



Mineralogija

Sveučilišni prijediplomski studij Znanosti o okolišu – 1. godina (253566)

Doc. dr. sc. Petra Schneider

akad. god.: 2024./25.

Sadržaj

- Sferna projekcija
- Gnomonska projekcija
- Stereografska projekcija
- Indeksiranje ploha
- Weissovi parametri
- Millerovi indeksi
- Zonski račun



! 1. kristalografski zakon (zakon o stalnosti kutova):

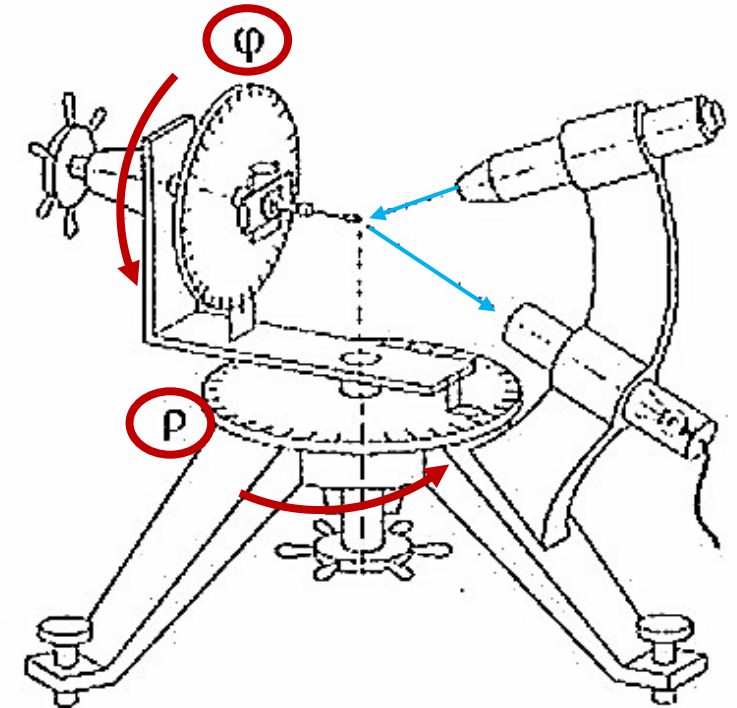
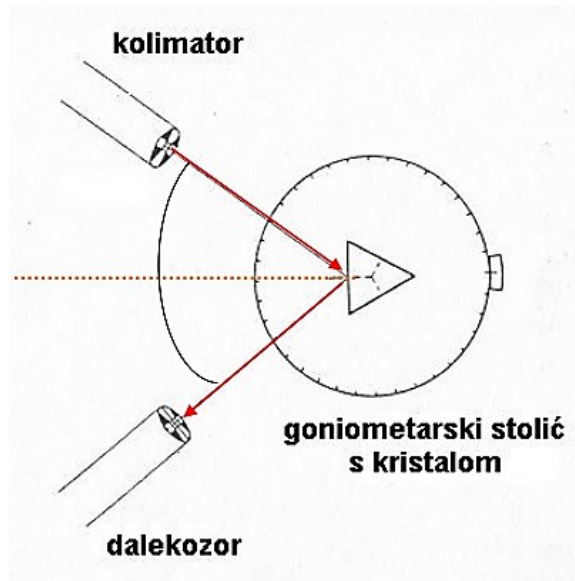
U različitim uzorcima istog minerala, kutovi između odgovarajućih ploha su isti pri konstantnoj temperaturi i tlaku.

! Kutovi među plohami karakteriziraju kristal.

- mogu definirati simetriju
- mogu se koristiti pri identifikaciji minerala

dvokružni refleksi gonimetar

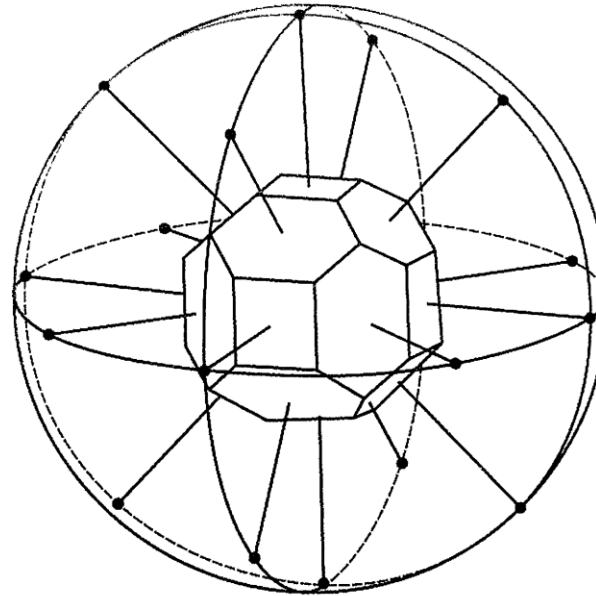
- prostorni raspored normala na plohe
- dva kuta: **azimut (ϕ)** i **polarna udaljenost (ρ)**



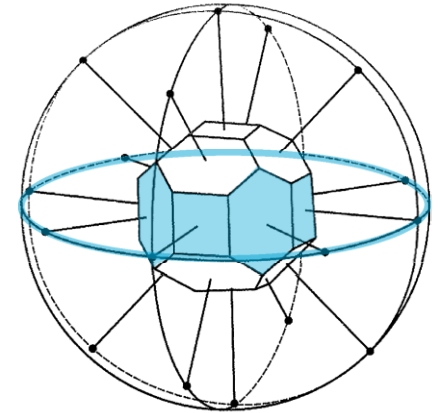
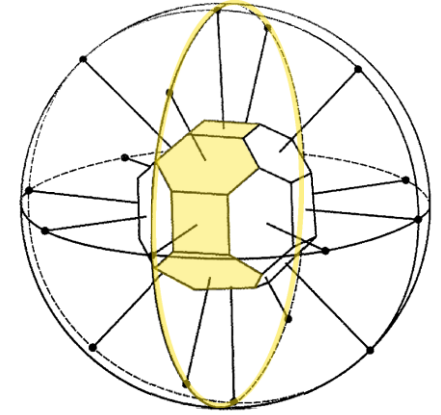
Sferna projekcija

= projekcija kristala na površinu sfere:

1. kristal se smješta u središte sfere
2. provlače se normale (okomice) na svaku od ploha kristala
3. točke (**polovi**) u kojima normale probadaju sferu predstavljaju **sferne projekcije ploha** kristala



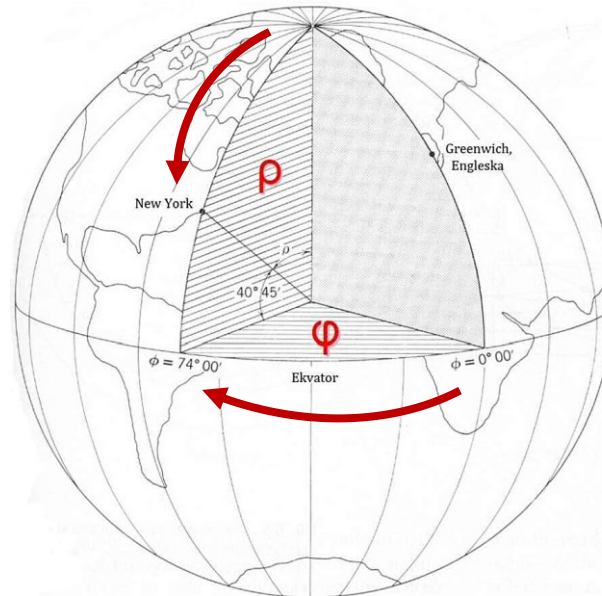
Preuzeto iz Slovenec (2011)



→ polovi definirani s dva kuta:

azimut (ϕ)

polarna udaljenost (ρ)



! Polovi koji leže na **istom velikom krugu** pripadaju plohama iz **iste zone**.

- presjecišta zonskih ravnina i površine kugle
- projekcije zonskih ravnina na površini kugle

Gnomonska projekcija

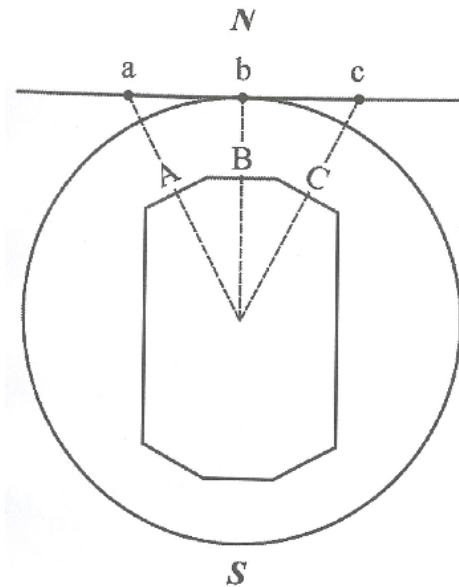
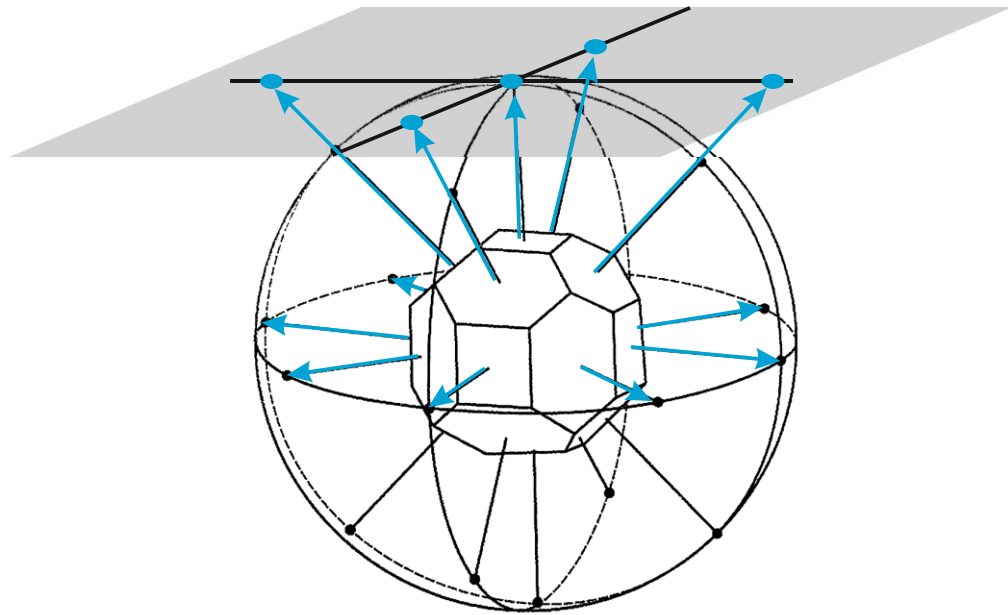
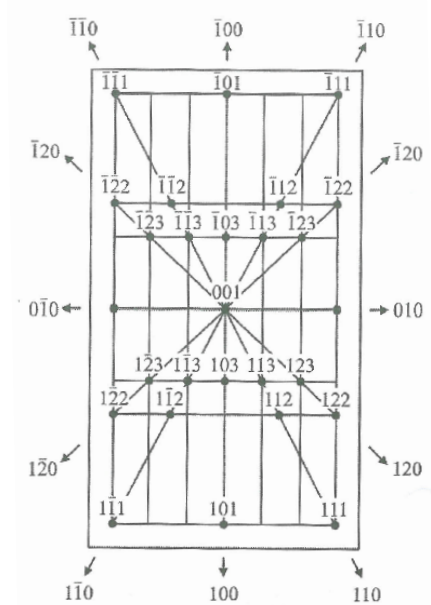
= projekcija kristala na ravninu koja tangira sferu u sjevernom polu:

1. Iz središta kristala povlače se okomice na plohe kristala
2. točke u kojima normale probadaju tangentnu ravninu predstavljaju **gnomonske projekcije ploha**

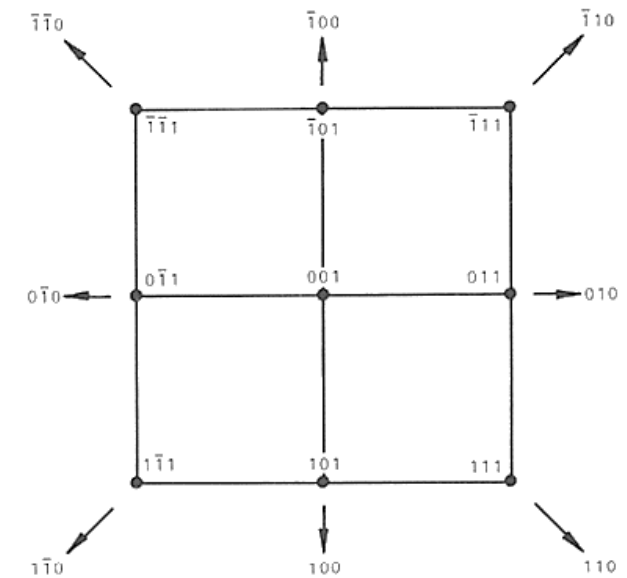
! zone = ravne linije

Upotreba: direktno očitavanje indeksa ploha

Mana: ne mogu se očitavati kutovi među plohami



središnji presjek na sferu



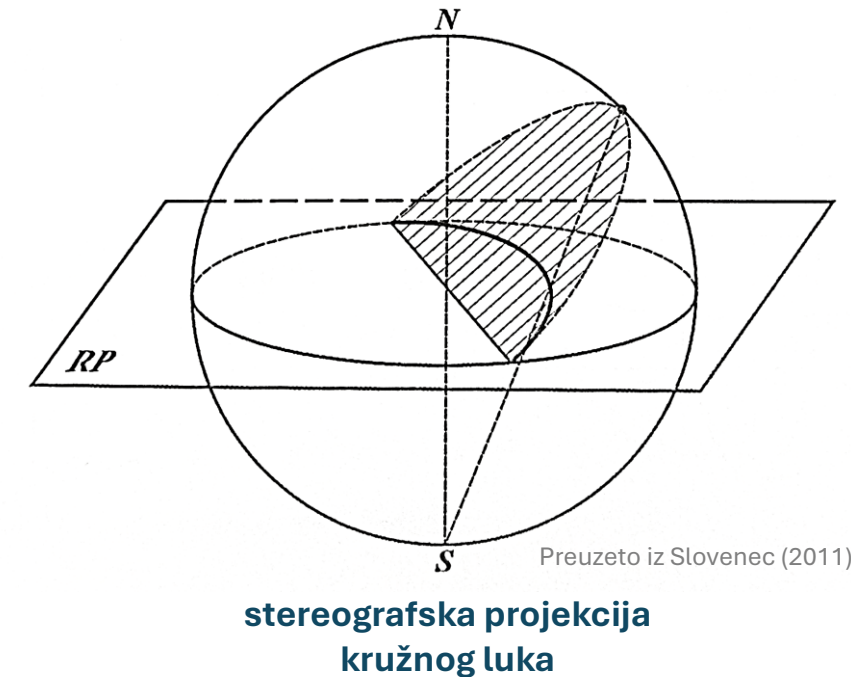
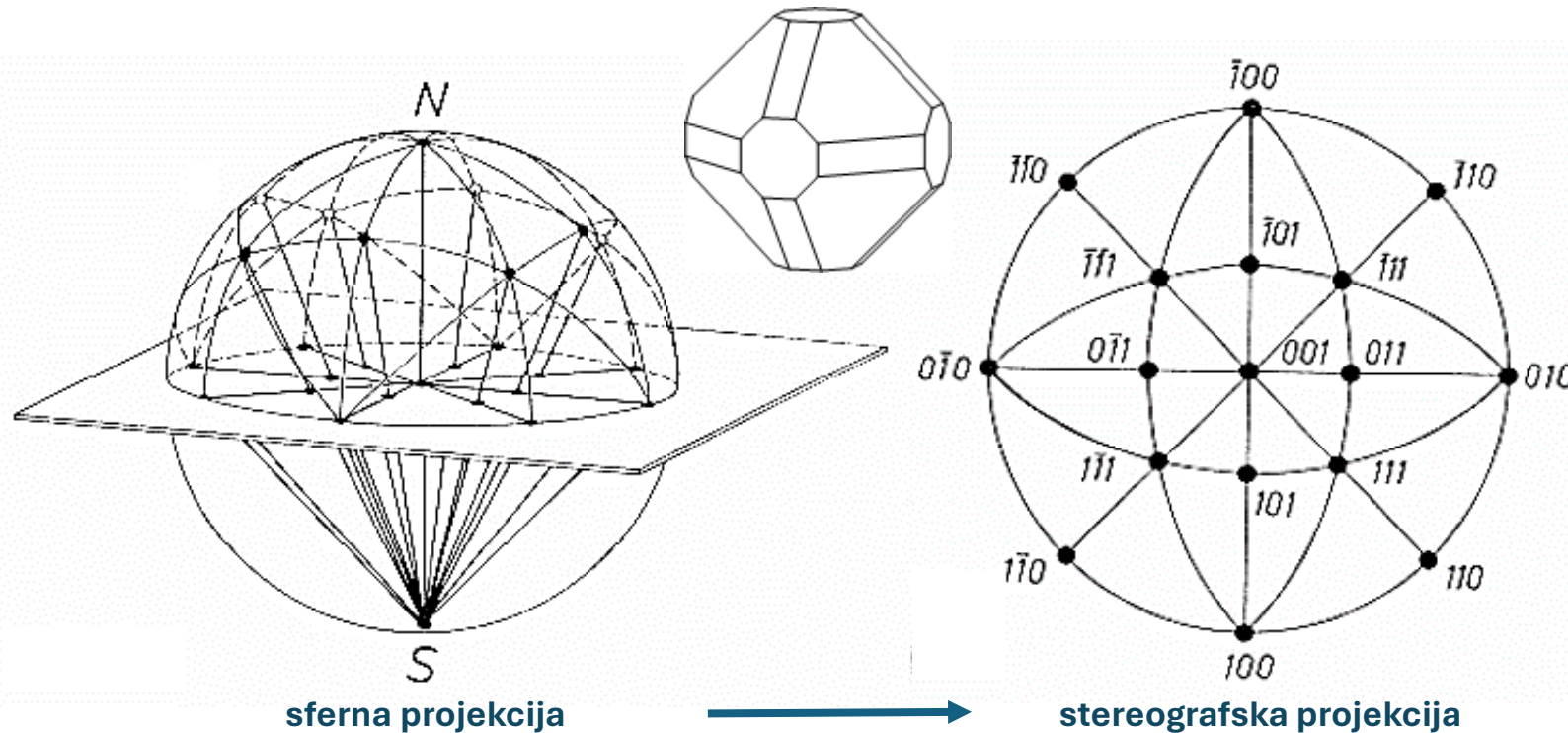
gnomonska projekcija

Stereografska projekcija

= projekcija kristala na ekvatorijalnu ravninu sfere*:

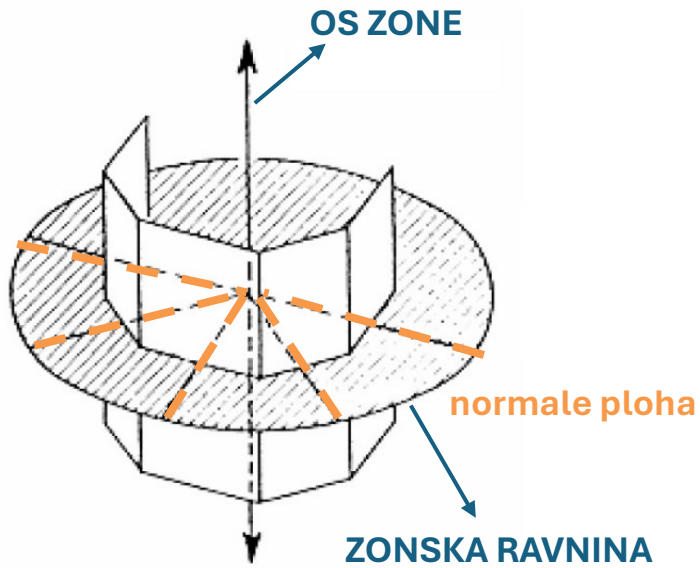
Ekvatorijalna kružnica = osnovna kružnica stereografske projekcije

1. polovi sferne projekcija spajaju se sa suprotnim polom sfere
2. točke u kojima spojnice probadaju ekvatorijalnu ravninu predstavljaju **stereografske projekcije ploha**

