Mjerenje struje, napona i otpora

METALI

- Metalna svojstva:
  - Dobra transportna svojstva
  - Sjajna reflektirajuća površina
  - Kovnost

- Podjela po svojstvima:
  - Alkalijski metali (1. skupina)
  - Plemeniti metali (Ag, Cu, Au)
  - Prijelazni metali prve skupine (Sc,......,Ni)

PERIODNI SUSTAV ELEMENATA

	1/IA	2/IIA	3/IIIB	4/IVB	5/VB	6/VIB	7/VIIB	8	9	10	11/IB	12/IIB	13/IIIA	14/IVA	15/VA	16/VIA	17/VIIA	18/VIIIA
								← VIII	→									
1	1 H 1.008																	2 He 4.003
2	3 Li 6.941	4 Be 9.012											5 B 10.81	6 C 12.01	7 N 14.01	8 O 16.00	9 F 19.00	10 Ne 20.18
3	11 Na 22.99	12 Mg 24.30											13 Al 26.98	14 Si 28.09	15 P 30.97	16 S 32.07	17 Cl 35.05	18 Ar 39.95
4	19 K 39.10	20 Ca 40.08	21 Sc 44.96	22 Ti 47.87	23 V 50.94	24 Cr 52.00	25 Mn 54.94	26 Fe 55.85	27 Co 58.93	28 Ni 58.69	29 Cu 63.55	30 Zn 65.39	31 Ga 69.72	32 Ge 72.61	33 As 74.92	34 Se 78.96	35 Br 79.90	36 Kr 83.80
5	37 Rb 85.47	38 Sr 87.62	39 Y 88.91	40 Zr 91.22	41 Nb 92.91	42 Mo 95.94	43 Tc 98.91	44 Ru 101.1	45 Rh 102.9	46 Pd 106.4	47 Ag 107.9	48 Cd 112.4	49 In 114.8	50 Sn 118.7	51 Sb 121.8	52 Te 127.6	53 I 126.9	54 Xe 131.3
6	55 Cs 123.9	56 Ba 137.3	La-Lu	72 Hf 178.5	73 Ta 180.9	74 W 183.8	75 Re 186.2	76 Os 190.2	77 Ir 192.2	78 Pt 195.1	79 Au 197.0	80 Hg 200.6	81 Tl 204.4	82 Pb 207.2	83 Bi 209.0	84 Po 210.0	85 At 210.0	86 Rn 222.0
7	87 Fr 223.0	88 Ra 226.0	Ac-Lr	104 Db	105 Jl	106 Rf	107 Bh	108 Hn	109 Mt	110 Uun	111 Uuu							

← s → ← d → ← p →

LANTANIDI 4*f*-orbitale	57 La 138.9	58 Ce 140.1	59 Pr 140.9	60 Nd 144.2	61 Pm 146.9	62 Sm 150.4	63 Eu 152.0	64 Gd 157.2	65 Tb 158.9	66 Dy 162.5	67 Ho 164.9	68 Er 167.3	69 Tm 168.9	70 Yb 173.0	71 Lu 175.0
AKTINIDI 5*f*-orbitale	89 Ac 227.0	90 Th 232.0	91 Pa 231.0	92 U 238.0	93 Np 237.0	94 Pu 239.1	95 Am 241.1	96 Cm 244.1	97 Bk 249.1	98 Cf 252.1	99 Es 252.1	100 Fm 257.1	101 Md 258.1	102 No 259.1	103 Lr 262.1

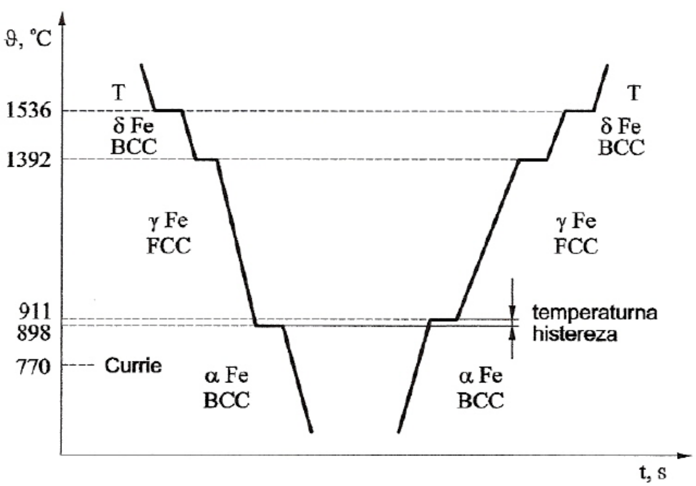
← f →

Kristalna struktura metala

- Pravilan, periodički raspored
- Kubni i heksagonski sustav:
  - Alkalijski metali – BCC
  - Plemeniti metali – FCC
  - Npr. prijelazni metali – kubna i heksagonska

    – struktura ovisna o temperaturi

    – npr. Fe



Metalna veza

- Međudjelovanje pozitivnih iona i elektrona
- Plin slobodnih elektrona:
  - Valna funkcija proširena na cijeli metal
  - Objašnjava dobra transportna svojstva

- Neusmjerenost metalne veze:

Tablica 4.1. Neke karakteristike alkalijskih metala

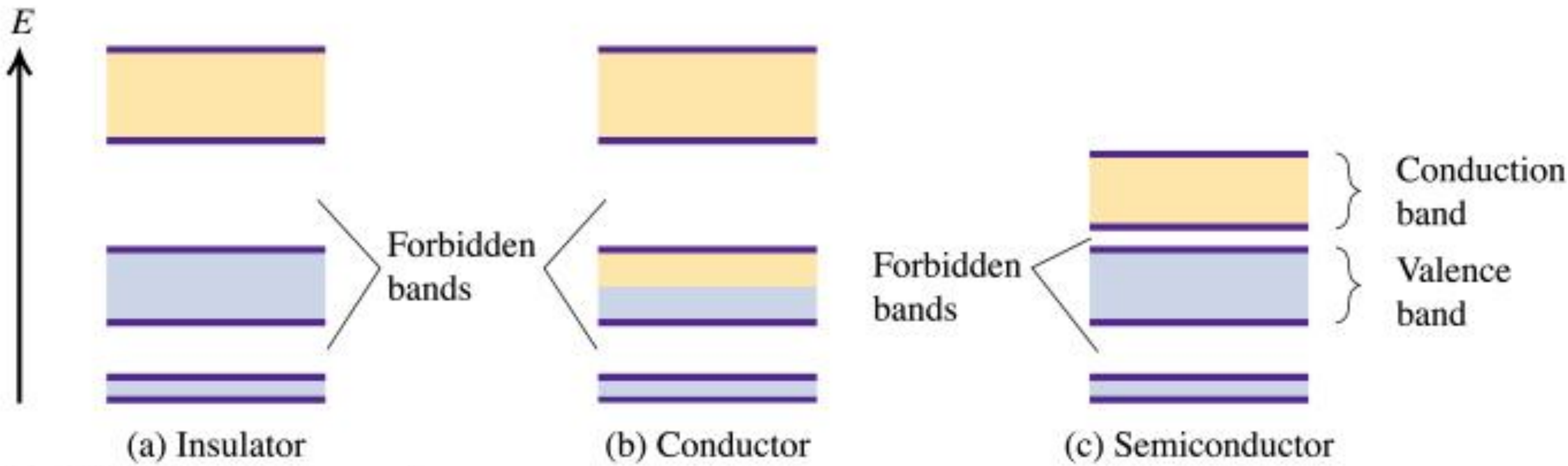
Metal	Li	Na	K	Rb	Cs
Redni broj elementa	3	11	19	37	55
Glavni kvantni broj valentnog elektrona	2	3	4	5	6
Duljina brida elementarne ćelije, $a/(10^{-10}$ m)	3,50	4,28	5,56	5,62	6,05
Kohezivna energija, $E_{koh.}$/eV	1,56	1,13	1,00	0,82	0,78
Talište, T_t/K	452	371	337	312	299

Tablica 4.2. Neke karakteristike plemenitih metala

Metal	Cu	Ag	Au
Redni broj elementa	29	47	79
Glavni kvantni broj valentnog elektrona	4	5	6
Duljina brida elementarne ćelije, $a/(10^{-10}$ m)	3,61	4,08	4,07
Kohezivna energija, E_{koh}/eV	3,51	2,95	3,77
Talište, T_t/K	1356	1234	1336

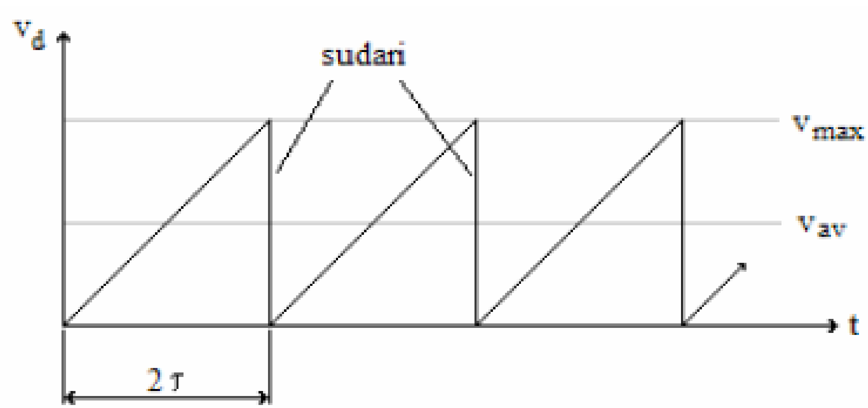
Tablica 4.3. Neke karakteristike prijelaznih metala prve grupe

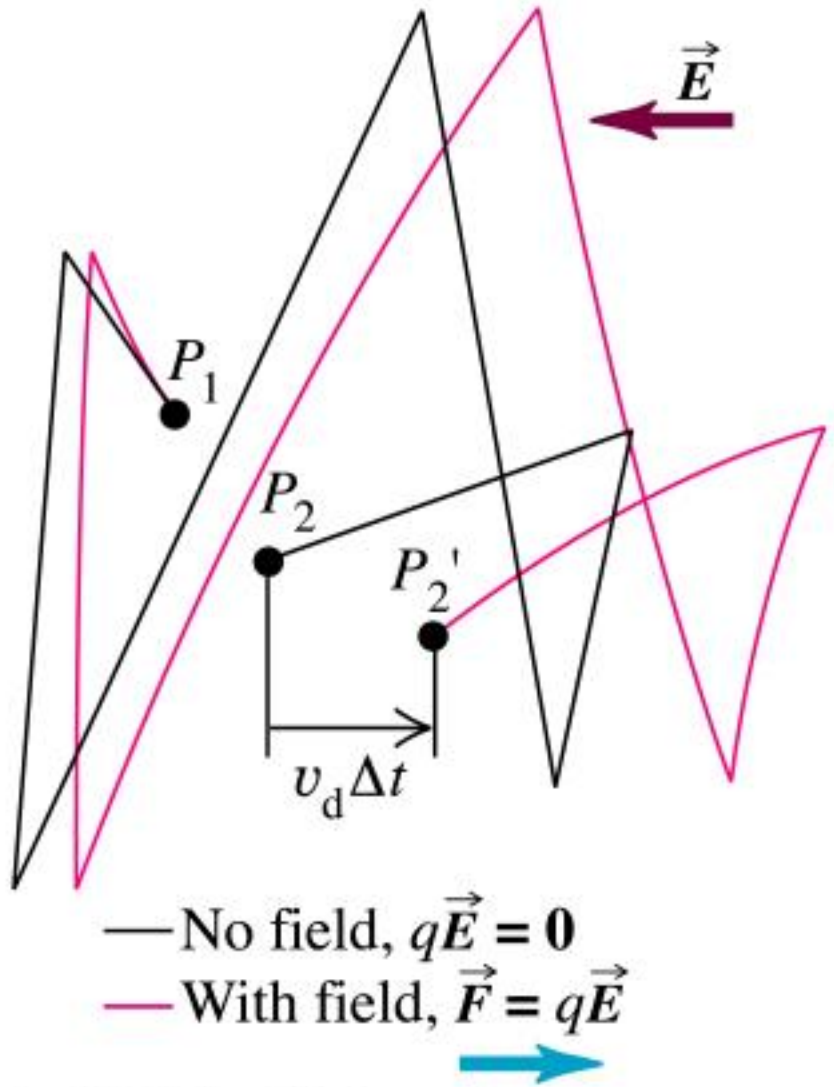
Metal	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni
Redni broj elementa	21	22	23	24	25	26	27	28
Kohezivna energija, E_{koh}/eV	3,9	4,8	5,2	3,5	2,9	4,3	4,4	4,4
Talište, T_t/K	1812	1933	2163	2130	1518	1808	1768	1726


E
Forbidden bands
Forbidden bands
Conduction band
Valence band
(a) Insulator
(b) Conductor
(c) Semiconductor

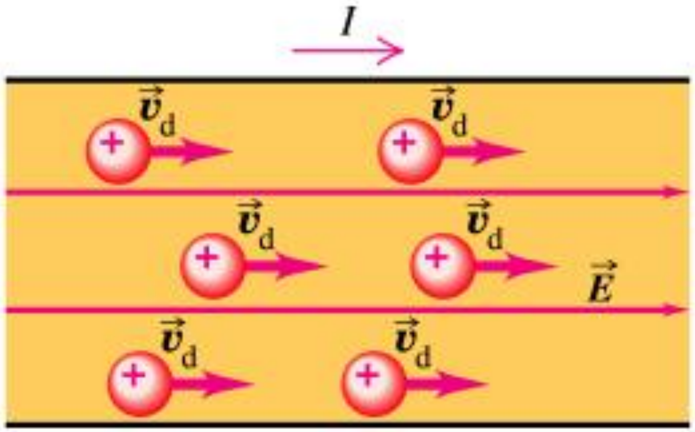
Transportna svojstva metala

- Klasični model metala
- Na sobnoj temperaturi (300K):
  - Pozitivne jezgre vibriraju
  - Elektroni se gibaju nasumično
- Prisustvo električnog polja $\rightarrow$ brzina zanošenja ili driftna brzina
- Brzina zanošenja << nasumičina brzina

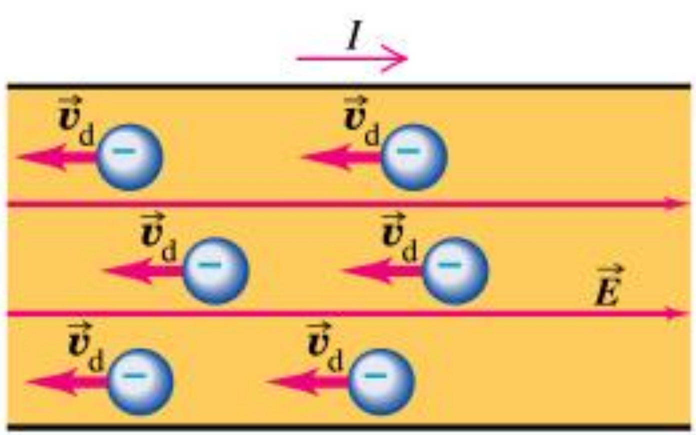




$\vec{E}$
P_1
P_2
P_2'
$v_d \Delta t$
No field, $q\vec{E} = \mathbf{0}$
With field, $\vec{F} = q\vec{E}$

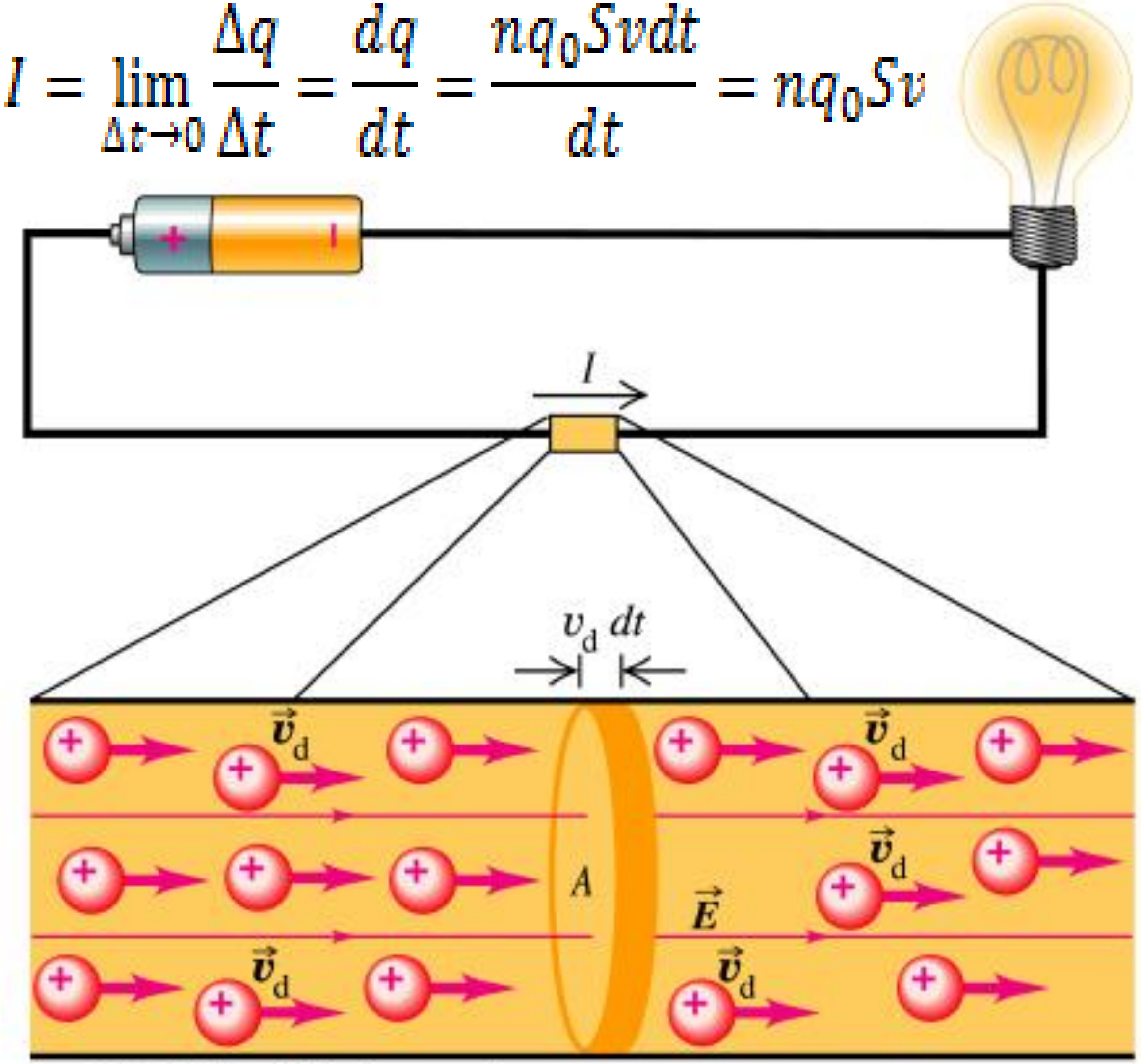


(a)



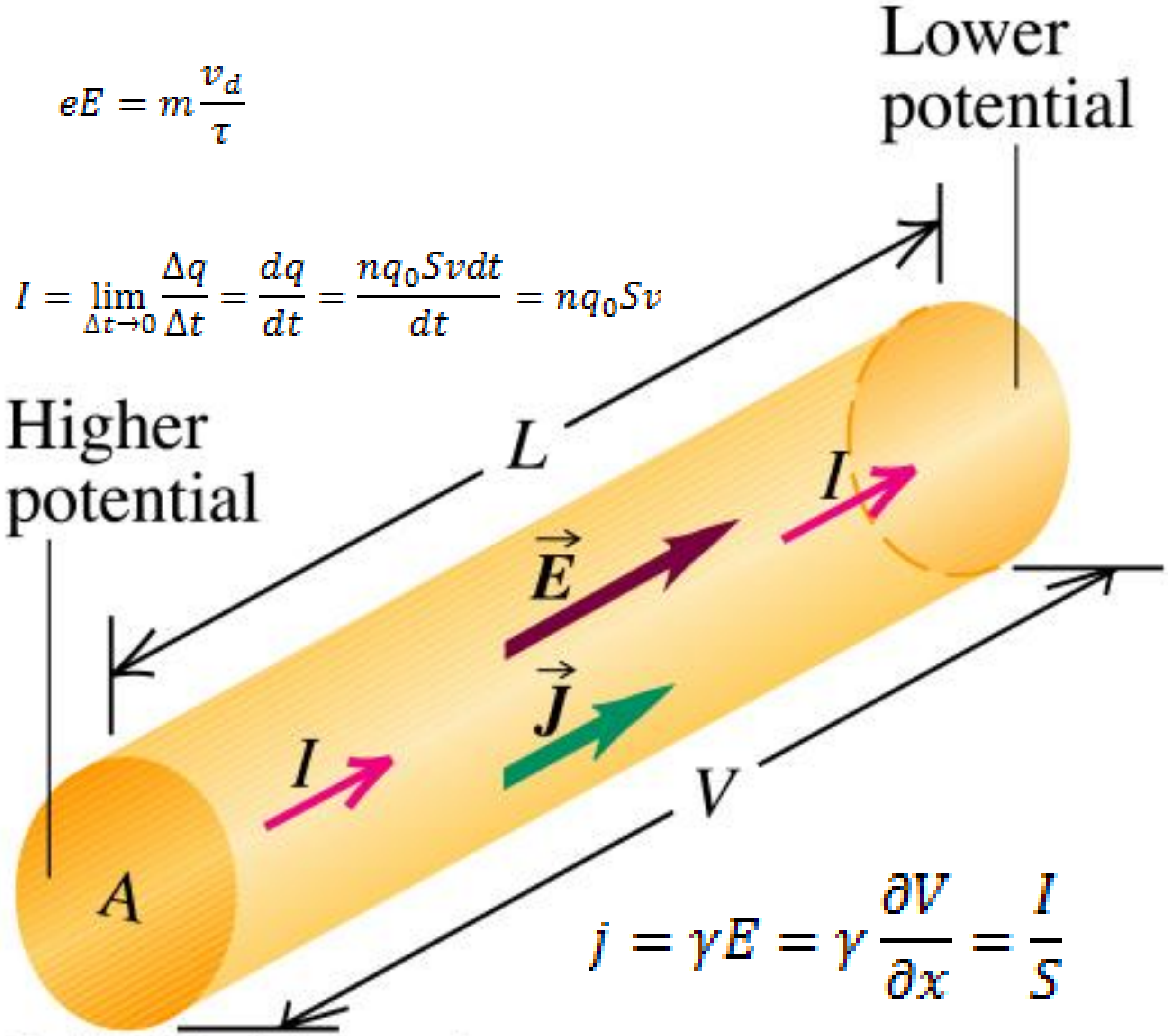
(b)

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = \frac{nq_0 Svdt}{dt} = nq_0 Sv$$



$$eE = m\frac{v_d}{\tau}$$

$$I = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = \frac{nq_0 Svdt}{dt} = nq_0 Sv$$



$$j = \gamma E = \gamma\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{I}{S}$$

Drudeova teorija vodljivosti

- Neka se vodič nalazi u konstantnom električnom polju . Djelovanjem električnog polja mijenjaju se elektronske brzine.
- Promjena brzine elektrona određena je jednadžbom gibanja

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{F}$$

- Ako tu jednadžbu integriramo od t1 do t2 dobivamo:

$$\vec{u} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\overrightarrow{F}$$

- Ukupna elektronska brzina jednaka je zbroju brzine kojom se elektron giba izvan vanjskog polja i dodatka proizvedenog poljem:

$$\overrightarrow{v'} = \vec{v} + \vec{u}$$

- definirat ćemo pokretnost (mobilnost) elektrona,ona je brojčano jednaka iznosu prosječne vrijednosti brzine zanošenja u jediničnom polju

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\left|\overline{\boldsymbol{u}}\right|}{\boldsymbol{F}} \qquad \mu = \frac{e\tau}{m}$$

- Gustoća električne struje:

$$\vec{j} = -eZN\vec{\bar{u}}$$

- Izvodimo Ohmov zakon:

$$\vec{j} = n\frac{e^2\tau}{m}\vec{E}$$

Modeli vodljivosti

- Na metalne slitine moguće je primjeniti modele vodljivosti razvijene za tekuće metale zbog slične strukture
- U **Drudeovom modelu** uzrok otpora je raspršenje elektrona na defektima rešetke
- Driftna brzina je brzina dobivena između dva sudara $\vec{u} = -\frac{e}{m}\vec{E}(t_1 - t_2)$
- Prosječna driftna brzina za vrijeme relaksacije τ elektrona je

$$\overline{\vec{u}} = -\frac{e}{m}\vec{E}\tau$$

- Jednadžba gibanja je oblika, traži se stacionarno rješenje

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{m\vec{u}}{\tau} + e\vec{E}$$

- Gustoća struje je proporcionalna polju $\vec{j} = n\frac{e^2\tau}{m}\vec{E}$, a konstanta proporcionalnosti je vodljivost $\sigma = \frac{e^2\tau}{m}$

- Gustoća struje proporcionalna s električnim poljem. Faktor proporcionalnosti σ nazivamo električnom vodljivosti :

$\sigma = ZN\tau\, e^2/m$

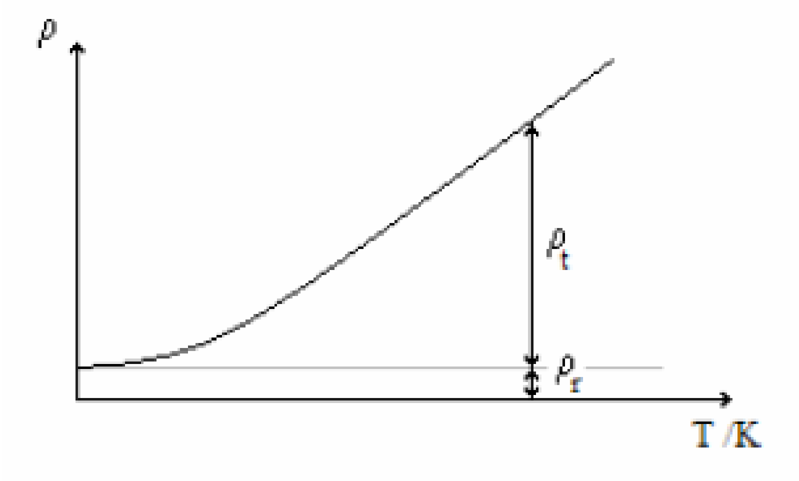
- Izraz za električnu vodljivost možemo pisati:

$\sigma = ZNe\mu$

ZN označava koncentraciju elektrona , *τ* relaksacijsko vrijeme, e naboj, a *m* masu elektrona.

