

Nižedimenzijski modeli i homogenizacija 1

Matko Ljulj

22. listopada 2026.

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Pregled teorije i predznanja	7
2.1	Pregled osnovne teorije: Prostori integrabilnih funkcija	8
2.1.1	Lebesgueov integral	8
2.1.2	Lebesgueovi prostori L^p	8
2.1.3	Soboljevljevi prostori $W^{1,p}$	9
2.1.4	* Dualni prostor $H^{-1}(\Omega)$	14
2.1.5	Slaba konvergencija i teorem o kompaktnosti	14
2.2	Uvod u eliptičke rubne zadatke	17
2.2.1	Diferencijalna formulacija i rubni uvjeti	17
2.2.2	Izvod varijacijske formulacije	20
2.2.3	Egzistencija i jedinstvenost rješenja	20
3	Nesingularni problemi za eliptičke PDJ	24
3.1	Prvi primjer familije eliptičkih problema	24
3.2	Generalizirani rezultat za nesingularne probleme	25
3.3	Neprekidna ovisnost o geometriji (Regularne perturbacije domene)	26
4	Singularni problemi za eliptičke PDJ, penalizirajuća anizotropija	29
4.1	Familija eliptičkih zadataka i dobra postavljenost	29
4.2	Formalni asimptotski razvoj (bez dokaza)	30
4.2.1	Dokaz apriornim ocjenama i slabom konvergencijom	31
4.2.2	Dokaz opravdanjem asimptotskog razvoja	35
4.3	Dokaz Leme 4.2.6	37
5	Rubni slojevi za eliptičke PDJ	40
5.1	Slaba anizotropija	40
5.2	Dokaz konvergencije apriornim ocjenama	41
5.3	Dokaz konvergencije opravdavanjem asimptotskog razvoja	42
5.4	Pojava rubnog sloja	44
5.5	Rigorno opravdanje korektora rubnog sloja*	45
5.6	Numerička verifikacija metodom proizvoljnih rješenja (MMS)	49
6	Jednadžbe linearizirane elastičnosti	52
6.1	Jednadžbe nelinearne elastičnosti	52
6.2	Linearizacija tenzora deformacije	54
7	Postavljanje problema za izvod elastične ploče	57
7.1	Prva familija problema	57
7.2	Reskaliranje na referentnu domenu	58

8	Formalni asimptotski razvoj problema linearne elastične ploče	61
8.1	Formalni asimptotski razvoj	61
8.2	Svođenje na dvodimenzionalnu domenu	65
9	Rigorozan izvod modela linearne elastične ploče	68
9.1	Apriorne ocjene na referentnoj domeni	68
9.2	Identifikacija limesa	70
9.3	Jaka konvergencija	71
10	Dokaz Kornove nejednakosti*	73
10.1	Dokaz Kornove nejednakosti	73

Poglavlje 1

Uvod

Na ovom kolegiju naučit ćemo osnovne principe asimptotske analize u parcijalnim diferencijalnim jednačbama. U modeliranju se pojavljuju problemi iskazani parcijalnim diferencijalnim jednačbama u ovisnosti o nekom malom parametru ε . Iz analitičkih ili numeričkih razloga može biti nezgodno zadržati jednačbu u takvom formatu te tražiti rješenje za originalni problem. Umjesto toga, može se naći promotriti što se događa kada $\varepsilon \rightarrow 0$ te se rješenje za male parametre aproksimira rješenjem limesne jednačbe (koja u pravilu bude jednostavnija), ili se nađe tzv. surogat model koji bude dobra i lako izračunljiva aproksimacija za male parametre.

Kolegij je nastao u jesen 2026. godine s idejom kao jedan od izbornih modula na diplomskom studiju Primijenjena matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Tema koja se obrađuje usko je vezana uz znanstveni rad desetak profesora i asistenata na Odsjeku. U prvom semestru bavit ćemo se osnovama asimptotske analize, s naglaskom na analitičke metode, te ćemo izvesti neke nižedimenzionalne modele iz teorije elastičnosti. Oni se pojavljuju kada domena parcijalne diferencijalne jednačbe postaje sve tanja (ovisi o parametru debljine ε koji teži k nuli). U drugom semestru bavit ćemo se homogenizacijom (kada u parcijalnim diferencijalnim jednačbama imamo oscilirajuće parametre sa sve manjim periodom) i naglaskom na numeriku.

Za uvod pogledajmo neke primjere iz rubnih problema običnih diferencijalnih jednačbi, kako se ponašaju neke familije problema ovisne o parametru ε i što se događa s eksplicitnim rješenjem kada taj parametar teži k nuli. Ovo su specifični primjeri, budući da ćemo se u nastavku kolegija baviti parcijalnim diferencijalnim jednačbama i da nećemo imati eksplicitna rješenja. U svim primjerima promatramo domenu $[0, 1]$ uz homogene rubne uvjete $u(0) = u(1) = 0$.

Primjer 1.0.1: Regularna perturbacija

Promatrajmo problem:

$$\begin{cases} -u'' + \varepsilon u = 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.0.1)$$

Egzaktno rješenje ovisno o parametru ε možemo zapisati pomoću eksponencijalnih funkcija:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{e^{\sqrt{\varepsilon}x} + e^{\sqrt{\varepsilon}(1-x)}}{e^{\sqrt{\varepsilon}} + 1} \right). \quad (1.0.2)$$

Kada formalno uvrstimo $\varepsilon = 0$, dobivamo limitni problem $-u_0'' = 1$, koji se lako rješava dvostrukom integracijom dajući $u_0(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$. Iako egzaktno rješenje $u_\varepsilon(x)$ sadrži eksponencijalne funkcije, kako $\varepsilon \rightarrow 0$, ono glatko konvergira prema paraboli u_0 . Mogli bismo nacrtati grafove rješenja u_0 i u_ε za neki parametar $\varepsilon > 0$, no golim okom ti grafovi izgledaju kao da se poklapaju.

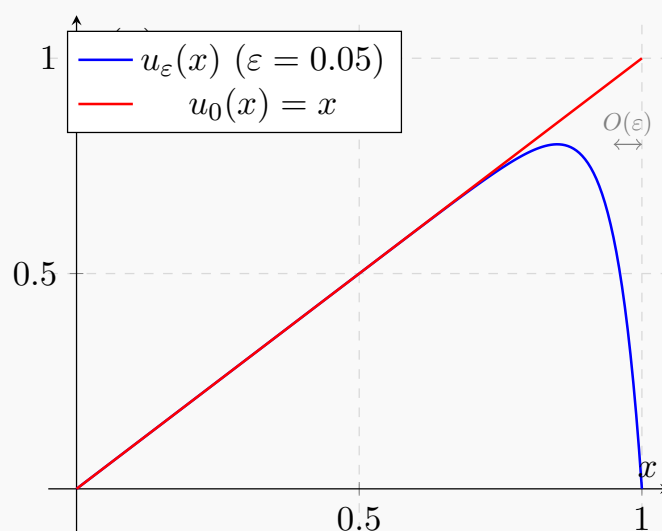
Primjer 1.0.2: Singularna perturbacija

Sada pomaknimo mali parametar uz najvišu derivaciju:

$$-\varepsilon u'' + u' = 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Egzaktno rješenje je:

$$u_\varepsilon(x) = x - \frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1}.$$



Ako uvrstimo $\varepsilon = 0$, limes jednadžba je $u'_0 = 1$, što daje $u_0(x) = x + C$. Da bismo zadovoljili $u_0(0) = 0$, mora vrijediti $u_0(x) = x$. Međutim, $u_0(1) = 1 \neq 0$. Limes rješenje ne može zadovoljiti oba rubna uvjeta jer je red jednadžbe pao s drugog na prvi.

Da bi zadovoljilo fizikalni rubni uvjet u $x = 1$, egzaktno rješenje u_ε mora naglo pasti s 1 na 0 na vrlo maloj udaljenosti. Ovo područje nazivamo *rubni sloj*.

Da bismo komentirali konvergenciju, moramo se sjetiti da u beskonačnodimenzionalnim prostorima nisu sve norme (a onda i konvergencije) ekvivalentne. Posebno, niz funkcija može u nekoj normi/topologiji konvergirati, dok u drugoj ne. Konkretno za ovaj primjer, može se pokazati da niz rješenja u_ε konvergira u u_0 :

- po točkama svuda osim u točki $x = 1$ (odnosno konvergira za $x \in [0, 1)$);
- u L^2 normi;

ali ne konvergira u L^∞ normi ni u H^1 normi. O detaljima tih normi i konvergencija pričat ćemo u nastavku.

Kako bismo popravili konvergenciju (i konkretno ponašanje blizu $x = 1$) uz limesno rješenje u_0 , uvest ćemo rubni korektor $\theta(x)$ koji eksponencijalno trne van okoline problematične točke $x = 1$. Konkretno, za ovaj problem, ažurirano rješenje za surogat problem zajedno s korektorom glasi:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = u_0(x) + \theta(x) = x - e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}.$$

Ovo je opet aproksimacija, ali ima bolju ocjenu pogreške od samog u_0 (razlika konvergira k nuli i u L^∞ i H^1 normi).

Primjer 1.0.3: Homogenizacija

Promotrimo problem s oscilirajućim koeficijentom:

$$-(a_\varepsilon(x)u'_\varepsilon)' = 1, \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0. \quad (1.0.3)$$

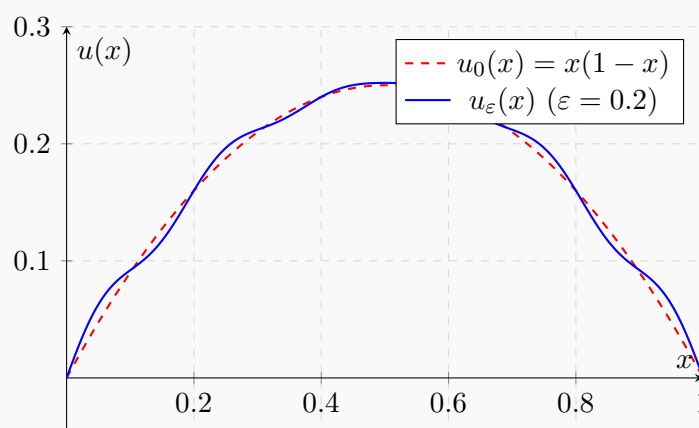
gdje je

$$a_\varepsilon(x) = \frac{1}{2 + \cos(2\pi x/\varepsilon)}$$

(relativno ružna funkcija koja će nam dati relativno lijepu eksplicitnu formulu za rješenje). Direktnom integracijom dobivamo:

$$u_\varepsilon(x) = x(1-x) - \frac{\varepsilon}{2\pi}(x - \frac{1}{2})\sin(2\pi\frac{x}{\varepsilon}) - \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2}(\cos(2\pi\frac{x}{\varepsilon}) - 1).$$

Kada $\varepsilon \rightarrow 0$, materijal se ponaša kao homogeni medij s efektivnim koeficijentom $a^* = 1/2$. Rješenje limes modela $-(a^*u'_0)' = 1$ je $u_0(x) = x(1-x)$. Međutim, za $\varepsilon > 0$ rješenje se sastoji od srednjeg člana $u_0(x)$ i oscilirajućeg dijela nižeg reda, kao posljedica toga što je problem ima oscilirajući koeficijent. Pokazuje se da rješenje u_ε konvergira u L^2 normi u u_0 , dok za snažniju H^1 normu moramo uključiti i takav oscilirajući član (tzv. korektor). Ovakvi primjeri tipični su za teoriju homogenizacije, te ćemo ih podrobnije obrađivati u sljedećem semestru.



Iako smo u prethodnim primjerima promatrali isključivo obične diferencijalne jednačbe (ODJ), već ovdje vidimo širok spektar problema koji se pojavljuju kada familija zadaća ovisi o malom parametru ε i kada taj parametar teži u nulu. Nije uvijek intuitivno jasno što točno predstavlja limitno rješenje, niti u kojoj topologiji (odnosno u kojoj normi) uopće možemo ostvariti konvergenciju. Probleme nižedimenzionalnih modela kojim ćemo se baviti u većini ovog kolegija ne možemo opisati prolemima u ODJ.

Ovi fenomeni postat će znatno složeniji kada prijedemo na parcijalne diferencijalne jednačbe (PDJ), gdje u pravilu nećemo moći izračunati eksplicitne formule za rješenja u_ε . U takvim situacijama nećemo moći izravno računati limese, već ćemo morati promatrati same koeficijente i varijacijske zadaće koje ta rješenja zadovoljavaju te analizirati njihova apstraktna svojstva kada $\varepsilon \rightarrow 0$.

Napomena 1.0.4

Vrijedi komentirati i numerički aspekt ovih problema, odnosno zašto je u praksi iznimno važno i korisno proučavati surogat modele i limesne modele umjesto rješavanja originalne jednačbe. Da bismo numeričkim metodama točno uhvatili efekte malog parametra ε , diskretizacijska mreža mora biti izuzetno fina. Zamislite samo problem homogenizacije: mreža mora biti dovoljno sitna da uhvati svaku pojedinu oscilaciju materijalnog koeficijenta. U 2D i 3D domenama,

zbog male vrijednosti tog parametra, diskretizacijska mreža na kojoj možemo garantirati numeričku točnost vrlo brzo postaje pregusta za raspoloživi softver i hardver.

Zbog toga smo u praksi prisiljeni birati između dvije opcije:

- Rješavati originalan problem na iznimno gustoj domeni (ali možda i dalje ne dovoljno gusto), uz golema memorijska i vremenska ograničenja, pri čemu ćemo često dobiti rezultat s nepoznatom (i potencijalno velikom) numeričkom greškom.
- Rješavati surogat (asimptotski) problem na znatno rjeđoj diskretizacijskoj mreži, uz minimalna vremenska i memorijska ograničenja. U ovom slučaju imamo poznatu, analitičku pogrešku (zbog zamjene modela) koju možemo kontrolirati, te standardnu numeričku grešku koju nikada ne možemo izbjeći, ali koja je u ovom slučaju puno manja.

Glavna je poanta ovog kolegija uvjeriti vas da je ovaj drugi pristup znatno bolji te vam pokazati matematički aparat kojim se to precizno provodi.

Poglavlje 2

Pregled teorije i predznanja

Kako je ovaj kolegij mogu slušati i studenti četvrte godine studija Primijenjena matematika koji još nisu položili kolegije s četvrte godine, u ovom poglavlju proći ćemo kroz predznanja koja će nam biti potrebna za ovaj kolegij. To su u pravilu rezultati koji se obrađuju na neki način kroz obavezne kolegije 4. godine studija.

Prije uvođenja ostale teorije, prisjetimo se klasičnih integralnih identiteta koji povezuju ponašanje funkcije u unutrašnjosti domene s njezinim ponašanjem na rubu. U cijelom odjeljku pretpostavljamo da je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen, otvoren skup s rubom $\partial\Omega$ klase C^1 (ili općenitije, Lipschitzovim rubom), te da je $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_n)$ jedinični vektor vanjske normale na $\partial\Omega$.

Teorem 2.0.1: Gauss-Greenov teorem i Teorem o divergenciji

Neka je $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Tada za svaku komponentu $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi Gauss-Greenov teorem:

$$\int_{\Omega} \partial_i u \, dx = \int_{\partial\Omega} u n_i \, dS.$$

Kao izravnu posljedicu, za vektorsko polje $\mathbf{F} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ dobivamo Teorem o divergenciji:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Teorem 2.0.2: Formula parcijalne integracije

Neka su $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$. Tada za svaki indeks $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi:

$$\int_{\Omega} (\partial_i u) v \, dx = - \int_{\Omega} u (\partial_i v) \, dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, dS.$$

Teorem 2.0.3: Greenove formule

Neka su $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Koristeći oznaku $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ za usmjerenu derivaciju duž vanjske normale, vrijede sljedeći identiteti:

(i) **Prva Greenova formula:**

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

(ii) **Druga Greenova formula:**

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

U iskazima teorema trebaju nam i objašnjenje operatora div i Δ . Za zadanu dovoljno glatku vektorsku funkciju (polje) $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, **divergenciju** definiramo kao

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (2.0.1)$$

Divergencija mjeri jakost izvora ili ponora vektorskog polja u danoj točki. **Laplaceov operator** (ili laplasijan) skalarne funkcije u definira se kao divergencija njezinog gradijenta:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \quad (2.0.2)$$

2.1 Pregled osnovne teorije: Prostori integrabilnih funkcija

2.1.1 Lebesgueov integral

U klasičnoj analizi integral se uvodi po Riemannu, tako da se domena integracije dijeli na konačno mnogo podintervala, a površina ispod krivulje aproksimira se konačnim brojem vertikalnih pravokutnika (Darbouxove sume). Glavno ograničenje ovog pristupa leži u činjenici da je prostor Riemann-integrabilnih funkcija nepotpun, što stvara ozbiljne poteškoće kada se rješenja diferencijalnih jednadžbi traže kao limesi nizova funkcija. Lebesgueov integral rješava taj problem. Za razliku od Riemannovog integrala, ovdje integral aproksimiramo pomoću prebrojivo mnogo općenitijih geometrijskih objekata (histogram nad izmjerivim skupovima, a ne nužno uzastopnim intervalima). To omogućuje integraciju funkcija s izrazito divljim i isprekidanim domenama.