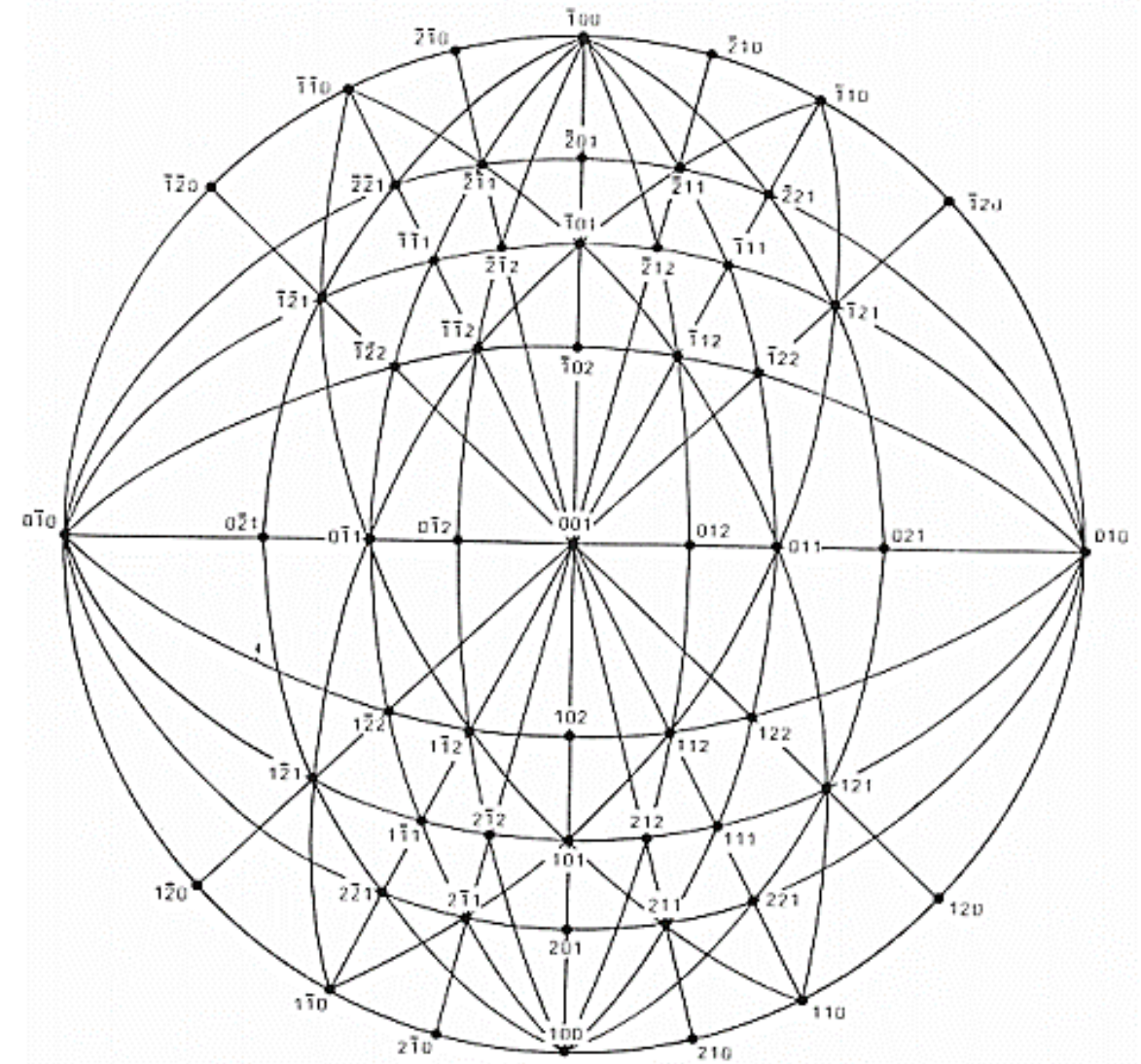
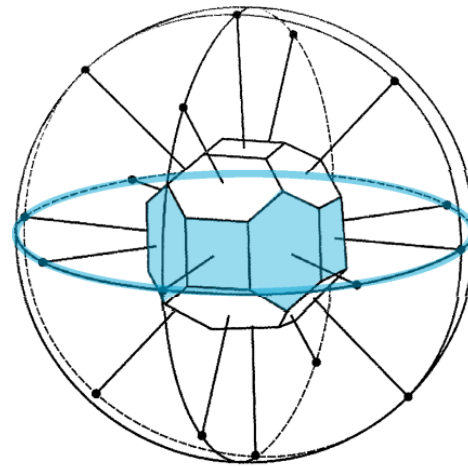
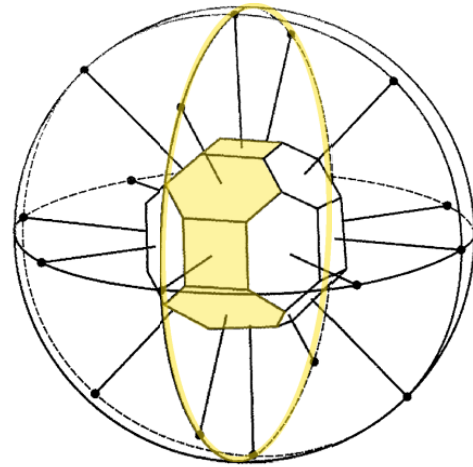


*u pravilu promatramo stereografske projekcije samo gornje polovice kristala

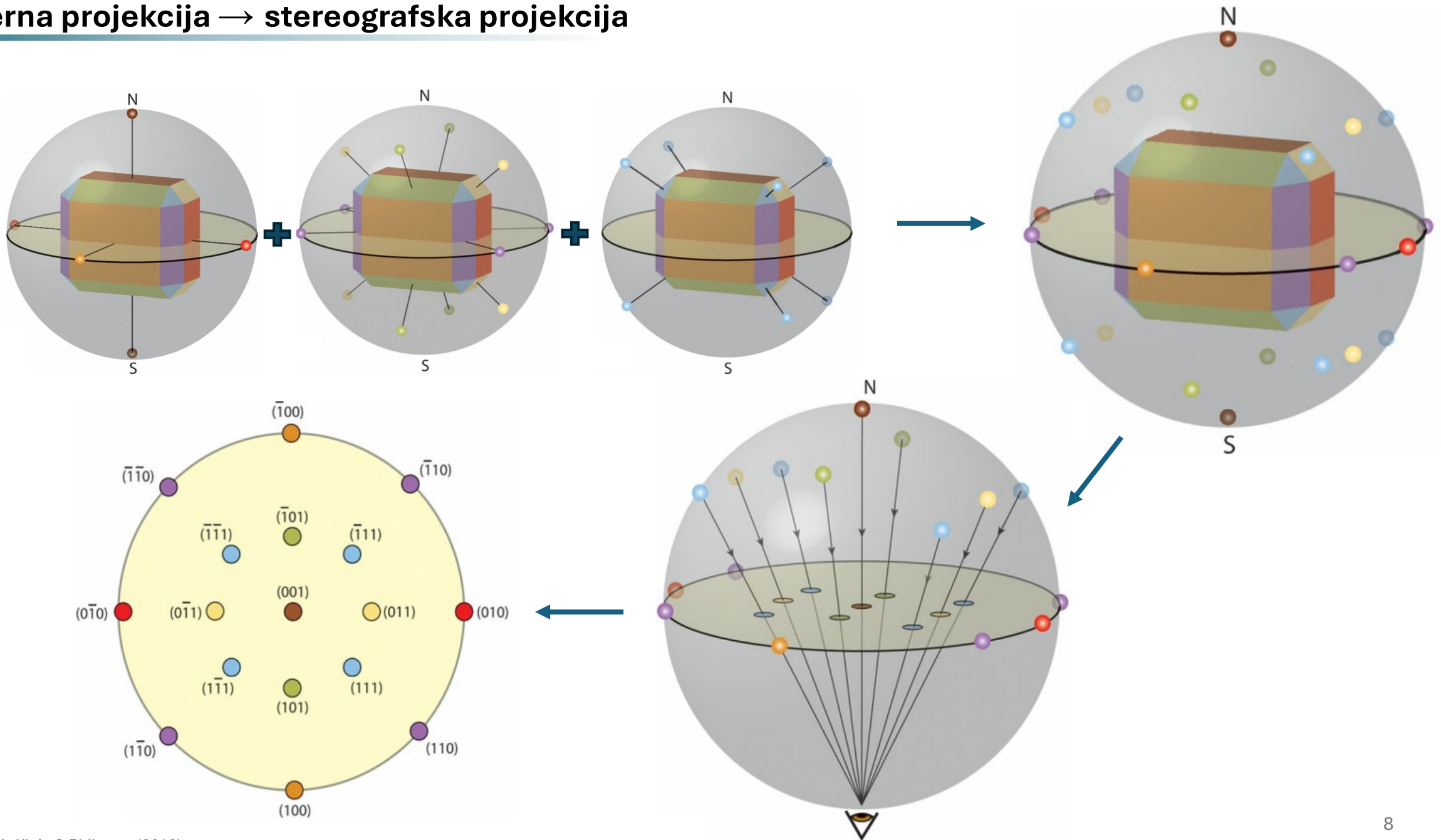
Stereografska projekcija



projekcija zona
=
projekcija zonske ravnine

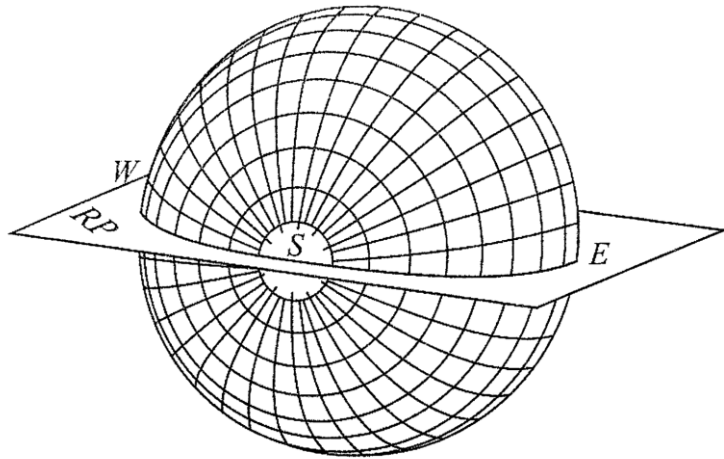


Sferna projekcija → stereografska projekcija

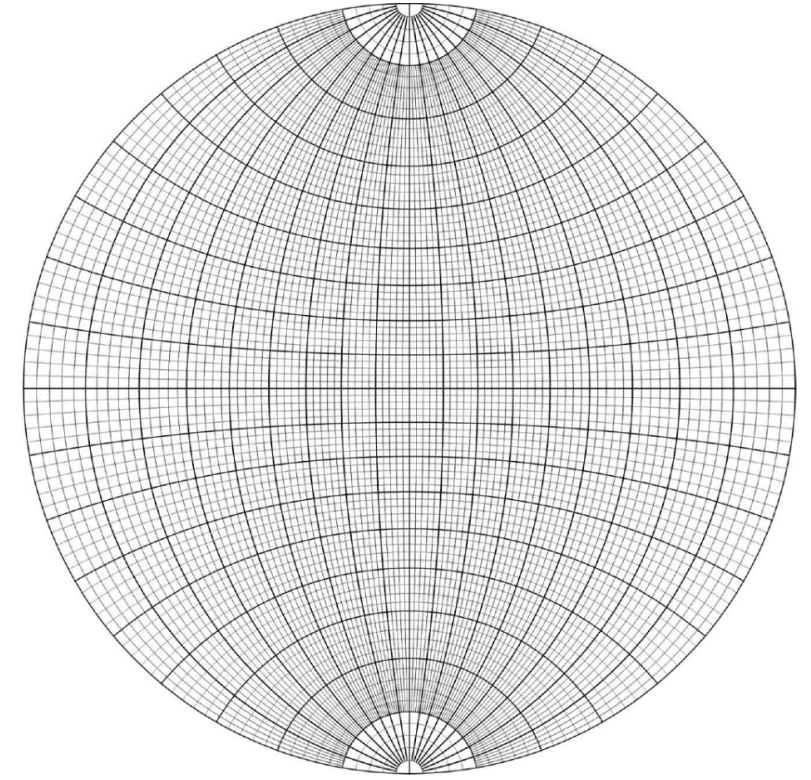
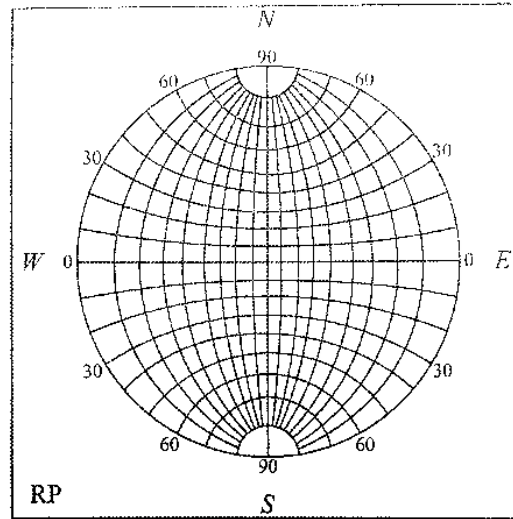