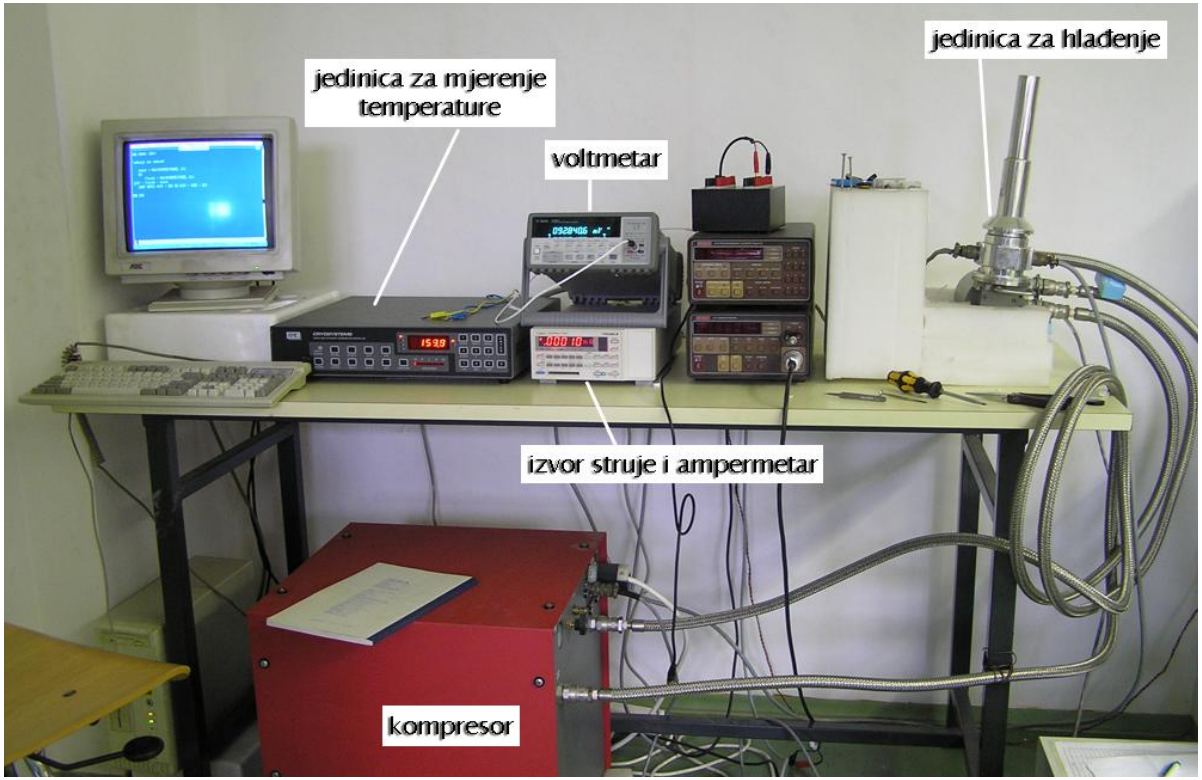
Električni otpor

- Nastaje zbog neperiodičkog potencijala
- Smetnje gibanju elektrona:
  - Termička pobuđenja rešetke – fononi
  - Defekti kristalne rešetke
- Ukupna električna otpornost:



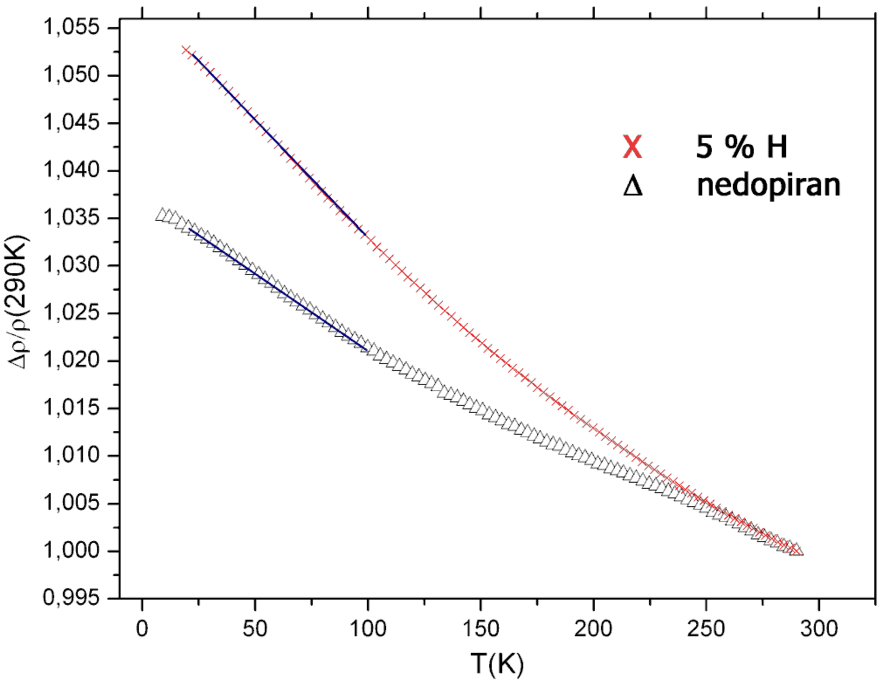
$$\rho = \rho_f + \rho_r$$

Postav za mjerenje otpornosti

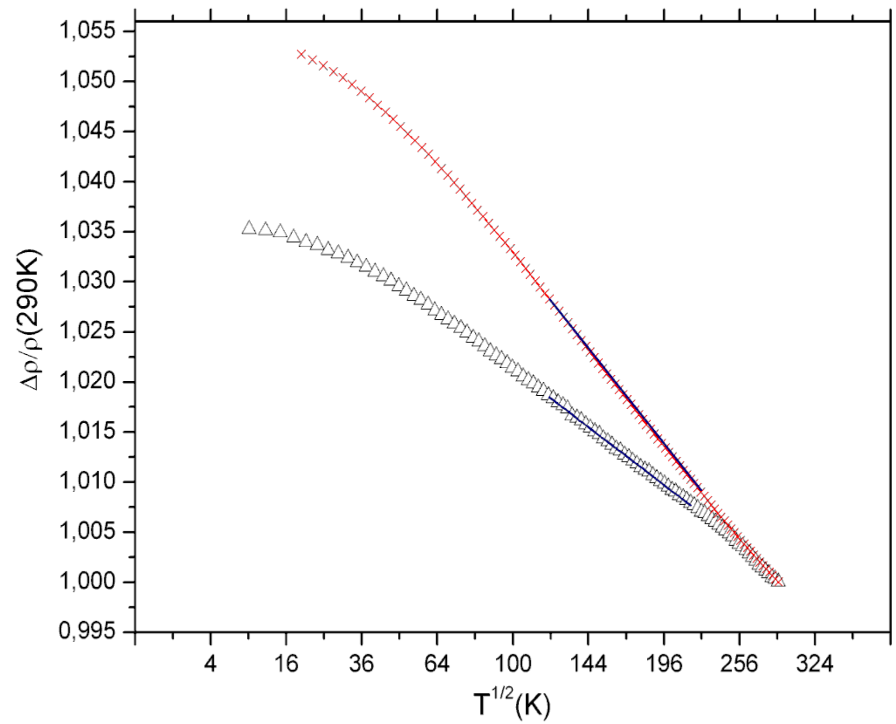


- Mjerenje istosmjernom strujom, metodom četiri kontakta, u području 10-290 K
- Za hlađenje je korišten hladnjak sa zatvorenim ciklusom (CCR)
- Procesom upravlja prilagođeni računalni program
- Turbomolekularna pumpa održava vakuum (10^-6 Pa)
- Silazno i uzlazno temperaturno ovisno mjerenje napona

Otpornost staklastih uzoraka



- Dominantan je doprinos slabe lokalizacije, negativan TCR
- Slabo vidljiva saturacija oko 10 K
- Dopirani uzorak (5% H) ima veću apsolutnu vrijednost TCR-a – manja stabilnost uzorka

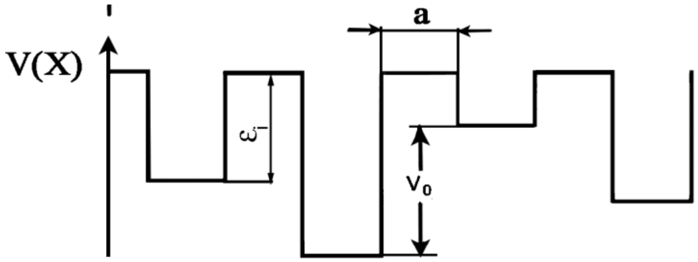


- **Ovisnost $\rho \sim T$ području 25-100 K**
- $\tau_i \propto T^{-p}$ **p=2**
- **Na T > 100 K ovisnost $\rho \sim T^{1/2}$ p=1**

Kvantni doprinosi

- **Andersonov model lokalizacije** – temeljen na nasumičnosti potencijala amorfne tvari

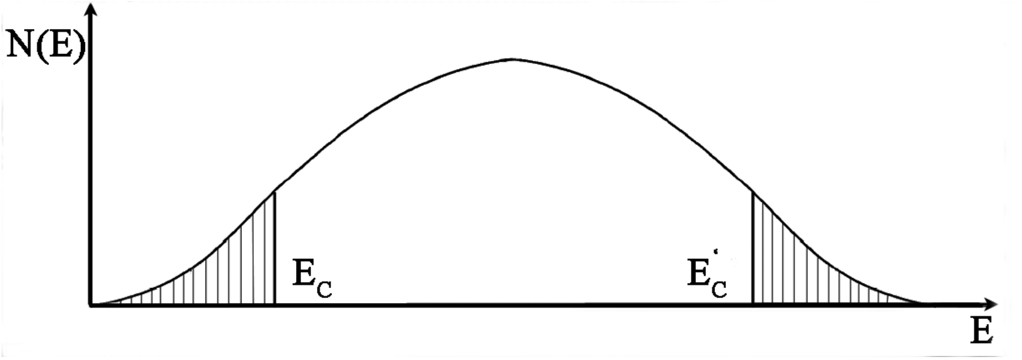
  - Mjera nereda je interval W unutar kojeg su raspoređene energije ε_i



- **Hamiltonijan sustava**

$$H = \sum_i \epsilon_i |i\rangle\langle i| + \sum_{i,j\neq 0} I(j)|i\rangle\langle i+j|$$

- **Pojava lokalizacije Blochovih stanja i povećanja otpornosti**



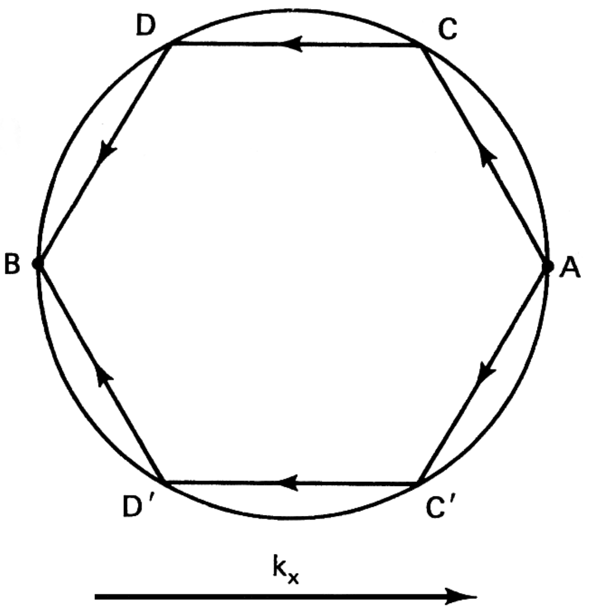
Gustoća stanja

- **Slaba lokalizacija** – posljedica interferencije raspršenih parcijalnih valnih funkcija
- Amplituda raspršenog elektrona je dvostruko veća nego u klasičnom slučaju $|C+C'|^2 = |C|^2 + |C'|^2 + |CC'^* + C^*C'| = 4|C|^2$

- Koherenciju narušava neelastično raspršenje (τ_i), stoga je ona moguća za τ<t_i
- Temperaturna ovisnost $\tau_i \propto T^{-p}$
  2<p<4 za $T<\Theta_D$
- Doprinos spin-orbit interakcije: τ_{SO}
- Vodljivost:

$$\sigma_{WL}(T) = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\left[3\left(\frac{1}{D\tau_{SO}} + \frac{1}{4D\tau_i}\right)^{1/2} - \left(\frac{1}{4D\tau_i}\right)^{1/2}\right]$$

- Elektron-elektron interakcija – doprinosi na niskim temperaturama, blizu T_c, doprinos u Cooperovom i difuznom kanalu



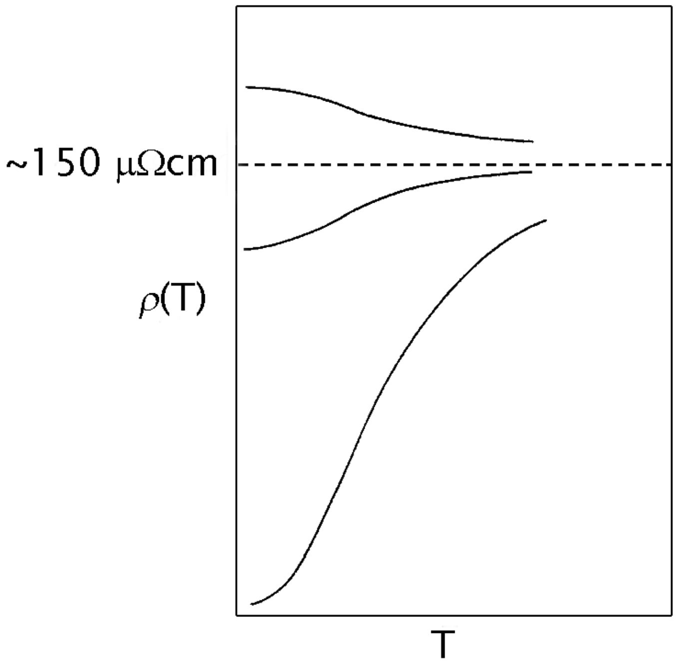
Mooijeva korelacija

- Slijedi iz eksperimentalnih opažanja vodljivosti metalnih stakala

1. Otpornost stakala ρ>100 $\mu\Omega$cm je neosjetljiva na detalje elektronske strukture i atomskog rasporeda

2. Negativan temperaturni koeficijent otpornosti (TCR) stakala otpornosti ρ>150 $\mu\Omega$cm

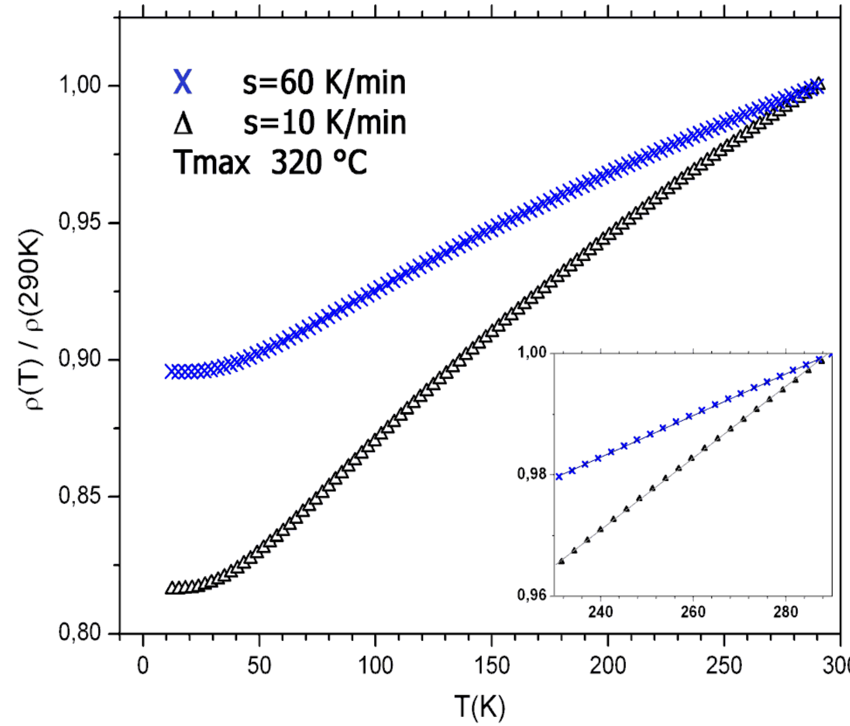
3. Saturacija otpornosti pri ρ=150-200 $\mu\Omega$cm na visokim temperaturama

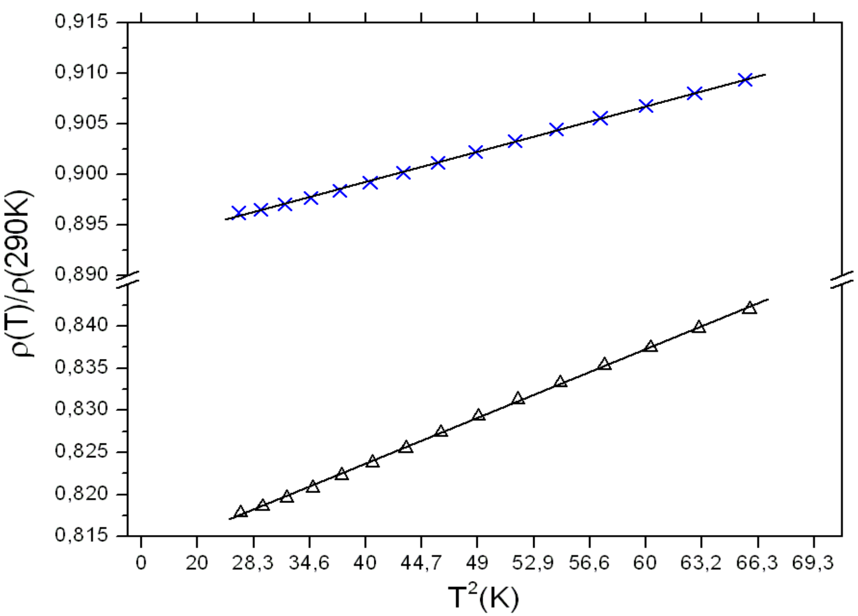


- Takvo ponašanje je posljedica približavanja srednjeg slobodnog puta međuatomskim razmacima

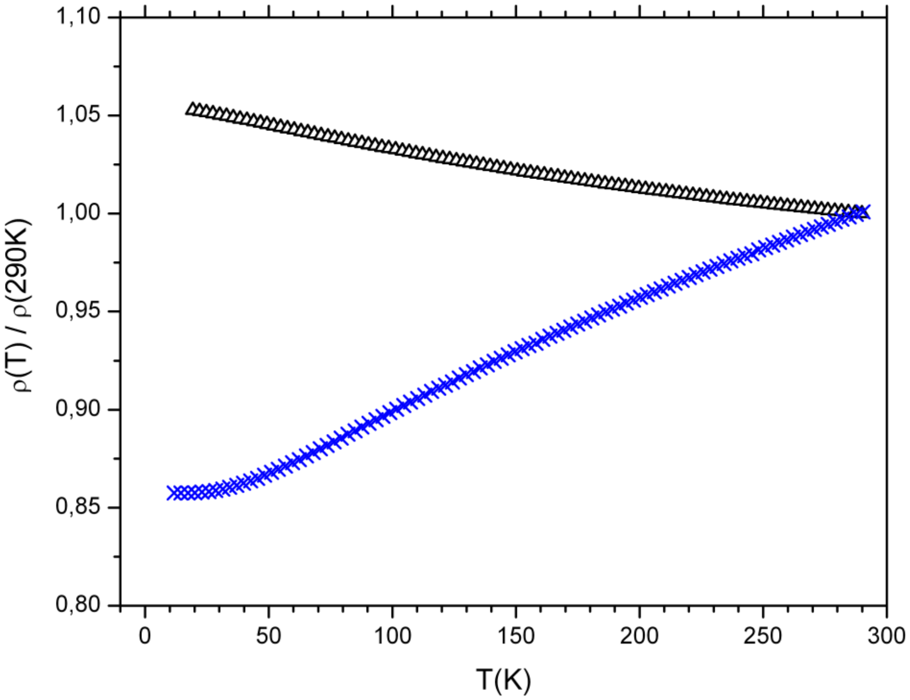
Otpornost aniliranih uzoraka

- Anilirani uzorci $Zr_{80}Ni_{20}$ imaju pozitivan TCR
- Uzorak grijan manjom brzinom ima veći TCR, oba su grijana do ispod drugog egzoterma (do 320°C)
- Debyeva temperatura Θ_D za ove uzorke je blizu T=200 K
- Linearna ovisnost za T>Θ_D, iznad 200 K





- Ovisnost $\rho \sim T^2$ niskim temperaturama (T<Θ_D)
- U skladu sa Ziman-Faberovom teorijom (Nagelov model) gdje je predviđena takva ovisnost



- Usporedba relativne otpornosti staklastog i aniliranog uzorka (dopiranih vodikom, x= 0.05)

- Staklasti uzorak:
  ρ(290K)=(170 ± 10) μΩcm

- Anilirani uzorak (s=10 K/min):
  ρ(290K)=(100 ± 10) μΩcm

- **Ponašanje je u skladu s Mooijevom korelacijom koja predviđa negativan TCR za otpornosti veće od 150 μΩcm i pozitivan TCR za manje vrijednosti**

- **Poslijedica kristalizacije – smanjenje otpornosti i promjena predznaka TCR-a**

Ziman-Faberova teorija

- Temelji se na Drudeovom modelu
- Primjenjiva na stakla niske otpornosti i kristalinične metale
- Elektroni su opisani ravnim valovima, vektora $\vec{k}$, srednji slobodni put je veći od međuatomskih udaljenosti
- Vrijeme relaksacije – recipročno vjerojatnosti prijelaza

$$\frac{1}{\tau} = \int (1 - \cos\theta)\, W(\theta)\, d\Omega$$

- Strukturni faktor $S(\vec{q}) = \frac{1}{N} \langle | \sum_i e^{i\vec{q}\vec{R}_i} |^2 \rangle \qquad \vec{R}_i = \vec{l}_i + \vec{u}_i$
- Kvadrat matričnog elementa prijelaza je $|\langle \vec{k} | V | \vec{k}' \rangle|^2 = \frac{1}{N} |v(\vec{q})|^2 S(\vec{q})$
- Otpornost $\rho = \frac{12\pi V_0}{e^2 \hbar \nu_F^2} \int_0^1 S(\vec{q}) |\nu(\vec{q})|^2 \left(\frac{q}{2k_F}\right)^3 d\left(\frac{q}{2k_F}\right)$
- Ziman i Faber za opis otpornosti binarnih slitina uvode parcijalne strukturne faktore i koncentracije komponenti

- Za oblik strukturnog faktora bitan je položaj fermijevog valnog vektora tekućih metala ili stakala, $2k_F$

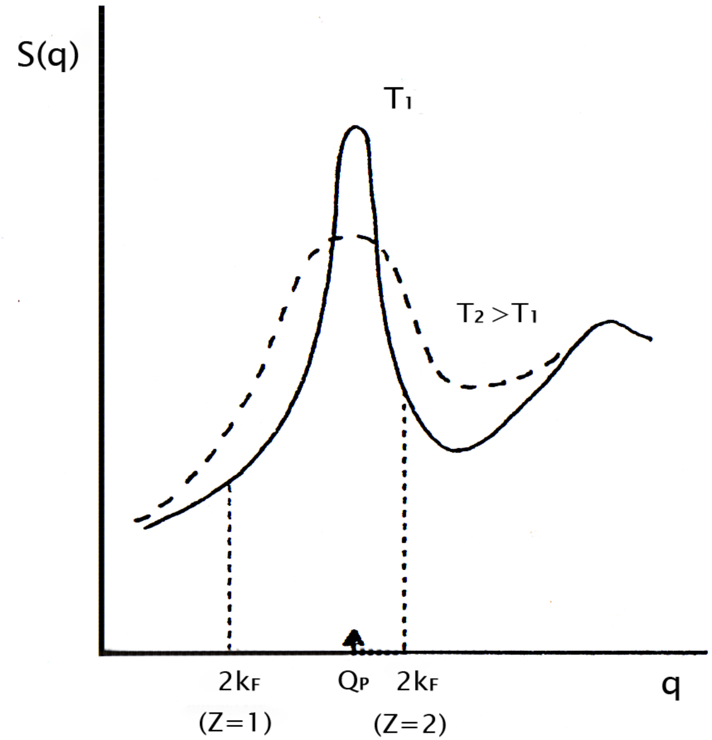
$$k_F = \left(\frac{3\pi^2 Z}{V_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

- Za prikladan opis stakala uvodi se rezonantno raspršenje vodljivih elektrona na 3d-vrpci

  v(q) -> *t* (k,k')

- Cote i Meisel uvode strukturni faktor otpornosti, a Nagel koristi oblik

$$S^p(q) \simeq 1 + [S_{T=0}(q) - 1]\, e^{-2[W(T)-W(0)]}$$



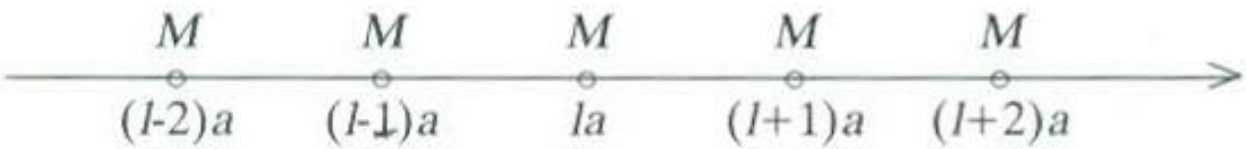
Strukturni faktor tekućih metala i metalnih stakala

Asimptotska ovisnost Debye-Wallerovog faktora je

$$\begin{aligned} W(T) &\simeq W(0)\left[1+\tfrac{2}{3}\pi^2\left(\tfrac{T}{\Theta_D}\right)^2\right], \qquad T \ll \Theta_D \qquad \rho \sim T^2 \\ &\simeq W(0)\left[1+\tfrac{2}{3}\pi^2\left(\tfrac{T}{\Theta_D}\right)\right], \qquad T \gg \Theta_D \qquad \rho \sim T \end{aligned}$$

Titranje atoma u kristalima

$$x_l = la + u_l \,.$$



1. Pretpostavljamo da međuatomske sile imaju kratak doseg, pa uzimamo u obzir samo međudjelovanje prvih susjeda.
2. Pretpostavljamo da je potencijalna energija sustava kvadratna funkcija atomskih pomaka iz ravnotežnih položaja.

$$U_p = \frac{\beta}{2}\left[(u_1 - u_2)^2 + (u_2 - u_3)^2 + \ldots\right] = \frac{\beta}{2}\sum_l (u_l - u_{l+1})^2$$

parametar β određuje jakost međuatomske veze

Titranje atoma u kristalima

Sila je jednaka negativnoj derivaciji potencijalne energije po koordinati promatranog atoma:

$$-\frac{\partial U_p}{\partial u_l} = -\beta\left[(u_l - u_{l-1}) + (u_l - u_{l+1})\right]$$

slijedi jednadžba gibanja l-tog atoma

$$M\ddot{u}_l = -\beta(2u_l - u_{l-1} - u_{l+1}) \quad .$$

$$u_l = A\,\mathrm{e}^{i(kla - \omega t)} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = v_o\, k$$

$$M\omega^2 = 2\beta\,(1 - \cos ka)$$

Titranje atoma u kristalima

Uvažavanjem trigonometrijske relacije

$$1 - \cos ka = 2 \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$\omega(k) = \omega_m \left| \sin \frac{ka}{2} \right|$$

gdje smo definirali frekvenciju

$$\omega_m = 2\sqrt{\frac{\beta}{M}} \qquad \omega_m = \frac{2\, v_o}{a}$$

Po redu veličine jest $v_o \approx 10^5$ cm/s i $a \approx 10^{-8}$ cm, odakle proizlazi $\omega_m \approx 10^{13}$ Hz