U tu svrhu koristimo pojam Lebesgue izmjerivog skupa. Neprecizno govoreći, Lebesgue izmjerivi skupovi su oni kojima je dobro definirana Lebesgueova mjera (što predstavlja generalizaciju pojma volumena). Ti se skupovi mogu dobiti prebrojivim presjecima, unijama i komplementima intervala (što generira Borelove skupove), uz jedno dodatno i ključno svojstvo **potpunosti**: svi podskupovi izmjerivog skupa mjere nula su također izmjerivi i imaju mjeru nula.

Nakon toga definiramo Lebesgue izmjerive funkcije kao one $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kojima je domena Lebesgue izmjeriva te je za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ skup $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\}$ Lebesgue izmjeriv. Kao što smo najavili, Lebesgueov integral se tada definira prvo za nenegativne funkcije kao

$$\int_{\Omega} f \, dx = \sup \left\{ \int_{\Omega} s \, dx : 0 \leq s \leq f, \, s \text{ je jednostavna} \right\}$$

(jednostavne funkcije su funkcije oblika $\sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}(x)$, gdje su c_i konstante, a A_i izmjerivi skupovi), dok se za općenite funkcije definira kao razlika integrala pozitivnog i negativnog dijela funkcije.

2.1.2 Lebesgueovi prostori L^p

Definicija 2.1.1: Lebesgueovi prostori L^p

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue izmjeriv skup i $1 \leq p < \infty$. Lebesgueov prostor $L^p(\Omega)$ definira se kao skup svih (klasa ekvivalencije) Lebesgue izmjerivih funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ za koje vrijedi:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Pripadna norma na ovom prostoru zadana je s:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Za granični slučaj $p = \infty$, prostor $L^\infty(\Omega)$ definira se kao skup svih izmjerivih funkcija koje su esencijalno ograničene, odnosno za koje postoji konstanta $C \geq 0$ takva da je $|f(x)| \leq C$ gotovo

svuda na Ω . Pripadna norma zadana je kao esencijalni supremum:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ g.s. na } \Omega\}.$$

Napomena 2.1.2

U teoriji Lebesgueova integrala i prostora L^p , oznaka **g.s.** (*gotovo svuda*) označava da neko svojstvo vrijedi svuda na domeni osim na skupu Lebesgueove mjere nula.

Ovo ima izravnu implikaciju na definiciju elemenata prostora L^p . Ako se dvije izmjerive funkcije f i g razlikuju samo na skupu mjere nula (tj. $f = g$ g.s.), njihov Lebesgueov integral daje identične rezultate. Zbog toga elementi prostora L^p nisu pojedinačne funkcije, već **klase ekvivalencije** funkcija koje se podudaraju gotovo svuda. Izmjenom vrijednosti funkcije u jednoj točki ili na bilo kojem prebrojivom skupu točaka ne mijenja se element u prostoru L^p .

Isto tako, norma na prostoru $L^\infty(\Omega)$ koristi esencijalni supremum (ess sup) umjesto uobičajenog supremuma (sup). Intuitivno, esencijalni supremum ignorira ponašanje funkcije na skupovima mjere nula.

To znači da je funkcija $f \in L^\infty(\Omega)$ zapravo **uniformno ograničena gotovo svuda**. Primjerice, ako funkcija u prebrojivo mnogo točaka prima vrijednosti koje teže u beskonačnost, dok u svim ostalim točkama iznosi 17, njezin klasični supremum bit će beskonačan. Međutim, kako je prebrojiv skup točaka ujedno i skup Lebesgueove mjere nula, njezin esencijalni supremum iznositi će točno 17.

Navodimo temeljne rezultate koji opisuju strukturu ovih prostora. Kao prvo, za svaki $1 \leq p \leq \infty$ funkcija $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ zaista jest norma. Najteži korak je dokazati nejednakost trokuta $\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$, što se zove nejednakost Minkowskog. Još jednu nejednakost koja će nam trebati pišemo u nastavku.

Teorem 2.1.3: Hölderova nejednakost

Neka su $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugirani eksponenti, tj. takvi da vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako je $f \in L^p(\Omega)$ i $g \in L^q(\Omega)$, tada produkt $fg \in L^1(\Omega)$ i vrijedi:

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Ovu nejednakost najčešće ćemo koristiti za $p = q = 2$ i zvati Cauchy-Scharzovom nejednakosti.

Napomena 2.1.4

U situacijama koje će biti na ovom kolegiju, domena Ω je ograničena (ili općenitije, konačne Lebesgueove mjere $\mu(\Omega) < \infty$). Tada za eksponente $1 \leq p \leq q \leq \infty$ vrijedi monotonost, odnosno obrnuta inkluzija prostora:

$$L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

Ovaj rezultat izravno slijedi primjenom Hölderove nejednakosti na funkciju $|f|^p \cdot 1$. Na neograničenim domenama beskonačne mjere ova hijerarhija ne vrijedi (npr. funkcija može pripadati prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$ zbog brzog trnuća u beskonačnosti, ali ne i prostoru $L^1(\mathbb{R}^n)$).

2.1.3 Soboljevljevi prostori $W^{1,p}$

U analizi parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prostori L^p nisu dovoljni jer same jednadžbe sadrže derivacije nepoznate funkcije. Budući da klasične derivacije zahtijevaju glatkoću koju limesi u L^p ne

čuvaju, uvodimo pojam *slabe derivacije* i pripadne Soboljevljeve prostore.

Prije toga, još jedna oznaka: ukratko, prostor $L^1_{loc}(\Omega)$ obuhvaća funkcije koje imaju konačan integral na svakom zatvorenom i ograničenom (kompaktnom) podskupu domene, što im dopušta da budu neintegrabilne ili teže u beskonačnost isključivo kako se približavamo samom rubu domene $\partial\Omega$. Ta definicija nam je potrebna samo da bi integral s desne strane jednakosti u sljedećoj definiciji bio dobro definiran.

Definicija 2.1.5: Slaba derivacija

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Kažemo da je funkcija $\partial_i u \in L^1_{loc}(\Omega)$ slaba parcijalna derivacija funkcije u po varijabli x_i ako za svaku test funkciju $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vrijedi:

$$\int_{\Omega} u \partial_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \partial_i u \varphi \, dx.$$

Uočimo da u definiciji namjerno koristimo potpuno istu oznaku $\partial_i u$ kao i za klasičnu derivaciju. U jednodimenzionalnom slučaju ($n = 1$), ako je $\Omega = (a, b)$, funkciju $u' \in L^1_{loc}(a, b)$ nazivamo slabom derivacijom funkcije u ako vrijedi:

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) \, dx = - \int_a^b u'(x) \varphi(x) \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a, b).$$

Primjećujemo da slaba derivacija po samoj svojoj definiciji zadovoljava upravo onu integralnu relaciju koju klasična derivacija inače zadovoljava zahvaljujući formuli za parcijalnu integraciju. Budući da test funkcije φ po definiciji imaju kompaktan nosač unutar domene Ω (neprecizno rečeno: jednake su nuli u blizini ruba Ω netrivialne debljine), svi rubni članovi koji bi inače proizašli iz parcijalne integracije ovdje prirodno iščezavaju.

Pokazuje se da svaka funkcija koja je klasično diferencijabilna (uz pretpostavku da joj je klasična derivacija lokalno integrabilna) ujedno ima i slabu derivaciju, te se klasična i slaba derivacija tada poklapaju gotovo svuda, što opravdava korištenje istih oznaka za (klasičnu) derivaciju i slabu derivaciju. Osim toga, definicija implicitno kaže i da je slaba derivacija svake funkcije jedinstvena g.s. (ako uopće postoji).

Pojam slabe derivacije prirodno se poopćuje na derivacije višeg reda, koje definiramo induktivno kao slabe derivacije već postojećih slabih derivacija. Pritom je važno naglasiti da i u slabom smislu vrijedi Schwarzov teorem, odnosno komutativnost mješovitih parcijalnih derivacija ($\partial_{ij} u = \partial_{ji} u$ gotovo svuda), pod uvjetom da te derivacije postoje.

Sada možemo definirati sljedeće funkcijske prostore u kojima ćemo tražiti rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Definicija 2.1.6: Soboljevljev prostor $W^{1,p}$

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $1 \leq p \leq \infty$. Soboljevljev prostor $W^{1,p}(\Omega)$ definira se kao prostor svih funkcija $u \in L^p(\Omega)$ za koje postoji slaba parcijalna derivacija $\partial_i u \in L^p(\Omega)$ za sve $i = 1, \dots, n$.

Pripadna norma definirana je kao:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{za } 1 \leq p < \infty,$$

dok je za $p = \infty$:

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Za poseban slučaj $p = 2$, prostor se tradicionalno označava kao $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.

Analogno, definiramo skup funkcija $W^{2,p}(\Omega)$ kao skup funkcija $u \in L^p(\Omega)$ kojima postoje sve slabe prve i druge derivacije i pripadaju $L^p(\Omega)$. U normu tog prostora uključene su i L^p norme svih drugih derivacija. Analogno definiramo i ostale prostor $W^{k,p}$, te imamo oznaku $H^k \equiv W^{k,2}$.

Primjer 2.1.7

Promatrajmo funkciju $u(x) = |x|$ na intervalu $(-1, 1)$. Pokazat ćemo da je njezina slaba derivacija funkcija predznaka, $v(x) = \text{sgn}(x)$, tako što ćemo izravno provjeriti zadovoljava li definiciju. Za svaku test funkciju $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$ mora vrijediti:

$$\int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 \text{sgn}(x) \varphi(x) dx.$$

Krenimo od lijeve strane definicije i rastavimo integral na dva dijela, ovisno o predznaku argumenta pod apsolutnom vrijednosti, pa koristimo parcijalnu integraciju:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx &= \int_{-1}^0 (-x) \varphi'(x) dx + \int_0^1 x \varphi'(x) dx \\ &= \underbrace{[-x\varphi(x)]_{-1}^0}_{=0} - \int_{-1}^0 (-1) \varphi(x) dx + \underbrace{[x\varphi(x)]_0^1}_{=0} - \int_0^1 1 \cdot \varphi(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 \text{sgn}(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

gdje smo na kraju iskoristili definiciju funkcije sgn .

Primjer 2.1.8: Nepostojanje slabe derivacije za funkciju sa skokom

Promatrajmo funkciju $u(x) = \text{sgn}(x)$ na intervalu $[-1, 1]$. Pokažimo detaljno zašto ova funkcija nema slabu derivaciju.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji slaba derivacija $v \in L^1(-1, 1)$ takva da za svaku test funkciju $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$ vrijedi:

$$\int_{-1}^1 \text{sgn}(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx.$$

Izračunajmo lijevu stranu integrala rastavljanjem na dva podintervala, pa direktnom integracijom (prema Newton-Leibnizovoj formuli) dobivamo:

$$\int_{-1}^1 \text{sgn}(x) \varphi'(x) dx = \int_{-1}^0 (-1) \varphi'(x) dx + \int_0^1 \varphi'(x) dx = -2\varphi(0).$$

Naša pretpostavka se svodi na zahtjev da za svaki $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$ vrijedi:

$$-2\varphi(0) = - \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx \implies 2\varphi(0) = \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx. \quad (2.1.3)$$

Dokažimo da ne postoji funkcija v za koju je gornja relacija zadovoljena za sve φ . Za test funkcije φ možemo uzeti tzv. izgladivače (eng. mollifiers). Za $\varepsilon > 0$ izgladivači se općenito definiraju kao funkcije sa $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-n} \eta(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad \eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} Ce^{1/(|\mathbf{x}|^2-1)} & |\mathbf{x}| < 1, \\ 0 & |\mathbf{x}| \geq 1 \end{cases},$$

gdje je $C > 0$ t.d. $\int_{\mathbb{R}^n} \eta d\mathbf{x} = 1$. To su C_c^∞ funkcije s nosačem u kugli radijusa ε oko nule. U našem slučaju gledamo $n = 1$.

Uvrstimo $\varphi = \eta_\varepsilon$ u relaciju (2.1.3). Za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ nosač funkcije η_ε strogo je unutar $(-1, 1)$, pa integracije preživljavaju samo na $[-\varepsilon, \varepsilon]$:

$$2\eta_\varepsilon(0) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v(x)\eta_\varepsilon(x) dx.$$

Ocijenimo desnu stranu po apsolutnoj vrijednosti, koristeći spomenuto svojstvo maksimuma izgladivača:

$$2\eta_\varepsilon(0) \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v(x)|\eta_\varepsilon(x) dx \leq \eta_\varepsilon(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v(x)| dx.$$

Budući da je $\eta_\varepsilon(0) > 0$, cijelu nejednakost možemo podijeliti s tim članom, što nas vodi do:

$$2 \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v(x)| dx.$$

Kada pustimo limes $\varepsilon \rightarrow 0$, zbog apsolutne neprekidnosti Lebesgueovog integrala za funkciju $v \in L^1(-1, 1)$, integral na desnoj strani teži u nulu. Time dobivamo očitu kontradikciju $2 \leq 0$, čime je dokaz završen.

Iako u dimenziji $n = 1$ vrijedi da sve neprekidne funkcije imaju slabu derivaciju, pa time posebno vrijedi $H^1(a, b) \subset C(a, b)$, u višim dimenzijama ($n \geq 2$) to općenito ne vrijedi.

U nastavku navedimo neka svojstva Soboljevljevih prostora.

Teorem 2.1.9: Aproksimacija glatkim funkcijama (Meyers-Serrin)

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $1 \leq p < \infty$. Tada je prostor $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ gust u $W^{1,p}(\Omega)$. Ako je k tome Ω ograničena domena s Lipschitzovim rubom, tada je i prostor $C^\infty(\bar{\Omega})$ (restrikcije glatkih funkcija s $\mathbb{R}^n$ na Ω) gust u $W^{1,p}(\Omega)$. To znači da za svaku funkciju $u \in W^{1,p}(\Omega)$ postoji niz funkcija $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ takav da:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0.$$

Teorem 2.1.10: Rellich-Kondrašovljev teorem kompaktnosti

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena domena s Lipschitzovim rubom. Za svaki $1 \leq p < \infty$, ulaganje

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

je kompaktno.

Drugim riječima, ako je niz $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uniformno ograničen u Soboljevljevu prostoru $W^{1,p}(\Omega)$, odnosno postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq M$ za svaki $m \in \mathbb{N}$, tada postoji podniz $(u_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ i funkcija $u \in L^p(\Omega)$ takva da:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{m_k} - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Teorem 2.1.11: Teorem o tragu na dijelu ruba

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena domena s Lipschitzovim rubom $\partial\Omega$, i neka je $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ relativno otvoren podskup ruba čija je $(n-1)$ -dimenzionalna Lebesgueova mjera strogo pozitivna ($\mu_{n-1}(\Gamma_0) > 0$).

Tada za svaki $1 \leq p \leq \infty$ postoji jedinstven ograničen linearni operator

$$\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma_0)$$

takav da za svaku funkciju $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ vrijedi $\gamma_0(u) = u|_{\Gamma_0}$. Nadalje, operator je neprekidan, odnosno postoji konstanta $C = C(\Omega, \Gamma_0, p) > 0$ takva da vrijedi:

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^p(\Gamma_0)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Teorem o tragu na kompliciran način kaže sljedeću (pomalo nepreciznu) stvar: da bismo za funkciju definiranu na n -dimenzionalnom skupu definirali njezinu restrikciju na $(n-1)$ -dimenzionalni skup, moramo "platiti" jednom slabom derivacijom. Restrikcija $W^{1,p}$ funkcije na manje dimenzionalni skup je klase L^p , dok L^p funkciju općenito ne možemo restringirati na skup manje dimenzije (što je u skladu s Lebesgueovom mjerom).

Napomenimo u posebnom slučaju kada je dio domene Γ_0 hiperravnina određena normalom $\mathbf{n}$ i postoji $d > 0$ takav da je $\Omega^d = \{\mathbf{x} + t\mathbf{n} : \mathbf{x} \in \Gamma_0, t \in (0, d)\} \subset \Omega$, vrijedi

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^p(\Gamma_0)} \leq C \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L^p(\Omega^d)} + \|u\|_{L^p(\Omega^d)} \right), \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Drugim riječima, L^p normu traga funkcije (vrijednosti funkcije na nekom ravnom rubu domene) možemo kontrolirati isključivo derivacijom okomitom na taj rub.