Stereografska projekcija - crtanje

Wulfova mreža = stereografska projekcija meridijana i paralela sa sfere (sfera orijentirana tako da pravac „sjever-jug” leži u ravnini projekcije)



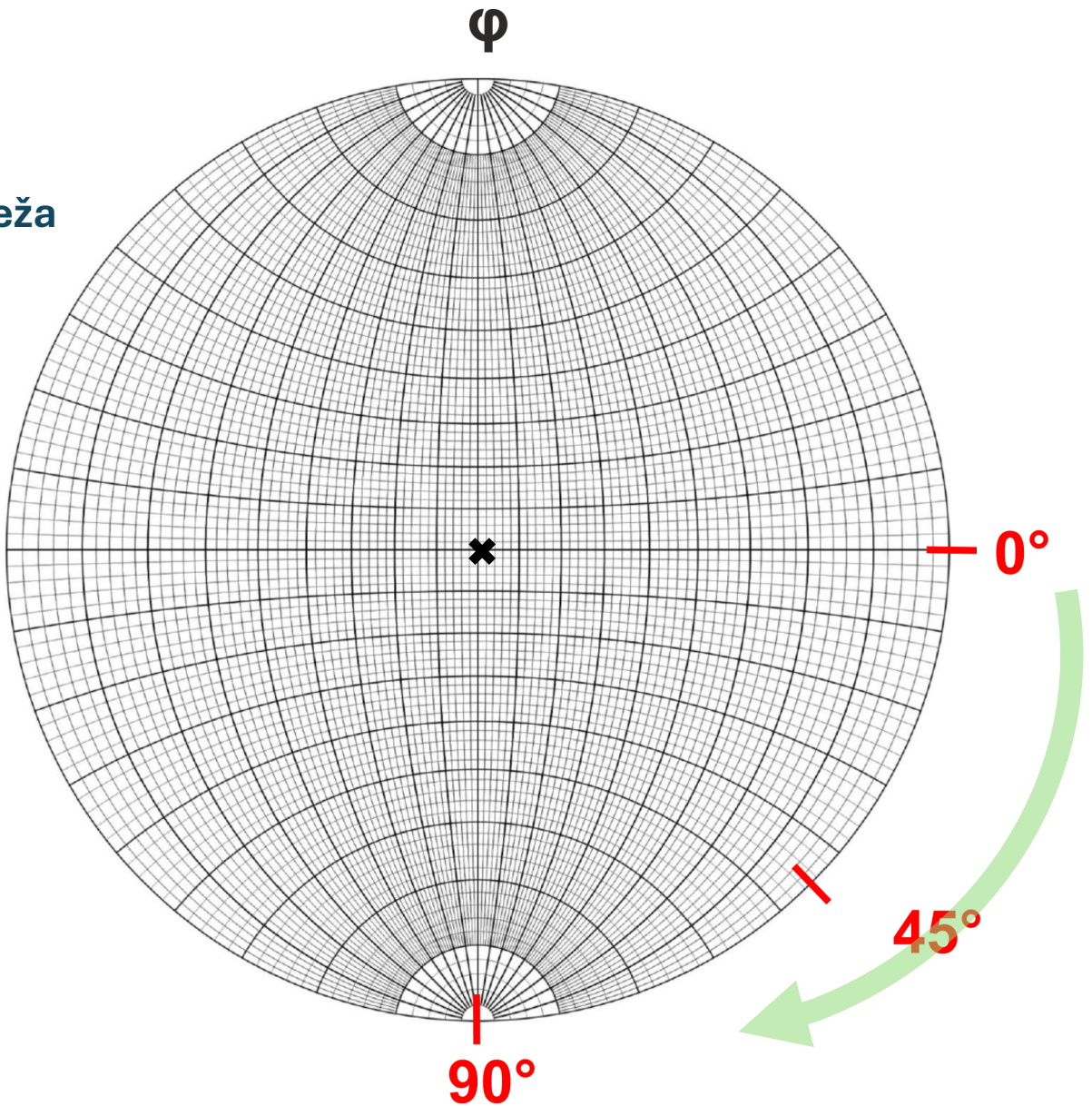
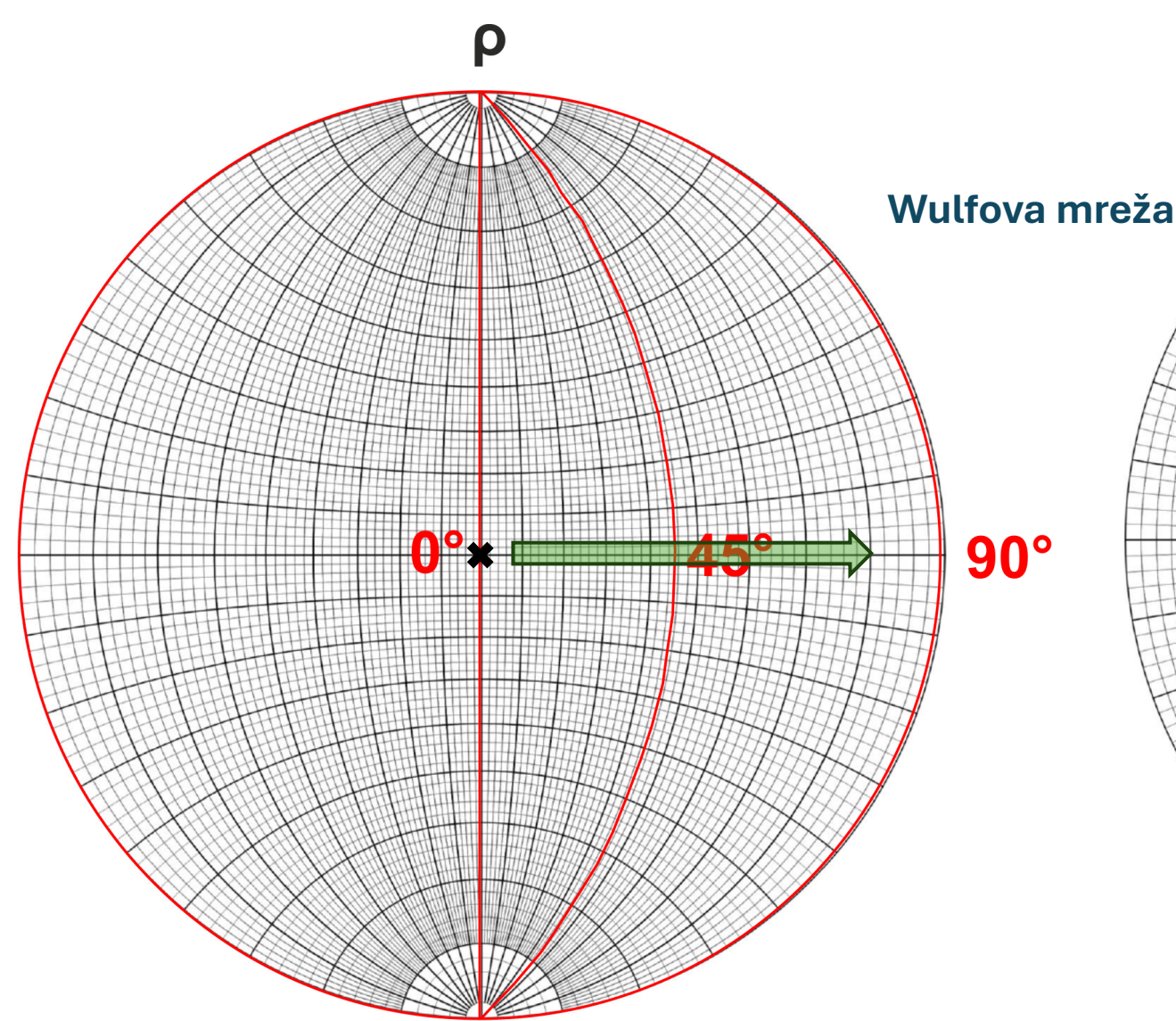
Preuzeto iz Slovenec (2011)



Upotreba:

- crtanje stereografske projekcije na temelju poznatih sfernih koordinata
- očitavanje približnih sfernih kordinata iz stereografske projekcije
- očitavanje kuta između dvije plohe
- iscrtavanje zone, odnosno zonske ravnine, u kojoj leže dvije plohe
- projiciranje kristala u nestandardnoj orijentaciji, odnosno za njegovo rotiranje