Titranje atoma u kristalima

Kristalnu rešetku smatramo kontinuiranim sredstvom

$$u_{l\pm 1} = u(x,t) \pm a \frac{\partial\, u(x,t)}{\partial\, x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2\, u(x,t)}{\partial\, x^2}$$

$$M \ddot{u}_l = -\beta(2u_l - u_{l-1} - u_{l+1})$$

Slijedi valna jednadžba

$$\frac{\partial^2\, u}{\partial\, t^2} = \frac{\beta\, a^2}{M} \frac{\partial^2\, u}{\partial\, x^2}$$

To je poznata valna jednadžba

$$\frac{\partial^2\, u}{\partial\, t^2} = v_o^2 \frac{\partial^2\, u}{\partial\, x^2} \qquad v_o = a\sqrt{\frac{\beta}{M}}$$

$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda} \qquad \omega = v_o\, k$$

$$\omega_m = \frac{2\, v_o}{a}$$

Titranje atoma u kristalima

$$\omega_m = \frac{2\,v_o}{a}$$

translacijom valnog broja za $2\pi/a$

$$k \to k + \frac{2\pi}{a}$$

frekvencija titranja ostaje nepromijenjena:

$$\omega\left(k + \frac{2\pi}{a}\right) = \omega_m \left| \sin\left(\frac{ka}{2} + \pi\right) \right| = \omega(k)$$

Frekvencija je periodična funkcija valnog broja s periodom $2\pi/a$

Titranje atoma u kristalima

$$g_n = \frac{2\pi n}{a} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

k i k' Ekvivalentne ako je njihova udaljenost jednaka

$$k' - k = g_n$$

Tim su točkama pridružene iste frekvencije:

$$\omega\,(k + g_n) = \omega\,(k)$$

Grupna brzina valova određena je izrazom

$$v(k) = \frac{d\,\omega}{d\,k} \quad ; \quad v(k) = a\sqrt{\frac{\beta}{M}}\left|\cos\frac{ka}{2}\right|$$

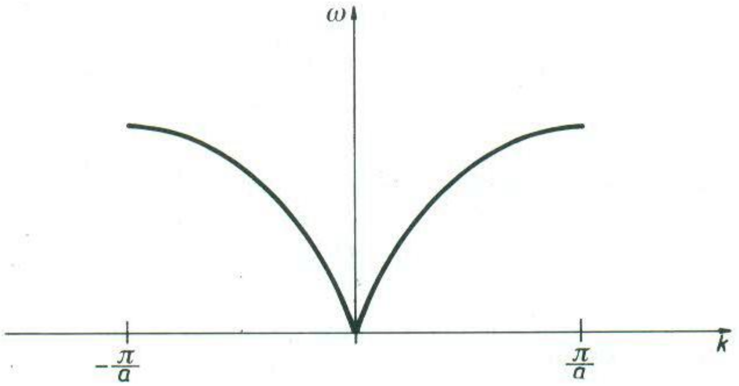
$$v(0) = a\sqrt{\frac{\beta}{M}}$$

Titranje atoma u kristalima

Frekvencija titranja kristalne rešetke određena je umnoškom valnog broja i međuatomskog razmaka, pa u graničnoj vrijednosti za $k \to 0$ i $a \to 0$ vrijede isti rezultati. Relacije izvedene primjenom aproksimacije elastičnog kontinuuma ostat će približno valjane ako je ispunjen uvjet

$$k a << 1 \qquad \lambda >> a$$

$$\sin \frac{k a}{2} = \frac{k a}{2} + \ldots$$



Grafički prikaz disperzivne relacije

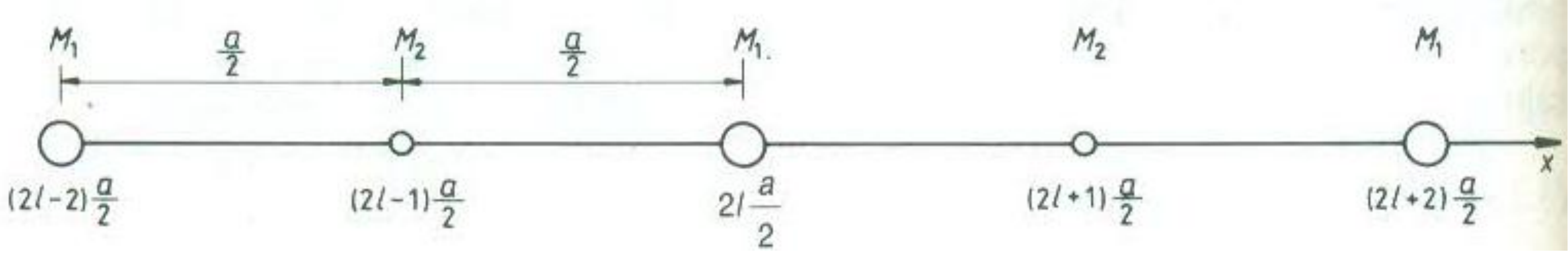
približno dobivamo

$$\omega(k) = a k \sqrt{\frac{\beta}{M}} = v_o k \qquad k a << 1$$

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

$$M_1 > M_2$$



$$M_1\,\ddot{u}_{2l} = -\beta\left[(u_{2l} - u_{2l-1}) - (u_{2l} - u_{2l+1})\right]$$

$$M_2\,\ddot{u}_{2l+1} = -\beta\left[(u_{2l+1} - u_{2l}) - (u_{2l+1} - u_{2l+2})\right]$$

$$u_n = A\,e^{i\left(k n \frac{a}{2} - \omega t\right)} \quad n=2l,\ 2l+2,\ldots \quad u_n = B\,e^{i\left(k n \frac{a}{2} - \omega t\right)} \quad n=2l-1,\ 2l+1,\ldots$$

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

$$A\,(M_1\,\omega^2 - 2\beta) + 2\beta\,B\cos\frac{ka}{2} = 0$$

$$2\beta\,A\cos\frac{ka}{2} + B\,(M_2\,\omega^2 - 2\beta) = 0$$

Proizlazi kvadratna jednadžba

$$(M_1\,\omega^2 - 2\beta)\,(M_2\,\omega^2 - 2\,\beta) = 4\beta^2\cos^2\frac{ka}{2}$$

Njezino je rješenje

$$\omega_{\pm}^2\,(k) = \beta\,\frac{M_1 + M_2}{M_1\,M_2}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\,\frac{M_1\,M_2}{(M_1 + M_2)^2}\sin^2\frac{ka}{2}}\,\right]$$

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Titranje kristalne rešetke opisuju dvije disperzivne relacije. Valnom broju k pridružene su frekvencije $\omega_+(k)$ i $\omega_-(k)$.

$$\omega_+^2(k) + \omega_-^2(k) = 2\beta \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}$$

Disperzivna relacija pokazuje da je frekvencija titranja invarijantna prema translacijama valnog broja za višekratnik osnovne veličine $2\pi/a$. Zamjenom

$$k \to k + \frac{2\pi n}{a} \qquad n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

frekvencija titranja ostaje nepromijenjena:

$$\omega\left(k + \frac{2\pi}{a} n\right) = \omega(k) .$$

Stoga valni broj ograničavamo na prvu Brillouinovu zonu:

$$-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a} .$$

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Akustička frekvencija

$$\omega_-^2(k) = k^2 \frac{\beta a^2}{2(M_1 + M_2)} + \ldots \quad ka << 1$$

$$v_o = a\sqrt{\frac{\beta}{2(M_1 + M_2)}}$$

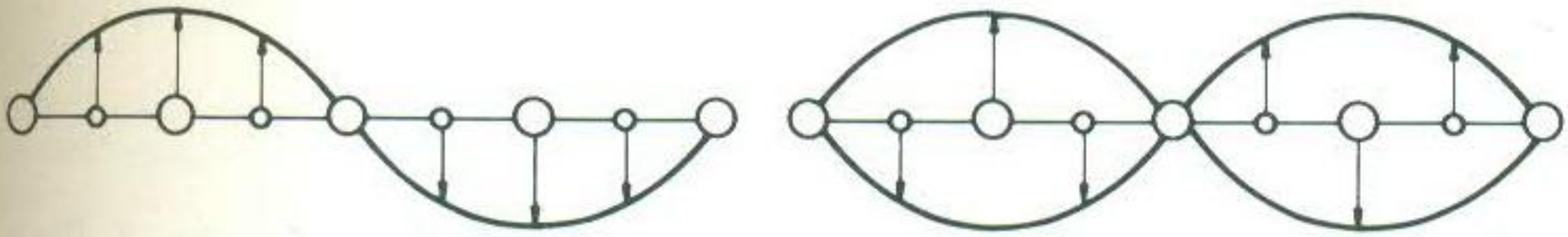
$M_1 = M_2 = M$ tada duljina ćelije postaje dvaput manja, tj. umjesto $a/2$ valja pisati a

$$v_o = a\sqrt{\frac{\beta}{M}}$$

Ekvivalentno rezultatu ćelije s jednim atomom

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji



a b

Slika (a) akustičko i (b) optičko titranje atoma u kristalu s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Titranje atoma u kristalima

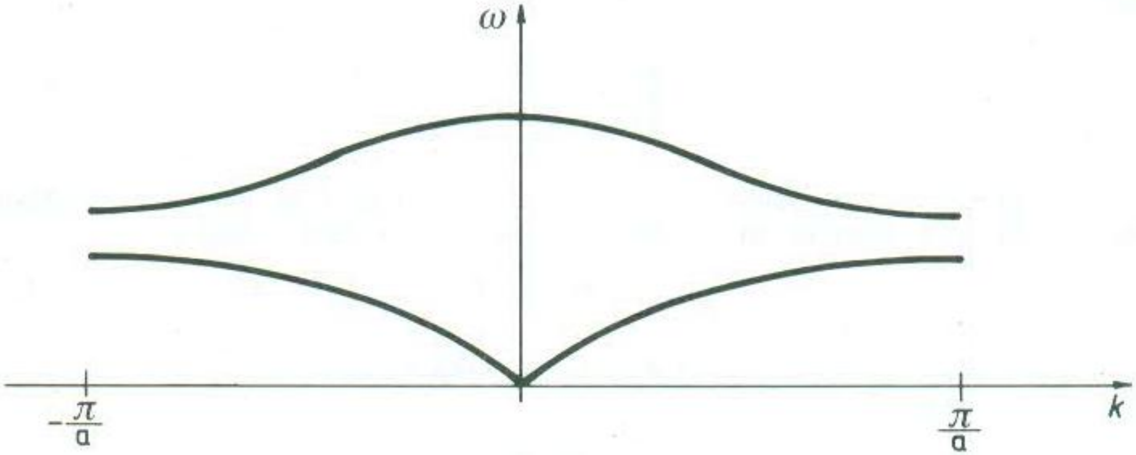
Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Ovisnost optičke grane frekvencije o valnom broju

$$\omega_+^2(0) = 2\beta \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} \qquad \omega_+(0) = \frac{2 v_0}{a} \frac{M_1 + M_2}{\sqrt{M_1 M_2}}$$

$$\omega_+^2\left(\pm \frac{\pi}{a}\right) = \frac{2\beta}{M_2}$$

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2\beta}{M_2}} \qquad M_1 >> M_2$$



Grafički prikaz disperzivne relacije

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Razmatrajući jednodimenzionalan model, zaključili smo da u jednoatomskoj rešetki postoji jedan oblik, a u dvoatomskoj dva oblika titranja atoma. Kada bi elementarna ćelija sadržavala n atoma, tada bi rešetka mogla titrati na n različitih načina. Dakako, u trodimenzionalnom kristalu broj titranja triput je veći. Za svaki smjer širenja vala postoje tri međusobno okomita titranja. U realnom kristalu svakom valnom vektoru pripada $3n$ frekvencija. Od njih su tri frekvencije akustičke, a preostale frekvencije su optičke. Razumije se, u jednoatomskim rešetkama nema optičkog titranja, pa preostaje samo akustičko titranje.

Vodljivost poluvodiča

- Električnu vodljivost elektronskog poluvodiča u općenitom slučaju izražavamo relacijom: $\sigma = ne\mu_e + pe\mu_p$
- za intrinsični poluvodič, koji se definira jednakošću koncentracija $n = p = ni$, ona prelazi u:

$$\sigma = ni(e\mu_e + e\mu_p)$$

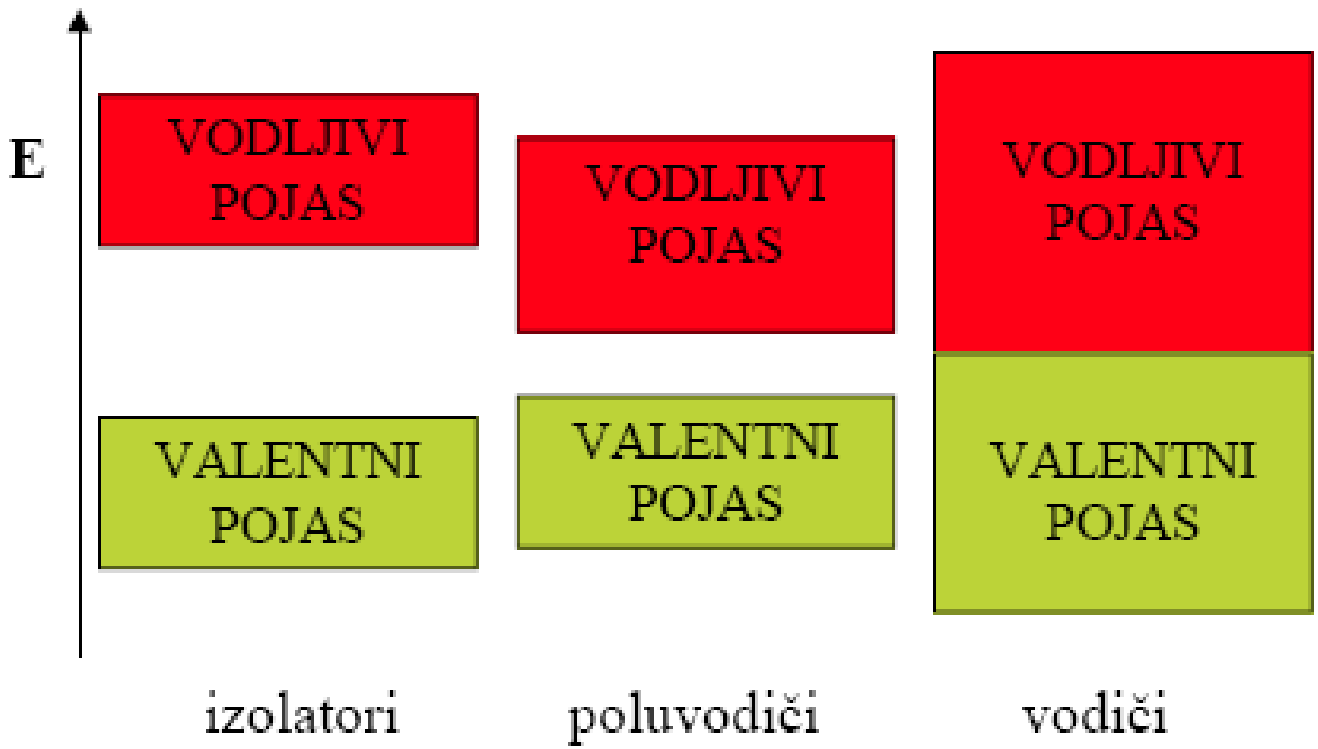
- Za poluvodič n tipa ($n >> p$) relacija prelazi u

$\sigma = ne\mu_e$

- Za poluvodič p tipa ($n << p$) Relacija prelazi u

$\sigma = pe\mu_p$

Dijagram energetskih razina u izolatorima, poluvodičima i metalima



Energijski procijep nekih poluvodiča pri sobnim temperaturama

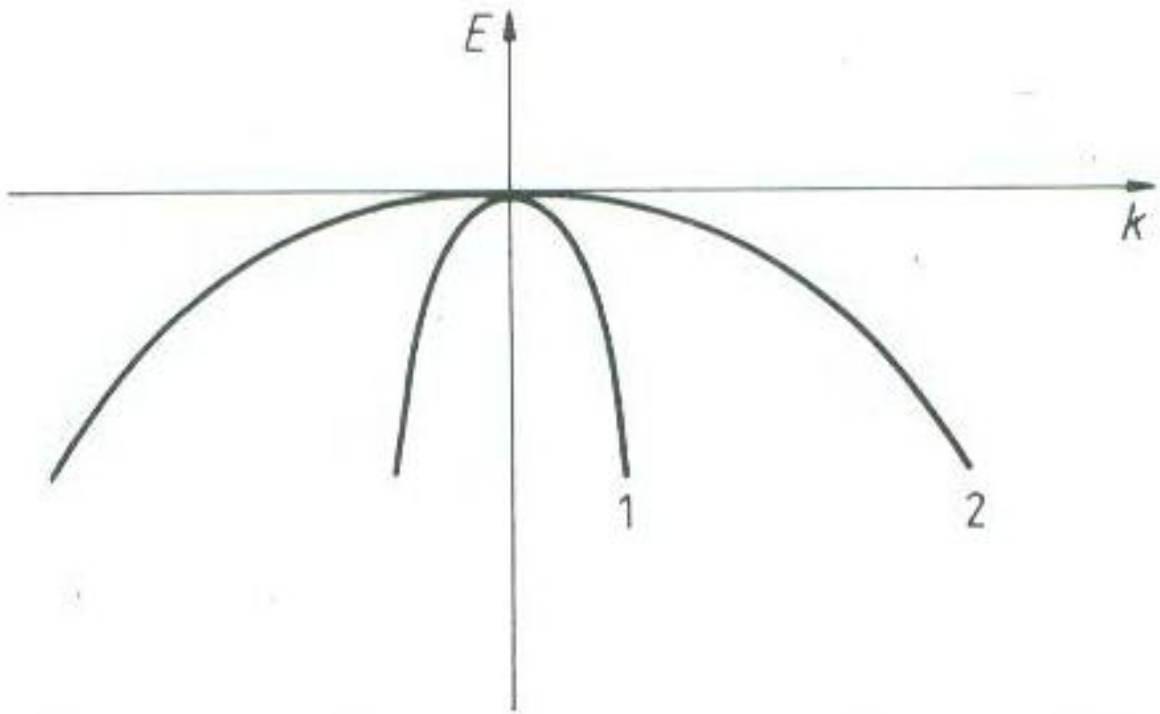
Poluvodič	Si	Ge	Se	Te	CuBr	AgI	CdS	ZnTe	CdTe	HgS
E_g/eV	1,12	0,66	2,1	0,34	2,9	2,8	2,4	2,1	1,5	2,0

Poluvodič	AlAs	AlSb	GaN	GaP	GaAs	GaSb	InP	InAs	InSb
E_g/eV	2,4	1,5	3,4	2,24	1,43	0,67	1,35	0,35	0,18

Energijski procijep nekih poluvodiča pri apsolutnoj nuli temperature i pri 300 K

	$E_g(0)$/eV	$E_g(300)$/eV
Si	1,156	1,114
Ge	0,741	0,663
InP	1,421	1,351
GaAs	1,521	1,432
InAs	0,426	0,354

$$\frac{1}{m_{\mathrm{h}i}^{*}} = -\frac{1}{m_{\mathrm{e}i}^{*}} = -\frac{1}{\hbar^2}\frac{\mathrm{d}^2 E_i}{\mathrm{d}k^2} = \frac{2A_i}{\hbar^2}$$

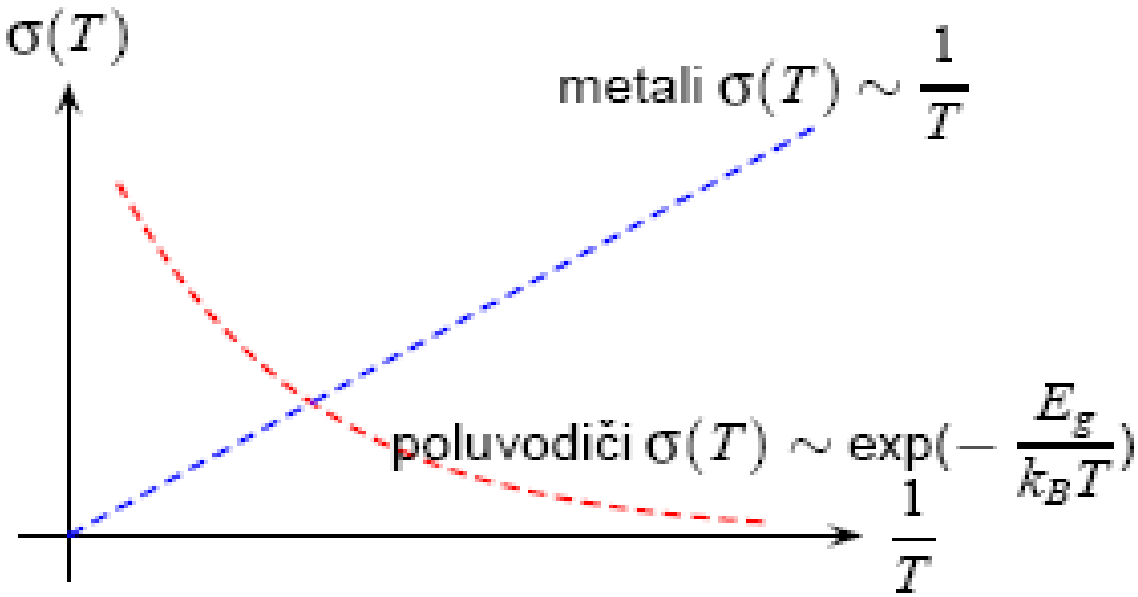


Slika 7.3. Dvije Brillouinove zone koje se dodiruju u točki $k = 0$. U zoni 1 smještene su lake, a u zoni 2 teške šupljine.

Efektivne mase elektrona i šupljina u nekim poluvodičima (m je masa slobodnog elektrona)

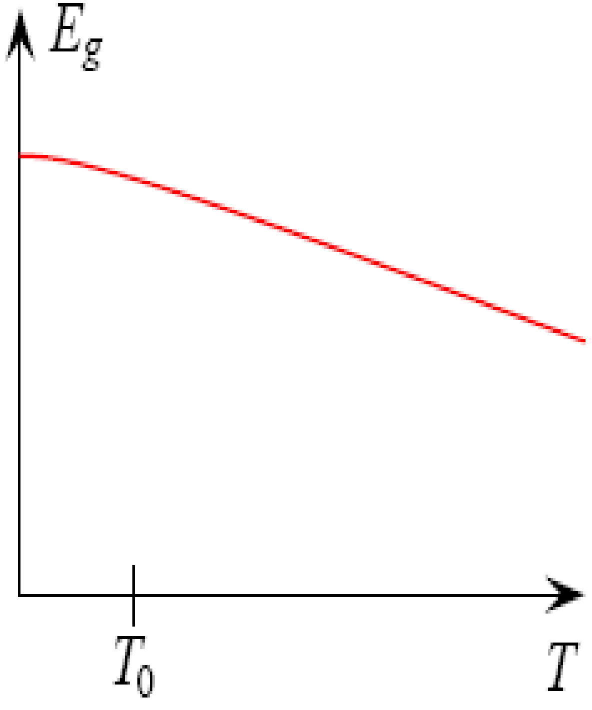
	$\frac{m_e^*}{m}$	$\frac{m_{h1}^*}{m}$	$\frac{m_{h2}^*}{m}$
Si	0,26	0,16	0,49
Ge	0,12	0,04	0,34
InSb	0,014	0,02	≈0,4
InAs	0,025	0,025	0,41
GaSb	0,047	0,052	0,35
GaSb	0,07	0,12	0,68

- Električna vodljivost poluvodiča povećava se s povišenjem temperature
- Ovisnost vodljivosti o temperaturi za metale i poluvodiče



- Širina zabranjenog pojasa se mijenja s temperaturom
- Temperaturna ovisnost energijskog procijepa u poluvodiču

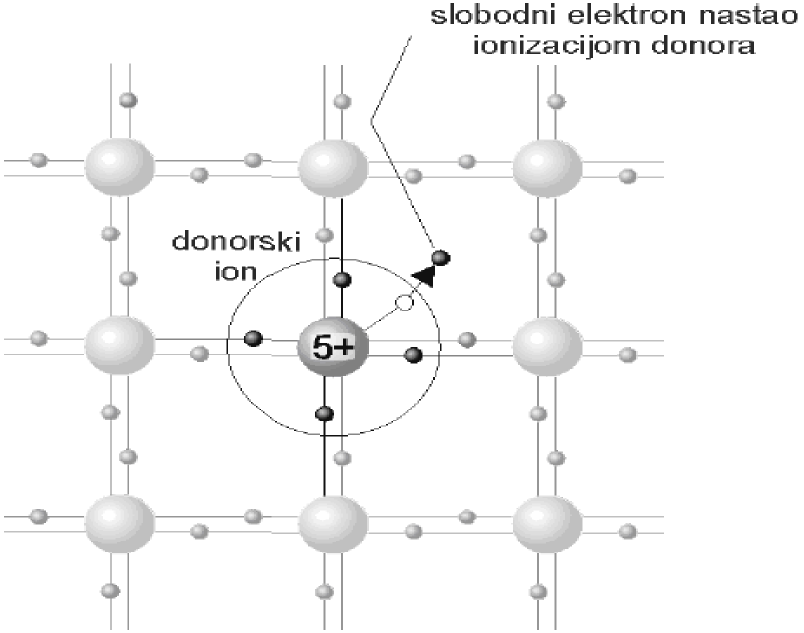
$$E_g = E_g(0) - aT^2/(T+T_0)$$

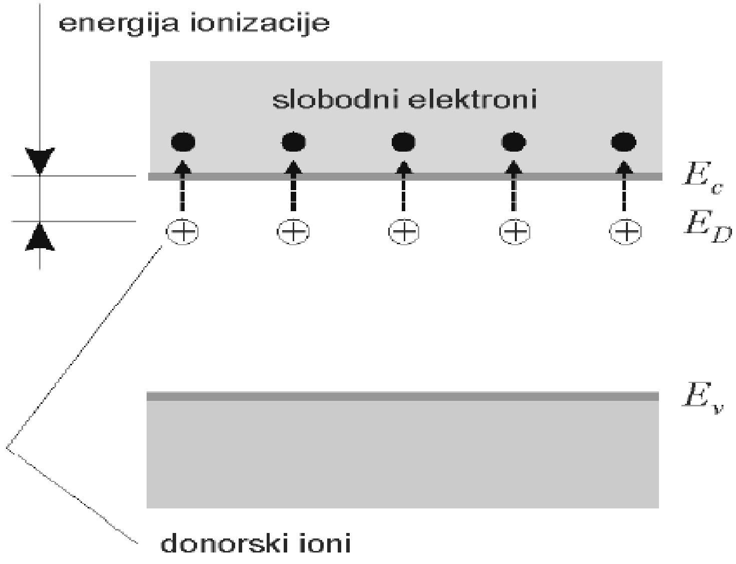


Vrste poluvodiča

- Intrinsičan poluvodič-čisti poluvodič bez primjesa
- Toplinsko pobuđivanje-proces oslobađanja jednog elektrona iz kovalentne veze i nastajanje slobodnog elektrona i šupljine
- Rekombinacija slobodnih elektrona i šupljina-nestajanje slobodnog elektrona i šupljine te uspostavljanje kovalentne veze