Teorem 2.1.12: Poincaréova nejednakost uz djelomični Dirichletov uvjet

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena domena s Lipschitzovim rubom, te neka je $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ dio ruba pozitivne mjere ($\mu_{n-1}(\Gamma_0) > 0$). Definirajmo potprostor funkcija koje iščezavaju na tom dijelu ruba:

$$W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \gamma_0(u) = 0 \text{ na } \Gamma_0\}.$$

Tada za svaki $1 \leq p < \infty$ postoji konstanta $C = C(\Omega, \Gamma_0, p) > 0$ takva da za svaku funkciju $u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega)$ vrijedi:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Kao posljedica, polunorma $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ predstavlja normu na prostoru $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega)$ koja je ekvivalentna standardnoj Soboljevljevoj normi.

Poincaréova nejednakost kaže da gradijent $W^{1,p}$ funkcije kontrolira cijelu L^p ili čak i $W^{1,p}$ normu funkcije uz uvjet da znamo da ta funkcija nije identički jednaka netrivialnoj konstanti (u ovoj najpoznatijoj verziji teorema zahtijevamo da je na netrivialnom dijelu ruba domene funkcija jednaka nuli).

Teorem 2.1.13: Potpunost prostora L^p i $W^{1,p}$

Za $1 \leq p \leq \infty$, prostori $L^p(\Omega)$ i $W^{1,p}(\Omega)$ su Banachovi prostori, što znači da je svaki Cauchyjev niz u tim prostorima jako konvergentan. Posebno, za $p = 2$, prostori $L^2(\Omega)$ i $H^1(\Omega)$ su potpuni unitarni prostori, odnosno Hilbertovi prostori.

Za slučaj $p = 2$ posebna oznaka H^1 sugerira da je u tom slučaju prostor Hilbertov.

2.1.4 * Dualni prostor $H^{-1}(\Omega)$

Definicija 2.1.14: Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Dualni prostor Hilbertovog prostora $H_0^1(\Omega)$ (što je po definiciji oznaka za $W_0^{1,2}(\Omega)$) označava se s $H^{-1}(\Omega)$. To je prostor svih ograničenih (neprekidnih) linearnih funkcionala na $H_0^1(\Omega)$. Norma funkcionala $f \in H^{-1}(\Omega)$ definirana je standardno kao operatorska norma:

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}},$$

gdje $\langle f, v \rangle$ označava djelovanje funkcionala f na test funkciju v (dualno sprezanje).

Teorem 2.1.15: Karakterizacija prostora $H^{-1}(\Omega)$

Funkcional f pripada prostoru $H^{-1}(\Omega)$ ako i samo ako postoje funkcije $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$ takve da se f može prikazati u obliku:

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^n \partial_i f_i$$

u smislu distribucija. To znači da za svaku test funkciju $v \in H_0^1(\Omega)$ djelovanje funkcionala glasi:

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f_0(x) v(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i(x) \partial_i v(x) dx.$$

Nadalje, norma na dualnom prostoru može se karakterizirati kao:

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=0}^n \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} : f = f_0 + \sum_{i=1}^n \partial_i f_i \right\}.$$

2.1.5 Slaba konvergencija i teorem o kompaktnosti

Iako nam potpunost garantira postojanje limesa za Cauchyjeve nizove, u praksi (primjerice, kod primjene direktne metode varijacijskog računa) najčešće imamo samo informaciju da je niz aproksimacija *uniformno ograničen*. U konačnodimenzionalnim prostorima poput $\mathbb{R}^n$, Bolzano-Weierstrassov teorem garantira da svaki ograničen niz ima konvergentan podniz. U beskonačnodimenzionalnim prostorima to svojstvo jake kompaktnosti propada. Recimo, za niz funkcija

$$(u_n)_n \subset L^2(0, 2\pi), \quad u_n(x) = \sin(nx), \quad \text{za } n \in \mathbb{N}. \quad (2.1.4)$$

Za taj niz funkcija vrijedi

$$\|u_n\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \pi, \quad \|u_m - u_n\|_{L^2}^2 = 2\pi.$$

Udaljenost između bilo koja dva člana niza je konstantna i iznosi $\sqrt{2\pi}$. Zbog toga niti jedan podniz ne može biti Cauchyjev, pa posljedično ograničen niz (u_n) ne posjeduje jako konvergentan podniz u prostoru $L^2(0, 2\pi)$.

Da bismo vratili svojstvo kompaktnosti za ograničene nizove te omogućili granične prijelaze u diferencijalnim jednadžbama, moramo oslabiti zahtjeve na topologiju. To nas vodi do pojma slabe konvergencije, koja mjeri konvergenciju "u prosjeku" umjesto u normi.

Definicija 2.1.16: Slaba konvergencija

Neka je X Banachov prostor i X' njegov topološki dual (prostor svih neprekidnih linearnih funkcionala na X). Kažemo da niz $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ **slabo konvergira** prema elementu $u \in X$, u oznaci $u_n \rightharpoonup u$, ako za svaki funkcional $f \in X'$ vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n \rangle_{X', X} = \langle f, u \rangle_{X', X}.$$

U kontekstu prostora $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p < \infty$, prema Rieszovom teoremu reprezentacije svaki se funkcional može poistovjetiti s integracijom protiv funkcije iz dualnog prostora $L^q(\Omega)$ (gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Stoga $u_n \rightharpoonup u$ u $L^p(\Omega)$ znači da za svaku test funkciju $v \in L^q(\Omega)$ vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) v(x) dx = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

Za prostor $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, definicija slabe konvergencije uključuje prostor $H^{-1}(\Omega)$, no karakterizacija je jednostavnija: kažemo da $u_n \rightharpoonup u$ u $W^{1,p}(\Omega)$ ako i samo ako $u_n \rightharpoonup u$ u $L^p(\Omega)$ i $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ u $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Za niz funkcija iz (2.1.4) pokazuje se (netrivijalno) da konvergira slabo k nuli funkciji. Napomenimo da osim po imenu, jaka i slaba konvergencija imaju i dokazanu vezu u tome što jaka konvergencija implicira slabu, te da je linearna kombinacija funkcija koje konvergiraju slabo opet slabo konvergentna.

Ovakva definicija konvergencije omogućuje nam sljedeći ključni rezultat.

Teorem 2.1.17: Eberlein-Šmuljan / Banach-Alaoglu

Neka je X refleksivan Banachov prostor (što uključuje $L^p(\Omega)$ i $W^{1,p}(\Omega)$ za stroge granice $1 < p < \infty$). Tada je svaki ograničen niz u X **nizovno slabo kompaktan**.

Preciznije, ako postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|u_n\|_X \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tada postoji podniz $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ i element $u \in X$ takav da

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{slabo u } X.$$

Napomenimo da prema Teoremu o uniformnoj ograničenosti, vrijedi i neki oblik obrata gornje tvrdnje: svaki slabo konvergentan niz u refleksivnom Banachovom prostoru je uniformno ograničen (u normi).

Napomena 2.1.18: Rubni slučajevi $p = 1$ i $p = \infty$

Prostori $L^1(\Omega)$ i $L^\infty(\Omega)$ nisu refleksivni, stoga teorem o slaboj kompaktnosti ograničenih nizova za njih ne vrijedi direktno. Ograničen niz u $L^1(\Omega)$ općenito nema slabo konvergentan podniz u L^1 (konvergencija često "pobjegne" u prostor mjera, uzrokujući koncentracije poput Diracove delte). Za $L^\infty(\Omega)$, s obzirom na to da je dual od L^1 , ograničeni nizovi posjeduju podnizove koji konvergiraju u još slabijoj, tzv. **slabo-*** topologiji.

Napomena 2.1.19: Jedinstvenost limesa kroz prostor distribucija

U analizi parcijalnih diferencijalnih jednadžbi neprestano ispreplićemo različite prostore funkcija (poput L^p , H^1 , H^{-1}) i pripadne topologije (jaka i slaba konvergencija). Presudno je razumjeti da se svi ti prostori mogu neprekidno uložiti u jedan veliki, nadređeni prostor — **prostor distribucija** $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Budući da je topologija na prostoru distribucija Hausdorffova, limesi konvergentnih nizova u njoj su **jedinstveni**. Zbog toga se svaki niz koji konvergira u bilo kojoj od naših jakih ili slabih topologija nužno mora konvergirati istom tom limesu i u smislu distribucija. Iz ove naizgled

apstraktne činjenice proizlaze dva iznimno važna praktična alata koja ćemo često koristiti:

1. **Usklađenost limesa:** Ako niz (f_n) konvergira prema g u jednoj topologiji (npr. slabo u L^2), a prema h u nekoj sasvim drugoj topologiji (npr. jako u H^{-1}), tada se ta dva limesa moraju podudarati u $\mathcal{D}'(\Omega)$, iz čega izravno slijedi $g = h$ gotovo svuda.
2. **Zatvorenost operatora derivacije:** Operacija deriviranja je neprekidno preslikavanje u prostoru distribucija. To znači da iz $f_n \rightarrow f$ u $\mathcal{D}'$ automatski slijedi $\nabla f_n \rightarrow \nabla f$ u $\mathcal{D}'$.
U praksi to koristimo na sljedeći način: ako izvučemo informaciju da $f_n \rightarrow f$ (u nekoj topologiji) i istovremeno $\nabla f_n \rightarrow \mathbf{g}$ (u nekoj, možda i potpuno drugoj topologiji), tada nužno mora vrijediti $\nabla f = \mathbf{g}$ u smislu distribucija (odnosno u smislu slabe derivacije). Posebno, ako naknadno ustanovimo da $f \in L^p(\Omega)$ i $\mathbf{g} \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, iz te jednakosti automatski proizlazi da je $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

Prije nastavka pokazat ćemo još jedan rezultat Poincaréovog tipa. Teorem sam po sebi je koristan, ali ćemo ga dokazati kako bismo pokazali korištenje dosad iskazanih rezultata u praksi.

Teorem 2.1.20: Poincaré-Wirtingerova nejednakost

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena povezana domena s Lipschitzovim rubom i $1 \leq p < \infty$. Tada postoji konstanta $C > 0$, ovisna samo o Ω i p , takva da za svaku funkciju $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vrijedi:

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad (2.1.5)$$

gdje je $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$ prosječna (srednja) vrijednost funkcije u na domeni Ω .

Ovaj teorem opet pokazuje da gradijent funkcije kontrolira vrijednosti funkcije u L^p normi čim se na neki način izbace netrivialne konstante iz igre.

Dokaz.

Jedan od načina dokaza ovakvih nejednakosti je kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno, takva konstanta $C > 0$ ne postoji. To znači da za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ možemo pronaći funkciju $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ takvu da vrijedi:

$$\|u_n - \bar{u}_n\|_{L^p(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.1.6)$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|u_n - \bar{u}_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$ (eventualnim reskaliranjem). Time smo dobili da je niz s lijeve strane nejednakosti (2.1.6) ograničen u $L^p(\Omega)$, pa prema Banach-Alaoguluovom teoremu vrijedi da postoji slabo konvergentan podniz u $L^p(\Omega)$. Također, za niz s desne strane vrijedi $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} < 1/n$, odakle zaključujemo da taj niz konvergira jako k nuli. Dokaz će biti gotov ako dokažemo kao posljedicu da i niz slijeva konvergira jako k nuli (jer će se to kositi s tvrdnjom da su norme članova tog niza jednake 1). Uvedimo još pokratu $v_n = u_n - \bar{u}_n$. Kako je $\bar{u}_n$ konstanta, vrijedi $\nabla v_n = \nabla u_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz gornjeg raspisa zaključujemo da postoji podniz tog niza i limes v_0 za koji vrijedi

$$\begin{aligned} v_{n_k} &\rightharpoonup v_0 \quad \text{slabo u } L^p(\Omega), \\ \nabla v_{n_k} &\rightarrow 0 \quad \text{jako u } L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Budući da je niz v_{n_k} ograničen u $L^p(\Omega)$, a njegov gradijent ∇v_{n_k} teži k nuli (pa je time također ograničen), cijeli niz je uniformno ograničen u Soboljevljevom prostoru $W^{1,p}(\Omega)$. Kako je Ω ograničena domena s Lipschitzovim rubom, po Rellich-Kondrašovljevom teoremu o kompaktnom ulaganju slijedi da iz uniformne ograničenosti u $W^{1,p}(\Omega)$ možemo izvući jako konvergentan

podniz u $L^p(\Omega)$. Kompaktnost nam osigurava da slabo konvergentan niz v_{n_k} zapravo konvergira *jako* u $L^p(\Omega)$ prema istom limesu v_0 .

Iz jake konvergenije neposredno slijedi konvergenija normi:

$$\|v_0\|_{L^p(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} = 1.$$

S druge strane, kako konvergenije komutiraju s deriviranjem u smislu distribucija, iz $\nabla v_{n_k} \rightarrow 0$ u $L^p(\Omega)$ slijedi da je slaba derivacija limesa nula, odnosno $\nabla v_0 = 0$ g.s. u Ω . Kako je domena Ω povezana, funkcija v_0 mora biti konstanta, tj. $v_0 = c$ g.s.

Konačno, primijetimo da je srednja vrijednost svakog elementa niza v_n jednaka nuli:

$$\bar{v}_n = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (u_n - \bar{u}_n) dx = \bar{u}_n - \bar{u}_n = 0.$$

Zbog jake konvergenije $v_{n_k} \rightarrow v_0$ u $L^p(\Omega)$ konvergiraju i njihove srednje vrijednosti, pa je i prosjek limesa v_0 jednak nuli. Konstanta čija je srednja vrijednost nula mora biti jednaka nuli, stoga je $v_0 \equiv 0$.

Ovo predstavlja direktnu kontradikciju jer smo dobili da je $v_0 \equiv 0$, dok nam norma s druge strane iznosi $\|v_0\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Time je pretpostavka bila pogrešna i konstanta C mora postojati.

Zadatak 2.1.21

U prošlom rješenju iskoristili smo dvije tvrdnje:

- ako $u_n \rightarrow u$ u $L^p(\Omega)$, onda $\overline{u_n} \rightarrow \bar{u}$;
- ako $u_n \rightarrow u$ u $L^p(\Omega)$, onda $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

Dokažite te tvrdnje (oduzmite lijevu i desnu stranu u tvrdnjama u koje treba dokazati i možda iskoristite Hölderovu nejednakost).

Zadatak 2.1.22

Neka je $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ niz funkcija koji konvergira jako k $u \in L^p(\Omega)$, te $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^q(\Omega)$ niz funkcija koji konvergira slabo k $v \in L^q(\Omega)$, uz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dokažite da tada vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) v_n(x) dx = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx. \quad (2.1.7)$$

2.2 Uvod u eliptičke rubne zadaće

2.2.1 Diferencijalna formulacija i rubni uvjeti

Najpoznatiji i najjednostavniji primjer eliptičke parcijalne diferencijalne jednačbe je Poissonova jednačba, koja uključuje Laplaceov operator:

$$-\Delta u = f \quad \text{u } \Omega, \quad \text{gdje je } \Delta u := \partial_{11}u + \partial_{22}u + \dots \partial_{nn}u.$$

U jednodimenzionalnom slučaju ($n = 1$), Laplaceov operator svodi se na običnu drugu derivaciju u'' , pa eliptičke jednačbe možemo smatrati višedimenzionalnom generalizacijom stacionarnih uvodnih problema. Gornju jednačbu zovemo **Poissonova jednačba**, odnosno u slučaju $f = 0$ govorimo o **Laplaceovoj jednačbi**. Općenito, svaka skalarna linearna eliptička jednačba drugog reda može

se zapisati u formi

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u + c(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \quad \text{u } \Omega, \quad (2.2.8)$$

gdje je $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrica koeficijenta koja je simetrična i uniformno pozitivno definitna, vektor $\mathbf{b}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ predstavlja konvektivno (advektivno) polje brzine, skalarna funkcija $c(\mathbf{x})$ označava reaktivni član (uz standardnu pretpostavku $c(x) \geq 0$), a $f(\mathbf{x})$ je zadana funkcija izvora. U nastavku za potrebe uvoda baratamo slučajem $\mathbf{b} = 0$ i $c = 0$.