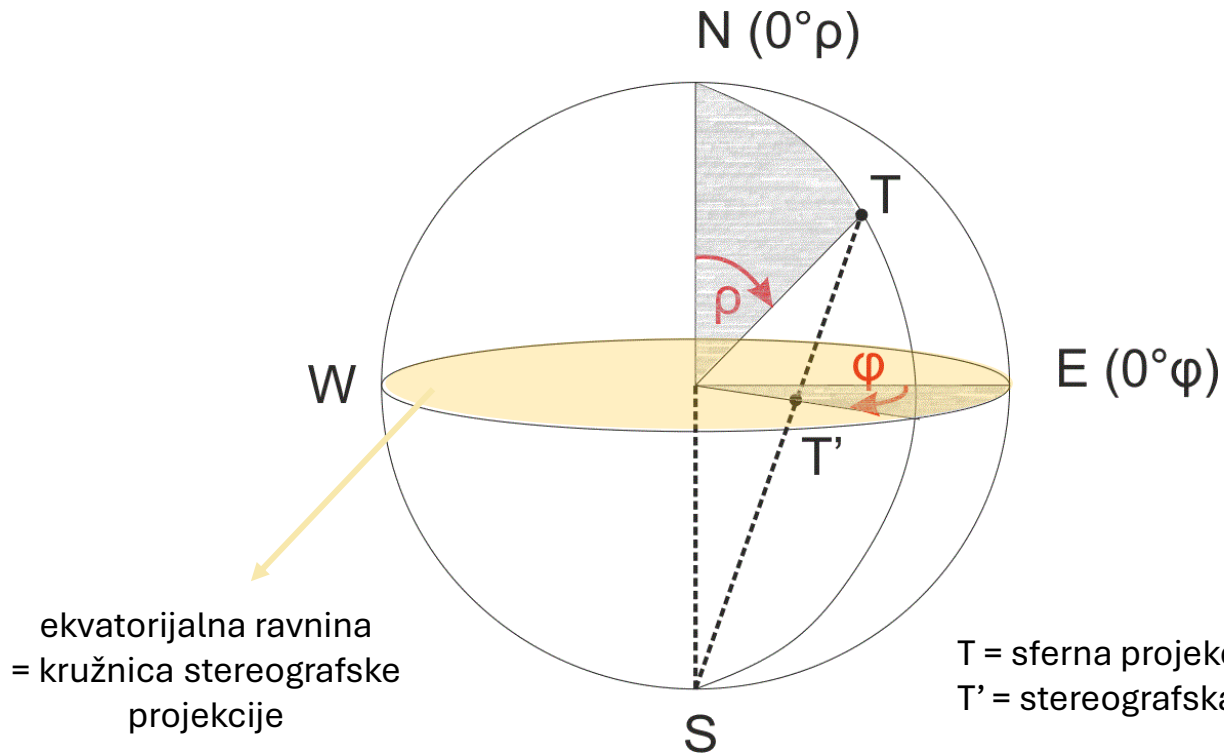
Stereografska projekcija - crtanje



Stereografska projekcija - crtanje

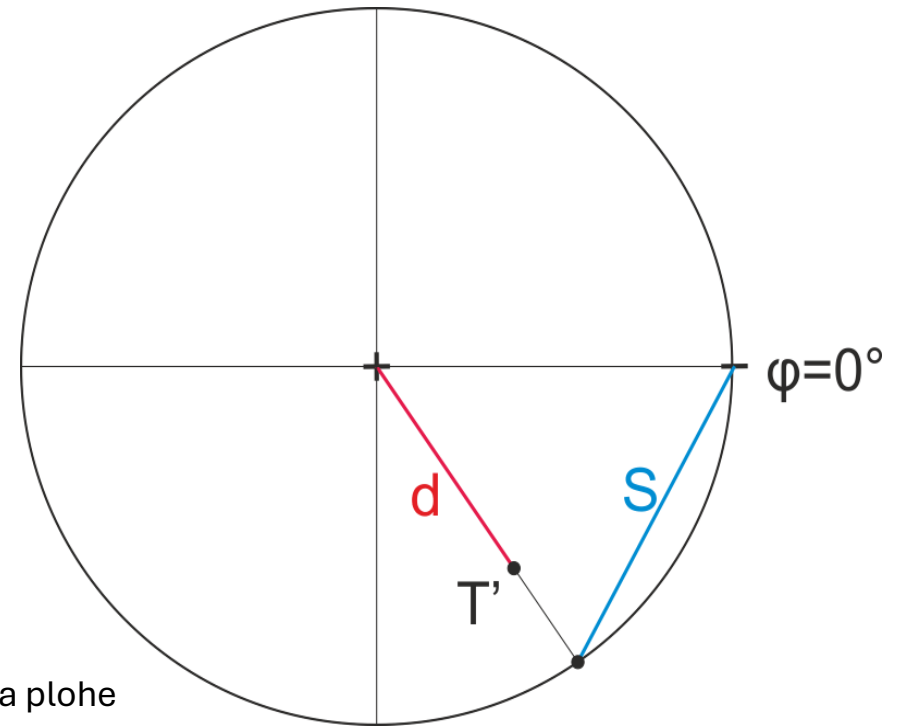
d = udaljenost projicirane točke od središta projekcije

S = duljina tetive koja povezuje točku u kojoj početni meridijan siječe osnovnu kružnicu s točkom u kojoj osnovnu kružnicu siječe meridijan u kojem leži pol projicirane plohe



3D prikaz sfere

T = sferna projekcija plohe
 T' = stereografska projekcija plohe



projekcija na ekvatorijalnu ravninu

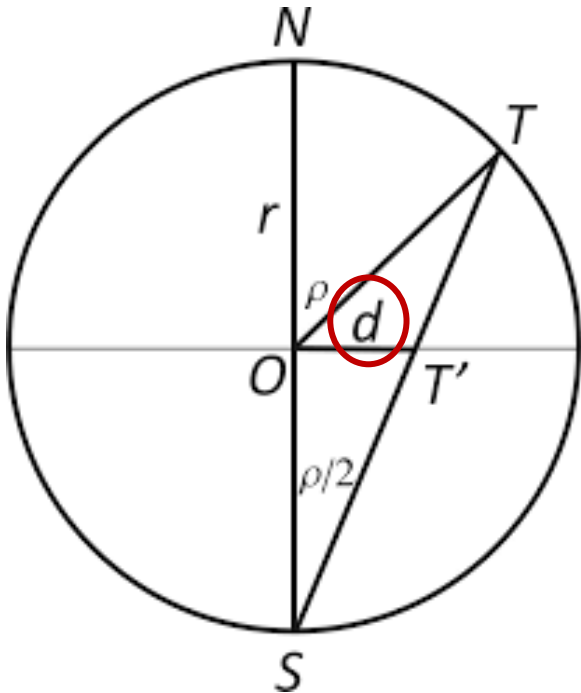
Stereografska projekcija - crtanje

- Poučak o obodnom i središnjem kutu

$$\angle T'SO = \angle TSN = \frac{1}{2} \angle TON$$

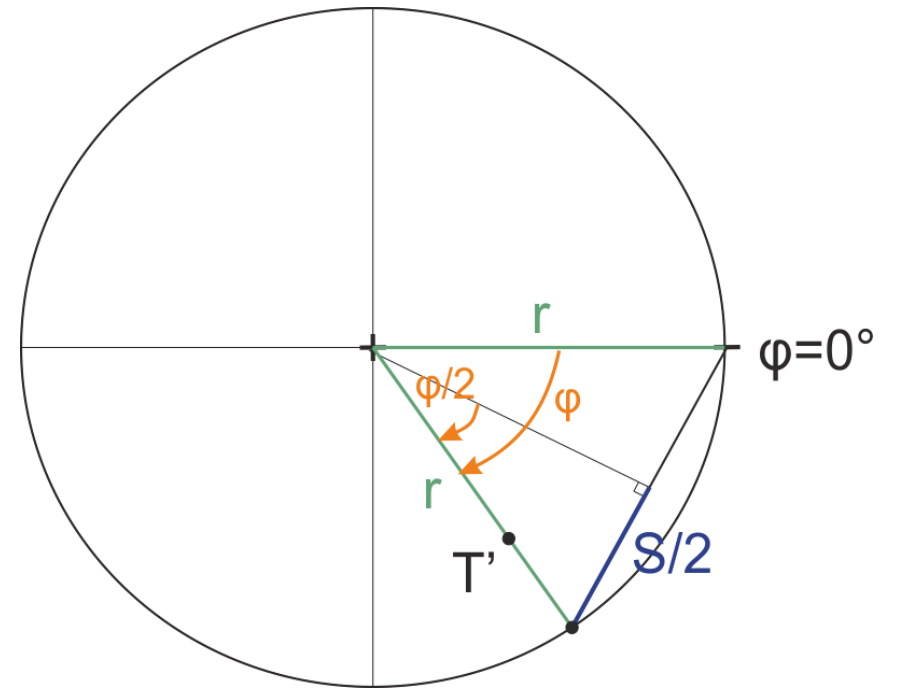
- Tangens u pravokutnom trokutu

$$\operatorname{tg} \rho/2 = \frac{d}{r} \Leftrightarrow d = r \cdot \operatorname{tg} \rho/2$$



- Sinus u pravokutnom trokutu

$$\sin \phi/2 = \frac{S/2}{r} \Leftrightarrow \sin \phi/2 = \frac{S}{2r} \Leftrightarrow S = 2r \cdot \sin \phi/2$$



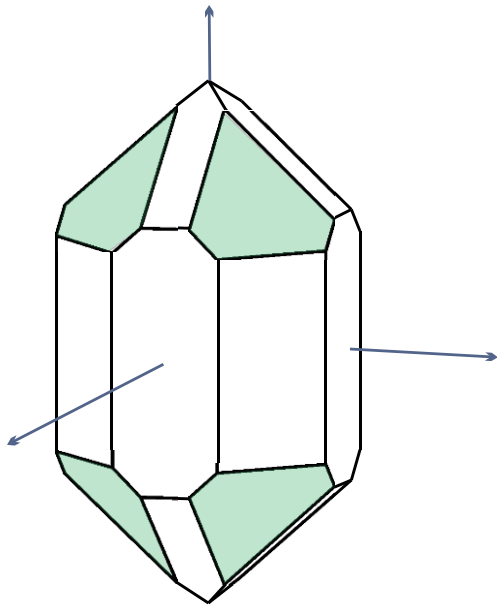
Stereografska projekcija - crtanje

Element simetrije	Oznaka	Grafički simbol
Centar simetrije	$C, \bar{1}$	○
Ravnina simetrije	P, m	—
Digira	$L^2, 2$	◡
Trigira	$L^3, 2$	△
Tetragira	$L^4, 2$	□
Heksagira	$L^6, 2$	⬡
Rotoinverzna tetragira	$L_{(4)}^2, 2$	◻
Zona	-	- - - - -

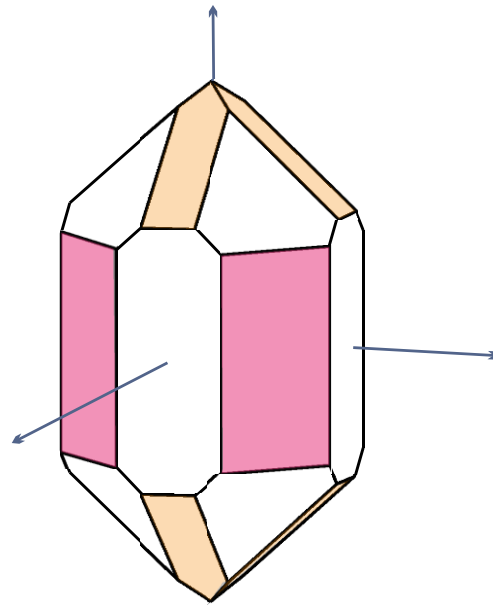
Indeksiranje ploha

- Položaj plohe prema kristalografskim osima:
 - a) presijeca sve tri osi
 - b) presijeca dvije osi i s jednom je paralelna
 - c) presijeca jednu os i s dvije je paralelna

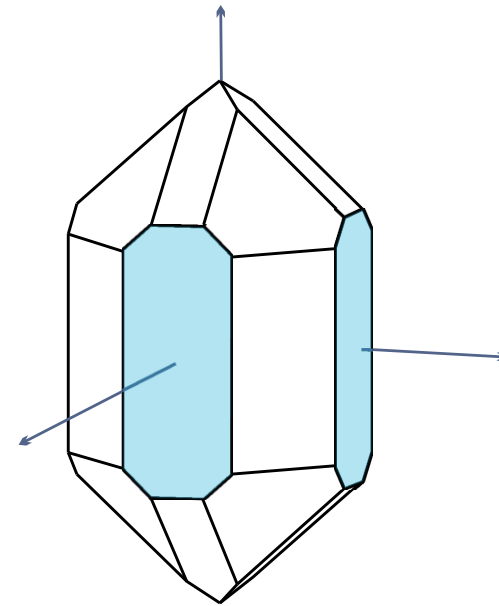
? U kojim relativnim udaljenostima ploha sječe određenu kristalografsku os?