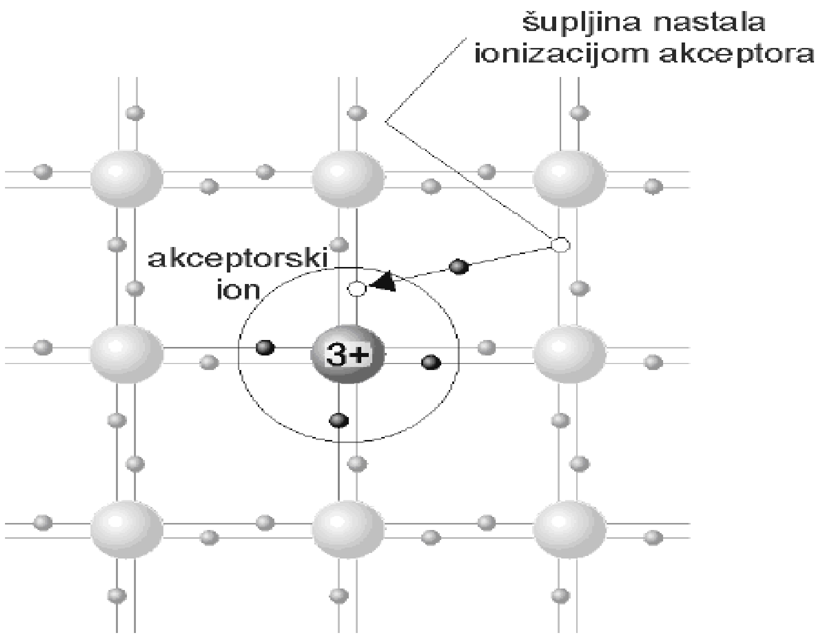
- Ekstrinsičan poluvodič-poluvodič koji sadrži primjese
- Poluvodič N tipa-poluvodič onečišćen s peterovalentnim nečistoćama(N,P,Sb,As)-elektroni su većinski nosioci naboja

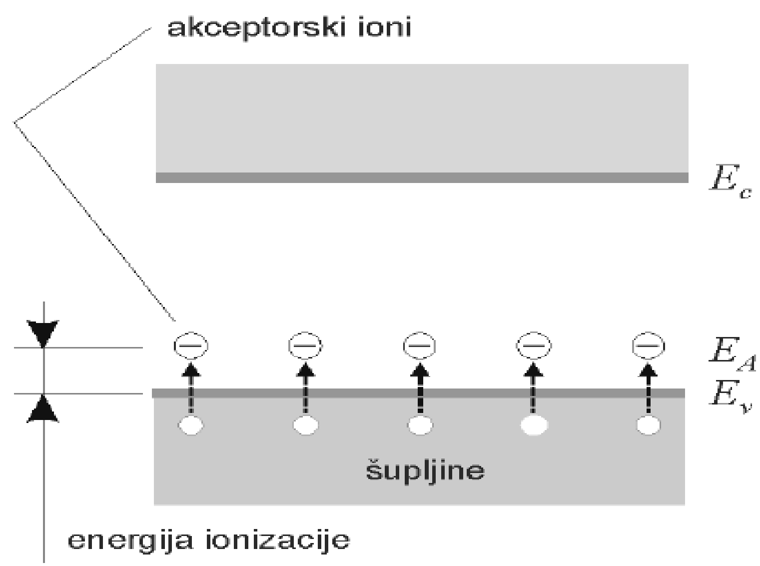




Poluvodič P tipa

- Poluvodič P tipa-poluvodič onečišćen trovalentnim nečistoćama(B,Al,Ga,In
- Nedostajanje jednog elektrona za kompletiranje kovalentne veze-šupljine su većinski nosioci





- Raspodjela koncentracija slobodnih elektrona u vodljivom pojasu i šupljina u valentnom pojasu po energijama opisane su Fermi-Diracovom raspodjelom

  $de(E)=\rho_c(E)\cdot f_e(E)\cdot \mathrm{d}E$

  $dp(E)=\rho_v(E)\cdot f_p(E)\cdot \mathrm{d}E$
- $\rho_c(E)$ i $\rho_v(E)$ su funkcije gustoće kvantnih stanja u vodljivom, odnosno u valentnom pojasu, a $f_e(E)$ i $f_p(E)$ su Fermijeve funkcije za elektrone u vodljivom, odnosno šupljine u valentnom pojasu energija.

- Funkcije gustoće kvantnih stanja

$$\rho_c(E) = \frac{8\sqrt{2}\cdot\pi\cdot(m_e^*)^{3/2}}{h^3}\cdot(E-E_C)^{1/2}$$

$$\rho_V(E) = \frac{8\sqrt{2}\cdot\pi\cdot(m_h^*)^{3/2}}{h^3}\cdot(E_V-E)^{1/2}$$

- iskazuju broj dozvoljenih kvantnih stanja u vodljivom, odnosno valentnom pojasu po jedinici volumena i po jedinci energije. m* su efektivne mase elektrona u vodljivom pojasu, odnosno šupljina u valentnom pojasu, E_c i E_v su energije dna vodljivog, odnosno vrha valentnog pojasa, a *h* je Planckova konstanta.

- Fermijeva funkcija raspodjele

$$f_e(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$

- izražava vjerojatnost da je neko dozvoljeno stanje na energiji *E* popunjeno elektronom dok je

$$f_p(E) = \frac{1}{e^{(E_F-E)/k_b T} + 1}$$

- vjerojatnost da je neko dozvoljeno stanje na energiji *E* popunjeno šupljinom.
- U tom slučaju vrijedi: $f_p(E)=1-f_e(E)$

- Da bismo dobili ravnotežnu koncentraciju elektrona u vodljivom pojasu moramo integrirati:

$$n = \int_{E_C}^{\infty} \rho_C(E) f_e(E) dE = \frac{8\sqrt{2} \cdot \pi \cdot (m_e^*)^{3/2}}{h^3} \cdot \int_{E_C}^{\infty} (E - E_C)^{1/2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{(E-E_F)}{k_B T}}} dE$$

- Prva aproksimacija:

$$\frac{E_F - E_C}{k_B T} << -1$$

$$n = N_C \cdot e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}}$$

- Druga aproksimacija:

$$\frac{E_F - E_C}{k_B T} >> 1$$

$$n = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2m_e^*}{h^2}\right)^{3/2} (E_F - E_C)^{3/2}$$

- Da bi dobili ravnotežnu koncentraciju šupljina u valentnom pojasu moramo integrirati:

$$p = \int_{-\infty}^{E_V} \rho_V(E) \cdot dE = \frac{8\sqrt{2} \cdot \pi \cdot (m_V^*)^{3/2}}{h^3} \int_{-\infty}^{E_V} (E_V - E)^{1/2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{(E_F - E)}{k_B T}}} dE$$

- U prvoj aproksimaciji

$(E_v\text{-}E_f)/k_BT<<-1$

$$p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}}$$

U drugoj aproksimaciji:

$(E_v\text{-}E_f\,)\,/k_BT>>1$

$$p = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{2m_h^*}{h^2}\right)^{3/2}(E_V - E_F)^{3/2}$$

- Produkt koncentracije elektrona i koncentracije šupljina u intrinsičnom poluvodiču ne ovisi o položaju Fermijevog nivoa:

$$n \cdot p = N_C N_V e^{-\frac{E_C - E_V}{k_B T}} = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{k_B T}}$$

- U intrinsičnom poluvodiču imamo:

$$n_i = (n \cdot p)^{1/2} = (N_C N_V)^{1/2} e^{-\frac{E_C - E_V}{2k_B T}} = (N_C N_V)^{1/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

Slučaj dopiranog poluvodiča

- Koncentracija elektrona u vodljivom nivou je dana relacijom

$$n = 2\left(\frac{2\pi m_e^* k_B T}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}}$$

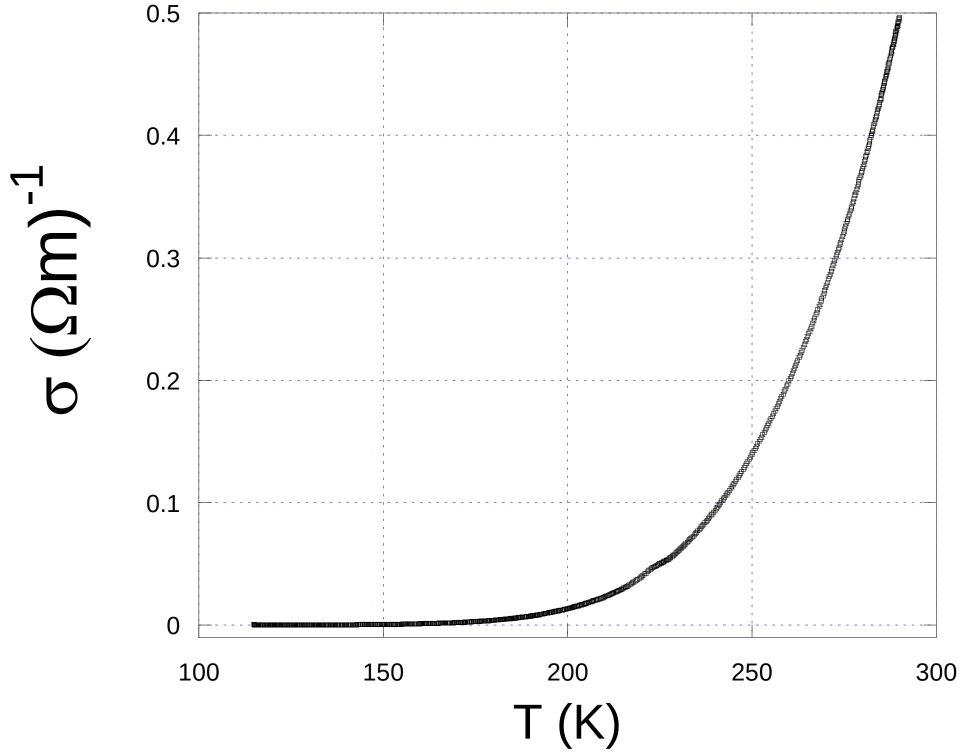
- Koncentraciju možemo izjednačiti u našem slučaju s koncentracijom Nd+ ionizirajućih donorskih atoma:

$$N_d^+ = N_d\left(1 - f(E_d)\right) \approx N_d e^{-\frac{E_F - E_d}{k_B T}}$$

- Posljednje dvije relacije jednoznačno određuju položaj Fermijevog nivoa:

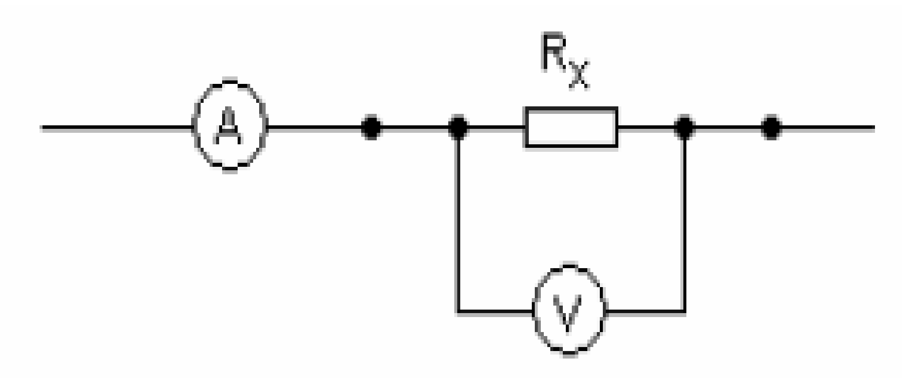
$$E_F = \frac{E_d + E_c}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln\left(\frac{N_d h^3}{2(2\pi m_e^* k_B T)^{3/2}}\right)$$

- Vodljivost je dana kao $$\sigma = \frac{l}{RS}$$



Metoda četiri kontakta

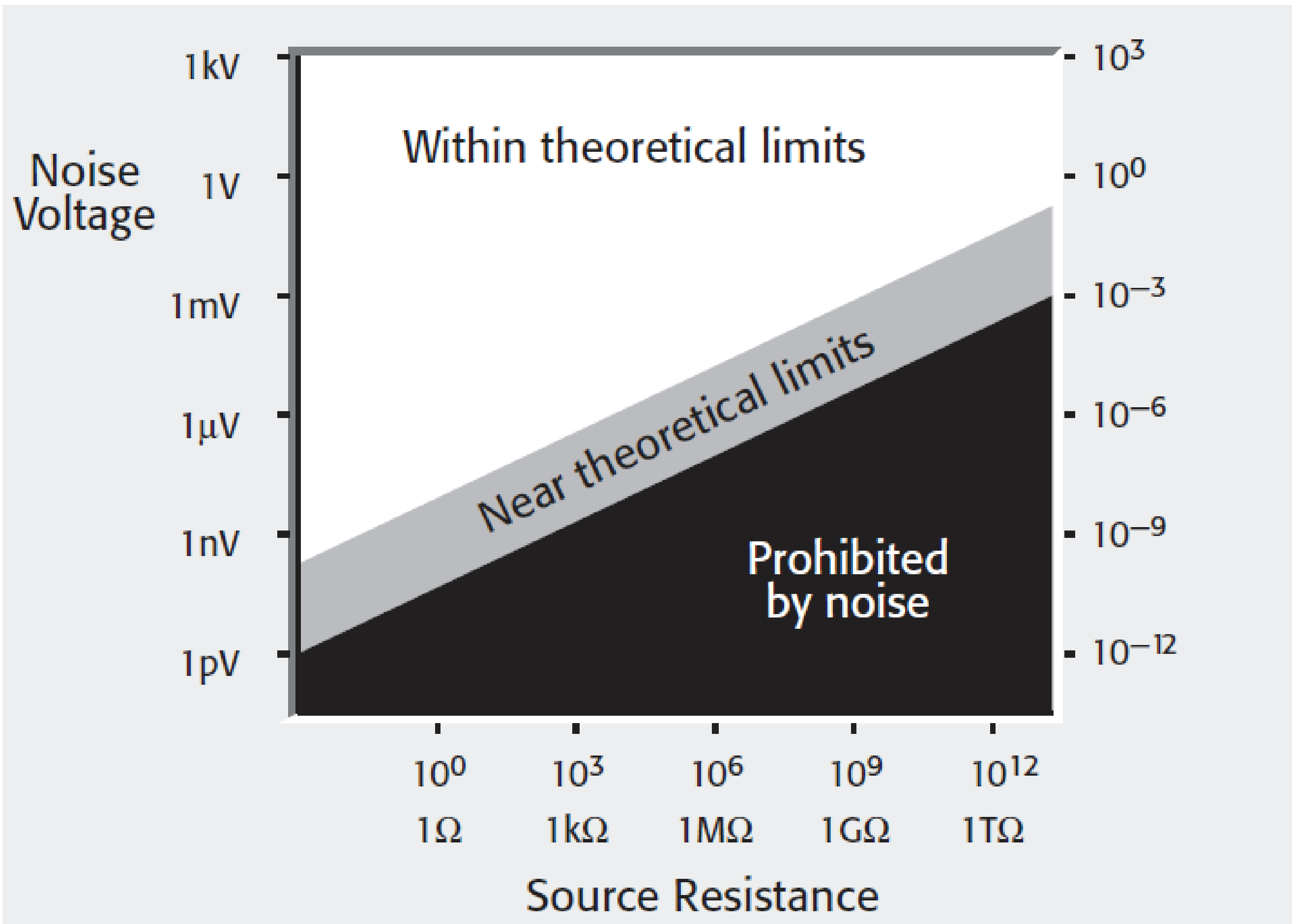
- Dva strujna i dva naponska kontakta radi anuliranja utjecaja kontaktnih otpora u ukupnom izmjerenom otporu uzorka
- Princip mjerenja metodom četiri kontakta



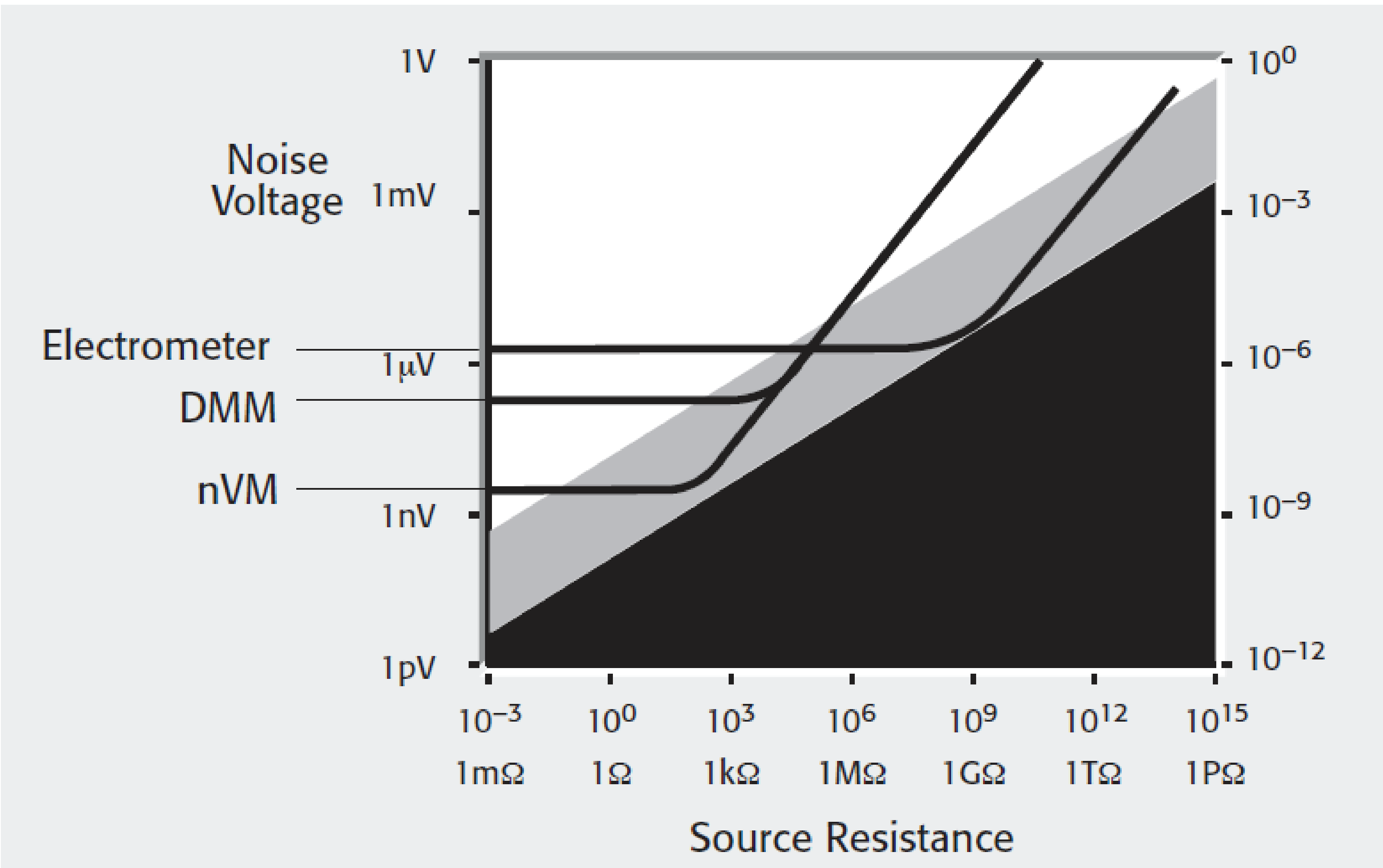
Pregled eksperimentalne instrumentacije

Mjerenje napona, struje, otpora

Teorijska ograničenja mjerenja napona



Ograničenja mjerenja napona za pojedine instrumente



DMM – digitalni multimetar

- $V > 10\ nV$
- $I > 10\ pA$
- $100\ \mu\Omega < R < 1\ G\Omega$

Nanovoltmetar

- Jako osjetljiv voltmetar
- Do 1 nV

Elektrometar

- Za mjerenje velikih otpora ($R > 1\ G\Omega$)
- četiri režima rada:
  - Voltmetar (ulazni otpor veći od 100 TΩ, struja manja od 3fA)
  - Ampermetar ($I > 1\ fA$)
  - Ohmmetar – s konstantnom strujom do 200 GΩ, s konstantnim naponom do 10 PΩ
  - kulonmetar – mjerenje naboja $Q > 10\ fC$

Pikoampermetar

- Jako osjetljiv ampermetar
- $I > 1$ pA

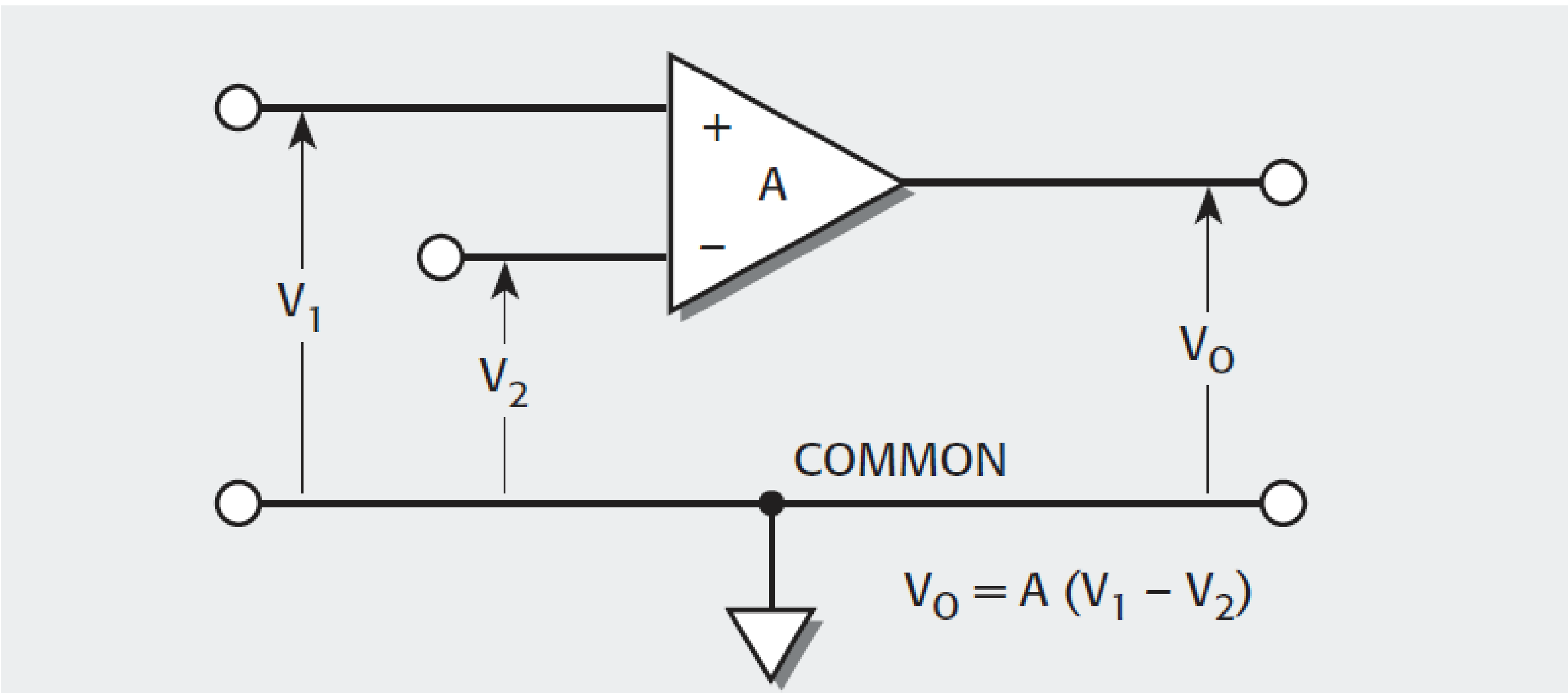
SMU – Source Measure Unit

- Kombiniraju uređaj koji je izvor napona/struje i DMM koji mjeri napon, struju, otpor

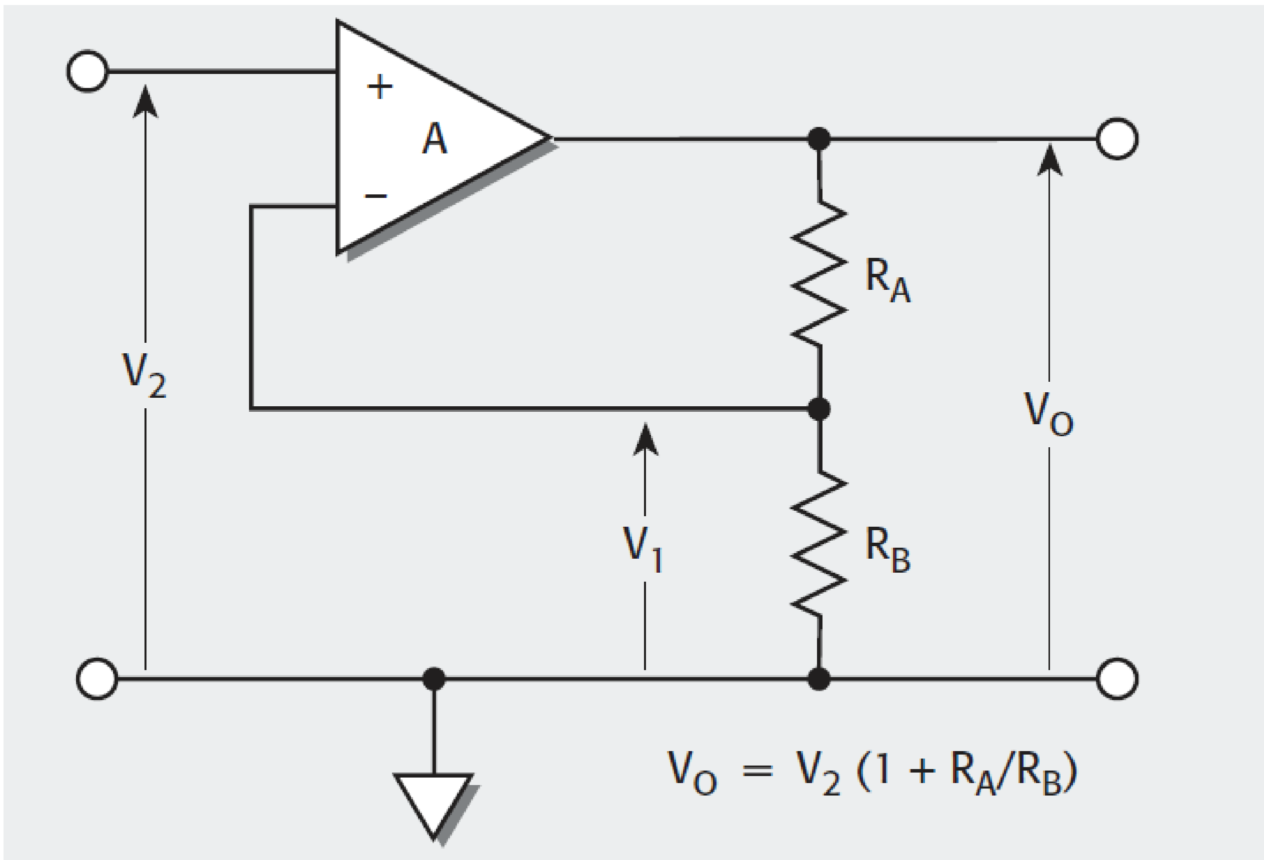
Izvori napona i struje

- DC – kombiniranje s DMM i voltmetrom odnosno pikoampermetrom
- AC – kombiniranje s fazno osjetljivim pojačalom