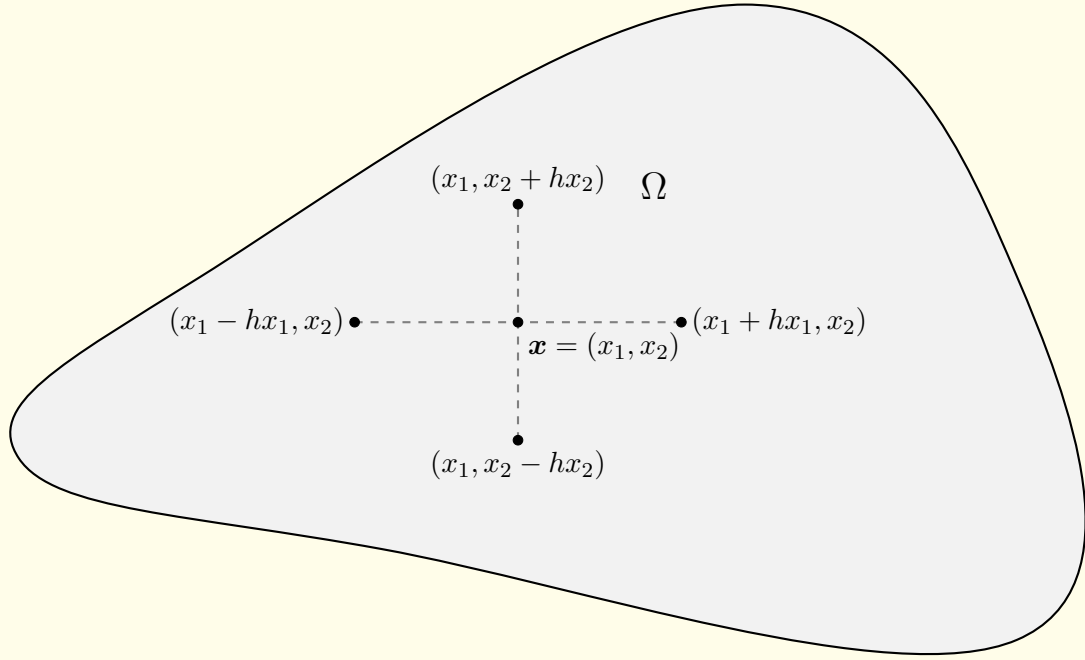
Napomena 2.2.1: Teorija linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi

Objasnimo neke pojmove iz vezane za (2.2.8). Jednačba je *skalarna* jer je kodomena nepoznanice u jednodimenzionalna. Ona je linearna jer se zapisuje kao linearna kombinacija u nepoznanici u i njezinim derivacijama (koeficijenti $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, c i f ne ovise o u , ali smiju ovisiti o $\mathbf{b}$). Ona je drugog reda jer je druga najviša derivacija koja se pojavljuje.

Konačno, ova jednačba je eliptička. Najjednostavniji način za motiviranje ovog pojma bio bi da sve parcijalne derivacije zamijenite monomima x_i^k (gdje je k red derivacije) i promatrate koji geometrijski objekt ta jednačba predstavlja. U dvije dimenzije znamo da svi mogući polinomi drugog reda u dvije varijable jednačbom $P(x_1, x_2) = 0$ mogu generirati tri poprilično različite vrste krivulja: elipse, parabole i hiperbole. Zato možete povjerovati da i u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačbi postoji različito ponašanje jednačbi u sličnim oblicima. U teoriji paraboličkih i hiperboličkih jednačbi prirodno je jednu od varijabli tretirati kao "vrijeme" te se njihova teorija onda naslanja na eliptičke jednačbe. Zato se na ovom kolegiju bavimo samo najjednostavnijom familijom jednačbi drugog reda, a to su eliptičke jednačbe.

Napomena 2.2.2: Laplaceova jednačba i modeliranje koncentracije

Općenito, eliptičke jednačbe modeliraju anizotropnu difuziju ili vodljivost (ovisno o obliku matrice $\mathbf{A}$). Jedna od motivacija za takvo što napravljena je na kolegiju Parcijalne diferencijalne jednačbe 1 koristeći interpretaciju operatora divergencije, ali to možemo motivirati i na poprilično neprecizan način. Zamislimo područje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ koje je ispunjeno nekom tvari te je u njezina koncentracija. Pretpostavimo i da je tvar u ravnoteži, tj. da se koncentracija ne mijenja u vremenu, te da je u svakoj točki širenje tvari jednako i izotropno (podjednako u svim smjerovima). Promotrimo proizvoljnu točku $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i pretpostavimo da ta točka ima četiri "susjeda": $(x_1 \pm hx_1, x_2)$, $(x_1, x_2 \pm hx_2)$ kao na slici.



Da bi koncentracija bila u balansu, u svakom trenu želimo da je koncentracija u u nekoj točki jednaka prosjeku koncentracija u susjednim točkama. To možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4} (u(x_1 + hx_1, x_2) + u(x_1 - hx_1, x_2) + u(x_1, x_2 + hx_2) + u(x_1, x_2 - hx_2)) \\ &= \frac{1}{4} (u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) + u(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_1) + u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_2) + u(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_2)). \end{aligned}$$

Dijeljenjem s h^2 i preuređivanjem, dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{4h^2} [(u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) - u(\mathbf{x})) + (u(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_1) - u(\mathbf{x})) \\ &\quad + (u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_2) - u(\mathbf{x})) + (u(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_2) - u(\mathbf{x}))] \\ &\approx \frac{1}{4h} \left(\partial_1 u \left(\mathbf{x} + \frac{h}{2} \mathbf{e}_1 \right) - \partial_1 u \left(\mathbf{x} - \frac{h}{2} \mathbf{e}_1 \right) + \partial_2 u \left(\mathbf{x} + \frac{h}{2} \mathbf{e}_2 \right) - \partial_2 u \left(\mathbf{x} - \frac{h}{2} \mathbf{e}_2 \right) \right) \\ &\approx \frac{1}{4} (\partial_{11} u(\mathbf{x}) + \partial_{22} u(\mathbf{x})) \\ &= \frac{1}{4} \Delta u(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Time smo neprecizno izveli Laplaceovu jednadžbu (pretpostavili smo da ne postoji vanjski utjecaj f koji bi utjecao na distribuciju koncentracije u).

Kako bi rješenje jednadžbe bilo jedinstveno, na rubu domene $\partial\Omega$ zadajemo rubne uvjete. Pretpostavimo da je rub podijeljen na dva disjunktna dijela, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Najčešći uvjeti su:

- **Dirichletov rubni uvjet:** Zadajemo vrijednost funkcije na rubu, npr. $u = 0$ na Γ_D .
- **Neumannov rubni uvjet:** Zadajemo tok (derivaciju u smjeru vanjske normale) na rubu, npr. $(A\nabla u) \cdot \mathbf{n} = g$ na Γ_N . U slučaju Laplaceovog operatora to je klasična normalna derivacija $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g$.

2.2.2 Izvod varijacijske formulacije

Za prelazak s jake (diferencijalne) na slabu (varijacijsku) formulaciju, jednadžbu (2.2.8) množimo proizvoljnom test funkcijom v te integriramo po domeni Ω :

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(A\nabla u)v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Primjenom Teorema o divergenciji (odnosno više-dimenzionalne formule za parcijalnu integraciju - Greenov identitet), prebacujemo jednu derivaciju na test funkciju:

$$\int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} ((A\nabla u) \cdot \mathbf{n})v \, dS = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (2.2.9)$$

Ovdje presudnu ulogu igraju rubni uvjeti: Budući da tražimo rješenje koje zadovoljava Dirichletov uvjet $u = 0$ na Γ_D , test funkcije v također moraju iščezavati na Γ_D (zbog toga se on ugrađuje direktno u prostor). Zbog toga dio rubnog integrala po Γ_D iščezava. Na dijelu Γ_N imamo Neumannov uvjet $(A\nabla u) \cdot \mathbf{n} = g$, kojeg jednostavno uvrstimo u preostali dio rubnog integrala.

Prebacivanjem poznatih članova na desnu stranu dobivamo **varijacijsku formulaciju**: Naći $u \in V$ takav da

$$\int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} g v \, dS, \quad \forall v \in V, \quad (2.2.10)$$

gdje je $V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}$. U pravilu tokom ovog kolegija gotovo uvijek ćemo promatrati varijacijsku formulaciju, a ne diferencijalnu. Jedna od najvećih prednosti je ta što se eliptična jednadžba drugog reda (u kojoj se pojavljuju druge derivacije) u varijacijskoj formulaciji zapisuje samo pomoću prvih derivacija, pa se rješenja traže u prostoru $W^{1,2}(\Omega) \equiv H^1(\Omega)$.

Ovime smo pokazali da diferencijalna formulacija (2.2.8) (uz $b = 0$, $c = 0$) implicira varijacijsku formulaciju (2.2.10). Za obrat nam je potreban sljedeći rezultat.

Lema 2.2.3: Osnovna lema varijacijskog računa

Neka je $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Ako za svaku test funkciju $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vrijedi

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

tada je $u(\mathbf{x}) = 0$ gotovo svuda u Ω .

Napomena 2.2.4: Zašto uvodimo Soboljevljeve prostore?

Prirodno bi bilo tražiti rješenja varijacijske zadaće u prostoru $C^1(\bar{\Omega})$. Međutim, prostor neprekidno diferencijabilnih funkcija opremljen integralnom (energetskom) normom **nije potpun**. Ako konstruiramo aproksimativni (npr. Galerkinov) niz rješenja, on će biti Cauchyjev u H^1 normi, ali njegov limes ne mora nužno biti diferencijabilna ili čak neprekidna funkcija. Soboljevljevi prostori (poput $H^1(\Omega)$) uvode se upravo kao upotpunjenja takvih prostora kako bismo si osigurali postojanje limesa i primjenjivost moćnih alata funkcionalne analize.

2.2.3 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

Apstraktni okvir za rješavanje linearnih eliptičkih jednadžbi daje čuvena Lax-Milgramova lema, koja generalizira Rieszov teorem reprezentacije na nesimetrične bilinearne forme.

Teorem 2.2.5: Lax-Milgramova lema

Neka je V Hilbertov prostor. Neka je $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma (linearna po svakoj od dvije varijable), a $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ linearan funkcional. Pretpostavimo da vrijedi:

1. **Ograničenost (neprekidnost) forme:** $\exists M > 0$ takav da $|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$ za sve $u, v \in V$.
2. **Koercitivnost (V-eliptičnost):** $\exists \alpha > 0$ takav da $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$ za sve $u \in V$.
3. **Neprekidnost funkcionala:** $l \in V'$.

Tada postoji jedinstveno rješenje $u \in V$ varijacijske zadaće

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

Nadalje, rješenje je stabilno s obzirom na desnu stranu te vrijedi apriorna ocjena:

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{V'}.$$

U slučaju da je bilinearna forma a simetrična, odnosno $a(u, v) = a(v, u)$, dodatno možemo iskoristiti i sljedeći rezultat.

Teorem 2.2.6: Minimizacija energije

Neka su ispunjene pretpostavke Lax-Milgramove leme i neka je forma $a(\cdot, \cdot)$ **simetrična**. Definirajmo funkcional ukupne energije $E : V \rightarrow \mathbb{R}$ kao:

$$E(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v).$$

Tada je element $u \in V$ jedinstveno rješenje varijacijske zadaće $a(u, v) = l(v)$ za svaki $v \in V$ ako i samo ako u strogo minimizira funkcional energije na prostoru V , odnosno:

$$E(u) = \min_{v \in V} E(v).$$

Pokažimo ove rezultate u jednom (umjetnom) primjeru. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena domena s Lipschitzovim rubom $\partial\Omega$. Promatramo klasičnu rubnu zadaću s homogenim Dirichletovim rubnim uvjetom:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x_1, x_2) \nabla u) = f(x_1, x_2) & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2.11)$$

gdje je $f \in L^2(\Omega)$ neka fiksna zadana funkcija, a matrica koeficijenata $A(x_1, x_2)$ zadana je s:

$$A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3 + \sin(x_1) & 1 \\ 1 & 3 + \cos(x_2) \end{bmatrix}.$$

Kao u uvodu, izvodimo varijacijsku (slabu) formulaciju i dobivamo zadaću: naći $u \in V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \partial\Omega\}$ takvu da za sve $v \in V$ vrijedi

$$\int_{\Omega} A(x_1, x_2) \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (2.2.12)$$

Da bismo provjerili dobru postavljenost (egzistenciju i rješenje zadaće), definiramo forme $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ i $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ kao

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A(x_1, x_2) \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}, \quad l(v) = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Forma je a je očito bilinearna (dodatno je i simetrična) te l linearna. Ostala svojstva provjeravamo redom. Očito je V Hilbertov prostor kao zatvoreni podskup od H^1 . Primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti u L^2 dobivamo:

$$|l(v)| \leq \int_{\Omega} |fv| \, dxdy \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Slijedi da je $l \in V'$ ograničen funkcional s normom $\|l\|_{V'} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Nadalje, budući da koeficijenti matrice A ne prelaze vrijednost 4 (jer je $\max(3 + \sin x) = 4$), postoji konstanta $M > 0$ takva da je $|A(x, y)\xi| \leq M|\xi|$. Primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti imamo:

$$|a(u, v)| \leq \int_{\Omega} |A \nabla u \cdot \nabla v| \, dxdy \leq M \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| \, dxdy \leq M \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Kako po definiciji H^1 norme vrijedi $\|\nabla u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$, forma je ograničena: $|a(u, v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Preostalo nam je provjeriti smo koercitivnost, koja je u pravilu uvijek najteža za provjeriti.

Za svaki vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ograničavamo odozdo kvadratnu formu $\xi^T A(x_1, x_2) \xi$. Budući da je $\sin(x_1) \geq -1$ i $\cos(x_2) \geq -1$, vrijedi $3 + \sin(x_1) \geq 2$ i $3 + \cos(x_2) \geq 2$. Slijedi:

$$\begin{aligned} \xi^T A(x_1, x_2) \xi &= (3 + \sin x_1) \xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 + (3 + \cos x_2) \xi_2^2 \\ &\geq 2\xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 + 2\xi_2^2 \\ &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 + \xi_2^2) \\ &= |\xi|^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2 \geq |\xi|^2. \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da je matrica A uniformno pozitivno definitna na Ω s konstantom eliptičnosti $\alpha = 1$. Uvrštavamo $v = u$ u formu i dobivamo

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u^T A(x, y) \nabla u \, dxdy \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dxdy = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Budući da $u \in H_0^1(\Omega)$ zadovoljava homogeni Dirichletov uvjet na cijelom rubu, na njega možemo primijeniti Poincaréovu nejednakost (Teorem 2.1.16). Postoji konstanta $C_P > 0$ ovisna samo o domeni Ω takva da je $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Iz definicije pune norme $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2$ slijedi:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (C_P^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Uvrštavanjem ovog rezultata u ocjenu za formu a dobivamo:

$$a(u, u) \geq \frac{1}{C_P^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Forma a je koercitivna s konstantom $\tilde{\alpha} = \frac{1}{C_P^2 + 1} > 0$.

Budući da su ispunjeni svi uvjeti Lax-Milgramove leme, varijacijska zadaća (2.2.12) ima jedinstveno rješenje $u \in H_0^1(\Omega)$. Uz to, vrijedi i apriorna ocjena koja nam jamči stabilnost rješenja s obzirom na desnu stranu:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \|l\|_{V'} \leq (C_P^2 + 1) \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

U nastavku skripte primjenjivat ćemo sličnu analizu koju ćemo u pravilu sve manje obrazlagati jer će se pojavljivati u sve kompliciranijem kontekstu (u pravilu u situacijama s familijama diferencijalnih zadaća ovisne o parametru ε).

Zadatak 2.2.7

U ovom poglavlju raspisali smo varijacijsku formulaciju za diferencijalnu jednadžbu (2.2.8) uz pretpostavke $\mathbf{b} = 0$, $c = 0$. Raspišite kako bi glasila varijacijska formulacija za generalni izbor

funkcija $\mathbf{b}$ i c , te nađite neke uvjete na $\mathbf{b}$ i c za koje je Lax-Milgramova lemma zadovoljena (a da nije $\mathbf{b} = 0$).

Poglavlje 3

Nesingularni problemi za eliptičke PDJ

3.1 Prvi primjer familije eliptičkih problema

Kao uvod u opću apstraktnu teoriju, promatramo familiju eliptičkih problema na fiksnoj ograničenoj domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s Lipschitzovim rubom, kod kojih se matricno polje koeficijenata $A_\varepsilon(\mathbf{x})$ i desna strana $f_\varepsilon(\mathbf{x})$ blago mijenjaju pod utjecajem malog parametra $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon) = f_\varepsilon & \text{u } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Pretpostavimo da je familija simetričnih matrica $A_\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ uniformno pozitivno definitna, tj. postoji konstanta eliptičnosti $\alpha > 0$ neovisna o ε takva da vrijedi:

$$A_\varepsilon(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \quad \text{g.s. } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

Dakle, konstantna pozitivne definitnosti uniformna je i po $\mathbf{x}$ i po $\varepsilon > 0$.