(a)



(b)



(c)

Indeksiranje ploha

JEDINIČNA PLOHA = ploha koja sve tri osi siječe u jediničnim odsječcima

→ obično se odabire najveća ploha koja siječe sve tri osi

→ **definira jedinicu mjere po osima**

! Jedinice moraju biti u skladu s dimenzijama jedinične ćelije.

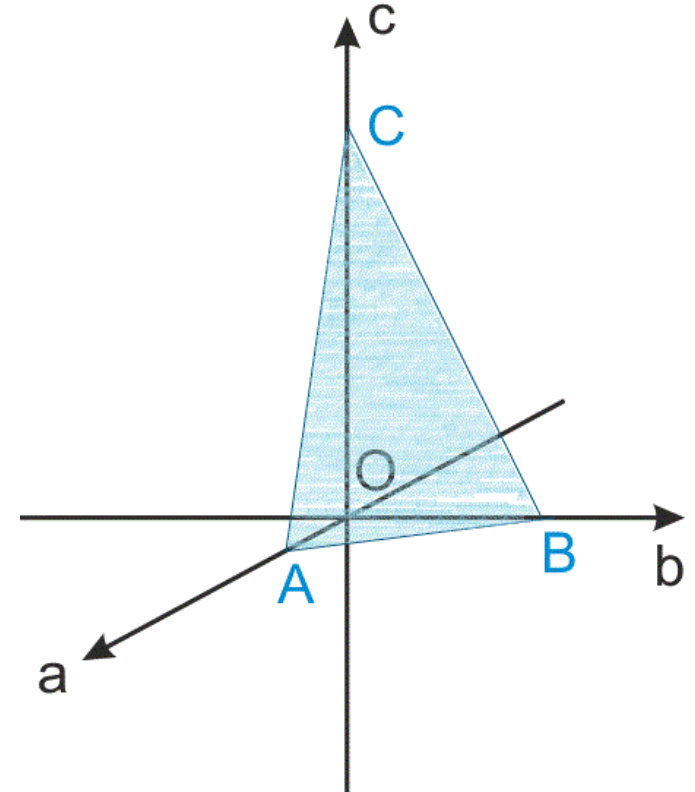
$$|OA|=a; |OB|=b; |OC|=c$$

Parametri plohe ABC:

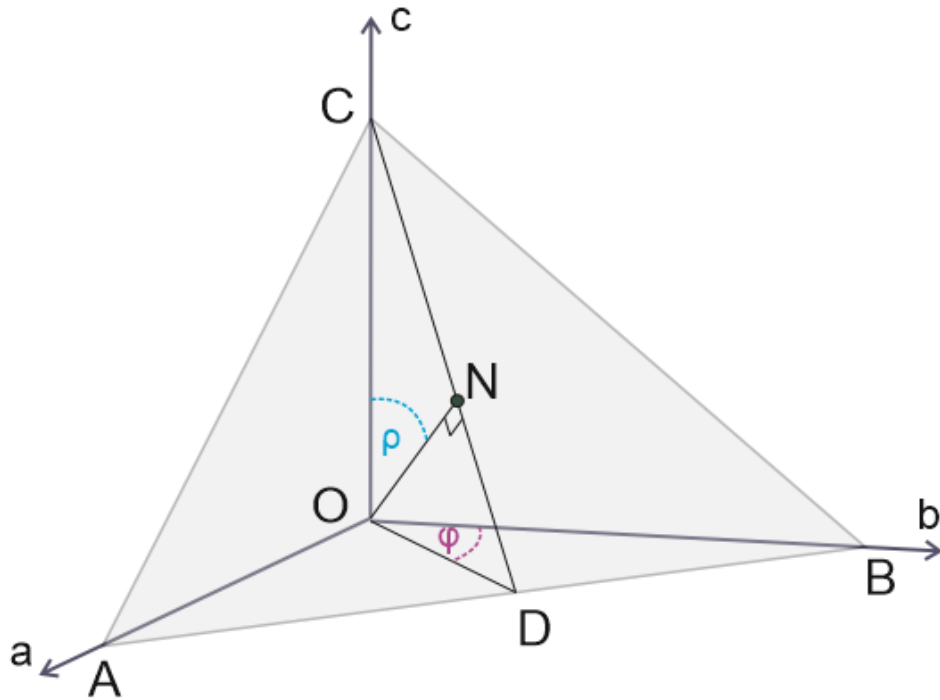
$$1a : 1b : 1c$$

Odnos parametara (**osni odnos**)*:

$$\frac{a}{b} : \frac{b}{b} : \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} : 1 : \frac{c}{b}$$



Indeksiranje ploha

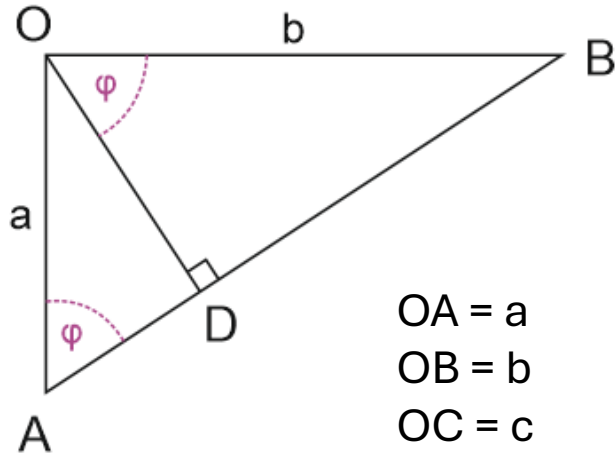


Parametri plohe ABC:

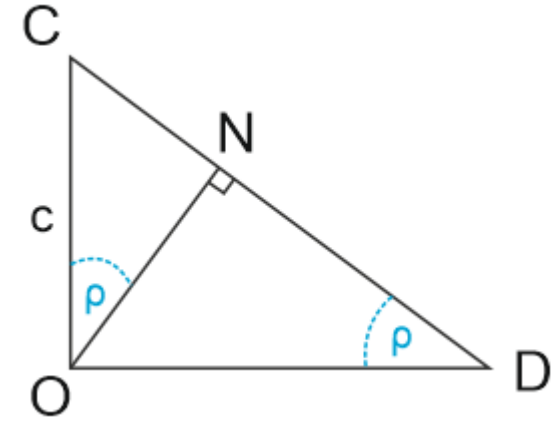
$$1a : 1b : 1c$$

Odnos parametara (**osni odnos**)*:

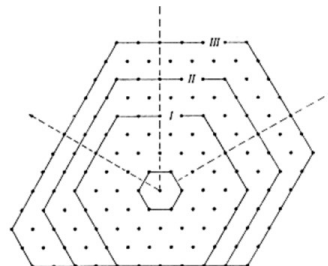
$$\frac{a}{b} : \frac{b}{b} : \frac{c}{b} \Leftrightarrow \boxed{\frac{a}{b} : 1 : \frac{c}{b}}$$



$$\begin{aligned} OA &= a \\ OB &= b \\ OC &= c \\ OD &= b \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$



$$\tan \rho = \frac{c}{OD}$$



* određuje se na temelju sfernih koordinata:

$$a/b = \operatorname{ctg} \phi$$

$$c/b = \operatorname{tg} \rho \cdot \cos \phi$$

! Tijekom rasta kristala ostaje stalan jer se ploha prilikom rasta pomiče paralelno sama sebi.

Indeksiranje ploha

→ parametre ostalih ploha određujemo u odnosu na jediničnu plohu

Weissovi koeficijenti (1818.)

→ dobivaju se uspoređivanjem osnog odnosa plohe s osnim odnosom jedinične plohe

Općenito: $ma : nb : pc$

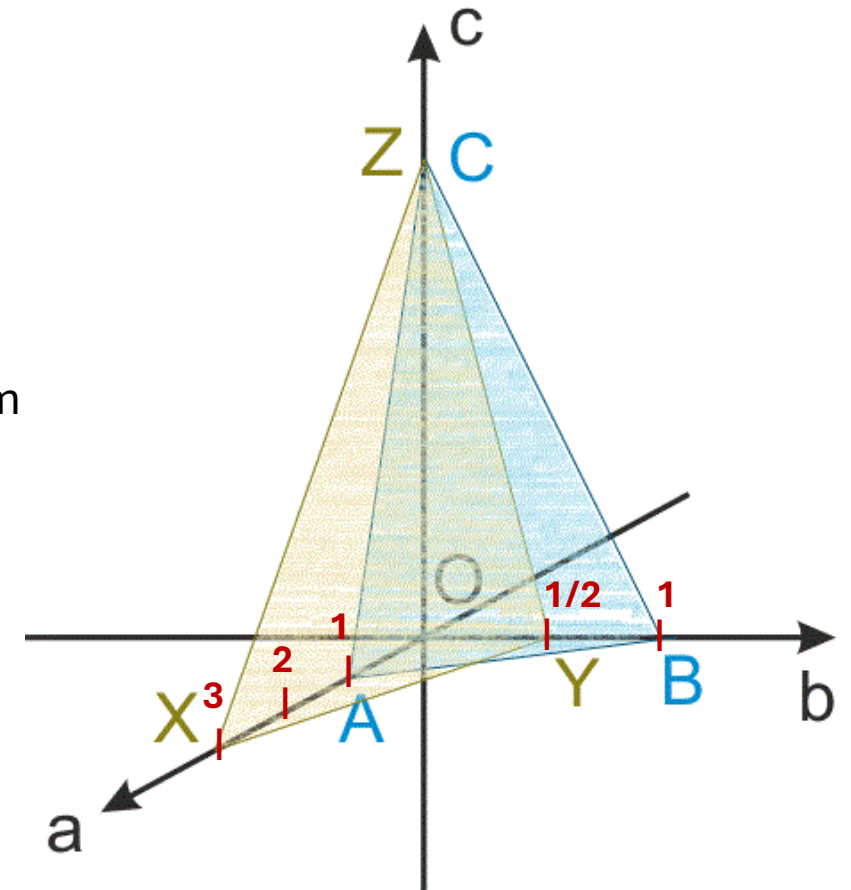
! mali cijeli brojevi ili razlomci

Za jediničnu plohu (ABC) :

$$1a:1b:1c$$

Parametri plohe XYZ:

$$3a : 1/2b : 1c$$



! 2. kristalografski zakon (zakon o racionalnom odnosu parametara): Na kristalu su moguće samo one plohe čiji osni odnosi u usporedbi s osnim odnosom jedinične plohe daju male cijele brojeve ili razlomke.

Indeksiranje ploha

→ parametre ostalih ploha određujemo u odnosu na jediničnu plohu

Weissovi koeficijenti (1818.)