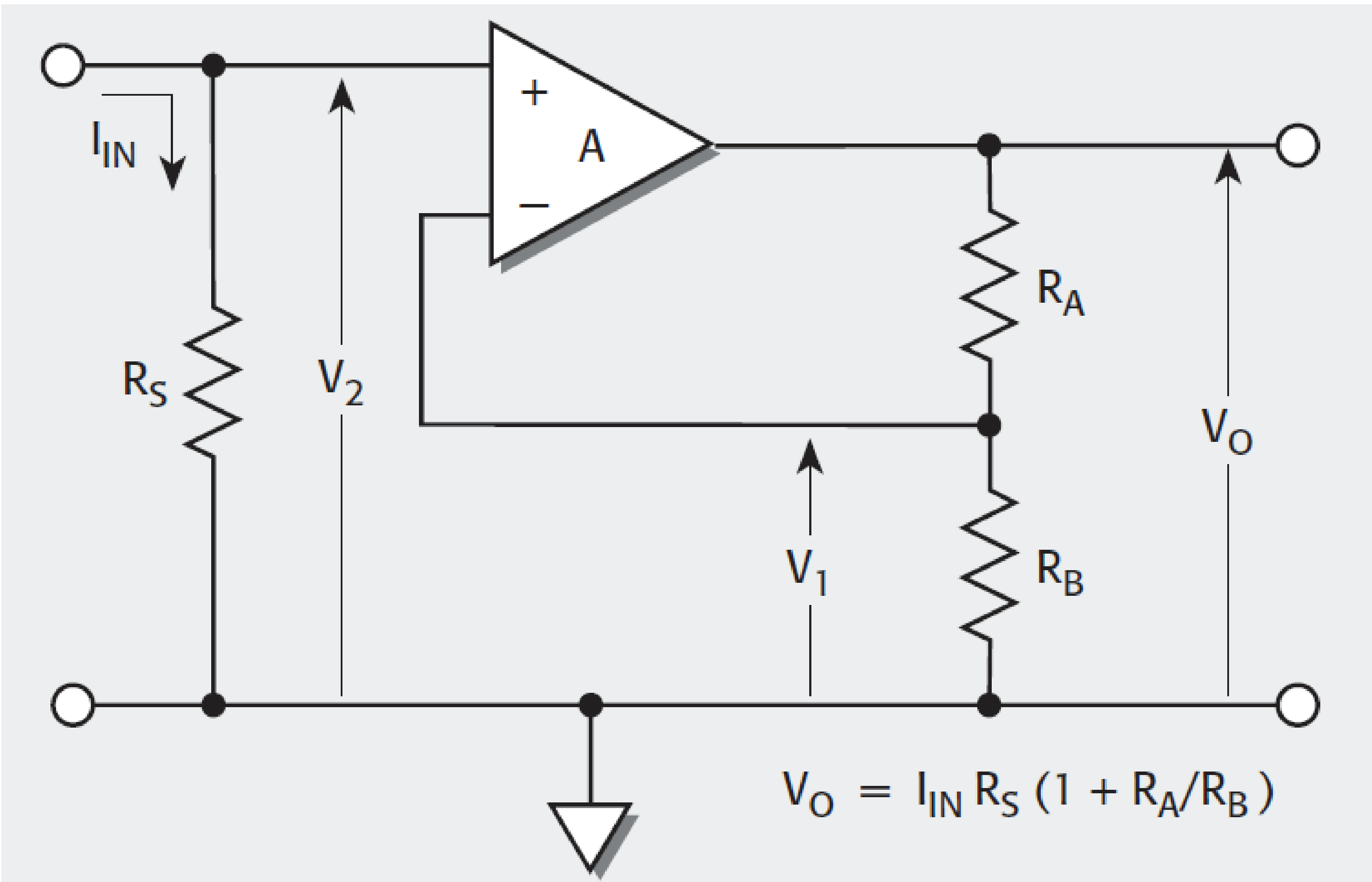
Operacijsko pojačalo



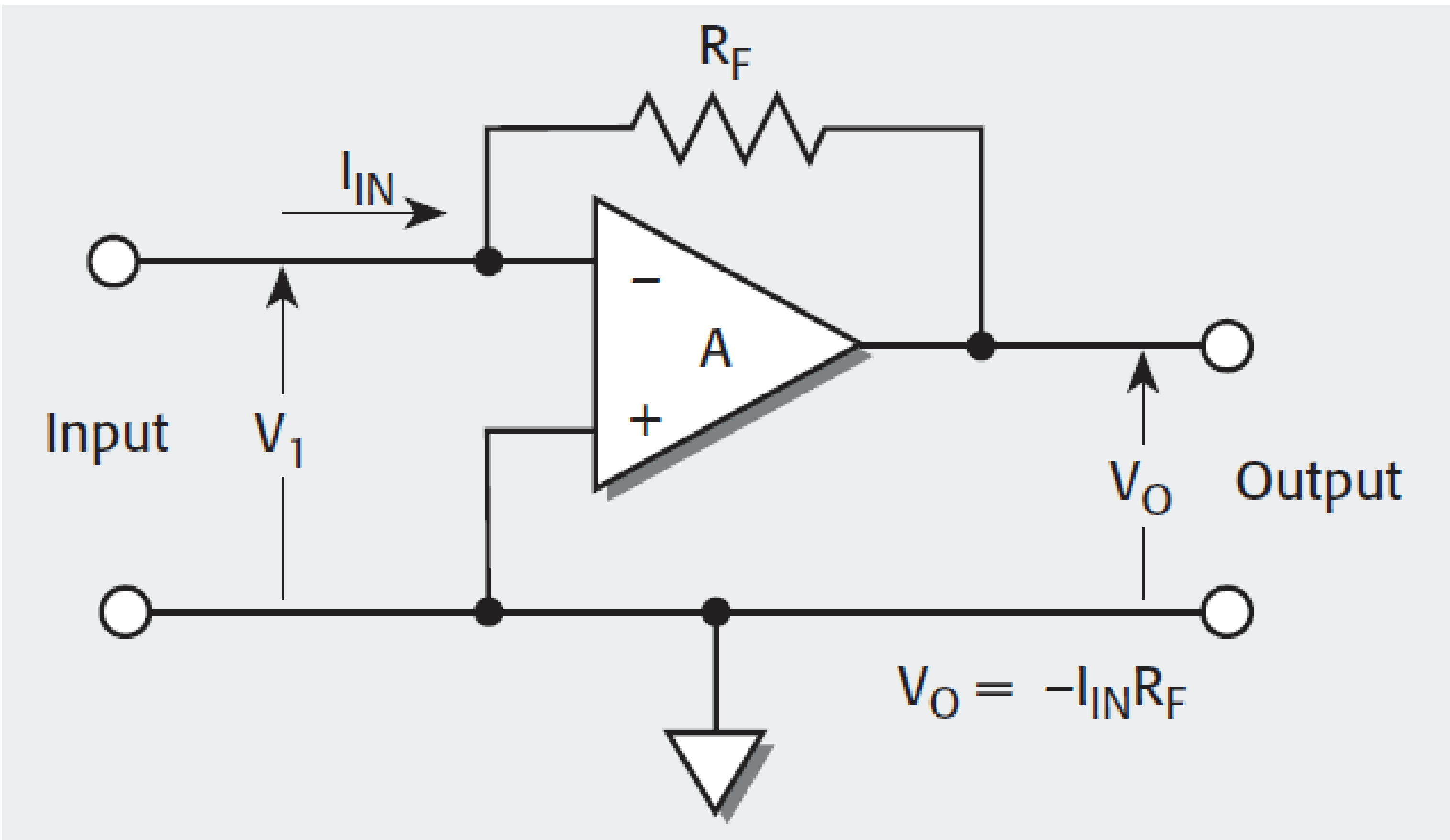
Naponsko pojačalo



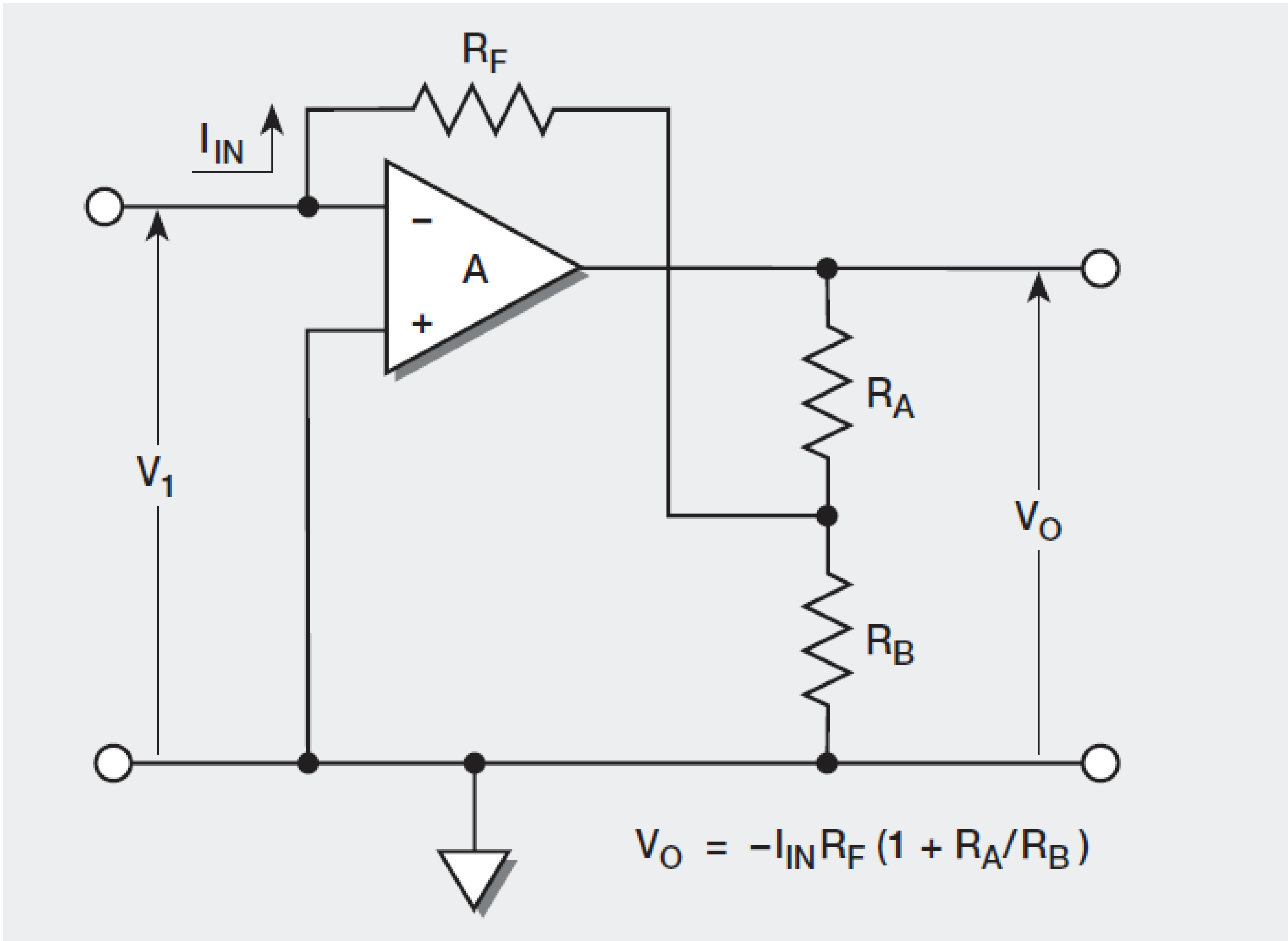
Ampermetar sa šantom



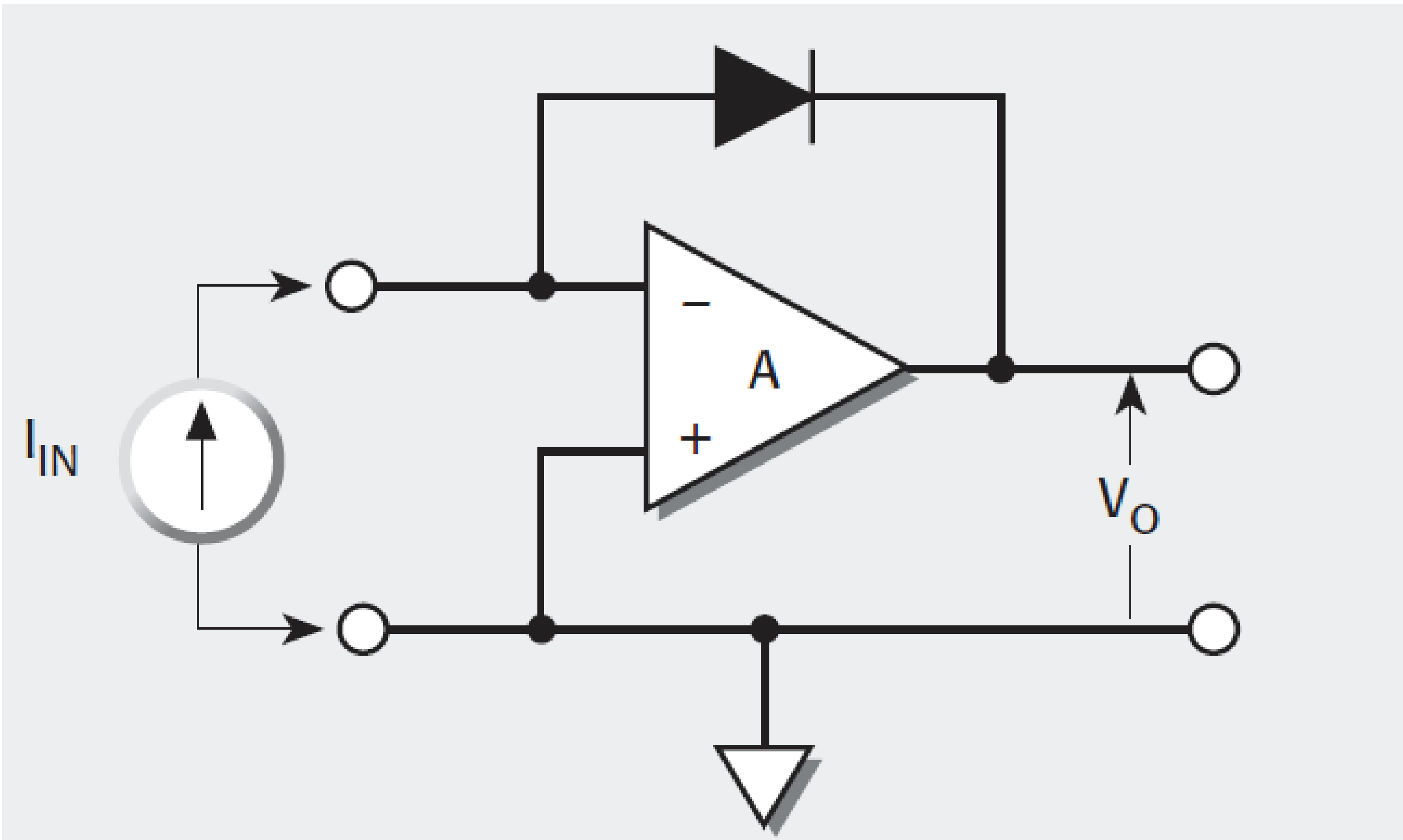
Ampermetar s povratnom vezom



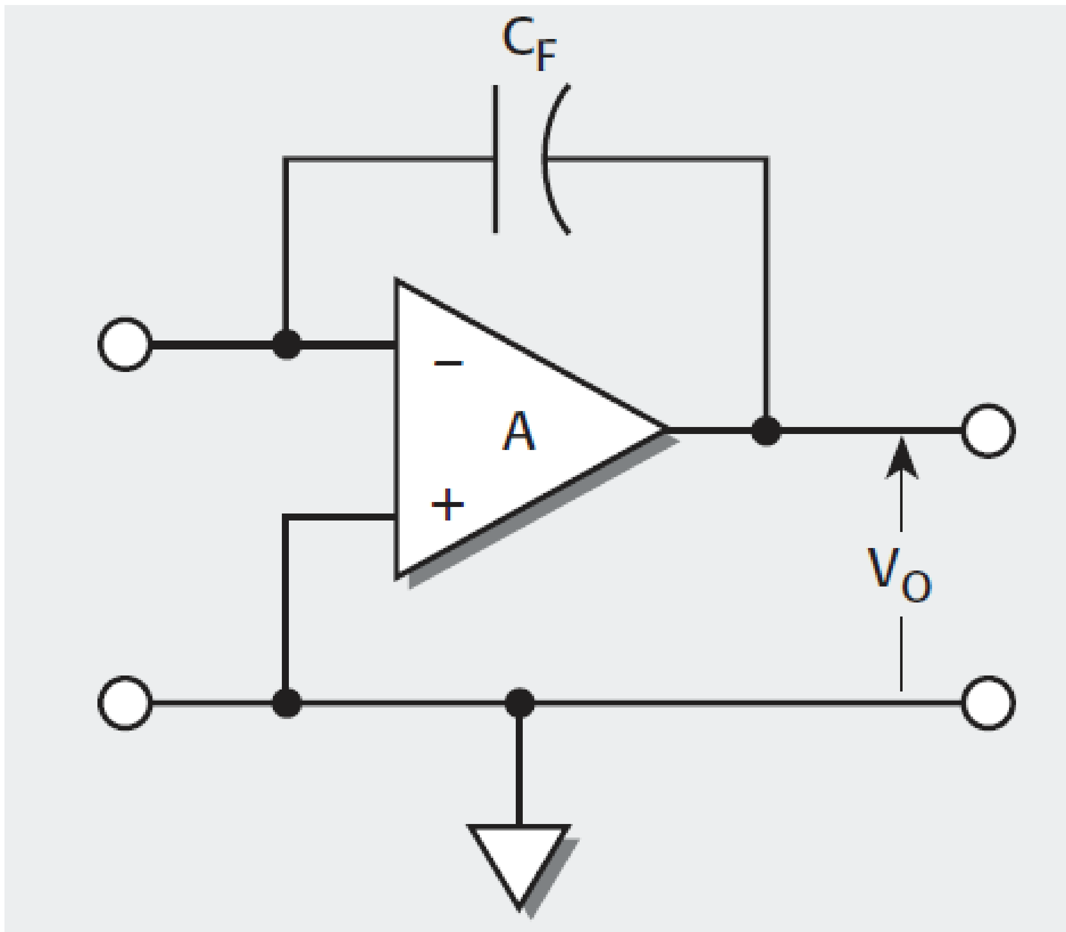
Ampermetar s povratnom vezom



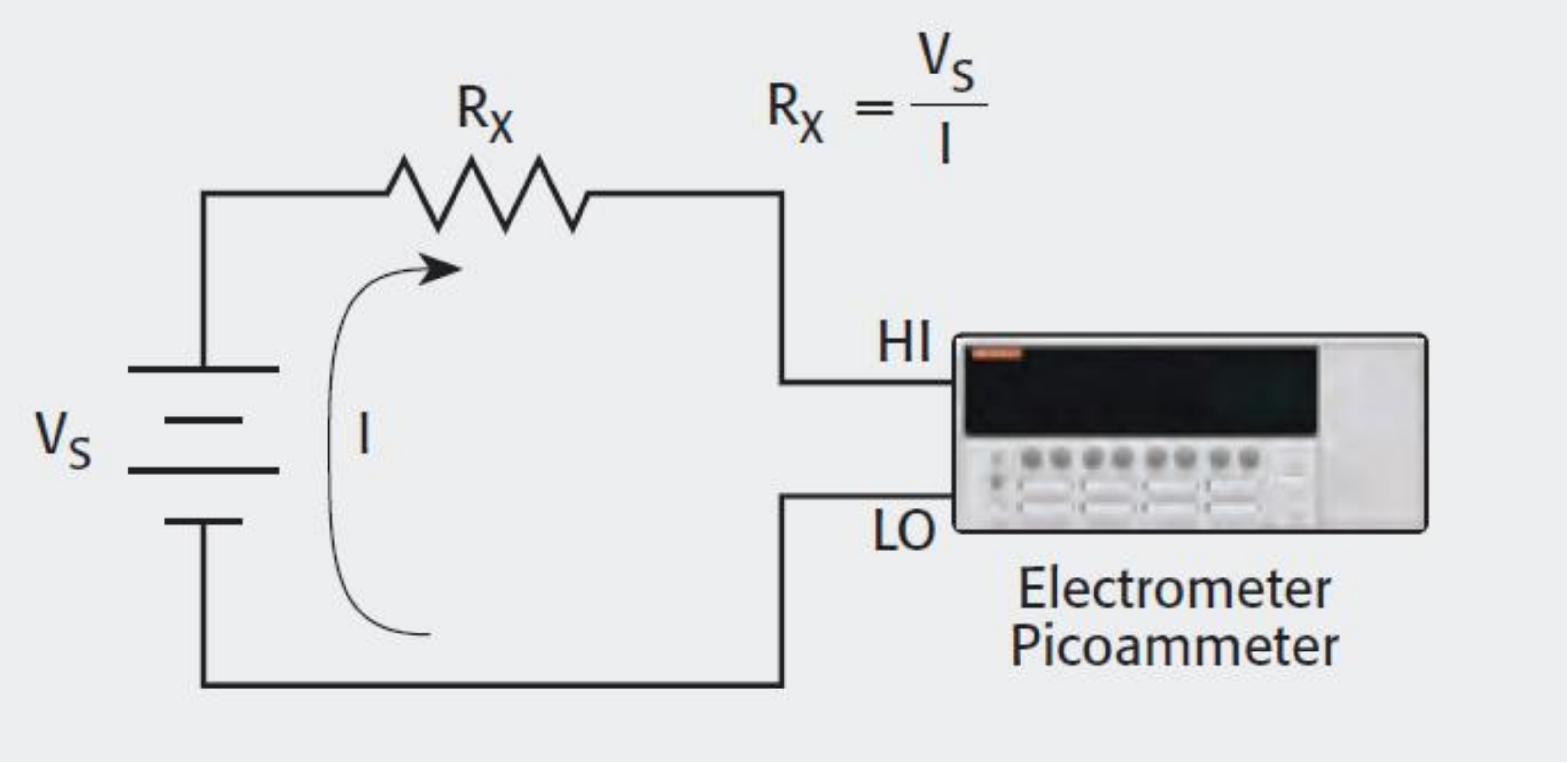
Logaritamski pikoampermetar



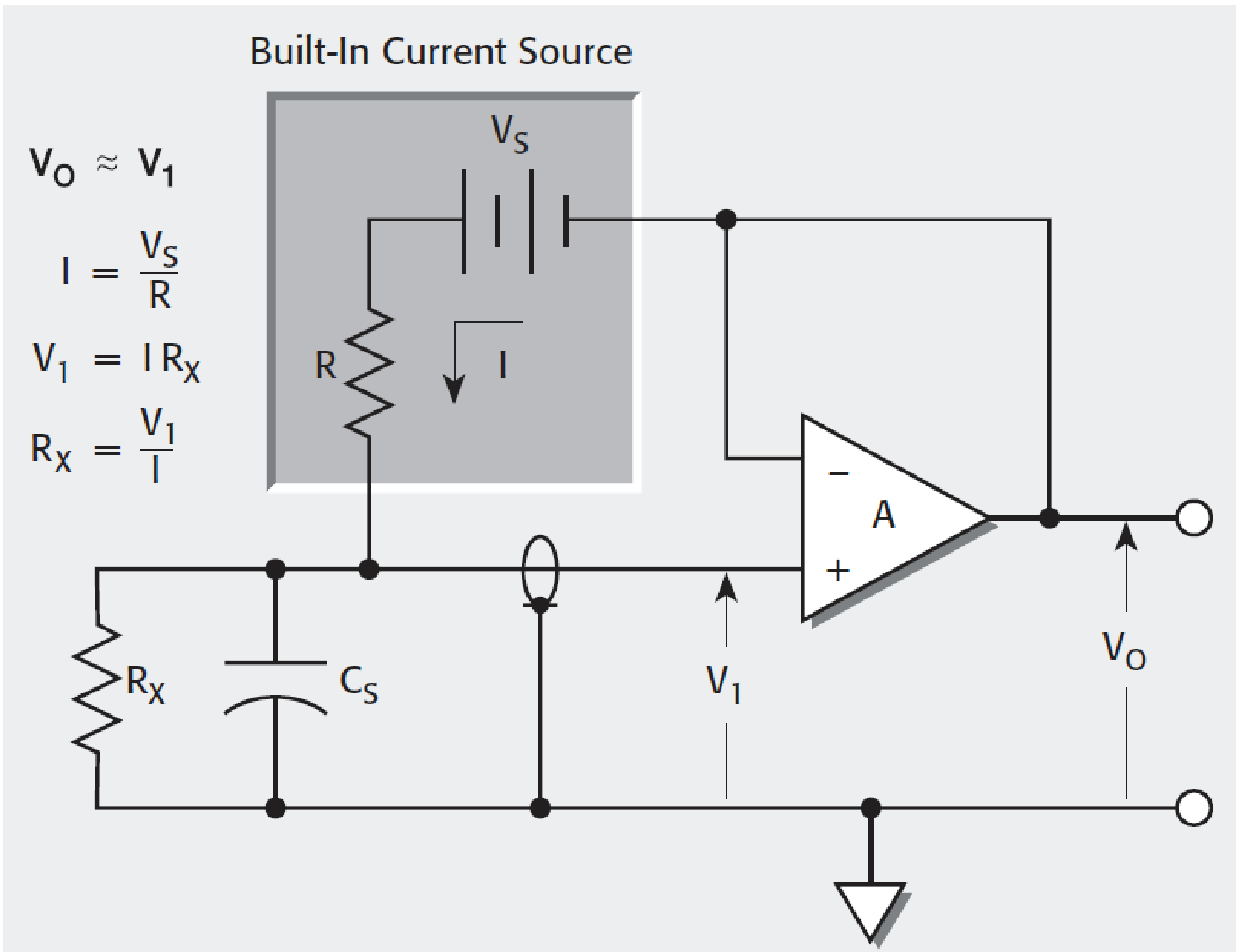
Kulonmetar



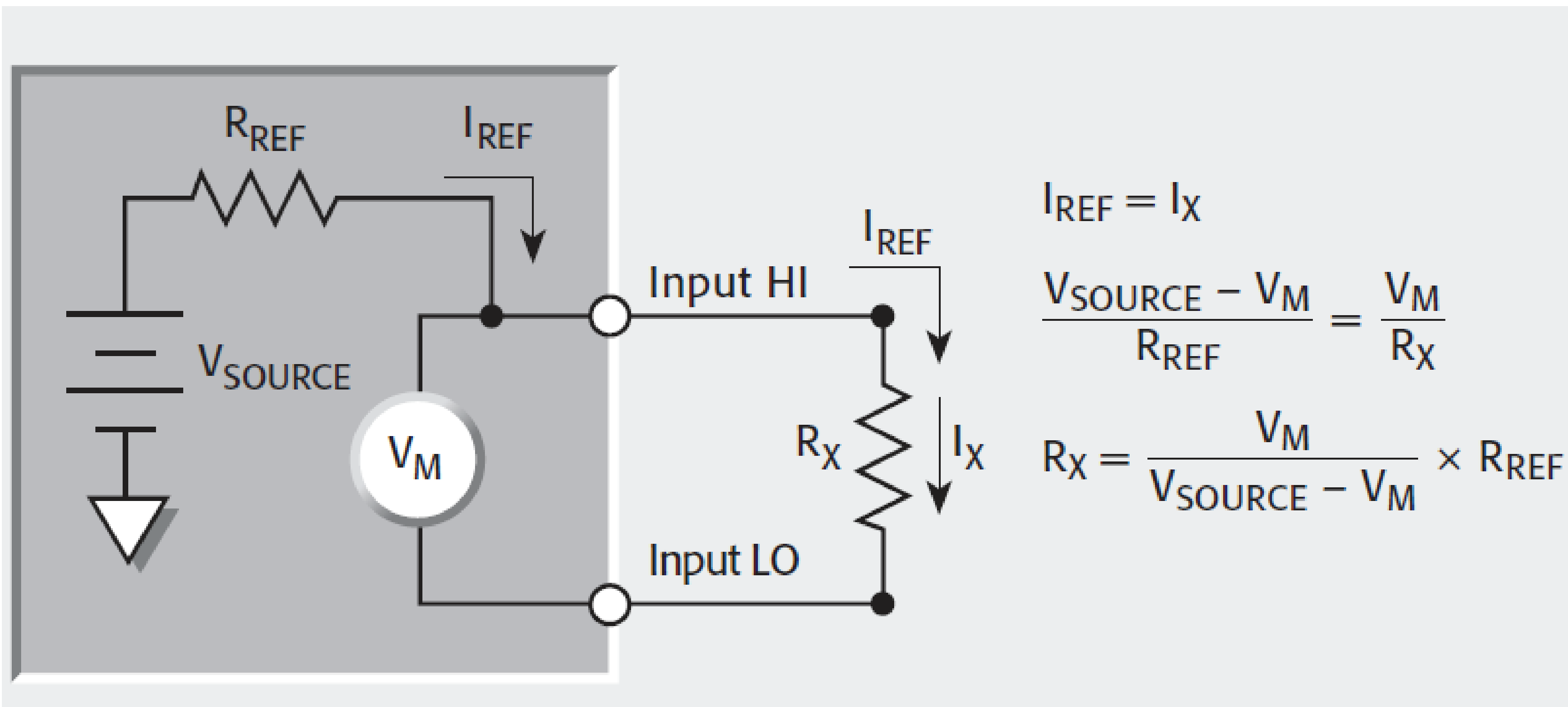
Mjerenje otpora s vanjskim izvorom



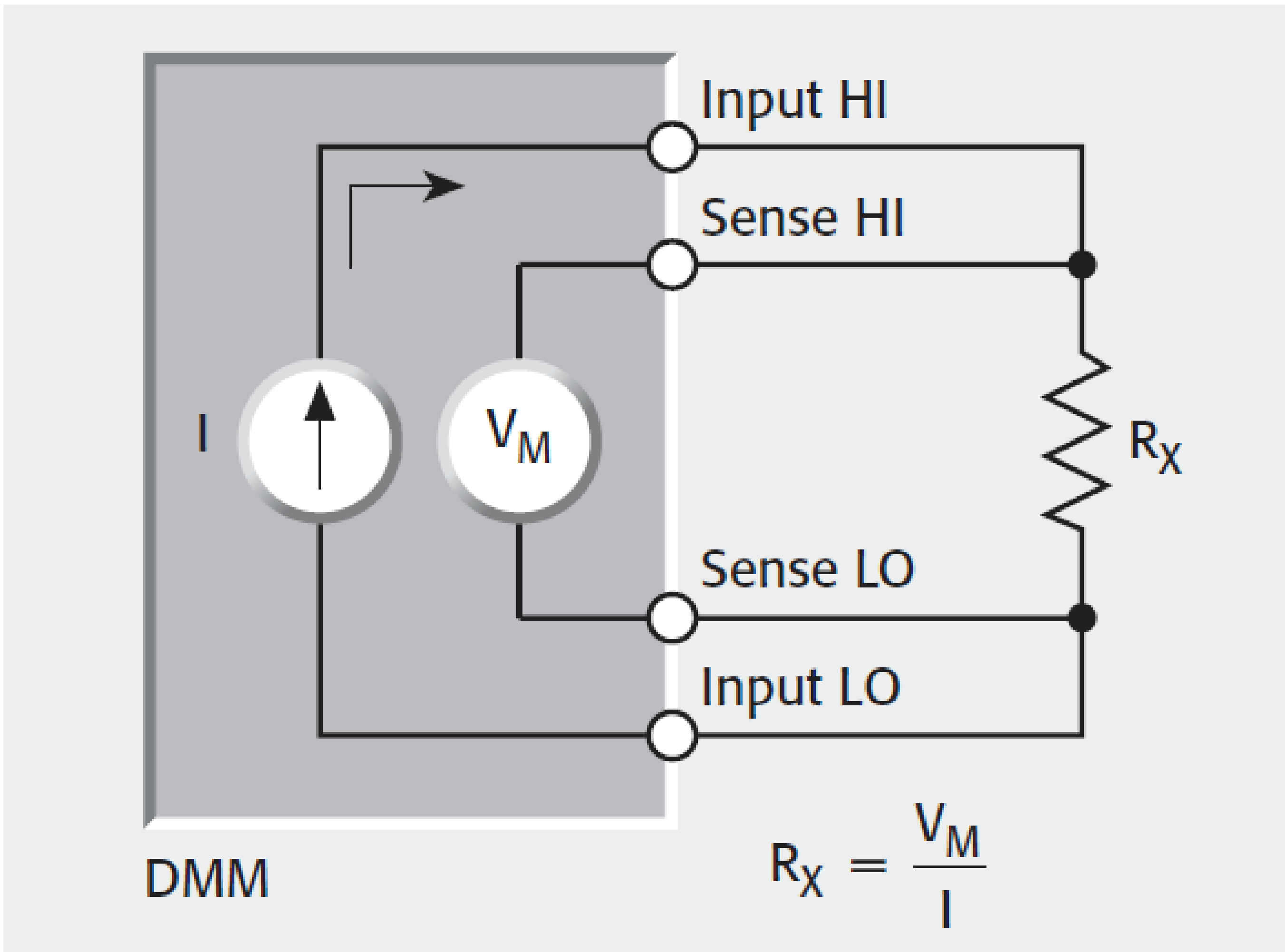
Mjerenje otpora s unutrašnjim izvorom



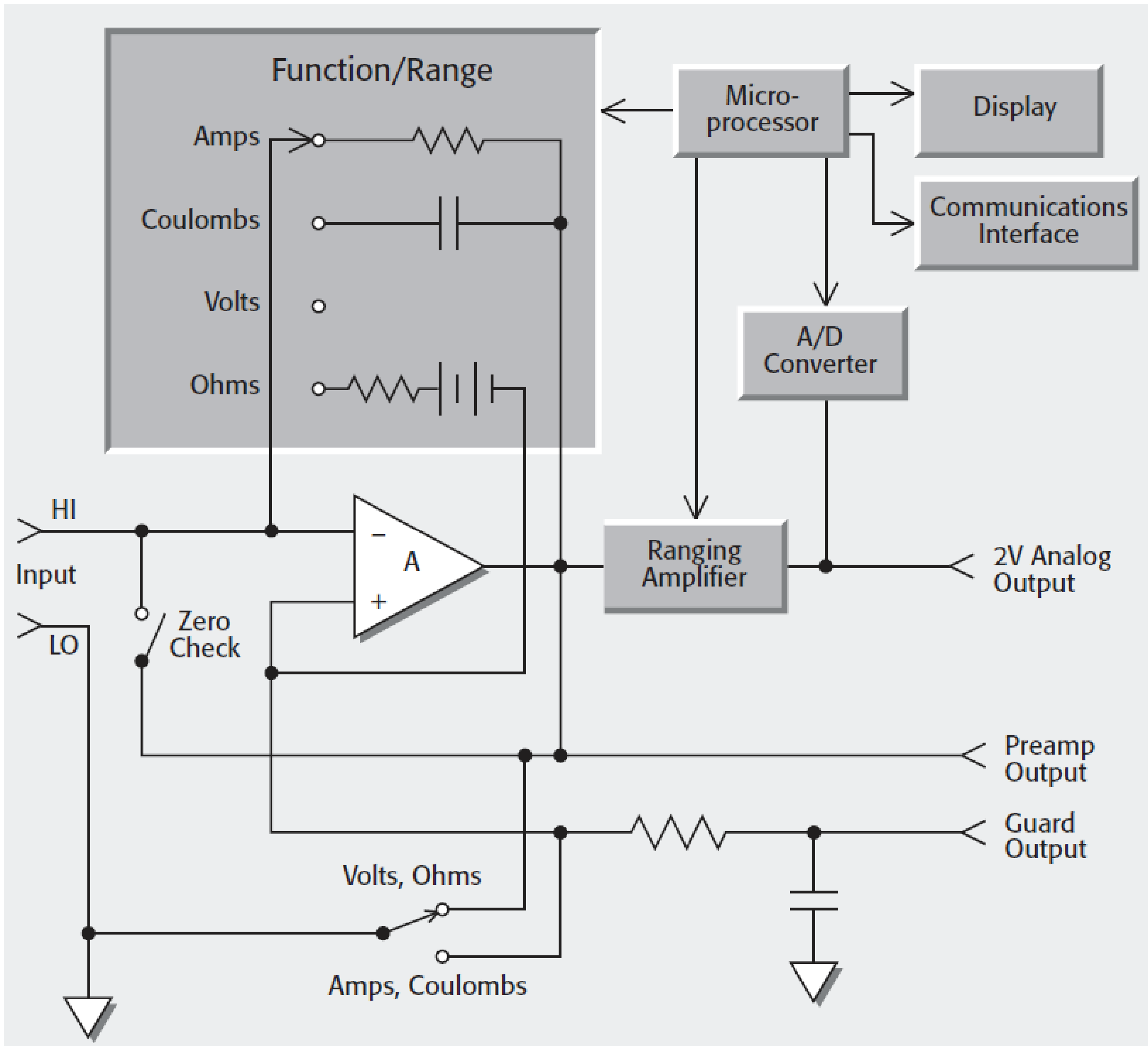
Mjerenje velikih otpora DMMom



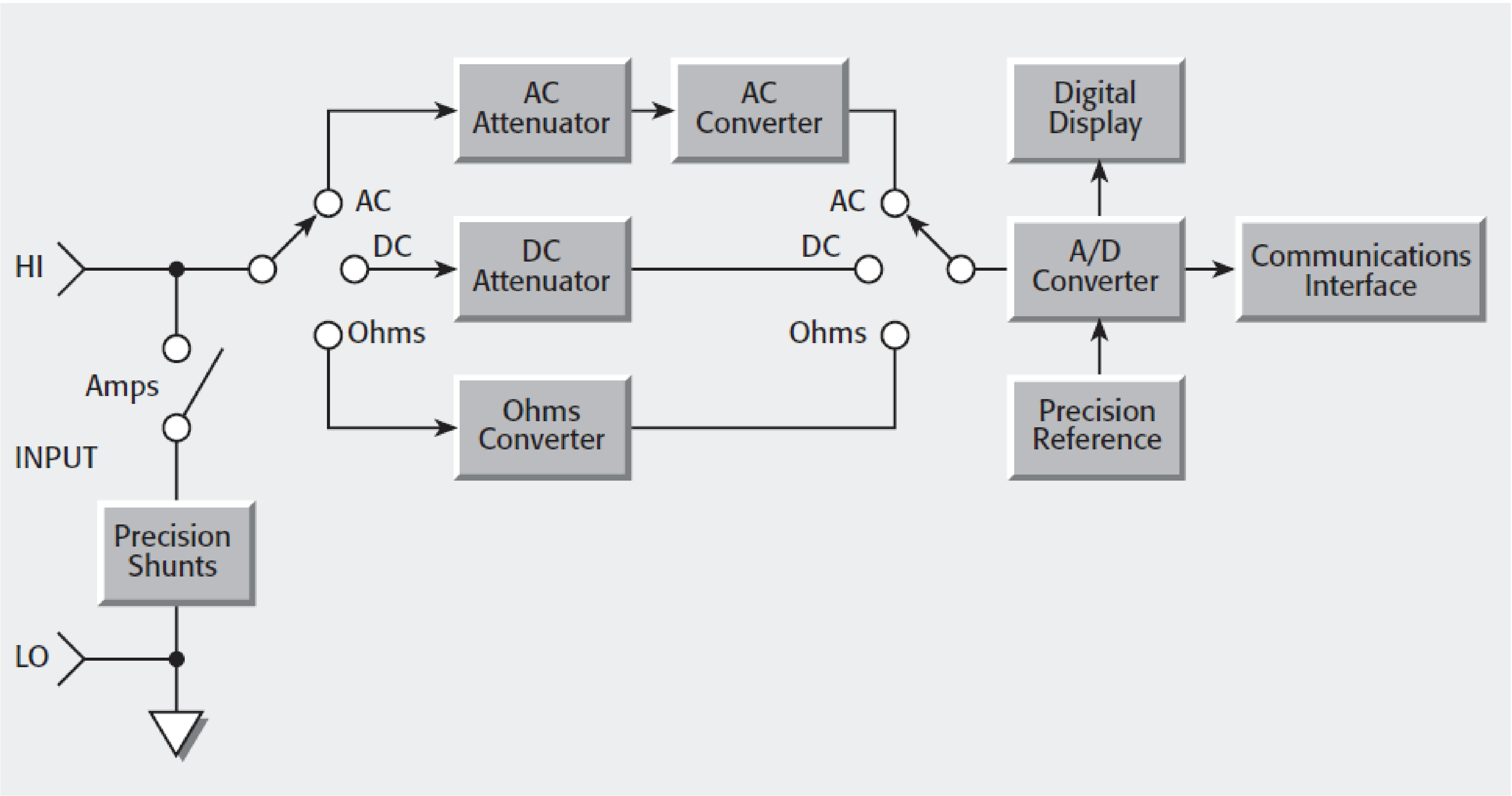
Mjerenje malih otpora



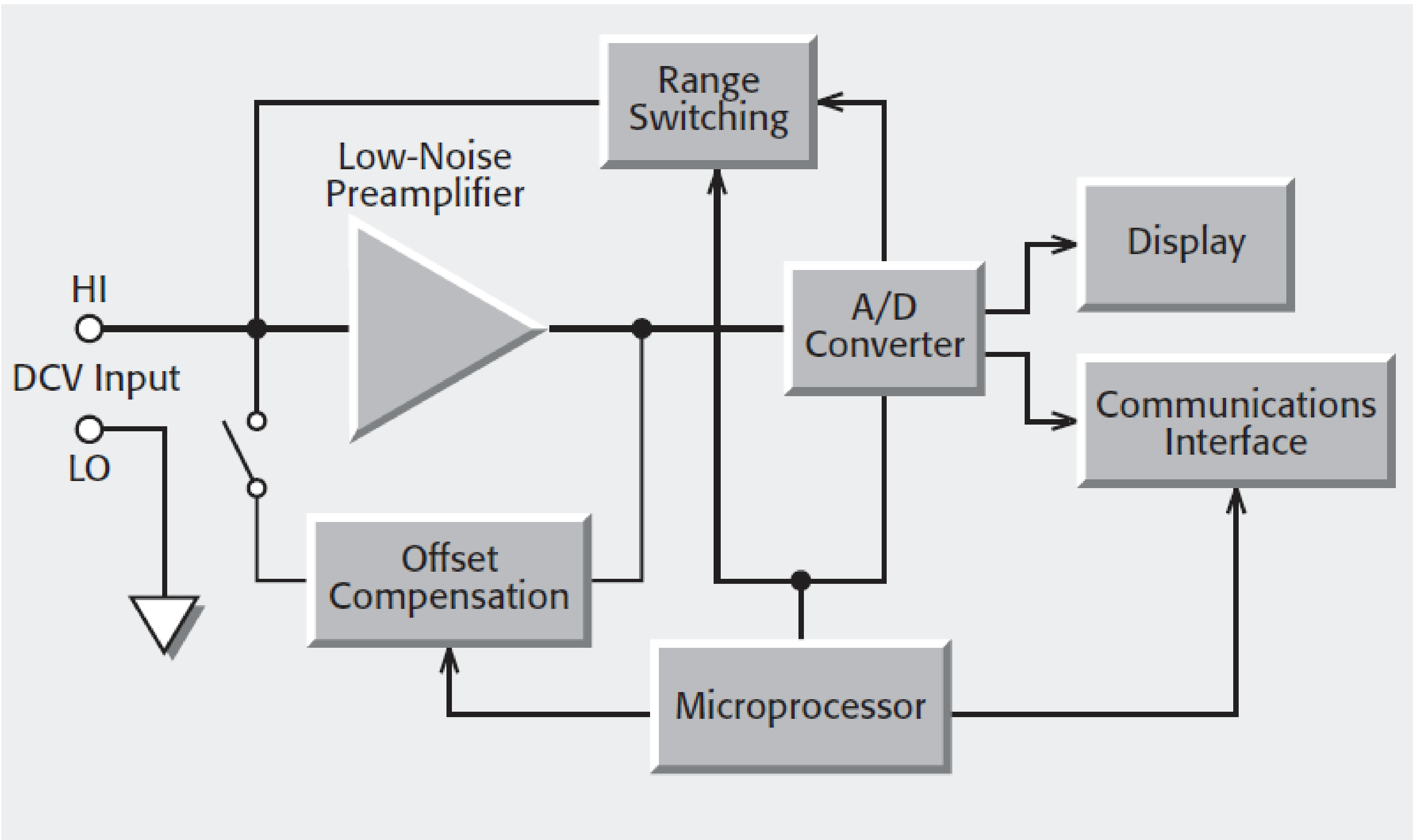
Tipični elektrometar



DMM


AC
Attenuator
AC
Converter
Digital
Display
AC
DC
DC
Attenuator
AC
DC
A/D
Converter
Communications
Interface
HI
Ohms
Ohms
Amps
Ohms
Converter
Precision
Reference
INPUT
Precision
Shunts
LO

Nanovoltmetar



Magnetotransportna mjerenja

Magnetotransportna mjerenja

- Električna otpornost
- Hallov efekt
- Magnetootpor

Poluklasični model vodljivosti

$$\hbar \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}t} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar} \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{1}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\mathrm{rasp}} = 0$$

Boltzmannova
ili transportna
jednadžba

$$f = f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$$

funkcija raspodjele koja opisuje lokalnu gustoću nosioca naboja u stanju opisanom valnim vektorom *k* u okolini točke *r*

Poluklasični model vodljivosti

pretpostavke:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{rasp}} = \frac{f(\mathbf{k}) - f^0(\mathbf{k})}{\tau(\mathbf{k})} \qquad f^0(\mathcal{E}) = \frac{1}{1 + e^{(\mathcal{E}-\mathcal{E}_F)/k_B T}}$$

- da nema temp. gradijenata

$$\frac{e}{\hbar}\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} = \frac{f(\mathbf{k}) - f^0(\mathbf{k})}{\tau(\mathbf{k})}$$

supstitucija: $\quad g(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k}) - f^0(\mathbf{k})$

$$\frac{e}{\hbar}\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\ \right)\cdot\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathbf{k}}\left(\frac{\partial f^0}{\partial\mathcal{E}}+\frac{\partial g}{\partial\mathcal{E}}\right)=\frac{g(\mathbf{k})}{\tau(\mathbf{k})}$$

zanemarujemo umnoške **E** i **B**:

$$\left[1-\frac{e\tau(\mathbf{k})}{\hbar^2}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathbf{k}}\times\mathbf{B}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}\right)\right]g(\mathbf{k})=\frac{\tau(\mathbf{k})e}{\hbar}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathbf{k}}\right)\left(\frac{\partial f_0}{\partial\mathcal{E}}\right)$$

idemo u razvoj (za slaba **B**):

$$g_0(\mathbf{k})=\frac{\tau(\mathbf{k})e}{\hbar}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathbf{k}}\right)\left(\frac{\partial f_0}{\partial\mathcal{E}}\right)$$

