Eulerovo rješenje problema mostova

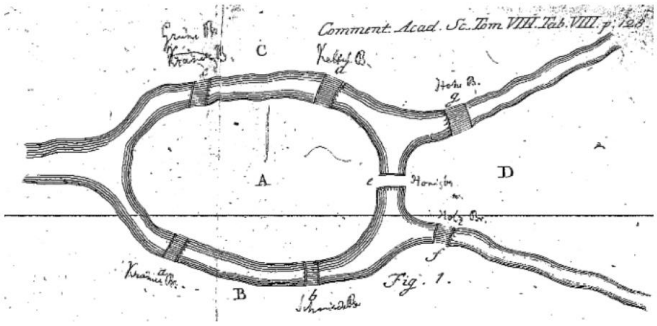
Nikolina Bihar

U 18. stoljeću grad Königsberg (današnji Kalinjingrad) bio je podijeljen rijekom Pregel na četiri kopnena područja povezana sa sedam mostova. Građani su se pitali postoji li šetnja kojom bi se svaki most prešao točno jednom, bez ponavljanja prijelaza preko istog mosta. Tim se problemom bavio švicarski matematičar Leonhard Euler, koji je 26. kolovoza 1735. godine u svom radu *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* pokazao da takva šetnja nije moguća.

U uvodnom dijelu rada Euler ističe da se ovaj problem razlikuje od uobičajenih geometrijskih problema. Poziva se na Leibnizovu ideju "*geometrije položaja*" (*geometria situs*), koja se ne bavi mjerenjem duljina, površina ili kutova, nego odnosima među objektima i njihovim položajem. Euler smatra da problem mostova upravo pripada toj vrsti geometrije jer za njegovo rješavanje nisu potrebni nikakvi geometrijski izračuni.

U svome radu Euler najprije objašnjava da bi se problem mogao riješiti nabrajanjem svih mogućih ruta kroz grad. Međutim, takav bi postupak bio vrlo dugotrajan zbog velikog broja mogućih kombinacija i ne bi se mogao primijeniti na složenije slučajeve s većim brojem mostova. Zbog toga je tražio opću metodu koja bi odmah pokazala postoji li rješenje.

Kako bi pojednostavio problem, četiri kopnena područja označio je slovima A, B, C i D (Slika 1.). Umjesto promatranja pojedinih mostova, bilježio je samo redoslijed područja kroz koja prolazi. Tako je prijelaz s područja A u područje B označio s AB, a ako bi se nakon toga prešlo iz B u D, put bi zapisao kao ABD. Za svaki prijelaz preko jednog mosta dodavao je jedno novo slovo u niz. Budući da u Königsbergu postoji sedam mostova, put kojim bi se svaki most prešao točno jedanput morao bi biti prikazan nizom od osam slova.



Slika 1. Problem mostova u Königsbergu u Eulerovu radu

Euler zatim promatra koliko se puta pojedino područje mora pojaviti u zapisu mogućeg puta. Polazi od činjenice da svaki put kad putnik uđe u neko područje preko jednog mosta, iz njega mora izaći preko drugog. Zbog toga se mostovi mogu promatrati u parovima "ulazak-izlazak". Ako do nekog područja vodi pet mostova, četiri od njih mogu se rasporediti u dva takva para, dok jedan most ostaje neuparen. To znači da se oznaka toga područja mora pojaviti tri puta. Općenito, ako je s određenim područjem povezano n mostova, pri čemu je n neparan broj, oznaka toga područja mora se pojaviti $\frac{n+1}{2}$ puta.

Na područje A vodilo je pet mostova pa se slovo A moralo pojaviti $\frac{5+1}{2} = 3$ puta. Preostala područja B, C i D bila su povezana s po tri mosta pa se svako od njih moralo pojaviti $\frac{3+1}{2} = 2$ puta. Kada se zbroje sva potrebna pojavljivanja slova, dobiva se $3 + 2 + 2 + 2 = 9$.

Međutim, Euler je prethodno pokazao da bi put preko sedam mostova morao biti opisan nizom od samo osam slova. Drugim riječima, potrebno je ukupno devet pojavljivanja slova, a na raspolaganju je samo osam mjesta u nizu. Zbog te kontradikcije takav niz nije moguće sastaviti pa je Euler zaključio da ne postoji šetnja koja bi omogućila prelazak svih sedam mostova točno jedanput.

Nakon rješavanja konkretnog problema Euler je nastavio razvijati općenitu metodu primjenjivu na bilo koji broj kopnenih područja i mostova. U kasnijim odlomcima rada razmatra slučajeve u kojima neka područja imaju paran broj mostova i daje pravila pomoću kojih se može odrediti postoji li traženi put u općem slučaju. Time je problem königsberških mostova prerastao iz lokalne zagonetke u opći matematički rezultat.

Važnost Eulerova rada nije samo u dokazu da tražena šetnja ne postoji, nego i u novom načinu promatranja matematičkih problema pri kojem su presudni odnosi među objektima, a ne njihove geometrijske značajke. Upravo je taj pristup postao temelj teorije grafova i kasnijeg razvoja topologije.

Reference:

T. Paoletti (The College of New Jersey), Leonard Euler's Solution to the Konigsberg Bridge Problem, https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/leonard-eulers-solution-to-the-konigsberg-bridge-problem

D. J. Struik, A Source Book in Mathematics, 1200-1800, 1969. (str. 183-187), https://archive.org/details/B-001-001-112/page/n183/mode/2up