→ dobivaju se uspoređivanjem osnog odnosa plohe s osnim odnosom jedinične plohe

Općenito: **ma : nb : pc**

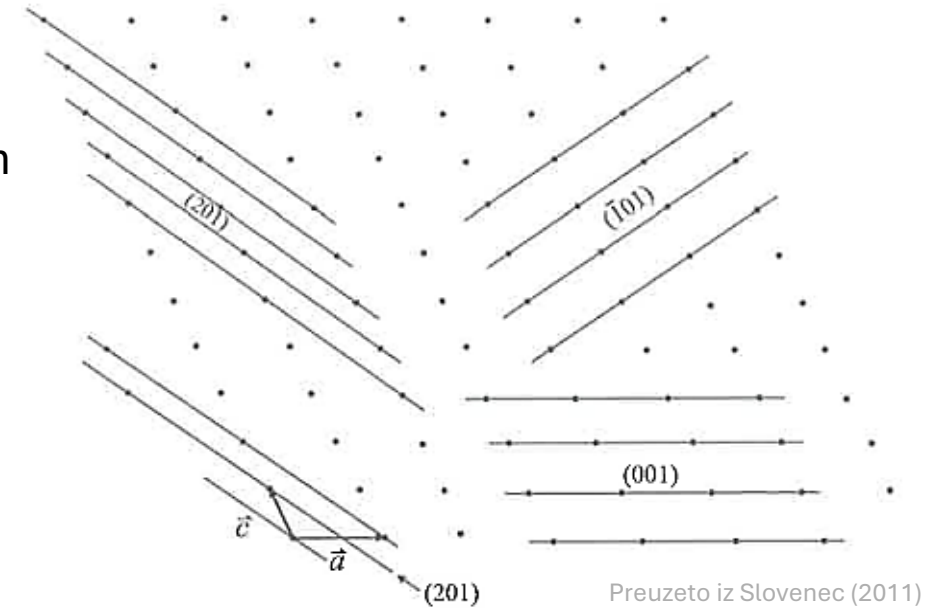
! mali cijeli brojevi ili razlomci

Za jediničnu plohu (ABC) :

$$1a:1b:1c$$

Parametri plohe XYZ:

$$3a : 1/2b : 1c$$



! 2. kristalografski zakon (zakon o racionalnom odnosu parametara): Na kristalu su moguće samo one plohe čiji osni odnosi u usporedbi s osnim odnosom jedinične plohe daju male cijele brojeve ili razlomke.

Indeksiranje ploha

Millerovi indeksi (1839.) = recipročne vrijednosti Weissovih koeficijenata

→ dobivaju se dijeljenjem osnog odnosa jedinične plohe s osnim odnosom promatrane plohe

Weissovi koeficijenti plohe XYZ:

$$3a : \frac{1}{2}b : 1c$$

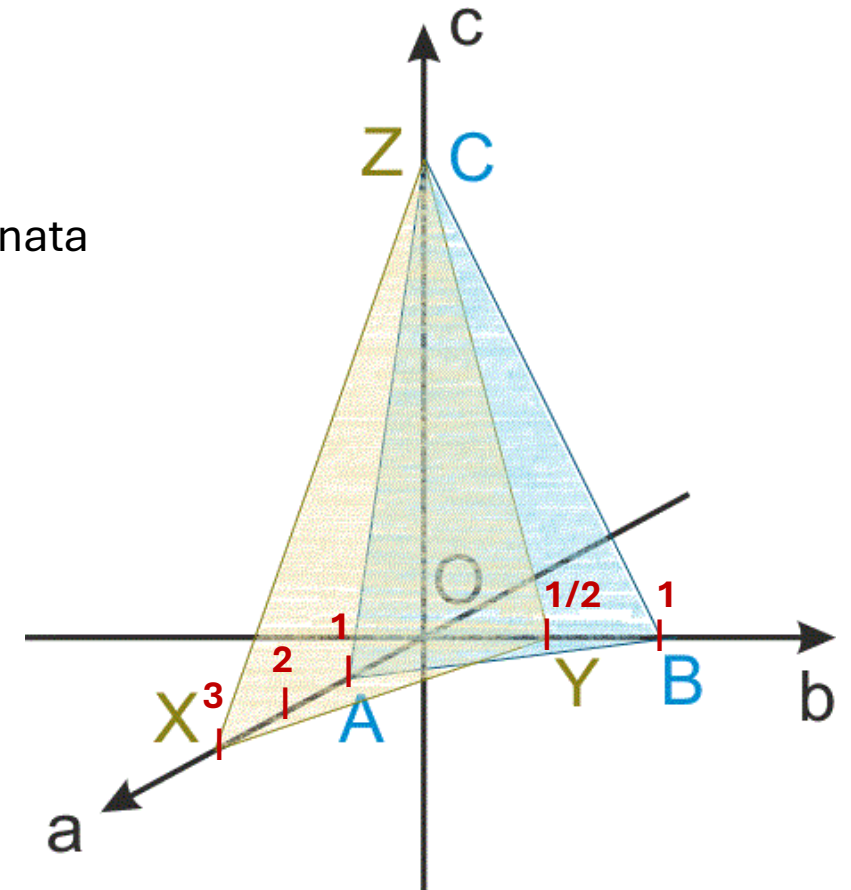
Recipročne vrijednosti:

$$\frac{1}{3}a : \frac{2}{1}b : \frac{1}{1}c \quad / \cdot 3$$

$$1a : 6b : 3c$$

Millerovi indeksi plohe XYZ: **(163)**

Millerovi indeksi plohe ABC: **(111)**



općeniti izgled: (hkl)

→ tri najmanja moguća cijela broja

$$\text{pr. } (222) = (111)$$

$$(422) = (211)$$

$$(303) = (101)$$

Primjer: ploha je paralelna s osi a (ne siječe je)

W.K.: $\infty a : \frac{1}{2}b : 1c$

recip.: $1/\infty a : 2b : 1c$

M.I.: (021)

Indeksiranje ploha

Millerovi indeksi - oznake:

(hkl) – indeks pojedine plohe

$\{hkl\}$ – indeks forme

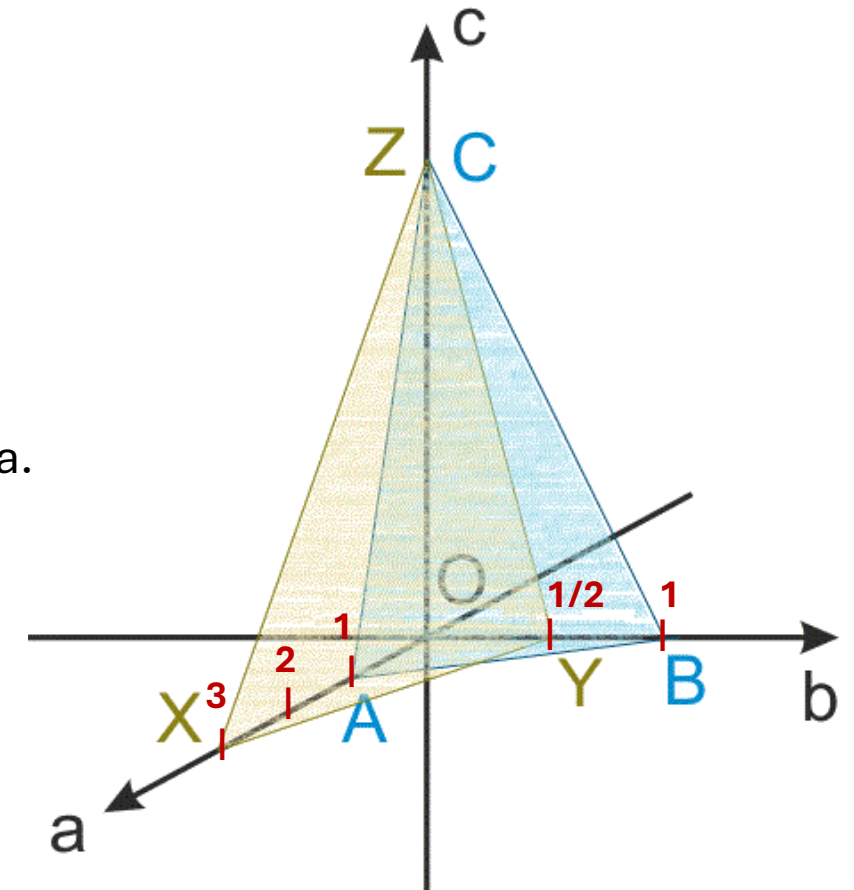
! Sve plohe koje pripadaju istoj formi imaju istu kombinaciju indeksa.

$[hkl]$ – indeks kristalografskih smjerova ili zone

pr: $[100]$ – kristalografska os a

$\langle uvw \rangle$ – indeks simetrijski identičnih smjerova

pr: $\langle 100 \rangle$ u kubičnom sustavu označava smjerove a_1 , a_2 i a_3



Učestalost: do 5 česti

5-10 rijetki

10-15 vrlo rijetki

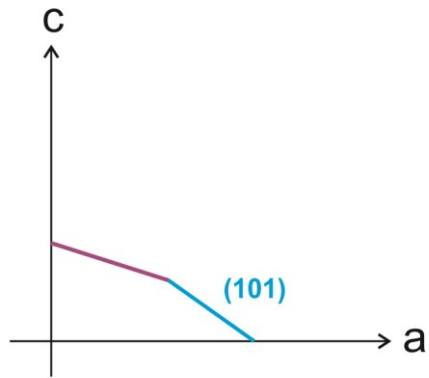
15-20 iznimno rijetki



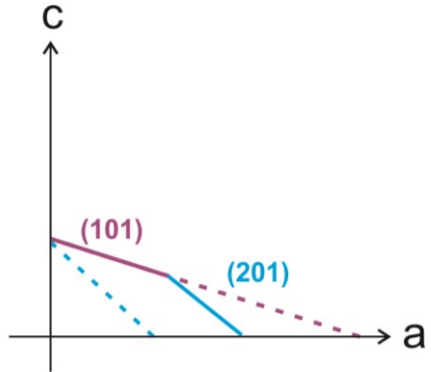
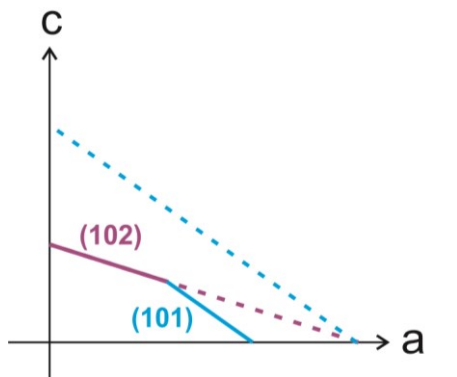
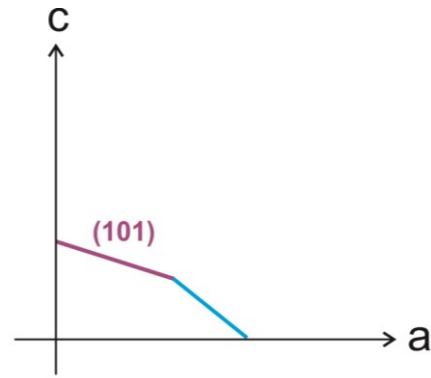
! **Bravaisov zakon:** Na kristalu se obično pojavljuju plohe koje su paralelne mrežnim ravninama s najvećom mrežnom gustoćom (najveći broj atoma po jedinici površine).