$$g_n(\mathbf{k})=\left[\frac{e\tau(\mathbf{k})}{\hbar^2}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathbf{k}}\times\mathbf{B}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}\right)\right]^n g_0(\mathbf{k})$$

Poluklasični model vodljivosti

Gustoća el. struje:

$$\mathbf{j} = -e \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})\mathbf{v} = \frac{-e}{4\pi^3} \int f(\mathbf{k})\mathbf{v}\mathrm{d}^3 k = \frac{-e}{4\pi^3} \int g(\mathbf{k})\mathbf{v}\mathrm{d}^3 k$$

Zadržavamo se na članovima linearnim u **B**, **B** u *z*-smjeru

$$j_x = \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy}(B) E_y$$

Generalizirani Ohmov zakon: $\mathbf{j} = \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{E}$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Tenzor magnetovodljivosti

Poluklasični model vodljivosti

$$\sigma_{xx} = -\frac{e^2}{4\pi^3}\int \tau(\mathbf{k}) v_x^2 \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \mathrm{d}^3 k$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^3}{4\pi^3\hbar}\int \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \tau(\mathbf{k}) v_x (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial v_y \tau(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \mathrm{d}^3 k$$

- Elementi tenzora magnetootpornosti se dobiju invertiranjem tenzora magnetovodljivosti
- zanemarujemo kvadratne članove

$$\rho_{xx} \approx \frac{1}{\sigma_{xx}} \qquad \rho_{yx} \approx \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}$$

Poluklasični model vodljivosti

„Oštra” Fermijeva raspodjela, integrali po Fermijevoj plohi:

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{4\pi^3\hbar}\int \tau(\mathbf{k}) v_x^2 \frac{\mathrm{d}^2 S}{|\mathbf{v}|}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= -\frac{e^3 B}{4\pi^3\hbar^2}\int \left[\tau^2(\mathbf{k})\hbar\left(\frac{v_x^2}{m_{yy}^*} - \frac{v_x v_y}{m_{xy}^*}\right) + \right.\\ &+ \left.\tau(\mathbf{k})\left(v_x^2 v_y \frac{\partial\tau}{\partial k_y} - v_x v_y^2 \frac{\partial\tau}{\partial k_x}\right)\right]\frac{\mathrm{d}^2 S}{|\mathbf{v}|}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{m_{xy}^*} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial k_x \partial k_y}$$

Poluklasični model vodljivosti

- Izotropno relaksacijsko vrijeme
- iščezavanje recipročne vrijednosti nedijagonalnih elemenata tenzora efektivne mase:

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2\tau}{4\pi^3\hbar}\int v_x^2 \frac{\mathrm{d}^2S}{|\mathbf{v}|}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^3\tau^2B}{4\pi^3\hbar}\int \frac{v_x^2}{m_{yy}^*}\frac{\mathrm{d}^2S}{|\mathbf{v}|}$$

Poluklasični model vodljivosti

- Sferična Fermijeva ploha:

$$v_x = v_F/\sqrt{3} \qquad m^*_{xx} = m^*_{yy} = m^*_{zz} = m^*$$

$$v_F = \hbar k/m^* \qquad n = \frac{N}{V} = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} 1 = \frac{2}{6\pi^3}\int \mathrm{d}^3k = \frac{k_F^3}{3\pi^2}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma = \frac{e^2\tau v_F}{12\pi^3\hbar} \times 4\pi k_F^2 = \frac{ne^2\tau}{m^*}$$

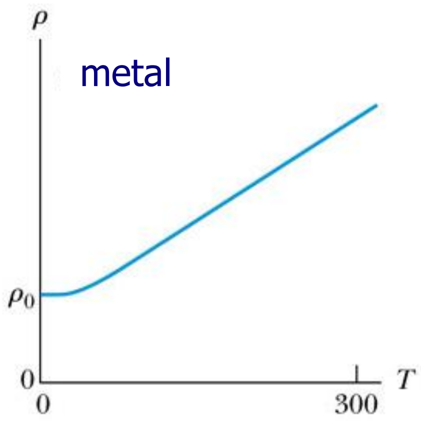
$$\sigma_{xy} = -\frac{e^3\tau^2 B v_F}{12\pi^3\hbar m^*} \times 4\pi k_F^2 = -\frac{e^3\tau^2 Bn}{m^{*2}}$$

