacijama među strukturama") daje moćnu i jako općenitu formulaciju teorema o očuvanju/interpolaciji, ponovno na temelju EF igara. Ovi rezultati su objavljeni u švedskom filozofskom časopisu *Theoria* i pisani su jako sažeto, zbog čega ih većina logičara neko vrijeme nije uočila.

U svom radu iz 1969. godine, „O proširenju elementarne logike" (objavljenom također u *Theoriji*), predstavio je svoju poznatu karakterizaciju logike prvog reda — Lindströmov teorem — u terminima svojstava poput kompaktnosti, potpunosti i Löwenheim-Skolenovih svojstava, što je odmah prepoznato kao značajan doprinos logici. To je dovelo do osnivanja onoga što je postalo poznato kao apstraktna teorija modela (Barwise & Feferman, *Model-Theoretic Logics*, 1985.). Dokaz se temeljio na EF igrama i na novom dokazu interpolacije. U kasnijim radovima slijedilo je nekoliko drugih karakterizacija logike prvog reda.

Krajem 1970-tih, Lindström okreće svoju pozornost proučavanju formalne aritmetike i interpretabilnosti. Započeo je uistinu sistematičnu istragu ovih tema, što je bilo donekle uspavano područje od Fefermanovog pionirskog doprinosa u kasnim 1950-tim. Pritom je uveo nove, tehnički napredne alate, na primjer tzv. Lindströmovu konstrukciju fiksne točke, dalekosežnu primjenu Gödelove dijagonalizacijske leme da bi definirao aritmetičke formule sa specifičnim svojstvima. Njegov pristup interpretabilnosti temeljio se na studiji o srodnim mrežama, poput mreže interpretabilnih tipova preko fiksnog proširenja Peanove Aritmetike (PA), ili mreže σ_n- ili Π_n-rečenica nad PA, za neki fiksni n, te je utvrdio mnogo zanimljivih strukturalnih svojstava.

Ostali značajni rezultati uključuju Lindström-Solovljev teorem da relacija interpretabilnosti između rečenica nad PA je Π_2^0-potpuna i karakterizaciju vjerne interpretabilnosti nad PA kao kombinaciju Π_1- i σ_1-konzervativnosti.

U 1990-ima također je doprinio području logike dokazivosti: dao je pojednostavljeni dokaz de Jongh-Sambinovog teorema o fiksnoj točki te karakterizirao bimodalnu logiku PA i PA proširio pravilom refleksije: zaključiti rečenicu φ iz „φ je dokaziva".

Pelle Lindström je imao osobito jasan i jezgrovit stil u pisanju matematičke logike. Njegova knjiga iz 1997. godine, *Aspects of Incompleteness*, ostaje savršen primjer toga: ona daje sistematičan uvod u njegov rad u aritmetici i interpretabilnoti. Knjiga je kratka, ali bogata materijalom; također sadrži neke rezultate koji se ne mogu naći u člancim iz časopisa, poput njegovog rješenja jednog od 102 problema koja je zadao Harvy Friedman.

Kroz svoj život Pelle Lindström također se aktivno zanimao za filozofiju. Sudjelovao je u debati o Roger Penroseovoj novoj verziji tvrdnje da Gödelov teorem nepotpunosti pokazuje da ljudski um nije mehanički. Predstavio je svoju vlastitu filozofiju matematike, koju je zvao „kvazi-realizam", u članku u *The Monistu* 2000. godine. Temelji se na ideji da su dijelovi matematike koje možemo vizualizirati nesumnjivi (te da ih klasična logika potvrđuje). U pojmove koje možemo vizualizirati ubrajao je ne samo ω-nizove prirodnih brojeva, nego i proizvoljne skupove brojeva, kasnije vizualizirane kao grane u beskonačnom binarnom stablu, dok, primjerice, ništa slično ne možemo reći za skupove skupova brojeva. Nadalje, napravio je kroz godine brojne doprinose švedskom filozofskom časopisu *Filosofisk Tidskrift* — od kojih je jedan objavljen nakon njegove smrti — na različite teme poput slobode volje, problema um-tijelo, utilitarizma te kontračinjenica.

Pelle Lindström će u logičkom društvu ostati zapamćen kao veliki logičar, a od svoje obitelji, prijatelja i suradnika kao izniman čovjek.

Literatura

[1] J. BARWISE, S. FEFERMAN, *Model-Theoretic Logics*, Springer-Verlag 1985.

[2] J. van BENTHEM, *A New Modal Lindström Theorem, Logica Universalis*, 1:125-148, 2007.

[3] J. van BENTHEM, B. ten CATE, J. VÄÄNÄNEN, *Lindström theorems for fragments of first-order logic, Logical Methods in Computer Science 5*, 1-27, 2009.

[4] G.S. BOOLOS, J.P. BURGESS, R.C. JEFFREY, *Computability and logic*, Cambridge 2007.

[5] C.C. CHANG, H.J. KEISLER, *Model Theory*, North-Holland 1990.

[6] H.-D. EBBINGHAUS, J. FLUM, W. THOMAS, *Mathematical logic*, Springer-Verlag 1984.

[7] D. FERBERUŠ, *Lindströmov prvi teorem*, diplomski rad, PMF-MO, Zagreb 1999.

[8] S. HEDMAN, *A First Course in Logic*, Oxford University Press, 2008.

[9] P.G. HINMAN, *Fundamentals of Mathematical Logic*, A. K. Peters, 2005.

[10] M. de RIJKE, *A Lindström theorem for modal logic*, u A. Ponse, M. de Rijke, Y. Venema, urednici, *Modal Logic and Process Algebra: A Bisimulation Perspective*, str. 217-230, CSLI Publications, 1995.

[11] M. VUKOVIĆ, *Izračunljivost*, skripta, PMF-MO, Zagreb 2007.