Nadalje, pretpostavimo da koeficijenti konvergiraju uniformno, $A_\varepsilon \rightarrow A_0$ u $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, te da desne strane konvergiraju $f_\varepsilon \rightarrow f_0$ jako u $L^2(\Omega)$. Dokazat ćemo da niz rješenja u_ε konvergira jako prema rješenju limitnog problema u_0 u prostoru $V = H_0^1(\Omega)$ koji je dan s matricom A_0 i desnom stranom f_0 .

Na prostoru $V = H_0^1(\Omega)$ definiramo familiju bilinearnih formi $a_\varepsilon : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ i linearnih funkcionala $l_\varepsilon \in V'$ za svaki $\varepsilon \geq 0$:

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega A_\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad l_\varepsilon(v) = \int_\Omega f_\varepsilon v \, dx.$$

Varijacijske formulacije za perturbirani i limitni problem (za $\varepsilon \geq 0$) glase

$$\text{Naći } u_\varepsilon \in V \text{ t.d. } a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v), \quad \forall v \in V.$$

Prvo ćemo dokazati da uniformna pozitivna definitnost matrica A_ε povlači uniformnu koercitivnost bilinearnih funkcionala a_ε . Za proizvoljnu $v \in V$ vrijedi

$$\int_\Omega A(\mathbf{x})\nabla v \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} \geq c_P \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

gdje smo na kraju iskoristili i Poincaréovu nejednakost. Dakle, dokazali smo

$$\exists \tilde{\alpha} > 0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 : \quad a_\varepsilon(v, v) \geq \tilde{\alpha} \|v\|_V^2. \quad (3.1.2)$$

U tu nejednakost uvrštavamo $v := u_\varepsilon - u_0$. Ako dokažemo da lijeva strana ide k nuli, dobit ćemo da isto vrijedi i za desnu, što znači da ćemo dobiti jaku konvergenciju rješenja u H^1 normi. Koristeći linearnost forme, slijedi

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) = a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) - a_\varepsilon(u_0, u_\varepsilon - u_0).$$

Budući da je u_ε rješenje varijacijske zadaće uz formu a_ε , vrijedi $a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) = l_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0)$. Uvrštavanjem toga i dodavanjem te oduzimanjem izraza $a_0(u_0, u_\varepsilon - u_0) = l_0(u_\varepsilon - u_0)$, dobivamo:

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) &= l_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) - a_\varepsilon(u_0, u_\varepsilon - u_0) \\ &= l_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) - l_0(u_\varepsilon - u_0) + a_0(u_0, u_\varepsilon - u_0) - a_\varepsilon(u_0, u_\varepsilon - u_0) \\ &= (l_\varepsilon - l_0)(u_\varepsilon - u_0) + (a_0 - a_\varepsilon)(u_0, u_\varepsilon - u_0). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Za prvi član s desne strane iz Cauchy-Schwarzove i Poincaréove nejednakosti imamo

$$|(l_\varepsilon - l_0)(u_\varepsilon - u_0)| = \int_{\Omega} (f_\varepsilon - f_0)(u_\varepsilon - u_0) d\mathbf{x} \leq \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon - u_0\|_V. \quad (3.1.4)$$

Za drugi član iz uzastopne primjene Hölderove nejednakosti i Poincaréove nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} |(a_0 - a_\varepsilon)(u_0, u_\varepsilon - u_0)| &= \left| \int_{\Omega} (A_0(x) - A_\varepsilon(x)) \nabla u_0 \cdot \nabla (u_\varepsilon - u_0) dx \right| \\ &\leq \|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla (u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_0\|_V \|u_\varepsilon - u_0\|_V. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Kad vratimo u (3.1.3) dobivamo

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \leq \left(C \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_0\|_V \right) \|u_\varepsilon - u_0\|_V.$$

Korištenjem (3.1.2) i dijeljenjem s $\|u_\varepsilon - u_0\|_V$ dobivamo izravnu ocjenu za pogrešku u normi:

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \left(C \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_0\|_V \right).$$

Budući da po pretpostavci $\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ i $\|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$ kada $\varepsilon \rightarrow 0$, desna strana nejednakosti teži u nulu. Slijedi:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u_0\|_V = 0,$$

čime je jaka konvergencija rješenja $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ u prostoru $H_0^1(\Omega)$ u potpunosti dokazana.

3.2 Generalizirani rezultat za nesusingularne probleme

Prethodni primjer je primjer tzv. nesusingularnih problema: familija zadaća ne mijenja prirodu problema. Iako se ovisnost o ε nalazi uz najviše (i jedine) derivacija lijeve strane, matrice su uniformno pozitivno definitne. Ovak primjer podsjeća na Primjer 1. Ovak pristup, iako već i u ovom formatu generalan, može se još više generalizirati. To možemo tako da uključimo još i članove nižeg reda u jednadžbu, ali i tako da gledamo sustave umjesto jednadžbi (nepoznanica u može imati kodomenu $\mathbb{R}^m$ umjesto $\mathbb{R}$). To ćemo postići apstrahiranjem i iskazivanjem problema pomoću bilinearnih formi a_ε , linearne forme l_ε i postavljanjem uvjeta na njih.

Ključ raspisa prošlog primjera je raspis dan u (3.1.3). Lijevu stranu smo ograničili pomoću (3.1.2), a desne strane time što smo dobili da desne strane u (3.1.4) i (3.1.5) podijeljene s $\|u_\varepsilon - u_0\|_V$ teže u nulu. Ako uvedemo pretpostavke koje to omogućuju u generalnom slučaju, tvrdnja i dokaz će proći na isti način.

Teorem 3.2.1:

Neka je V Hilbertov prostor. Neka su $a_\varepsilon : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ($\varepsilon \geq 0$) bilinearne forme te $l_\varepsilon \in V'$ linearni funkcionali koji zadovoljavaju sljedeća svojstva:

1. **Uniformna koercitivnost:** Postoji $\alpha > 0$ t.d. $a_\varepsilon(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ za sve $v \in V$ i sve $\varepsilon \geq 0$;

2. **Konvergenција formi u L^∞ smislu:** Za sve $u, v \in V$ vrijedi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|a_\varepsilon(u, v) - a_0(u, v)|}{\|u\|_V \|v\|_V} = 0;$$

3. **Konvergenција desne strane:** $l_\varepsilon \rightarrow l_0$ jako u V' .

Tada familija $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset V$ jedinstvenih rješenja zadaća

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v), \quad \forall v \in V$$

konvergira jako u V ka jedinstvenom rješenju $u_0 \in V$ zadaće

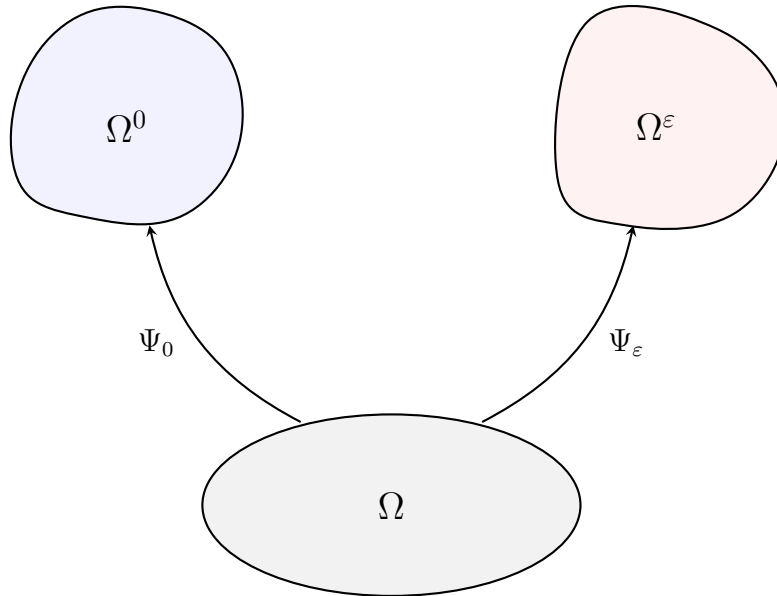
$$a_0(u^0, v) = l_0(v), \quad \forall v \in V.$$

Zadatak 3.2.2

Provjerite detalje dokaza, uvjerite se da raspis iz početnog poglavlja funkcionira i u ovoj generalnoj postavci.

3.3 Neprekidna ovisnost o geometriji (Regularne perturbacije domene)

U ovom dijelu primijenit ćemo Teorem 3.2.1 na probleme koji imaju istu jednadžbu, ali različite domene. U drugom dijelu ovog kolegija bavit ćemo se nižedimenzionalnim modelima: izvodit ćemo jednadžbe za probleme kod kojih debljina domene teži u nulu. Ovaj rezultat neće pokriti takve slučajeve, ali će poslužiti kao uvod u ono što nas čeka. Kako bismo pojednostavnili ono što se može pojednostaviti, umjesto generalne jednadžbe promatrat ćemo Laplaceovu jednadžbu $-\Delta u = f$ s homogenim Dirichletovim rubnim uvjetom na cijelom rubu, samo što će biti zadane na raznim domenama Ω^ε , $\varepsilon > 0$.



Način uspoređivanja tih domena, odnosno argumenta da domene $(\Omega^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ konvergiraju u neku domenu Ω^0 , bit će prebacivanje na parametrizaciju tih domena i promatranje konvergencije funkcija koje parametriziraju te domene.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fiksna, ograničena referentna domena s Lipschitzovim rubom. Za sve $\varepsilon \geq 0$, na njoj zadajemo glatka preslikavanja (homeomorfizme) $\Phi_\varepsilon : \Omega \rightarrow \Omega^\varepsilon$:

$$\Omega^\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega).$$

Primijetite da je uključivanje parametrizacija logičan korak, jer nije jasno kako bismo inače drugačije mogli usporediti rješenja (ili bilo kakve funkcije) sa različitih domena osim ako ih povučemo da imaju zajedničku domenu.

Korolar 3.3.1: Neprekidna ovisnost rješenja o domeni

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fiksna ograničena domena s Lipschitzovim rubom i neka je $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Neka su $\Phi_\varepsilon : \Omega \rightarrow \Omega^\varepsilon$ ($\varepsilon \geq 0$) homeomorfizmi za koje vrijedi:

- $\Phi_\varepsilon \rightarrow \Phi_0$ jako u $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ kada $\varepsilon \rightarrow 0$,
- Φ_0 je bi-Lipschitzovo preslikavanje (funkcija i njezin inverz su Lipschitzove (tj. $W^{1,\infty}$) funkcije) uz uvjet da postoji konstanta $c > 0$ takva da vrijedi:

$$|J_0(x)| = |\det(D\Phi_0(x))| \geq c > 0 \quad \text{g.s. u } \Omega.$$

Neka je, za svaki $\varepsilon \geq 0$, funkcija $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ jedinstveno slabo rješenje Dirichletove zadaće

$$-\Delta u^\varepsilon = f \quad \text{u } \Omega^\varepsilon, \quad u^\varepsilon = 0 \quad \text{na } \partial\Omega^\varepsilon.$$

Tada transformirana rješenja $\hat{u}^\varepsilon = u^\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ konvergiraju jako u prostoru $H_0^1(\Omega)$ prema $\hat{u}^0 = u^0 \circ \Phi_0$, transformiranom rješenju limitne zadaće na Ω^0 .

U nastavku dokazujemo taj rezultat. Varijacijska formulacija na Ω^ε glasi: naći $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ t.d.

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \nabla_{x^\varepsilon} u^\varepsilon \cdot \nabla_{x^\varepsilon} v^\varepsilon \, d\mathbf{x}^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f v^\varepsilon \, d\mathbf{x}^\varepsilon, \quad \forall v^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon). \quad (3.3.6)$$

Koristeći lančano pravilo na $\hat{u}^\varepsilon = u^\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$, gradijent se transformira kao $\nabla_{x^\varepsilon} u^\varepsilon = (D\Phi_\varepsilon)^{-T} \nabla_x \hat{u}^\varepsilon$, dok se element volumena transformira u $d\mathbf{x}^\varepsilon = |J_\varepsilon| d\mathbf{x}$. Uvrštavanjem ovih izraza u (3.3.6), dobivamo ekvivalentnu zadaću na fiksnoj domeni Ω :

$$\int_{\Omega} \left((D\Phi_\varepsilon)^{-T} \nabla \hat{u}^\varepsilon \right) \cdot \left((D\Phi_\varepsilon)^{-T} \nabla \hat{v} \right) |J_\varepsilon| \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f \circ \Phi_\varepsilon) \hat{v} |J_\varepsilon| \, d\mathbf{x}. \quad (3.3.7)$$

Ovu ružnu formulaciju prebacujemo u *setting* Teorema 3.2.1. Prvo definiramo familiju $A_\varepsilon(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ kao:

$$A_\varepsilon(\mathbf{x}) = |J_\varepsilon(\mathbf{x})| (D\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} (D\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}))^{-T}, \quad (3.3.8)$$

a onda definiramo bilinearne forme $a_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ i linearne funkcionalne $l_\varepsilon \in (H_0^1(\Omega))'$ kao

$$a_\varepsilon(\hat{u}, \hat{v}) = \int_{\Omega} A_\varepsilon \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{v} \, d\mathbf{x}, \quad l_\varepsilon(\hat{v}) = \int_{\Omega} (f \circ \Phi_\varepsilon) \hat{v} |J_\varepsilon| \, d\mathbf{x}.$$

Kako bismo primijenili Teorem 3.2.1, moramo provjeriti njegova tri uvjeta. Iz konvergencije $\Phi_\varepsilon \rightarrow \Phi_0$ u $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ izravno slijedi da matrice Jakobijana $D\Phi_\varepsilon \rightarrow D\Phi_0$ te determinante $|J_\varepsilon| \rightarrow |J_0|$ konvergiraju uniformno (u $L^\infty(\Omega)$). Budući da je limitno preslikavanje Φ_0 regularno, njegova pripadna matrica $A_0 = |J_0| (D\Phi_0)^{-1} (D\Phi_0)^{-T}$ je strogo pozitivno definitna, tj. postoji $\alpha_0 > 0$ takav da $A_0(\mathbf{x}) \xi \cdot \xi \geq \alpha_0 |\xi|^2$ g.s. u Ω . Zbog konvergencije $A_\varepsilon \rightarrow A_0$ u $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ sve matrice A_ε zadržavaju pozitivnu definitnost s uniformnom konstantom, primjerice $\alpha = \alpha_0/2$. To nam daje traženu uniformnu koercitivnost familije formi a_ε .

Nadalje, zbog spomenute konvergencije koeficijenata $A_\varepsilon \rightarrow A_0$ u $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, imamo direktnu ocjenu:

$$|a_\varepsilon(\hat{u}, \hat{v}) - a_0(\hat{u}, \hat{v})| \leq \|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty} \|\nabla \hat{u}\|_{L^2} \|\nabla \hat{v}\|_{L^2}.$$

Zadnje, uz standardnu pretpostavku da je $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, kompozicija $f \circ \Phi_\varepsilon$ konvergira prema $f \circ \Phi_0$ jako u $L^2(\Omega)$. U kombinaciji s $|J_\varepsilon| \rightarrow |J_0|$ u $L^\infty(\Omega)$, slijedi da desne strane konvergiraju jako, odnosno $\|l_\varepsilon - l_0\|_{(H_0^1)'} \rightarrow 0$.

Sva tri uvjeta Teorema 3.2.1 su zadovoljena. Zaključujemo da rješenja $\hat{u}^\varepsilon$ transformiranih problema konvergiraju jako u $H_0^1(\Omega)$ prema limitnom rješenju $\hat{u}^0$.

Zadatak 3.3.2

Koristeći argument gustoće s C^∞ funkcijama opravdajte da kompozicija $f \circ \Phi_\varepsilon$ konvergira prema $f \circ \Phi_0$ jako u $L^2(\Omega)$.

Poglavlje 4

Singularni problemi za eliptičke PDJ, penalizirajuća anizotropija

4.1 Familija eliptičkih zadaća i dobra postavljenost

U prošlom poglavlju gledali smo probleme vezane za familije nesingularnih eliptičkih PDJ. To smo prepoznali u tome što su matrice $A_\varepsilon(\mathbf{x})$ bile uniformno ograničene odozgo i uniformno koercitivne. Nadalje gledamo probleme kod kojih neće biti tako. Počet ćemo s onima kod kojih ćemo imati problema s ograničenosti odozgo (pa posebno nećemo imati $A_0(\mathbf{x})$ takvu da $A_\varepsilon \rightarrow A_0$ u L^∞ . Za ovo i sljedeće poglavlje, radi jednostavnosti, fiksiramo domenu $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$.