Indeksiranje ploha

(1)

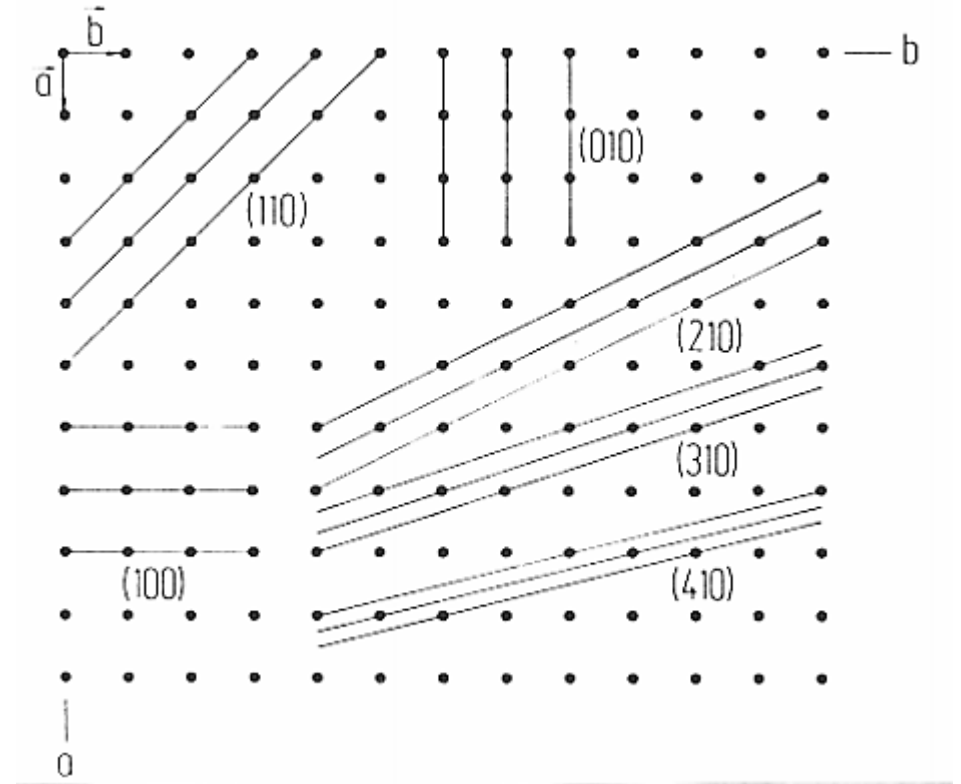


(2)



! Zakon o stalnosti kutova:

U različitim uzorcima istog minerala, kutovi između odgovarajućih ploha su isti pri konstantnoj temperaturi i tlaku.



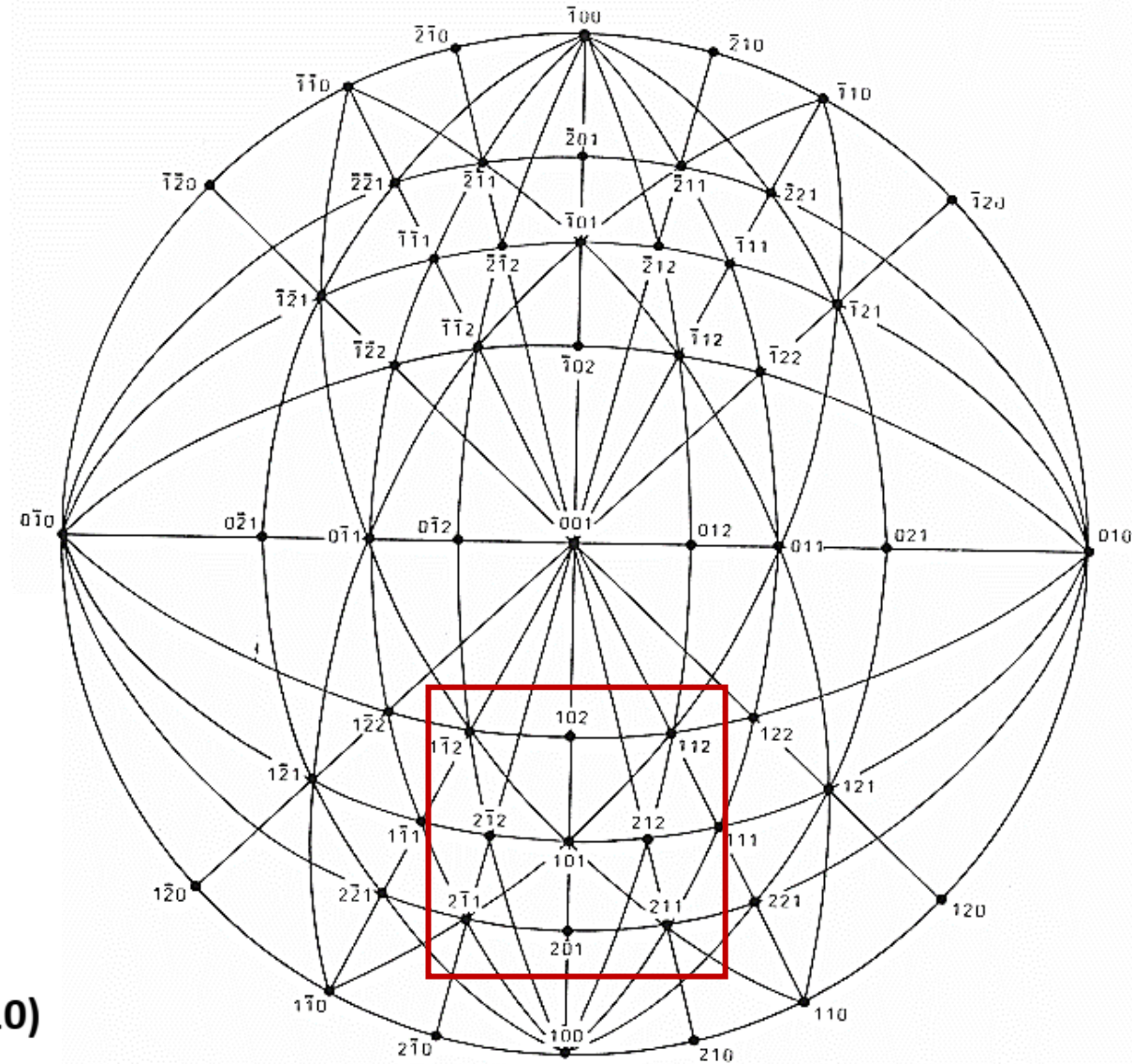
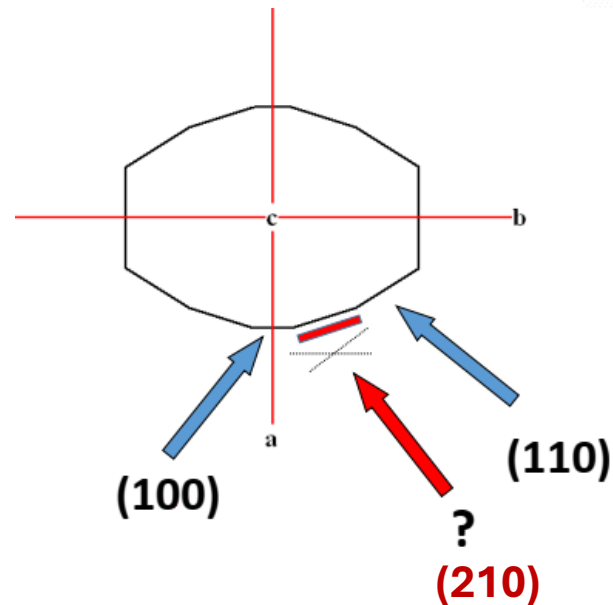
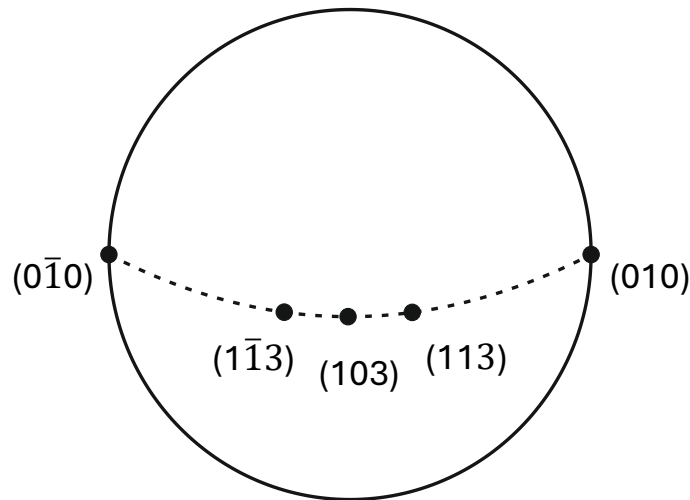
Označavanje mrežnih ravnina

→ jedan indeks označava čitav set paralelnih mrežnih ravnina

Indeksiranje ploha

Goldschmidtovo pravilo komplikacije

- Ukoliko se tri plohe nalaze u istoj zoni i znamo indekse ploha sa strane („vanjskih” ploha), indeks plohe u sredini može se izračunati zbrajanjem indeksa ploha sa strane.
- Zbrajanjem Millerovih indeksa dviju susjednih ploha koje leže u istoj zoni dobije se indeks plohe koja jednoliko otupljuje brid između tih dviju ploha.



(1) Izračun indeksa zone $[uvw]$ koje definiraju dvije neparalelne plohe $(h_1k_1l_1)$ i $(h_2k_2l_2)$

$$\begin{array}{c} h_1 \left| \begin{array}{cc} k_1 & l_1 \end{array} \right| h_1 \left| \begin{array}{cc} k_1 & l_1 \end{array} \right| l_1 \\ h_2 \left| \begin{array}{cc} k_2 & l_2 \end{array} \right| h_2 \left| \begin{array}{cc} k_2 & l_2 \end{array} \right| l_2 \end{array}$$

$$u = k_1 \cdot l_2 - k_2 \cdot l_1$$

$$v = l_1 \cdot h_2 - l_2 \cdot h_1$$

$$w = h_1 \cdot k_2 - h_2 \cdot k_1$$

(2) Izračun indeksa plohe (hkl) koja se nalazi u presjecištu dviju zona $[u_1v_1w_1]$ i $[u_2v_2w_2]$

(3) Provjera: leži li neka određena ploha (hkl) u određenoj zoni $[uvw]$

ako da, vrijedi: **$h \cdot u + k \cdot v + l \cdot w = 0$**

1) **Zakon o stalnosti kutova:**

U različitim uzorcima istog minerala, kutovi između odgovarajućih ploha su isti pri konstantnoj temperaturi i tlaku.

Niels Stensen (Nicolaus Steno) (1669)

Jean-Baptiste Romé de l'Isle (1784)

2) **Zakon o racionalnom odnosu parametara:**

Na kristalu su moguće samo one plohe čiji osni odnosi u usporedbi s osnim odnosom jedinične plohe daju male cijele brojeve ili razlomke.

René-Just Haüy (1801)

3) **Zakon zona:**

Na kristalu je moguća svaka ploha koja pripada najmanje dvjema postojećim zonama.
tj.

Svaka ploha u kristalu leži u presjecištu dvije (ili više) zona.

Christian Samuel Weiss (1804)