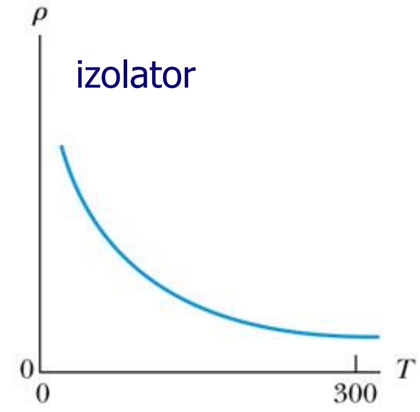
Električna otpornost

$$\rho = \frac{m^*}{ne^2\tau} = \frac{1}{ne\mu}$$

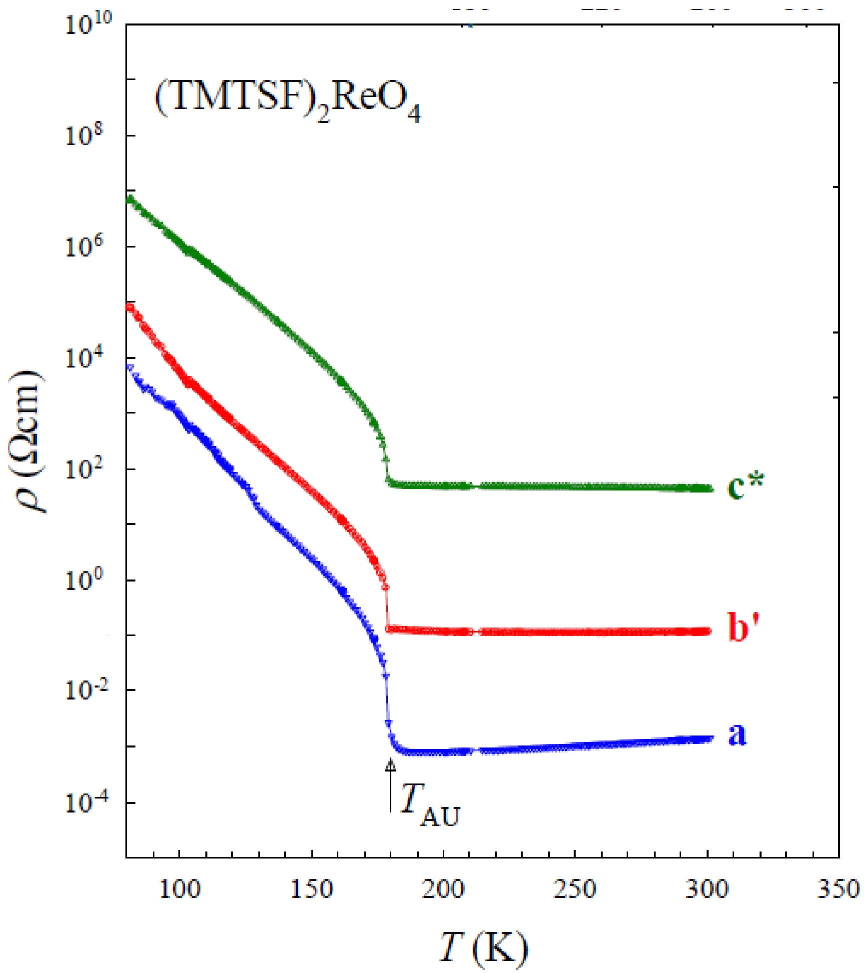
$$\mu = \frac{e\tau}{m^*}$$

$$n \propto e^{-\Delta/T}$$

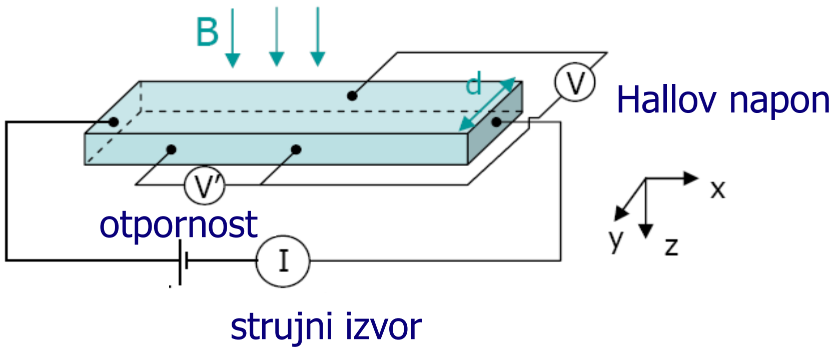




Anizotropna otpornost



Hallov efekt



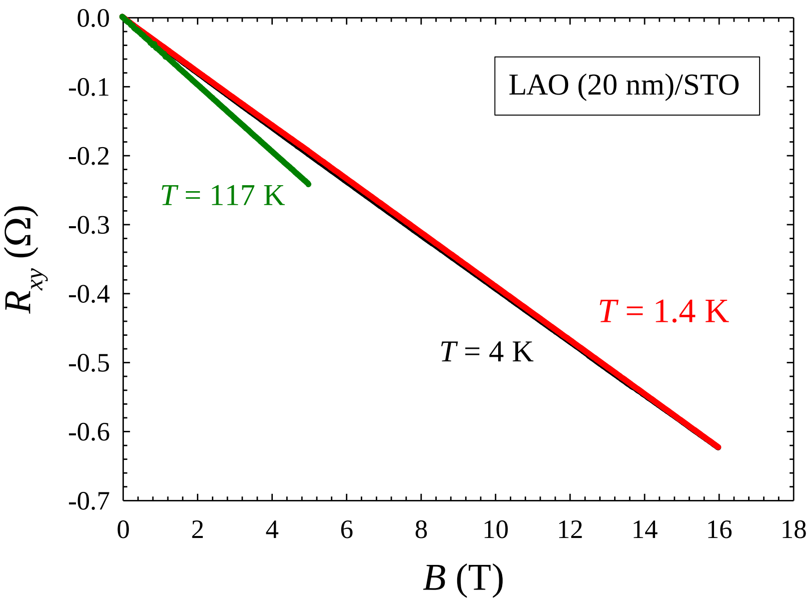
$$\frac{V_H}{d} = E_y = \rho_{yx} j_x$$

$$\rho_{yx} \approx \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}$$

Hallov koeficijent:

$$R_H = \frac{\rho_{yx}}{B} = -\frac{1}{ne}$$

$$\frac{V_H}{d} = \rho_{yx} j_x = R_H B j_x$$



Hallov efekt

Dvije vrste nosioca naboja:

$$R_H = \frac{p\mu_h^2 - n\mu_e^2}{e(n\mu_e + p\mu_h)^2}$$

$$n = p$$

$$\mu_e = \mu_h$$

$$\Rightarrow \quad R_H = 0$$

Ako dominira jedna vrsta nosioca naboja

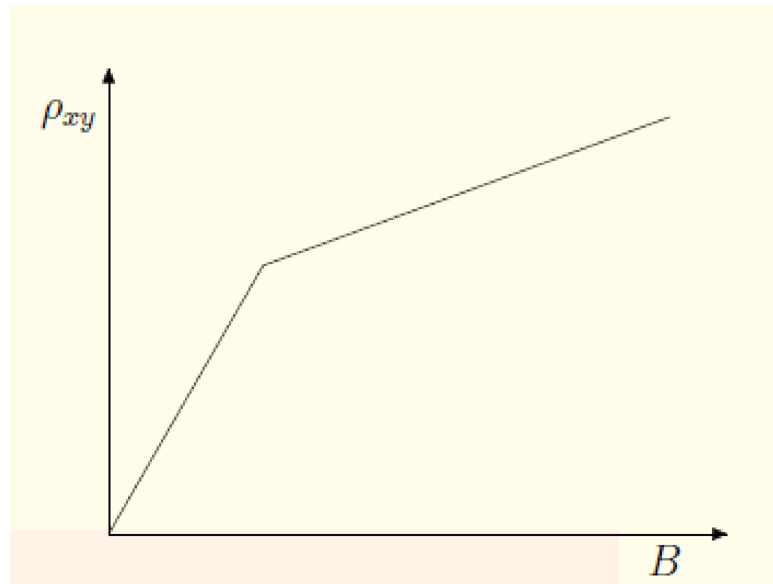
$$R_H = -\frac{1}{ne}$$

$$R_H = \frac{1}{pe}$$

$$R_H \propto \rho \propto \frac{1}{n} \propto e^{\Delta/T}$$

Hallov efekt za feromagnete

$$\rho_{yx} = R_S M + R_H B$$



Pokretljvost

- mjerenjem otpornosti i Hallovog efekta
- Hallova pokretljivost:

$$\mu_H = \frac{|R_H|}{\rho}$$

- u slučaju samo jedne vrste nosioca:

$$\mu_H = \mu = \frac{e\tau}{m^*}$$

Magnetootpor

$$\mathrm{MR} = \frac{\rho_{xx}(B) - \rho_{xx}(0)}{\rho_{xx}(0)}$$

- u ovom modelu smo zanemarili magnetotpor
- u većini materijala mali (nekoliko %) i $\sim B^2$

- područje slabih polja: $\mu B \ll 1$
- područje jakih polja: $\mu B \gg 1$
- područje kvantnih

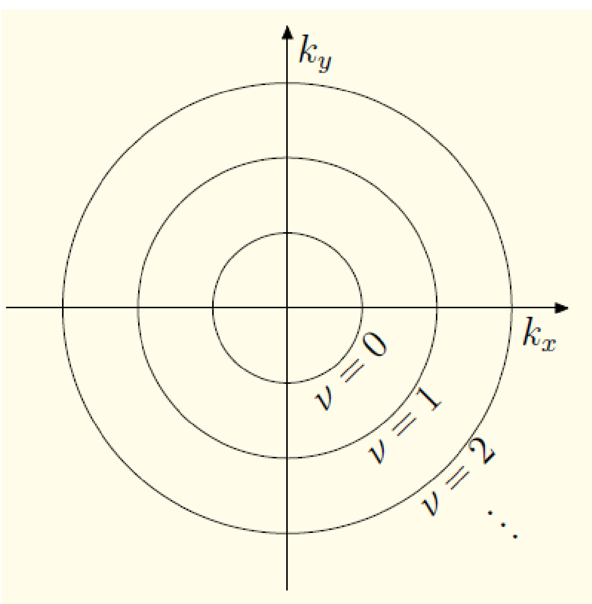
(Shubnikov-de Haas) oscilacija:

$$\hbar\omega_c \geq k_B T \;\; (\omega_c = eB/m^*)$$

Shubnikov-de Haas oscilacije

- Slobodan elektron u magnetskom polju (u *z*-smjeru)

$$\varepsilon_\nu(k_z) = \frac{\hbar^2}{2m^*}k_z^2 + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$

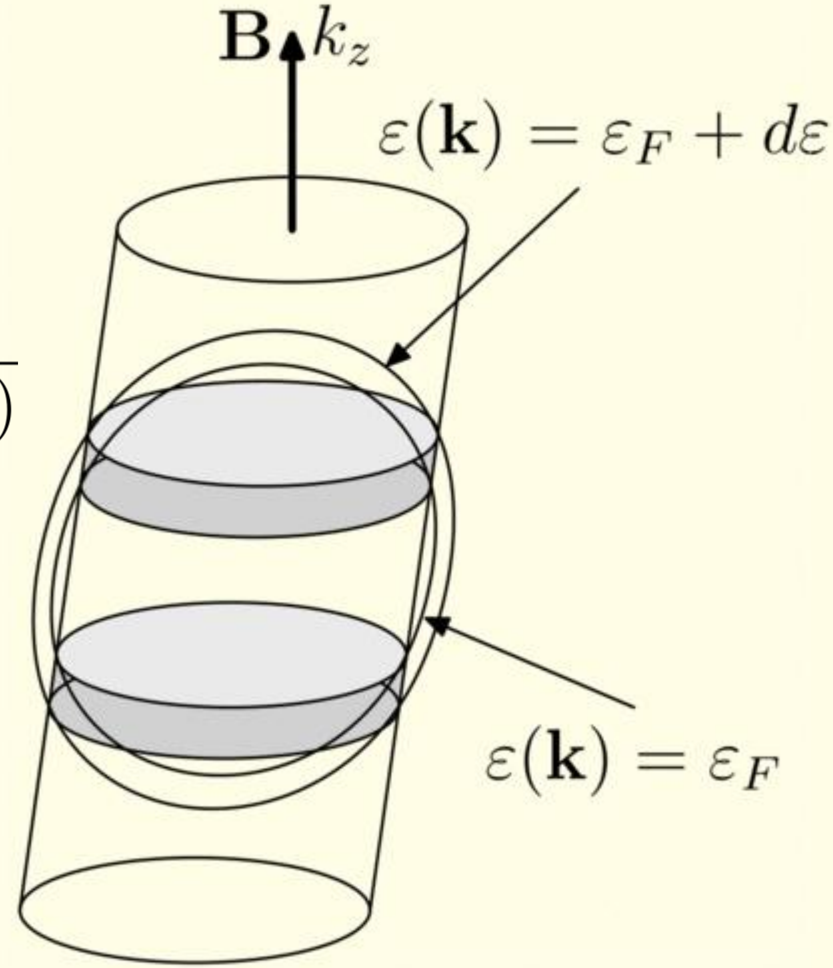


Shubnikov-de Haas oscilacije

$$\mathrm{MR} \propto g(\varepsilon_F)$$

$$T_{\mathrm{osc}} = \Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{2\pi e}{\hbar}\frac{1}{A_e(\varepsilon_F)}$$

- Oscilacije odražavaju izgled Fermijeve plohe



Magnetotransportna mjerenja

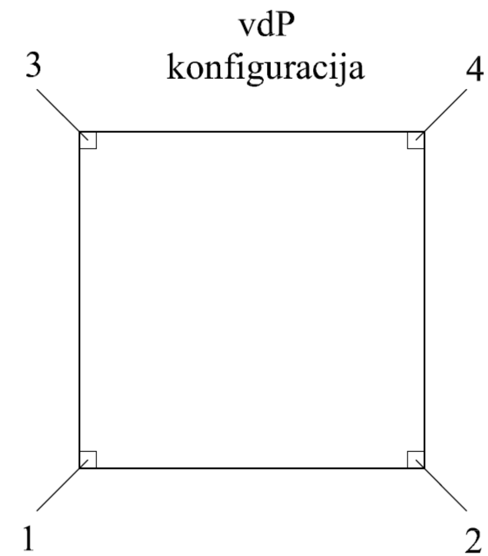
- kako preračunamo otpor u otpornost?

$$\rho = R\frac{dw}{l} \qquad \frac{V_H}{I} = R_{yx} = \frac{\rho_{yx}}{w} = \frac{R_H B}{w}$$

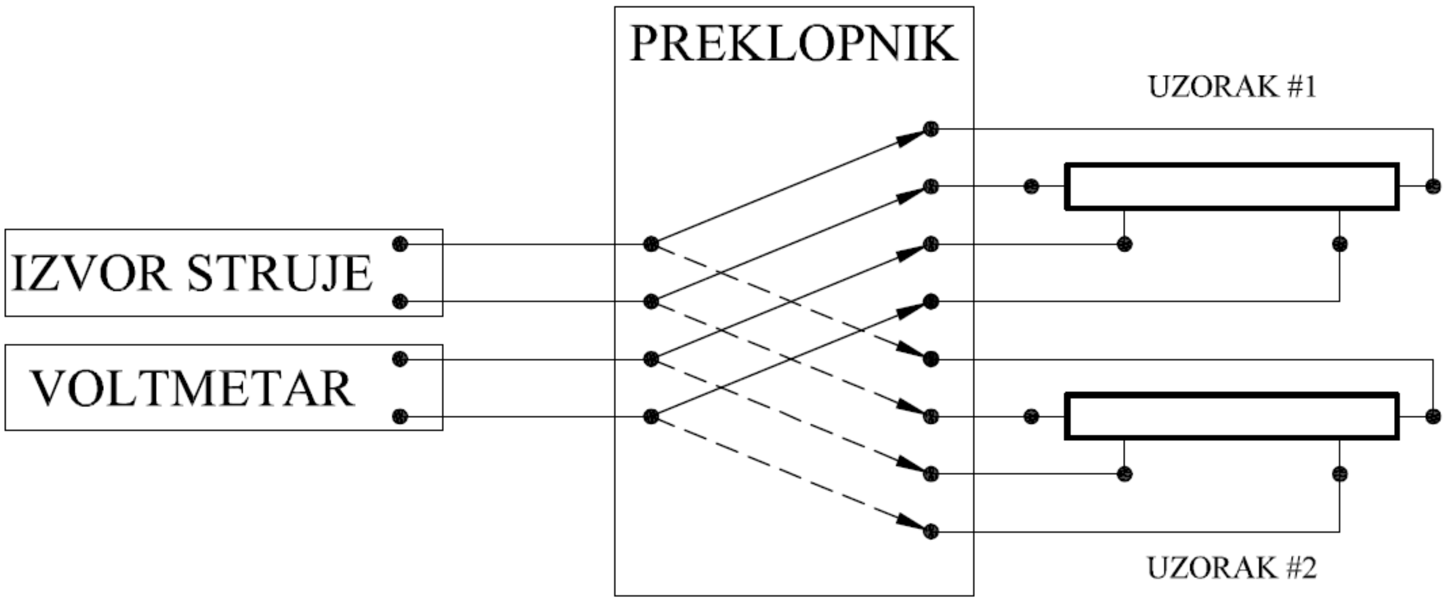
- van der Pauw metoda:

$$\rho = \frac{\pi t}{\ln 2}\frac{R_{12,34} + R_{13,24}}{2} f\left(\frac{R_{12,34}}{R_{13,24}}\right)$$

$$R_{yx} = R_{14,23} \qquad R_H = \frac{\Delta R_{14,23}}{\Delta B} w$$

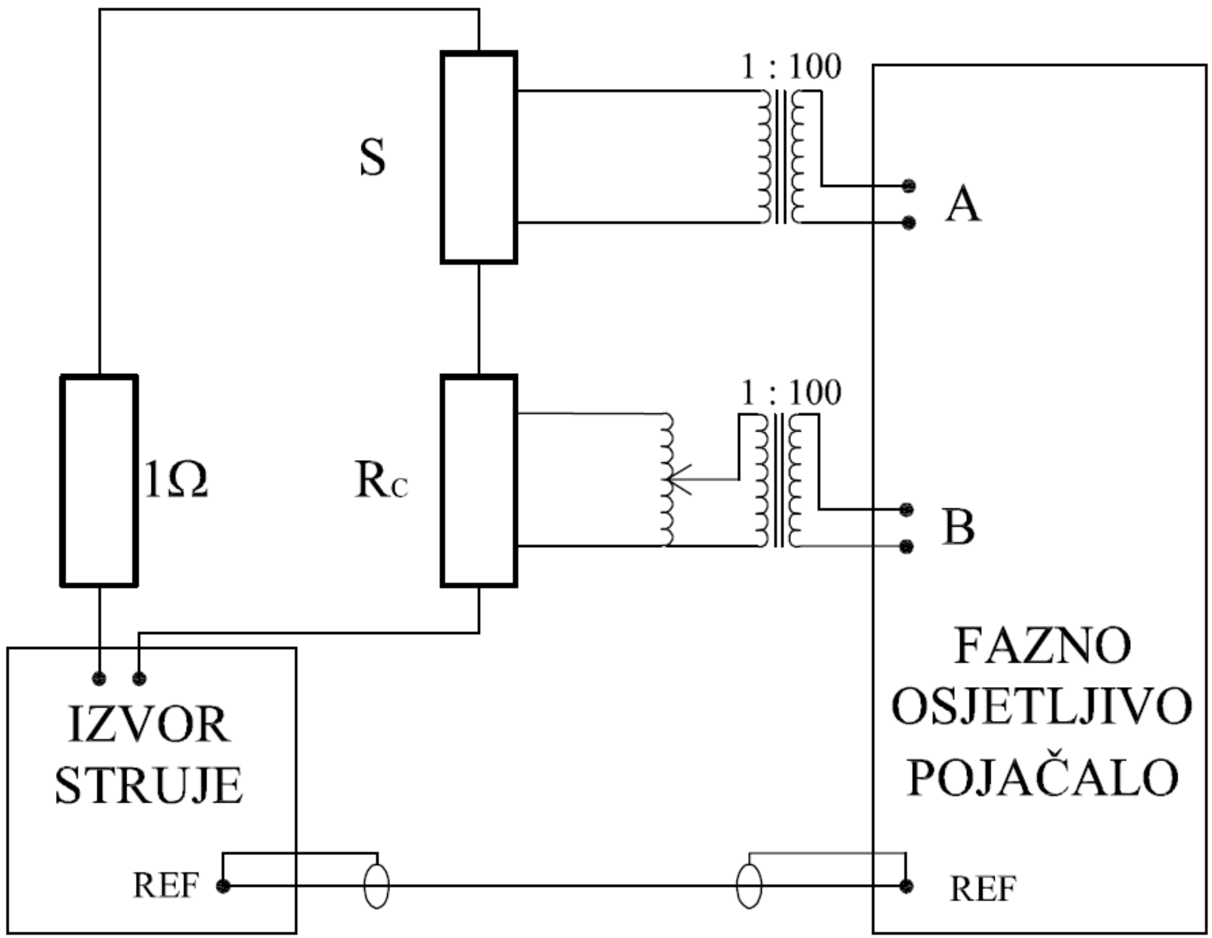


DC mjerenje



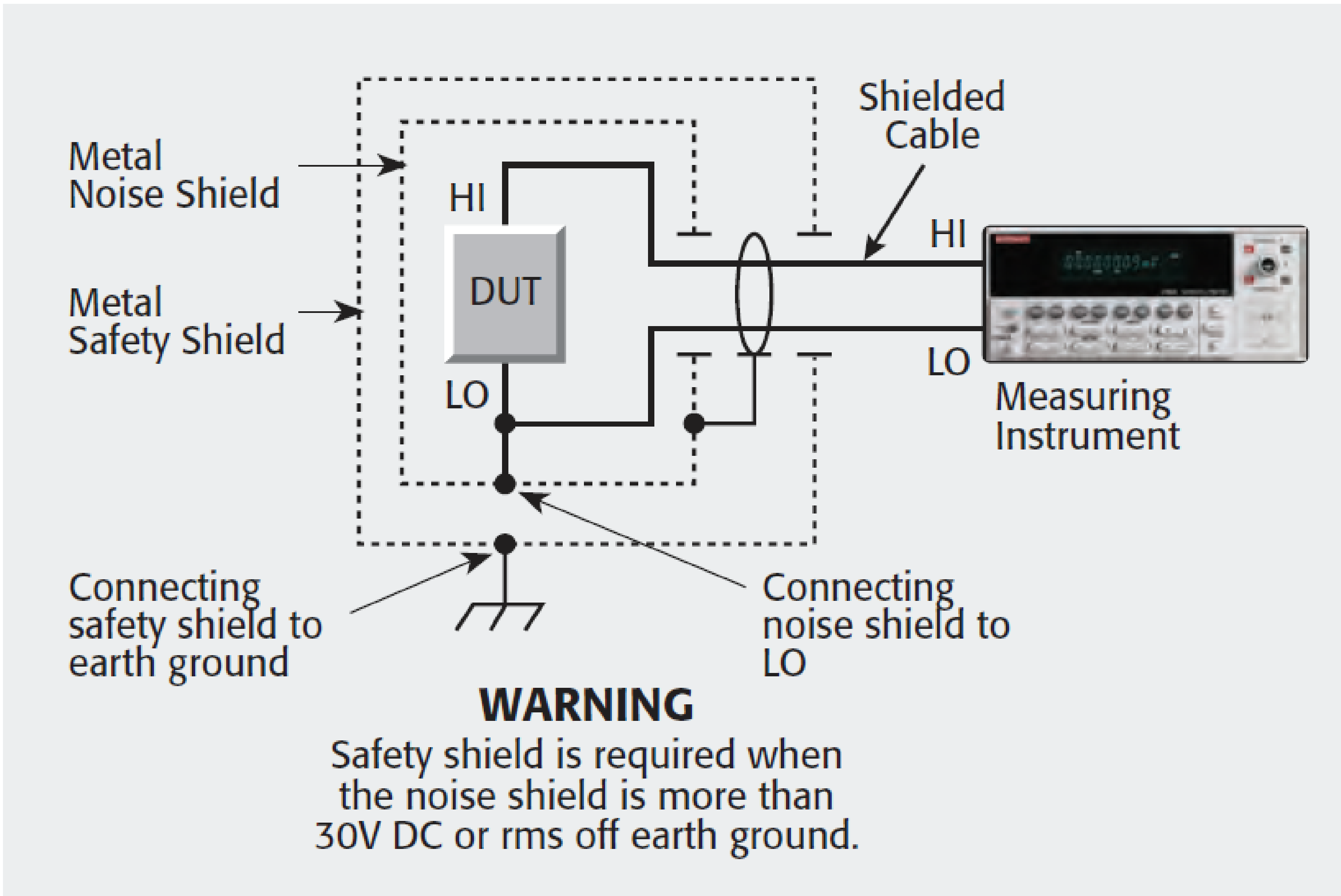
$$V_{sr} = \frac{V(I) - V(-I)}{2}$$

AC mjerenje

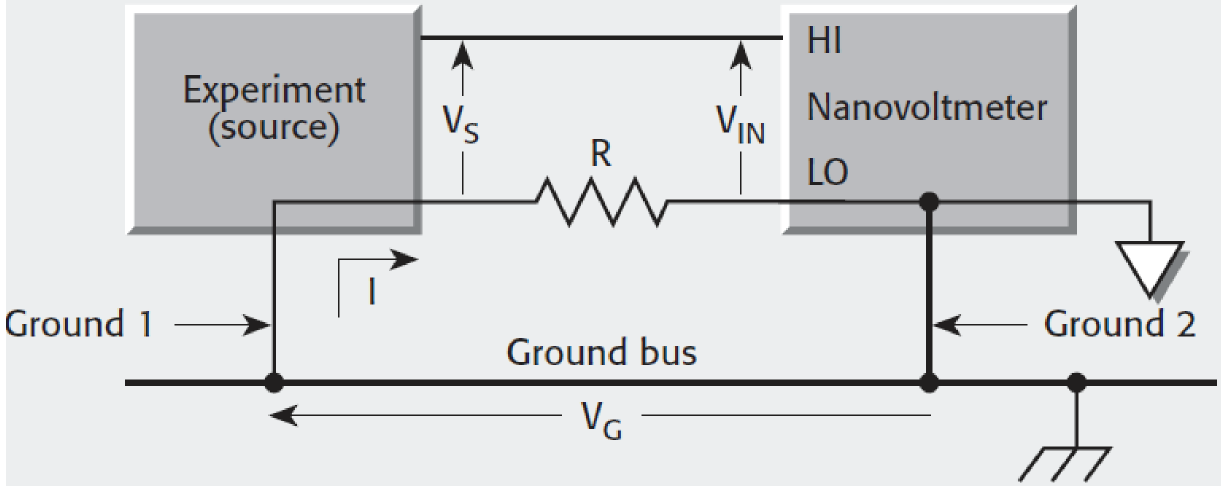


1 : 100
S
A
1 : 100
1Ω
Rc
B
IZVOR STRUJE
FAZNO OSJETLJIVO POJAČALO
REF
REF

Oklapanje


Shielded
Cable
Metal
Noise Shield
HI
DUT
HI
Metal
Safety Shield
LO
LO
Measuring
Instrument
Connecting
safety shield to
earth ground
Connecting
noise shield to
LO
WARNING
Safety shield is required when
the noise shield is more than
30V DC or rms off earth ground.

„Ground loops”



Input voltage to the nanovoltmeter is:

$V_{IN} = V_S + V_G$

where $V_G = IR$

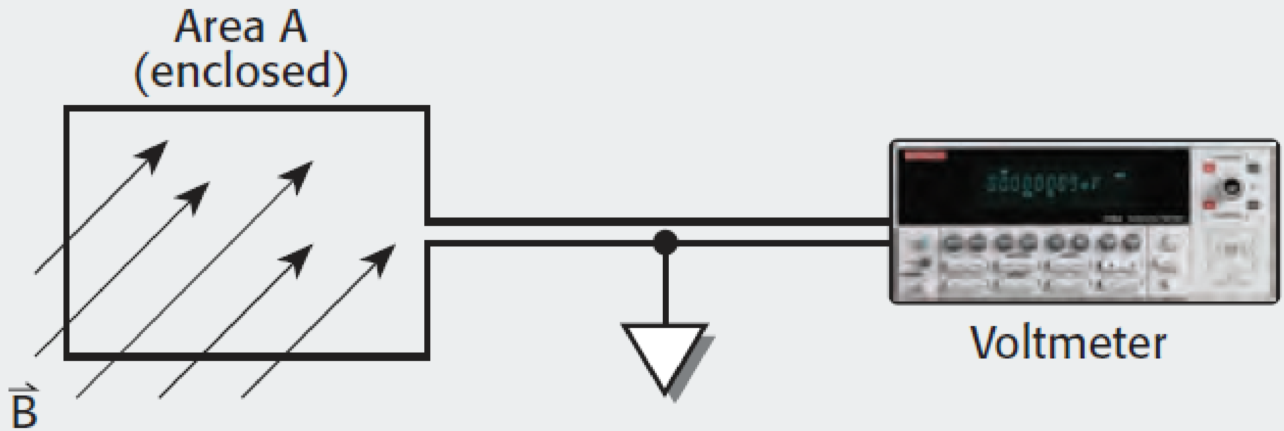
R = Resistance of input LO connection (typically around 100mΩ)

I = Current passing through input LO connection due to ground voltages (V_G) in the ground bus (magnitude may be amperes)

V_S = Source voltage (desired signal)

V_G may exceed V_S by orders of magnitude.