U ovom poglavlju za $\varepsilon > 0$ promatramo zadaću

$$\begin{cases} -\partial_{11}u^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_{22}u^\varepsilon = f(x_1, x_2) & \text{u } \Omega, \\ u^\varepsilon(0, x_2) = u^\varepsilon(1, x_2) = 0 & \text{za } x_2 \in (0, 1), \\ \partial_2u^\varepsilon(x_1, 0) = \partial_2u^\varepsilon(x_1, 1) = 0 & \text{za } x_1 \in (0, 1). \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Priklada prostor za ovu zadaću je $V = \{v \in H^1(\Omega) : v(0, x_2) = v(1, x_2) = 0 \text{ g.s.}\}$. Drugim riječima, matrično polje A_ε je zapravo konstantna matrica $A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} \end{bmatrix}$. Standardnim postupkom (množenjem jednadžbe test funkcijom $v \in V$, integracijom po domeni Ω te primjenom parcijalne integracije) dobivamo slabu formulaciju: naći $u^\varepsilon \in V$ takav da za svaku test funkciju $v \in V$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \partial_1 u^\varepsilon \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 u^\varepsilon \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (4.1.2)$$

Prije promatranja što se događa kada $\varepsilon \rightarrow 0$, dokažimo da je za svaki ε ova zadaća dobro postavljena. Za je ključno dokazati koercitivnost i ograničenost bilinearne forme, a za to smo naučili da je dovoljno promatrati matrice A_ε . Za $\varepsilon \in (0, 1]$ i za svaki $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$|\boldsymbol{\xi}|^2 \leq A_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = \xi_1^2 + \varepsilon^{-2} \xi_2^2 \leq \varepsilon^{-2} |\boldsymbol{\xi}|^2,$$

pa su matrice A_ε pozitivno definitne i ograničene odozgo. Postupanjem kao i ranije (provjerom svih uvjeta Lax-Milgramove leme, te primjenom Poincaréove nejednakosti) dobivamo sljedeći rezultat.

Teorem 4.1.1: Dobra postavljenost zadaće

Neka je $f \in L^2(\Omega)$. Za svaki fiksni parametar $\varepsilon > 0$, varijacijska zadaća pripadna diferencijalnom problemu (4.1.1) ima jedinstveno slabo rješenje $u^\varepsilon \in V$.

4.2 Formalni asimptotski razvoj (bez dokaza)

Kod singularnih problema kod kojih nemamo intuiciju kako će izgledati rješenje na limesu česti korak uvesti pretpostavku da rješenje u^ε možemo razviti u red potencija malog parametra ε . Takav red nazivamo formalnim asimptotskim razvojem (formalnim jer u ovom trenutku još ne znamo konvergira li taj red uopće). Nakon toga možemo ili opravdati taj razvoj ili primijeniti neke druge tehnike dokaza nevezane uz razvoj, ali koristeći formalni razvoj kao informaciju o tome što želimo dokazati.

Pretpostavimo rješenje u obliku:

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\mathbf{x}).$$

Naš je cilj otkriti koje zadaće zadovoljavaju funkcije $u_0, u_1, u_2, \dots$ te u konačnici pronaći jednadžbu za vodeći član u_0 , koji predstavlja *limitno rješenje*.

Uvrstimo naš pretpostavljeni red za u^ε u slabu formulaciju (4.1.2):

$$\int_{\Omega} \partial_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k \right) \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k \right) \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V.$$

Zbog linearnosti integrala i derivacije, možemo izlučiti potencije parametra ε i grupirati članove:

$$\varepsilon^{-2} \int_{\Omega} \partial_2 u_0 \partial_2 v + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} \partial_2 u_1 \partial_2 v + \varepsilon^0 \left(\int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v + \int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v \right) + \cdots = \varepsilon^0 \int_{\Omega} f v.$$

Kako bi ova jednakost vrijedila za svaki $\varepsilon > 0$, koeficijenti uz svaku potenciju od ε s lijeve i desne strane moraju biti jednaki. Time dobivamo niz varijacijskih jednakosti koje moraju vrijediti za svaku test funkciju $v \in V$. Krećemo od one s najnižom potencijom od ε .

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$:

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_0 \partial_2 v \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in V.$$

Ako u ovoj jednakosti odaberemo $v = u_0$, dobivamo $\int_{\Omega} |\partial_2 u_0|^2 = 0$, što izravno implicira da je $\partial_2 u_0 = 0$ gotovo svuda. Dakle, vodeći član razvoja uopće ne ovisi o varijabli x_2 :

$$u_0 = u_0(x_1).$$

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$:

Slično kao gore, dobivamo $\int_{\Omega} \partial_2 u_1 \partial_2 v = 0$, iz čega proizlazi da i prvi korektor ovisi samo o x_1 , odnosno $u_1 = u_1(x_1)$.

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$:

$$\int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V. \quad (4.2.3)$$

Ova jednakost je prva u kojoj nam se pojavljuje sila na desnoj strani, pa je zato ta jednakost u pravilu ona koja nam služi za pronalazak jednadžbe koju zadovoljava u_0 (ta funkcija nosi najveću informaciju o limesu funkcija u_ε , dok su ostale funkcije njezini korektori). Zato tražimo način kako se riješiti svih ostalih funkcija u_k iz jednakosti. Odgovarajući integral s u_2 će nestati ako za test funkciju odaberemo onu za koju vrijedi $\partial_2 v = 0$. Ono što nije slučajno je da je to upravo uvjet koji već zadovoljava i funkcija u_0 od ranije. Odnosno, dobit ćemo jednadžbu za u_0 s istim prostorom test funkcija u kojem se već funkcija u_0 nalazi.

Neka je dakle $v = v(x_1) \in H_0^1(0, 1)$ i neka drugi integral u (4.2.3) nestaje. Preostaje nam:

$$\int_0^1 \int_0^1 \partial_1 u_0(x_1) v'(x_1) dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) v(x_1) dx_2 dx_1.$$

Budući da u_0 , v i v' ne ovise o x_2 , možemo izračunati integral po x_2 :

$$\int_0^1 u_0'(x_1) v'(x_1) \left(\int_0^1 1 dx_2 \right) dx_1 = \int_0^1 v(x_1) \left(\int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$

Ako definiramo srednju vrijednost desne strane po presjeku kao $\bar{f}(x) = \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2$, dobivamo:

$$\int_0^1 u_0'(x_1) v'(x_1) dx_1 = \int_0^1 \bar{f}(x_1) v(x_1) dx_1, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1). \quad (4.2.4)$$

Ovim smo postupkom otkrili da limitno rješenje $u_0(x)$ zadovoljava 1D varijacijsku zadaću koja odgovara diferencijalnoj jednadžbi $-u_0''(x) = \bar{f}(x)$ uz rubne uvjete $u_0(0) = u_0(1) = 0$. Dakle, formalni razvoj sugerira nam da član ε^{-2} u originalnoj jednadžbi (4.1.2) penalizira derivaciju po drugoj varijabli tjerajući da funkcija na limesu ne ovisi o drugoj varijabli, i čime esencijalno dobivamo problem na domeni koja ima dimenziju manje. Ostali članovi bez epsilon preostaju u jednadžbi.

Formalni razvoj u pravilu tu zaustavljamo jer smo dobili jednadžbu za u_0 . Ako bi nas zanimalo više o korektorima (koje jednadžbe jedinstveno određuju u_1 , u_2 i sl) nastavili bismo ovaj proces.

4.2.1 Dokaz apriornim ocjenama i slabom konvergencijom

Kao što smo najavili, formalni asimptotski razvoj je samo formalni račun bez dokaza. Da bismo dokazali da u^ε ima ovakav limes, moramo to i dokazati. U ovom dijelu prikazujemo prvi od dva pristupa. Algoritam je sljedeći:

- Iz familije zadaća naći *apriorne* ocjene koje zadovoljava niz rješenja $(u^\varepsilon)_\varepsilon$, tj. dokazati da vrijedi $\|u^\varepsilon\| \leq C$ u nekoj normi, za sve $\varepsilon > 0$ s konstantom $C > 0$ neovisnom o $\varepsilon > 0$.
- Te apriorne ocjene iskoristiti kao pretpostavku Banach-Alaouglvog teorema (Teorem 2.1.17) pomoću kojeg zaključujemo da postoji niz $(\varepsilon^n)_{n \in \mathbb{N}}$ koji teži k nuli i slabo konvergentni niz $(u^{\varepsilon^n})_{n \in \mathbb{N}}$ rješenja ε_n problema. Topologija konvergencije ovisi o normi u kojoj ostvarimo apriornu ocjenu.
- Iskoristiti taj slabo konvergentni niz kako bismo u ε problemima pustili limes s odgovarajućim test funkcijama $v \in V$, te na limesu dokazali da slabi limes funkcija $(u^{\varepsilon^n})_{n \in \mathbb{N}}$ zadovoljava limesnu jednadžbu.
- Dokazati da je limesna jednadžba dobro postavljena (ima jedinstveno rješenje), što implicitno pokazuje da cijeli familija rješenja $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ slabo konvergira ka rješenju.
- U konačnici dokazati jaku konvergenciju tehnikom sličnoj onoj iz prošlog poglavlja.

Prva dva koraka u većini slučajeva se spajaju, budući da je drugi korak samo čista primjena postojećeg rezultata funkcionalne analize. Tako ćemo napraviti i ovdje. Najčešći cilj apriornih ocjena je dokazati da imamo slabu H^1 konvergenciju funkcija rješenja (što je ekvivalentno tome da funkcije i njezine derivacije slabo L^2 konvergiraju). Međutim, zbog prirode ovog problema u apriorne ocjene možemo dodati još nešto. U formalnom razvoju smo primijetili da funkcija u_0 na limesu ne ovisi o varijabli x_2 , pa to možemo odmah dokazati na ovom mjestu.

Propozicija 4.2.1: Apriorne ocjene i slaba konvergencija

Neka je $u^\varepsilon \in V$ rješenje varijacijske zadaće (4.1.2). Tada postoji konstanta $C > 0$, neovisna o ε , takva da za sve $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi:

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \quad \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Nadalje, postoji podniz $(u^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ i funkcija $u^* \in V$ koja ovisi samo o x_1 ($u^* = u^*(x_1)$), takvi da $u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup u^*$ slabo u V kada $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Dokaz.

Testiramo varijacijsku formulaciju sa samim rješenjem, tj. uzimamo test funkciju $v = u^\varepsilon$, te na desnoj strani primjenjujemo Cauchy-Schwarzovu nejednakost. Dobivamo

$$\|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} f u^\varepsilon dx \leq \|f\|_{L^2} \|u^\varepsilon\|_{L^2}. \quad (4.2.5)$$

Za ocjenu lijeve strane koristimo Poincaréovu nejednakost, čime dobivamo kontrolu nad L^2 normom od u^ε . Uz konstantu $C_P > 0$ (i pretpostavku $\varepsilon \leq 1$) vrijedi:

$$C_P \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2}^2.$$

Spajanjem gornjih ocjena dobivamo:

$$C_P \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|u^\varepsilon\|_{L^2}.$$

Dijeljenjem s $\|u^\varepsilon\|_{L^2}$ zaključujemo da je $\|u^\varepsilon\|_{L^2} \leq \frac{1}{C_P} \|f\|_{L^2}$, odnosno da je L^2 norma niza (u^ε) uniformno ograničena.

Kako je $\|u^\varepsilon\|_{L^2}$ ograničena, ograničena je i desna strana početne jednakosti. To povlači da je ograničen i cijeli izraz na lijevoj strani (4.2.5), pa postoji konstanta $M > 0$ (neovisna o ε) takva da:

$$\|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq M \quad \text{ i } \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq M.$$

Iz ovoga neposredno slijedi da su derivacije $\partial_1 u^\varepsilon$ i $\partial_2 u^\varepsilon$ ograničene u $L^2(\Omega)$, pa je ukupna norma $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ ograničena. Zbog rubnih uvjeta i teorema o tragovima, znamo da rješenja zapravo leže u prostoru $V \subset H^1(\Omega)$. Dakle, cijeli niz (u^ε) je uniformno ograničen u prostoru V .

Također, iz druge ocjene posebno naglašavamo ograničenost skalirane derivacije:

$$\frac{1}{\varepsilon} \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2} \leq \sqrt{M}.$$

Sada možemo prijeći na limes $\varepsilon \rightarrow 0$. Prema Banach-Alaogluovom teoremu, zbog uniformne ograničenosti niza u Hilbertovom prostoru V , možemo izvući slabo konvergentan podniz te postoji $u^* \in V$ takav da:

$$u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup u^* \quad \text{ slabo u } V.$$

Slaba konvergencija u V implicira slabu konvergenciju gradijenata u $L^2(\Omega)$. Međutim, ocjena za drugu komponentu gradijenta pokazuje da $\|\partial_2 u^{\varepsilon_n}\|_{L^2} \rightarrow 0$, odnosno $\partial_2 u^{\varepsilon_n}$ konvergira jako u nulu. Zbog podudaranja slabog i jakog limesa slijedi da je:

$$\partial_2 u^* = 0 \quad \text{ g.s. u } \Omega,$$

što znači da limitno rješenje ovisi isključivo o prvoj varijabli.

Napomena 4.2.2: Preskočiti u prvom čitanju

U apriornim ocjenama imamo i dodatnu informaciju o ponašanju familije rješenja $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Iz (4.2.5) slijedi da je niz $\left\|\frac{1}{\varepsilon}\partial_2 u^\varepsilon\right\|_{L^2}^2$ ograničen. Prema Banach–Alaogluovom teoremu (primijenom na podnizu, dobivajući podniz podniza, koji ćemo opet označiti isto) slijedi da postoji podniz koji konvergira slabom topologijom:

$$\frac{1}{\varepsilon_n}\partial_2 u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup \psi \quad \text{slabo u } L^2(\Omega), \quad (4.2.6)$$

gdje je $\psi \in L^2(\Omega)$ neka zasad nepoznata funkcija.

Sada je trenutak za treći korak: puštanje slabih limesa i ostvarivanje limesne jednadžbe. Uz kvalitete apriorne ocjene kakve imamo, ovo će biti jako kratko (inače može biti kompleksnije i potrebno je više koraka). Kako smo dobili da limesna funkcija u^* pripada prostoru

$$\{v \in H^1(\Omega) : v(0, \cdot) = v(1, \cdot) = 0, \partial_2 v = 0\} \equiv \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = v(1) = 0\} = H_0^1(0, 1),$$

prirodno je tražiti isto i za test funkciju. Dakle, uzmimo proizvoljnu test funkciju $v \in H_0^1(0, 1)$ (4.1.2) i pustimo $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Iz Propozicije 4.2.1 znamo da $\partial_1 u^{\varepsilon_n}$ konvergira slabu u $L^2(\Omega)$, pa imamo konvergenciju prvog integrala s lijeve strane (4.1.2). Drugi integral s lijeve strane te jednakosti je jednak nuli, a desna strana ima uvijek istu vrijednost. Dobivamo istu jednadžbu kao i u formalnom raspisu:

$$\int_0^1 \int_0^1 \partial_1 u^*(x_1) v'(x_1) dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) v(x_1) dx_2 dx_1, \quad (4.2.7)$$

a onda uz istu oznaku $\bar{f}(x) = \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2$, dobivamo:

$$\int_0^1 u_0'(x_1) v'(x_1) dx_1 = \int_0^1 \bar{f}(x_1) v(x_1) dx_1, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

Za četvrti korak moramo dokazati da ova jednadžba ima jedinstveno rješenje. Prema Lax–Milgramovoj lemi, treba pokazati koercitivnost lijeve strane, što je jednostavan zadatak prema Poincaréovoj nejednakosti. Za svaku $v \in H_0^1(0, 1)$, kako imamo homogeni Dirichletov rubni uvjet, imamo

$$\|v\|_{H^1(0,1)}^2 = \|v\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v'\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_P^2 \|v'\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v'\|_{L^2(0,1)}^2 = (1 + C_P^2) \int_0^1 v'(x) v'(x) dx.$$

Dokaze za ograničenost forme s lijeve strane i neprekidnost s desne preskačemo. Time smo dokazali da limesna jednadžba ima jedinstveno rješenje. To ujedno implicitno pokazuje i da cijela familija $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ teži ka u^* . Naime, pretpostavimo suprotno, neka postoji podniz $(u^{\varepsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$ koji ne konvergira slabu ka u^* (divergira ili konvergira prema nekom drugom limesu). Za njega provedimo rezultate odozgo: iz apriornih ocjena iz tog podniza uzmimo podniz (koji ćemo označiti s $(u_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$) koji konvergira slabu. Račun pokazuje da konvergira ka u^* , što je nemoguće za podniz niza koji bježi od u^* , čime smo dobili kontradikciju.

U znanstvenim člancima ovaj zadnji argument se često niti ne spominje, nego odmah nakon dokaza jedinstvenosti limesne jednadžbe se piše rezultat.

Teorem 4.2.3: Slaba konvergencija rješenja anizotropne zadaće

Neka je $u^\varepsilon \in V$ rješenje varijacijske zadaće (4.1.2), i neka je $u^* \in H_0^1(0, 1)$ jedinstveno rješenje 1D zadaće

$$\int_0^1 (u^*)'(x_1) v'(x_1) dx_1 = \int_0^1 \bar{f}(x_1) v(x_1) dx, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1), \quad (4.2.8)$$

gdje je $\bar{f}(x_1) = \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2$. Tada cijeli niz (u^ε) slabu konvergira prema u^* u $H^1(\Omega)$.

Napomena 4.2.4: Preskočiti u prvom čitanju

Vratimo se na puštanje (slabih) limesa u jednadžbi (4.1.2). Prije uvrštavanja test funkcije v koja pripada istom prostoru kojem i rješenje u^* , uobičajeno je prvo testirati proizvoljnom funkcijom $v \in V$ pomnoženu s najmanjom potencijom ε^k s kojom bismo dobili neki limes koji postoji. U ovom slučaju, pustili odabrali bismo test funkciju oblika $\varepsilon_n v$. Desna strana teži k nuli (to je fiksni broj pomnožen s ε_n), prvi integral slijeva teži k nuli, dok za drugi, zbog (4.2.6) dobivamo nešto netrivialno:

$$\int_{\Omega} \psi \partial_2 v \, dx = 0, \quad \forall v \in V.$$

Da su u V nametnuti Dirichletovi rubni uvjeti na gornjem i donjem rubu, ova jednadžba implicirala bi da je ψ konstanta. Međutim, kako su Dirichletovi rubni uvjeti nametnuti na lijevom i desnom rubu, možemo dobiti i više. Uzmimo proizvoljnu $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, te definirajmo $v(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \phi(x_1, s) ds$ (tako da je $\partial_2 v = \phi$). Sada osnovnom lemom varijacijskog računa zaključujemo da ψ testirana s proizvoljnom $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ daje nulu, odakle je $\psi = 0$.

Ovaj korak, kao što smo vidjeli, nije nužan u dokazu konvergencije funkcija u^ε ka u^* nego donosi dodatne informacije o asimptotskom ponašanju niza funkcija $\frac{1}{\varepsilon} \partial_2 u^\varepsilon$, da čak i oni trnu k nuli (ne samo $\partial_2 u^\varepsilon$). Ipak, u nekim dokazima ovakva analiza je nužna i za dobivanje informacija o u^* .

Osim slabe konvergencije, imamo i jaku konvergenciju, koju dokazujemo u zadnjem koraku.

Teorem 4.2.5: Jaka konvergencija rješenja anizotropne zadaće

Neka je $u^\varepsilon \in V$ rješenje varijacijske zadaće (4.1.2), i neka je $u^* \in H_0^1(0, 1)$ jedinstveno rješenje 1D zadaće (4.2.8). Tada cijeli niz (u^ε) jako konvergira prema u^* u $H^1(\Omega)$.

Dokaz.

Za jaku konvergenciju pristupamo slično kao u prošlom poglavlju. Promatramo funkcional po ε takav da u (4.1.2) umjesto i nepoznate funkcije i test funkcije stavimo razliku $u^\varepsilon - u^*$:

$$\Lambda(\varepsilon) = \int_{\Omega} (\partial_1(u^\varepsilon - u^*))^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2(u^\varepsilon - u^*))^2 \, d\mathbf{x}.$$

Iz koercitivnosti bilinearne forme (kao u dokazu Teorema 4.1.1 i Poincaréove nejednakosti slijedi

$$\Lambda(\varepsilon) \geq \|\nabla(u^\varepsilon - u^*)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{C_P^2} \|(u^\varepsilon - u^*)\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Zato, ako dokažemo da $\Lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$ kad $\varepsilon \rightarrow 0$, bit će dokazana jaka konvergencija.

Ako je bilinearne forma a simetrična kao u ovom slučaju, onda vrijedi

$$a(u - v, u - v) = a(u, u) + a(v, v - 2u).$$

Korištenjem tog raspisa na $\Lambda(\varepsilon)$ dobivamo

$$\begin{aligned} \Lambda(\varepsilon) &= \int_{\Omega} (\partial_1 u^\varepsilon)^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2 u^\varepsilon)^2 \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} \partial_1 u^* \partial_1(u^* - 2u^\varepsilon) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 u^* \partial_2(u^* - 2u^\varepsilon) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Koristimo ovakav raspis iz sljedećeg razloga: u drugom retku možemo pustiti slabi limes jer pod integralima imamo umnožak konstantnog izraza (derivacija od u^*) i slabo konvergentnog izraza. Međutim, u prvom retku to nemamo. Općenito integral umnoška slabo konvergentnih

nizova nije konvergentan! Za njega zato koristimo da zadovoljava jednadžbu (4.1.2) za svaku $v \in H^1(0, 1)$, pa tako i za $v = u^\varepsilon$. Te članove zato mijenjamo s izrazom s desne strane (4.1.2) i dobivamo

$$\Lambda(\varepsilon) = \int_{\Omega} f u^\varepsilon d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_1 u^* \partial_1 (u^* - 2u^\varepsilon) d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 u^* \partial_2 (u^* - 2u^\varepsilon) d\mathbf{x}.$$

Sada koristimo $\partial_2 u^* = 0$ (iako smo mogli i ranije), i puštamo slabi limes. Slijedi

$$\Lambda(\varepsilon) \rightarrow \Lambda(0) := \int_{\Omega} f u^* d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_1 u^* \partial_1 (-u^*) d\mathbf{x} = 0,$$

budući da je to upravo limitna jednadžba s test funkcijom $v = u^*$. Dokazali smo željeno, $\Lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$, pa zato imamo jaku konvergenciju u $H^1(\Omega)$.

4.2.2 Dokaz opravdanjem asimptotskog razvoja

Nakon što smo dokazali jaku konvergenciju familije rješenja jednom tehnikom, pokažimo i drugu tehniku. Kada već imamo formalni asimptotski razvoj, ima logike pokušati ga opravdati. Za to prvo moramo na jednoznačan način odrediti funkcije koje se pojavljuju u asimptotskom razvoju. Za sad imamo samo jedinstveno određeni u_0 . Da bismo odredili ostale funkcije, trebamo ponovno iskoristiti jednadžbu (4.2.3) (nismo izvukli sve informacije iz nje, samo smo uvrstili posebnu test funkciju), te vidjeti i kako glase sve ostale funkcije.

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ za $k \geq 1$:

Izjednačavanjem koeficijenata uz potenciju ε^k ($k \geq 1$) dobivamo općenitu rekursivnu relaciju:

$$\int_{\Omega} \partial_1 u_k \partial_1 v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_2 u_{k+2} \partial_2 v d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in V. \quad (4.2.9)$$

Sada pogledajmo što sve možemo saznati o u_k , $k \geq 1$. Odabirom test funkcije $v = v(x_1) \in H_0^1(0, 1)$ (za koju je $\partial_2 v = 0$) drugi integral u (4.2.9) iščezava, pa ostaje uvjet kompatibilnosti:

$$\int_0^1 \int_0^1 \partial_1 u_k(x_1, x_2) v'(x_1) dx_2 dx_1 = 0 \implies \int_0^1 \bar{u}'_k(x_1) v'(x_1) dx_1 = 0, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1),$$

gdje je $\bar{u}_k(x_1) = \int_0^1 u_k(x_1, x_2) dx_2$. Uz rubne uvjete, to povlači da su srednje vrijednosti svih korektora nula, tj. $\bar{u}_k \equiv 0$ za sve $k \geq 1$.

Dodatno, kako je $u_1 = u_1(x_1)$ i zbog $\bar{u}_1 = 0$ nužno $u_1 \equiv 0$, indukcijom slijedi da iščezavaju svi članovi s neparnim indeksima: $u_{2m+1} \equiv 0$ za sve $m \geq 0$.

Za parne indekse vratimo se na jednadžbu uz (4.2.3). Prebacimo poznate funkcije f i u_0 na desnu stranu jednakosti, te dobivamo

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V.$$

Zajedno s uvjetom $\bar{u}_2 = 0$, dokazat ćemo da ova zadaća ima jedinstveno rješenje.

Lema 4.2.6: Dobra postavljenost zadaće za u_2

Neka je $f \in L^2(\Omega)$ i neka u_0 zadovoljava zadaću limitnog rješenja. Varijacijska zadaća: naći $u_2 \in W$ takav da

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v d\mathbf{x}, \quad \forall v \in W,$$

gdje je

$$W = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \partial_2 v \in L^2(\Omega), \int_0^1 v(x_1, x_2) dx_2 = 0 \text{ za g.s. } x_1 \in (0, 1) \right\}$$

Hilbertov prostor s normom $\|v\|_W = \|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)}$, ima jedinstveno rješenje.

Taj dokaz ostavit ćemo za kraj. U ovom trenutku se fokusiramo na to da objekt u_2 postoji, jedinstven je i da ima konačnu normu $\partial_2 u_2$. Za parne $k \geq 4$ koristimo jednadžbe (4.2.9) u kojima rekursivno određujemo u_k preko u_{k-2} :

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_{k+2} \partial_2 v d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \partial_1 u_k \partial_1 v d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V,$$

koje uz uvjet $\bar{u}_k = 0$ imaju jedinstveno rješenje (dokaz analogan kao za egzistenciju i jedinstvenost od u_2).

Teorem 4.2.7: Ocjena pogreške bez rubnih slojeva

Neka je $u^\varepsilon \in V$ slabo rješenje (4.1.2) i neka je $u_0 \in V$ rješenje limitne zadaće (4.2.4). Tada postoji konstanta $C > 0$, neovisna o ε , takva da vrijedi

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon.$$

Dokaz.

Slično kao i u dokazu jake konvergencije u prošlom pristupu, cilj je ograničiti $a_\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon)$, gdje je $R^\varepsilon = u^\varepsilon - u_0$. Budući da i točno rješenje u^ε i limitno rješenje u_0 pripadaju prostoru V (imaju dovoljnu glatkoću i zadovoljavaju rubne uvjete), njihova razlika $R^\varepsilon = u^\varepsilon - u_0$ također pripada prostoru V te je stoga dopustiva test funkcija.

Rješenje u^ε zadovoljava (4.1.2) za svaku $v \in V$, dok u_0 zadovoljava (4.2.3) za svaku $v \in V$. Oduzimanjem tih dviju jednakosti desne strane tih jednakosti se krata, pa dobivamo da za sve $v \in V$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \partial_1 u^\varepsilon \partial_1 v d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 u^\varepsilon \partial_2 v d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v d\mathbf{x} = 0.$$

Uzimajući u obzir da iz konstrukcije znamo da vrijedi $\partial_2 u_0 = 0$, dobivamo da za sve $v \in V$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \partial_1 (u^\varepsilon - u_0) \partial_1 v d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 (u^\varepsilon - u_0) \partial_2 v d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v d\mathbf{x}. \quad (4.2.10)$$

Na ovaj način dobili smo varijacijsku formulaciju za razliku $R^\varepsilon = u^\varepsilon - u_0$, za koju se može dokazati da je dobro postavljena i da ima jedinstveno rješenje (trebalo nam je zato i da je u_2 jedinstveno dana funkcija). Uvrštavanjem $v = R^\varepsilon$, pa Cauchy-Schwarzovom nejednakosti i algebarskim manipulacijama, dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_1 (R^\varepsilon))^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2 R^\varepsilon)^2 d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 R^\varepsilon d\mathbf{x} \\ &\leq \|\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_2 R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \|\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\int_{\Omega} (\partial_1 (R^\varepsilon))^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2 R^\varepsilon)^2 d\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Dijeljenjem s korijenom lijeve strane, dobivamo

$$\sqrt{\int_{\Omega} (\partial_1 (R^\varepsilon))^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2 R^\varepsilon)^2 d\mathbf{x}} \leq \varepsilon \|\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega)} = C\varepsilon$$

(budući da je u_2 fiksna i dobro definirana funkcija). Uz već više puta iskorištenu ogradu za $\varepsilon \in (0, 1]$ odoozdo, dobivamo

$$\frac{1}{C_P} \|u^\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{\int_{\Omega} (\partial_1(R^\varepsilon))^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2 R^\varepsilon)^2 d\mathbf{x}} \leq C\varepsilon,$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena 4.2.8

Načini dokazivanja jake konvergencije rješenja $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ prema u^* i u_0 (što su na kraju iste funkcije, naravno, budući da je limes jedinstven) jako su slični. U oba slučaja u bilinearne forme želimo na obje koordinate staviti razliku u^ε i funkcije za koju želimo dokazati da je traženi limes. Međutim, tehnika kojoj nastavljamo rješenje razlikuje se jer se razlikuju i pretpostavke o funkcijama u^* i u_0 . Iako obje limes funkcije zadovoljavaju limitnu jednadžbu, u prvom slučaju, ona je dana kao slabi limes funkcija $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, dok za u_0 znamo vezu s njezinim korektorom u_2 . Te dvije tehnike (i pretpostavke iz tih tehnika) ne možemo miješati.

Kada već imamo asimptotski razvoj funkcije u^ε , mogli bismo dokazati ocjenu pogreške za proizvoljan broj članova asimptotskog razvoja. Tehnika je slična: opet na lijevu stranu varijacijske formulacije želimo imati razliku $R^\varepsilon := u^\varepsilon - \sum_{k=0}^N u_k$, te konačna ocjena ovisi o članovima s indeksima većim od N (u ovom slučaju o u_{N+2} , za parne N). Međutim, u ovom slučaju to nije toliko jednostavno jer funkcija R^ε **ne pripada** prostoru V . Uz dodatne pretpostavke na domenu ili funkciju f ne znamo da ijedna funkcija u_k za parne $k \geq 2$ zadovoljava Dirichletove rubne uvjete. Zato funkcija R^ε ne može biti uvrštena u varijacijsku formulaciju (kao što smo u prošlom dokazu to napravili u jednakosti (4.2.10)). Postoje načini kako to izbjeći: ili za funkcije s većim indeksima koristimo cut-off funkcije, ili dodajemo članove za rubni sloj.

4.3 Dokaz Leme 4.2.6

Vratimo se ponovno do zadaće u kojoj dokazujemo egzistenciju i jedinstvenost funkcije u_2 : tražimo u_2 uz uvjet $\bar{u}_2 = 0$ takvu da

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V. \quad (4.3.11)$$

Kao u uvijek, prirodni put dokazivanja dobre postavljenosti ove zadaće je Lax–Milgramovom lemom, gdje za lijevu stranu treba dokazati da je koercitivna na odgovarajućem Hilbertovom prostoru. Međutim, izrazom s lijeve strane jednadžbe nećemo moći kontrolirati prirodnu normu prostora V . Naime, ne vrijedi ograda oblika $\|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)} \geq c\|v\|_{H^1(\Omega)}$ na V (provjerite kontraprimjer: $v_n = \sin(n\pi x_1) \cos(\pi x_2)$ – primijetite dodatno da te funkcije zadovoljavaju i $\bar{v}_n = 0$). Zato gornju zadaću treba relaksirati. Promijenit ćemo normu u kojoj dokazujemo koercitivnost, a da bi zadovoljili pretpostavku Lax–Milgramove leme, prostor V zamijenit ćemo zatvaračem tog prostora u novoj normi.

Obzirom da možemo dokazati koercitivnost samo u normi koja uključuje derivaciju po drugoj varijabli (detalje ćemo vidjeti u nastavku), definiramo normu

$$\|v\|_W^2 := \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Zatvarač prostora V (prostor svih limesa svih funkcija iz V) u normi W je

$$W = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \partial_2 v \in L^2(\Omega), \int_0^1 v(x_1, x_2) dx_2 = 0 \text{ za g.s. } x_1 \in (0, 1) \right\}. \quad (4.3.12)$$

Primijetite da smo u odnosu na prostor V izgubili slabu derivaciju u varijabli x_1 te Dirichletove rubne uvjete.