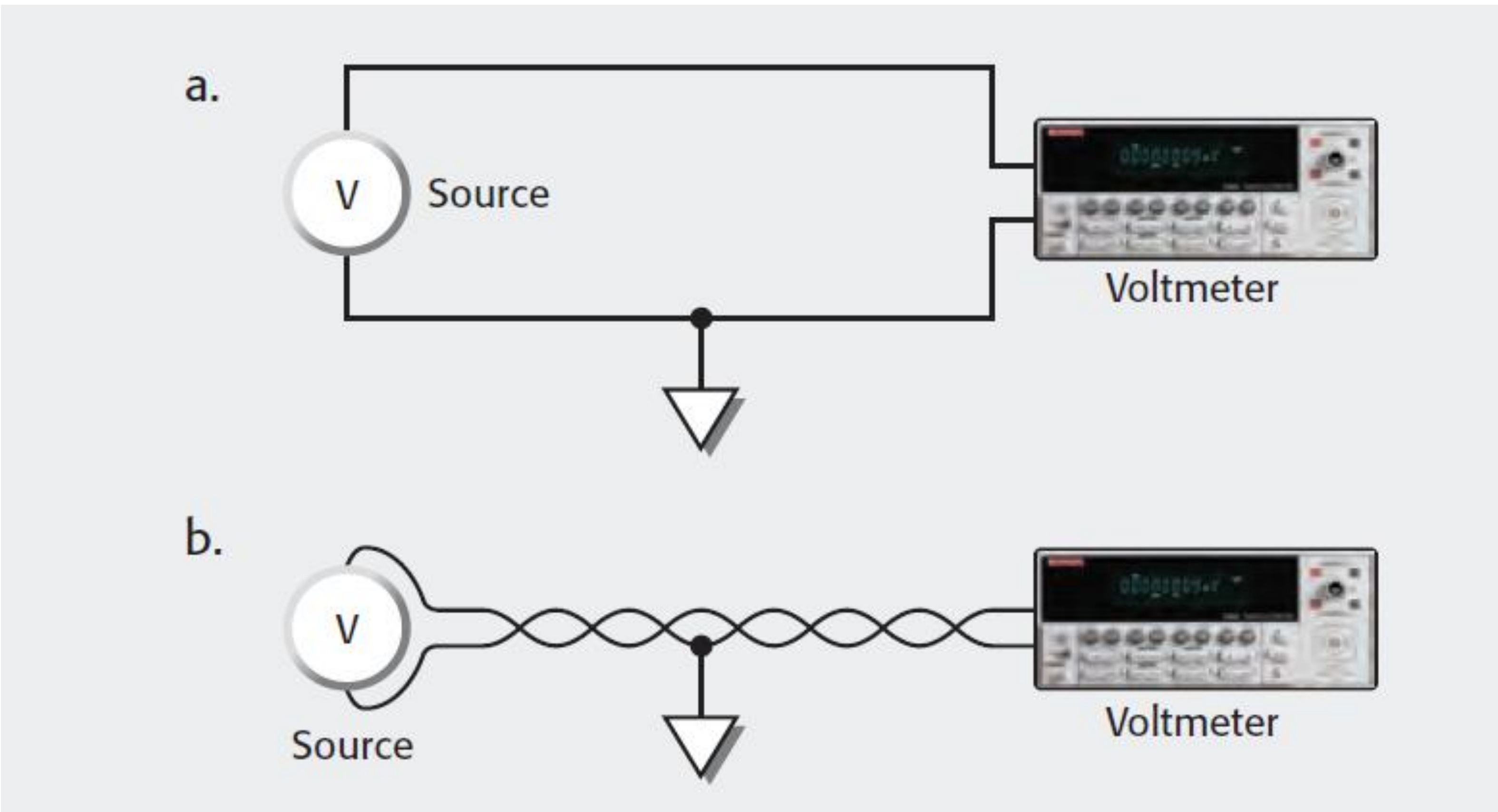
Utjecaj magnetskog polja



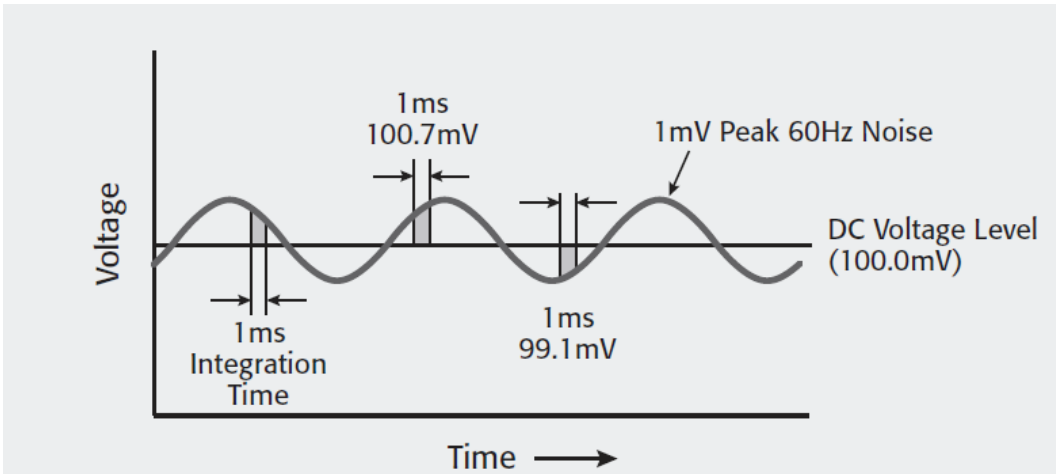
The voltage developed due to a field passing through a circuit enclosing a prescribed area is:

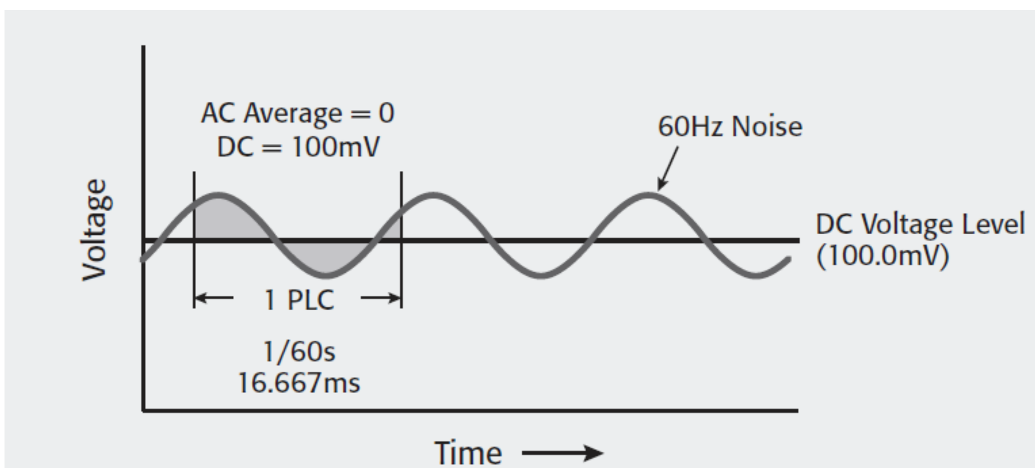
$$V_B = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\,(\vec{B}A)}{dt} = \vec{B}\frac{dA}{dt} + A\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Eliminacija utjecaja magnetskog polja

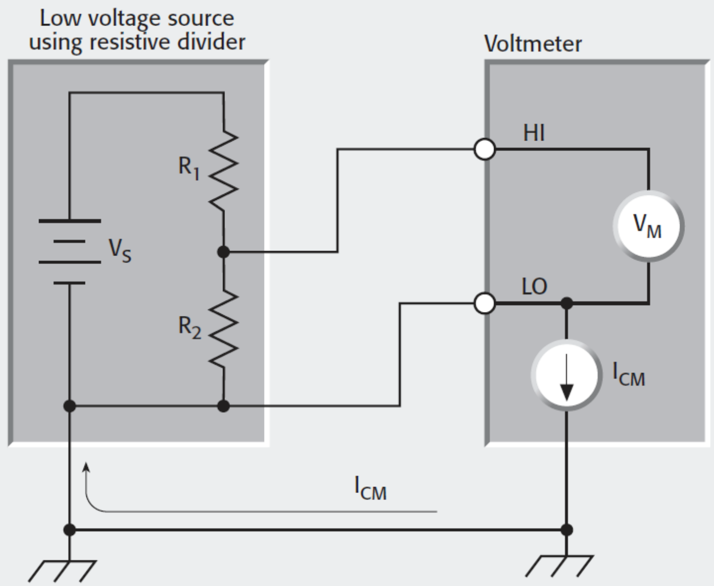


Interferencija gradske mreže

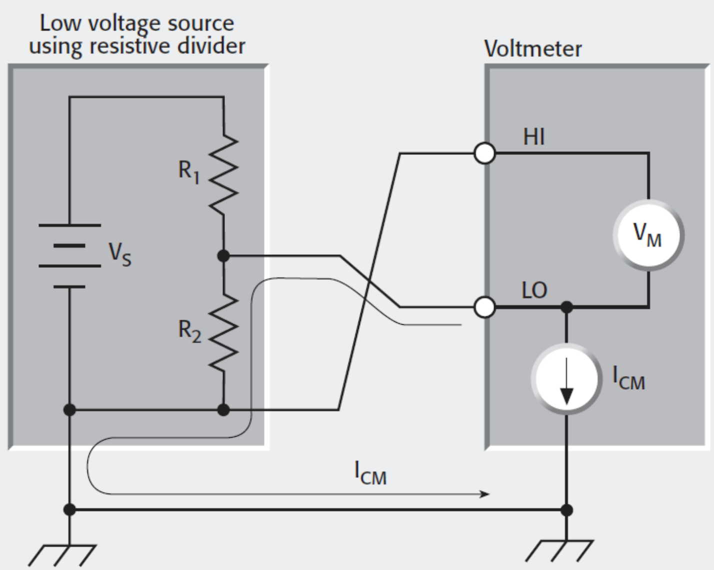




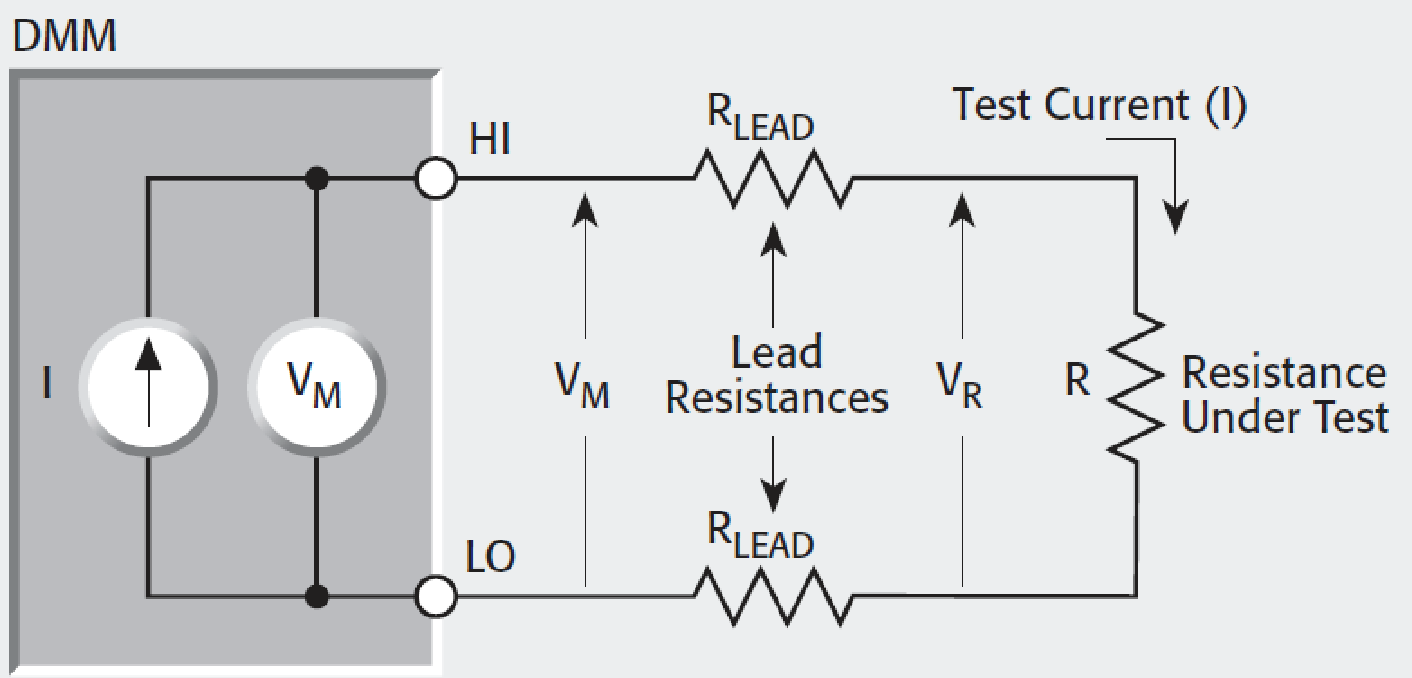
a. With proper connections, I_{CM} generates no noise or offset.



b. With reversed connections, I_{CM} generates noise and possible offset.



Mjerenje otpora metodom dva kontakta

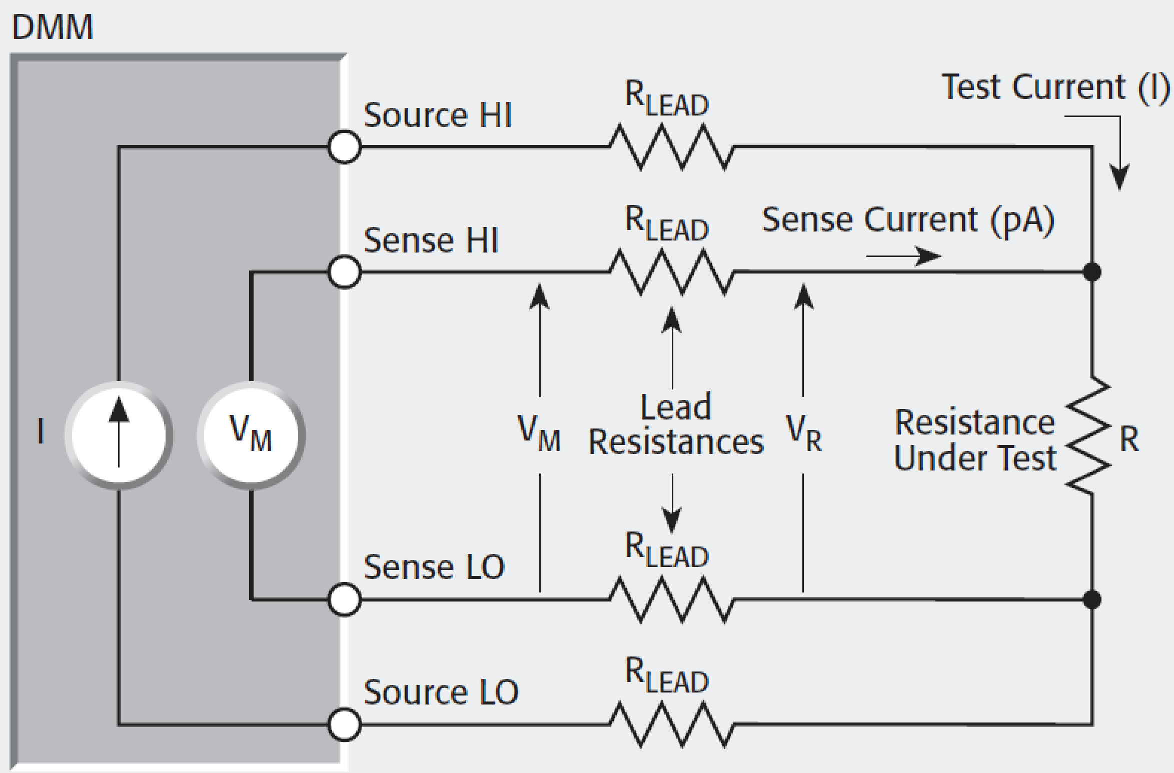


V_M = Voltage measured by meter

V_R = Voltage across resistor (R)

$$\text{Measured Resistance} = \frac{V_M}{I} = R + (2 \times R_{LEAD})$$

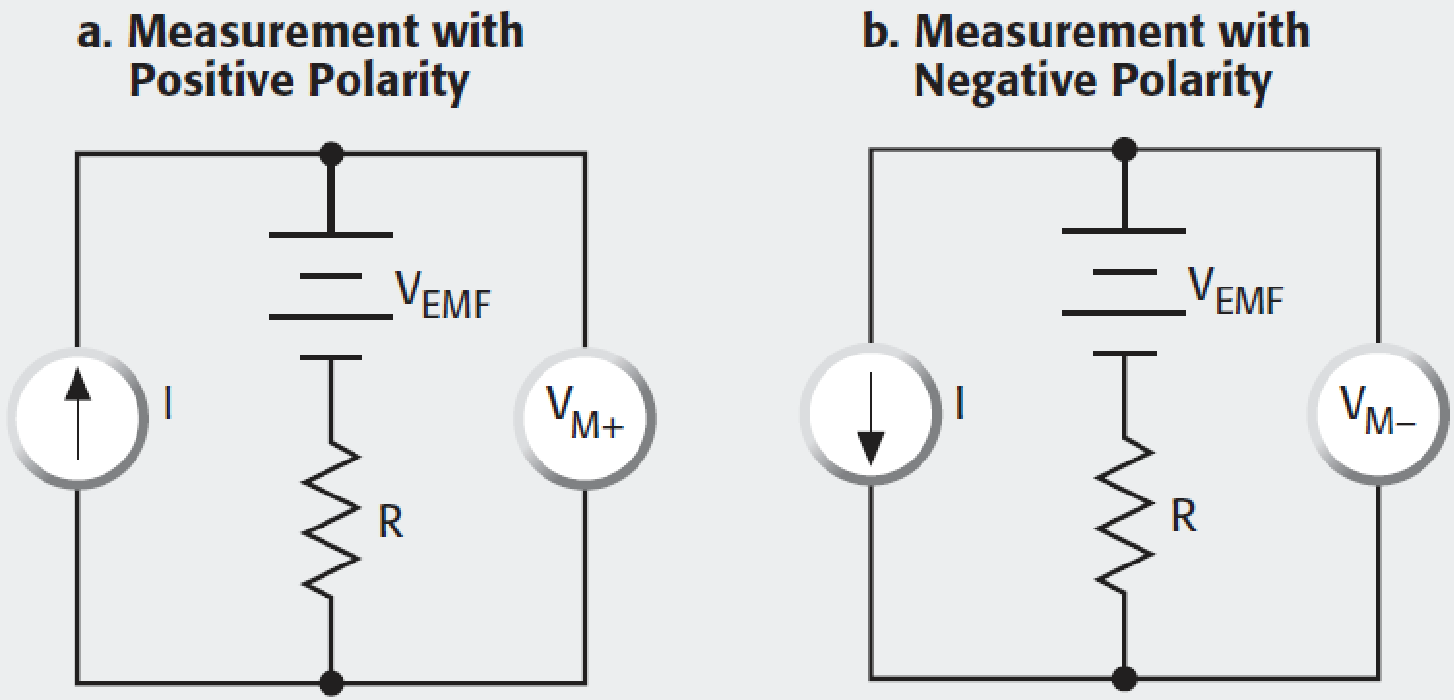
Mjerenje otpora metodom četiri kontakta



V_M = Voltage measured by meter
V_R = Voltage across resistor (R)
Because sense current is negligible, $V_M = V_R$

and measured resistance $= \dfrac{V_M}{I} = \dfrac{V_R}{I}$

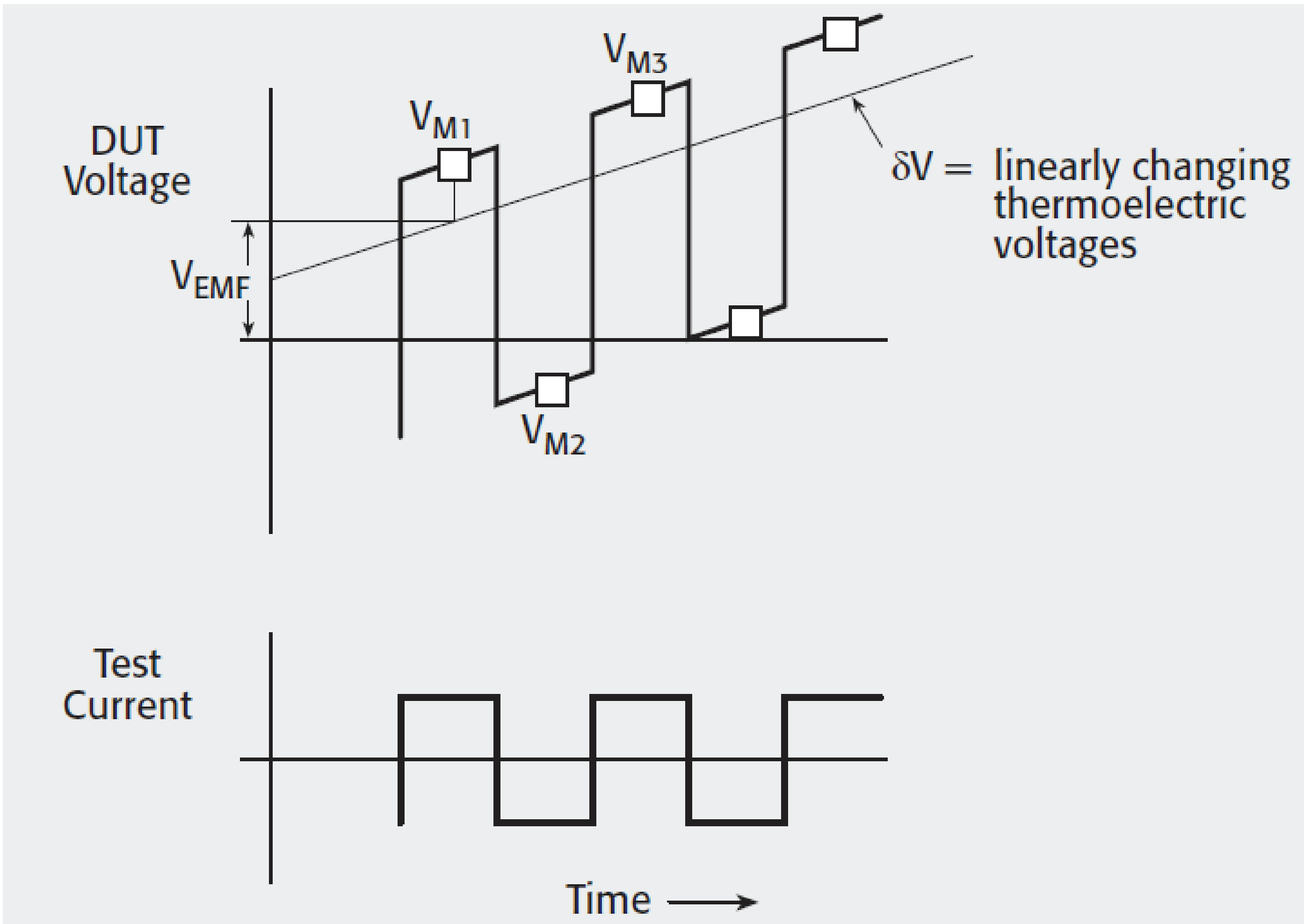
Eliminacija termonapona okretanjem smjera struje



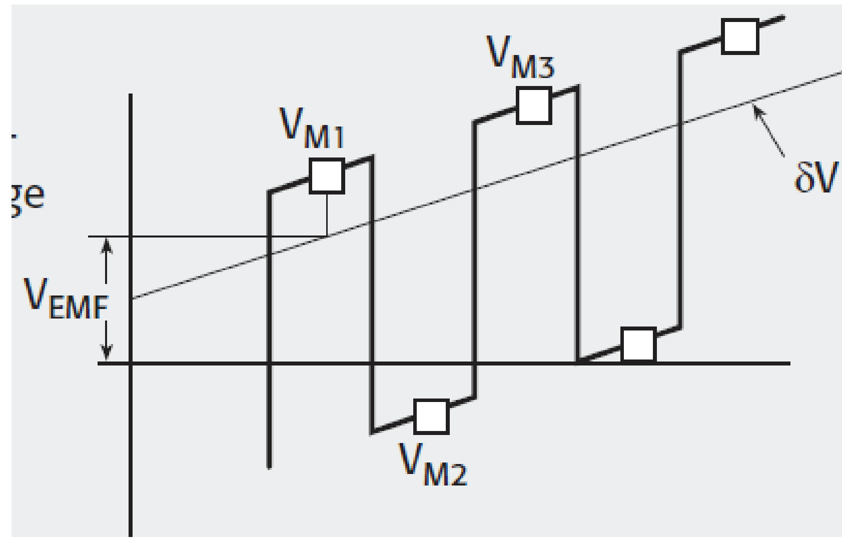
$$V_{M+} = V_{EMF} + I\,R \qquad V_{M-} = V_{EMF} - I\,R$$

$$V_M = \frac{V_{M+} - V_{M-}}{2} = I\,R$$

Delta metoda



Delta metoda



$$V_{M1} = V_1 + V_{EMF}$$

$$V_{M2} = V_2 + V_{EMF} + \delta V$$

$$V_{M3} = V_3 + V_{EMF} + 2\delta V$$

$$V_A = \frac{V_{M1}-V_{M2}}{2} = \frac{(V_1+V_{EMF}) - (V_2+V_{EMF}+\delta V)}{2} = \frac{(V_1-V_2)}{2} - \frac{\delta V}{2}$$

$$V_B = \frac{V_{M3}-V_{M2}}{2} = \frac{(V_3+V_{EMF}+2\delta V) - (V_2+V_{EMF}+\delta V)}{2} = \frac{(V_3-V_2)}{2} + \frac{\delta V}{2}$$

$$V_{Final} = \frac{V_A + V_B}{2} = \frac{(V_1 + V_3 - 2V_2)}{4}$$