Sada dolazimo do sljedećeg problema: jednačba (4.3.11) ne dopušta da test funkcija dolazi iz prostora W budući da zadnji član traži derivaciju po prvoj varijabli. Međutim, to je samo algebarski problem, jer znamo nešto više o funkciji u_0 . Za svaku dovoljno glatku funkciju v vrijedi

$$\int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v \, d\mathbf{x} = \int_0^1 \left(\int_0^1 u'_0(x_1) v'_{x_2}(x_1) \, dx_1 \right) dx_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \bar{f} v_{x_2} \, dx_1 \right) = \int_{\Omega} \bar{f} v \, d\mathbf{x}$$

(gdje smo uveli oznaku $v_{x_2} := v(\cdot, x_2)$, funkciju koja postoji za gotovo svaki $x_2 \in (0, 1)$). Sada novi problem glasi: naći funkciju u_2 takvu da

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f - \bar{f}) v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V. \quad (4.3.13)$$

Međutim, kako smo izgubili derivaciju u varijabli x_1 , ovaj problem možemo konačno relaksirati. Kako gornja zadaća vrijedi za proizvoljni $v \in V$, a u zadaći se pojavljuju samo izrazi $\partial_2 v$ i v , za proizvoljnu $v \in W$ možemo naći niz $(v_n)_n \subset V$ koji konvergira ka v jako u normi prostora W (jer je W zatvarač od V). Puštanjem limesa, dobivamo pravi relaksirani problem: naći $u_2 \in W$ takvu da

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f - \bar{f}) v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in W. \quad (4.3.14)$$

Tek sada smo došli do problema za koji ćemo dokazati da je dobro postavljen. I dalje najveći problem preostaje koercitivnost, odnosno ograda oblika $\|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)} \geq c\|v\|_W$, koja će biti direktna posljedica nejednakosti $\|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)} \geq c\|v\|_{L^2(\Omega)}$. Da bismo vidjeli kako to dokazati, primijetimo da tu nejednakost i problem (4.3.14) možemo smatrati problemom po x_2 uz varijablu x_1 kao parametar. Jednodimenzionalna verzija tog problema zahtijevala bi nejednakost oblika $\|v'\|_{L^2(\Omega)} \geq c\|v\|_{L^2(\Omega)}$ za funkcije v koje zadovoljavaju $\int v = 0$, a to je upravo Poincaré-Wirtingerova nejednakost (Teorem 2.1.20).

Dakle, za dokaz koercitivnosti postupamo na sljedeći način:

$$\|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 (v'_{x_1})^2 \, dx_2 \right) dx_1 \geq c \int_0^1 \left(\int_0^1 (v_{x_1})^2 \, dx_2 \right) dx_1 = c\|v\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

gdje jedina nejednakost koju smo primijenili je Poincaré-Wirtingerova nejednakost za g.s. $x_1 \in (0, 1)$. Standardnim argumentom vrijedi i ocjena $\|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)} \geq \|v\|_W$, čime dokazujemo koercitivnost bilinearne forme s lijeve strane (4.3.14), a uz dokaze ograničenosti pripadnih formi dokazuje da zaista postoji jedinstveni $u_2 \in W$.

Napomena 4.3.1

Ovo je prvi, ali ne i zadnji put da se pojavljuje problem relaksiranja problema, za što su nam potrebne gustoće funkcijskih prostora u odgovarajućim normama. Prilikom uzimanja zatvarača podskupa H^1 funkcija u slabijim normama (poput norme $\|\cdot\|_W$ iz gornjeg dokaza) događa se sljedeće:

- Regularnost funkcije: funkcija u novom prostoru (zatvaraču starog prostora) mora biti manje regularna nego u starom prostoru. Može imati samo one parcijalne derivacije koje su mjerene normom.
- Dirichletovi rubni uvjeti: u vidu komentara iz Poglavlja 2 u vezi traga funkcije, trag funkcije na nekom rubu može se kontrolirati već samo prvom parcijalnom derivacijom u smjeru okomitom na taj rub. To znači da ako normom W preživi $\partial_2 v$, u prostoru W preživljavaju Dirichletovi rubni uvjeti okomiti na $\mathbf{e}_2$. No, vrijedi obrat: kako samo tom parcijalnom derivacijom ne možemo kontrolirati trag funkcije u drugim smjerovima, u novom prostoru gubimo Dirichletove rubne uvjete na ostalim rubovima.

- Integralni uvjeti: ako u V imamo uvjete oblika $\int_{\Omega} v = 0$ ili kao gore $\int_0^1 v(x_1, x_2) dx_2 = 0$ za g.s. $x_1 \in (0, 1)$, onda ti uvjeti ostaju i u novom prostoru čim imamo L^2 normu u većem prostoru.

Da bismo dokazali da gornji uvjeti ostaju u novom prostoru, najlakše je naći ograničeni operator kojem se taj uvjet može izraziti kao pripadnost njegovoj jezgri, pa koristiti tvrdnju da je jezgra ograničenog operatora na potpunom prostoru zatvorena, pa time i potpun prostor. Da bismo dokazali da gubimo neki Dirichletov rubni uvjet možemo koristiti niz tzv. *cut-off* funkcija ϕ_n koje su neprekidne, imaju vrijednost jednaku 0 na problematičnom rubu, te 1 na sve većem podskupu domene. Tada se pokaže da niz funkcija $\phi_n w$ za w iz starog prostora konvergiraju ka proizvoljnoj w u novom prostoru. Funkcijama ϕ_n eksplodira parcijalna derivacija u smjeru okomitom na problematičan rub, ali ona nije uključena u normu novog prostora, pa nemamo problema s dokazom konvergencije. Ostale detalje dokaza za potrebe ovog kolegija preskačemo.

Poglavlje 5

Rubni slojevi za eliptičke PDJ

Nakon što smo se u Poglavlju 4 susreli s jednom familijom singularnih problema, u ovom poglavlju ćemo se upoznati s drugom. Osim što nam je cilj vidjeti još primjena teorije singularnih problema, vidjet ćemo i efekt rubnog sloja, te način kako ga riješiti.

5.1 Slaba anizotropija

Sada promatramo eliptički operator kod kojeg je difuzija u transverzalnom smjeru prigušena malim parametrom:

$$\begin{cases} -\partial_{11}u^\varepsilon - \varepsilon^2\partial_{22}u^\varepsilon = f(x_1, x_2) & \text{u } \Omega, \\ u^\varepsilon(0, x_2) = u^\varepsilon(1, x_2) = 0 & \text{za } x_2 \in (0, 1), \\ u^\varepsilon(x_1, 0) = 0 & \text{za } x_1 \in (0, 1), \\ \partial_2 u^\varepsilon(x_1, 1) = 0 & \text{za } x_1 \in (0, 1). \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Za prostor rješenja uzimamo Soboljevljeve prostor s uvažanim Dirichletovim rubnim uvjetima:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v(0, \cdot) = v(1, \cdot) = v(\cdot, 0) = 0 \text{ g.s.}\}. \quad (5.1.2)$$

Standardno prelazimo na slabu formulaciju, dobivamo zadaću: Naći $u^\varepsilon \in V$ takav da

$$\int_{\Omega} \partial_1 u^\varepsilon \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_2 u^\varepsilon \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V. \quad (5.1.3)$$

Umjesto faktora $1/\varepsilon^2$, sada imamo faktor ε^2 koji množi jedan od članova jednadžbe. Pokazat ćemo analizu koristeći formalni asimptotski razvoj i njegovo opravdanje.

Prvo dokažimo da su sve ove zadaće (5.1.3) dobro definirane. Za svaki $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$ primjenom Poincaréove nejednakosti imamo

$$\frac{\varepsilon^2}{C_P^2 + 1} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \varepsilon^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \partial_1 u^\varepsilon \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_2 v \partial_2 v \, d\mathbf{x},$$

što dokazuje koercitivnost bilinearne forme varijacijske zadaće, pa onda i njezinu dobro definiranost.

Teorem 5.1.1: Dobra postavljenost zadaće

Neka je $f \in L^2(\Omega)$. Za svaki fiksni parametar $\varepsilon > 0$, varijacijska zadaća pripadna diferencijalnom problemu (5.1.1) ima jedinstveno slabo rješenje $u^\varepsilon \in V$.

U Poglavlju 4 problem je bio u tome što je familija bilinearnih formi bila neograničena odozgo. Kod ove familije problema problem je u tome što imamo neograničenost odozdo, tj. nemamo koercitivnost odozdo.

Dokažimo jaku konvergenciju (u što boljoj normi) familije rješenja $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Kako bismo dobili intuiciju oko toga što dokazati, korisno je prvo raspisati asimptotski razvoj. Međutim, ovdje je limesna jednačba pogodiva napamet, čak i bez znanja asimptotskog razvoja. U razvoju jednačbe (5.1.3) najznačajniji su članovi reda $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$, a u drugom intervalu na lijevoj strani jednakosti nema članova tog reda. Dobivamo problem: naći $u_0 \in V$ takvu da za sve $v \in V$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \quad (5.1.4)$$

Za ovu zadaću treba provjeriti je li dobro postavljena. Navikli smo to raditi koristeći Poincaréovu nejednakost u kojoj parcijalne derivacije kontroliraju vrijednosti funkcije. U ovoj situaciji imamo samo jednu parcijalnu derivaciju, no odgovarajući rubni uvjet nam malo pomaže u toj kontroli.

Lema 5.1.2: Poincaréova nejednakost u jednom smjeru

Neka je $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ i neka je $V = \{v \in H^1(\Omega) : v(0, x_2) = v(1, x_2) = 0 \text{ za g.s. } x_2 \in (0, 1)\}$. Tada postoji konstanta $C_P > 0$ takva da za sve $v \in V$ vrijedi:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\partial_1 v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Jedan od načina kako vidjeti zašto ova lema vrijedi je gledati funkciju v kao funkciju po varijabli x_1 s parametrom x_2 . Tada je ovo u suštini Poincaréova nejednakost za funkcije jedne varijable s Dirichletovim rubnim uvjetom u oba kraja. Dakle, imamo

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 (v_{x_2})^2 \, dx_1 \right) dx_2 \leq C_P^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 (v'_{x_2})^2 \, dx_1 \right) dx_2 = C_P^2 \|\partial_1 v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

gdje smo opet koristili zapis $v_{x_2} := v(\cdot, x_2)$. Primijetite da nam je ovaj dokaz prošao samo zato što smo imali Dirichletov rubni uvjet duž cijele okomite stranice kvadrata Ω (dovoljna je barem jedna strana). Kada na nekim visinama x_2 netrivialne mjere ne bismo imali Dirichletov rubni uvjet, ne bi prošao ovaj dokaz, ali ni jedan drugi – mogli bismo naći kontraprimjer.

Međutim, upravo činjenica da je varijabla x_2 samo parametar u ovom limitnom problemu nam govori i da nećemo moći više raditi s normom koja uključuje njezinu parcijalnu derivaciju. Moramo definirati novu normu

$$\|v\|_{\tilde{V}} := \sqrt{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_1 v\|_{L^2(\Omega)}^2},$$

te prostor $\tilde{V}$ koji je dan kao zatvarač od V u toj normi. Imajući u vidu koje parcijalne derivacije preživljavaju, te da će zato preživjeti samo Dirichletovi rubni uvjeti dani na domeni okomitoj na taj smjer, slijedi da je taj zatvarač dan s

$$\tilde{V} := \{v \in L^2(\Omega) : \partial_1 v \in L^2(\Omega); v(0, \cdot) = v(1, \cdot) = 0 \text{ g.s.}\}. \quad (5.1.5)$$

Sada promatramo dobru postavljenost limitne zadaće (5.1.4) u toj normi i na tom prostoru (dakle $\tilde{V}$ umjesto V za prostor rješenja i test funkcija). Lema 5.1.2 je dokazala da je bilinearna forma koercitivna u toj normi, pa je onda i problem dobro postavljen.

5.2 Dokaz konvergencije apriornim ocjenama

Slijedimo pet koraka iz Poglavlja 4. Uvrštavanjem test funkcije $v = u^\varepsilon$ u (5.1.3) i korištenjem Leme 5.1.2 dobivamo

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f u^\varepsilon \, d\mathbf{x} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.2.6)$$

Dijeljenjem s $\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ dobivamo da je taj izraz ograničen, a zatim i svi izrazi u nizu nejednakosti. Posebno, primjenom Banach-Alaougluovog teorema, zaključujemo da postoji podniz $(u^{\varepsilon_n}) \subset V$ takav da

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon_n} &\rightharpoonup u^* && \text{slabo u } L^2(\Omega), \\ \partial_1 u^{\varepsilon_n} &\rightharpoonup \partial_1 u^* && \text{slabo u } L^2(\Omega), \\ \varepsilon \partial_2 u^{\varepsilon_n} &\rightharpoonup \psi && \text{slabo u } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

za neke funkcije ψ i u^* . Za ψ znamo da je u $L^2(\Omega)$. S druge strane, za u^* znamo da su funkcija i njezina derivacija po prvoj varijabli u $L^2(\Omega)$, te nešto o Dirichletovim rubnim uvjetima. Prema teorema o tragu (tj. komentaru ispod Teorema 2.1.11), operator traga na lijevom i desnom rubu ograničen je normom $\|\cdot\|_{\tilde{V}}$, pa vrijednosti funkcija u^ε na tim rubovima konvergiraju. Dakle, u^ε zadovoljava rubni uvjet na tim rubovima. To još jednom opravdava uvođenje prostora $\tilde{V}$ kao zatvarača prostora V u novoj normi. Primijetite da ne možemo znati da je $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$, tj. da nemamo egzistenciju slabe derivacije $\partial_2 u^*$ u $L^2(\Omega)$.

Za treći korak uzimamo proizvoljnu $v \in V$ i puštamo limes u (5.1.3). Tako dobivamo da u^* zadovoljava limesnu jednadžbu (5.1.4) za test funkcije iz prostora V . Kako bismo zaključili da ista jednadžba vrijedi i za $v \in \tilde{V}$, koristimo da je $\tilde{V}$ zatvarač prostora V u normi $\|\cdot\|_{\tilde{V}}$: za svaku funkciju $v \in \tilde{V}$ postoji niz funkcija $(v_n)_n \subset V$ koji konvergira ka v jako u normi prostora $\tilde{V}$. Korištenjem tog niza i konvergencija, dobivamo da (5.1.4) vrijedi na širem skupu. Zaista dobivamo: naći $u^\varepsilon \in \tilde{V}$ takvu da za sve $v \in \tilde{V}$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \partial_1 u^* \partial_1 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (5.2.7)$$

Jedinstvenost limesa smo komentirali. Za jaku konvergenciju raspisujemo

$$\begin{aligned} \Lambda(\varepsilon) &:= \int_{\Omega} \partial_1(u^\varepsilon - u^*) \partial_1(u^\varepsilon - u^*) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\varepsilon \partial_2 u^\varepsilon - \psi)(\varepsilon \partial_2 u^\varepsilon - \psi) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \partial_1 u^\varepsilon \partial_1 u^\varepsilon \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_2 u^\varepsilon \partial_2 u^\varepsilon \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} \partial_1 u^* \partial_1(2u^\varepsilon - u^*) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \psi(2\varepsilon \partial_2 u^\varepsilon - \psi) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} f u^\varepsilon \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} \partial_1 u^* \partial_1(2u^\varepsilon - u^*) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \psi(2\varepsilon \partial_2 u^\varepsilon - \psi) \, d\mathbf{x} \\ &\rightarrow \int_{\Omega} f u^* \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \partial_1 u^* \partial_1 u^* \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \psi^2 = -\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Kako smo na početku dokazali koercitivnost naše bilinearne forme za zadaću (5.1.3) u prostoru $\tilde{V}$ (a posebno i nenegativnost funkcije $\Lambda(\varepsilon)$), dokazali smo jaku konvergenciju cijele familije rješenja u prostoru $\tilde{V}$ i da je $\psi = 0$.

5.3 Dokaz konvergencije opravdavanjem asimptotskog razvoja

Riješimo isti problem dokaza konvergencije familije rješenja na drugi način, opravdavanjem asimptotskog razvoja. Za to prvo trebamo provesti formalni asimptotski razvoj. Kao i prije, pretpostavljamo da se rješenje u^ε može razviti u red potencija malog parametra ε :

$$u^\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k.$$

Uvrštavanjem pretpostavljenog reda u slabu formulaciju (5.1.3) dobivamo:

$$\int_{\Omega} \partial_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k \right) \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k \right) \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Grupiranjem članova uz iste potencije parametra ε i izjednačavanjem koeficijenata s nulom, dobivamo zadaće za pojedine članove razvoja.

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$:

Već viđena limitna jednačba

$$\int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (5.3.8)$$

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$:

Relacija $\int_{\Omega} \partial_1 u_1 \partial_1 v \, d\mathbf{x} = 0$ uz rubne uvjete izravno implicira da je $u_1 \equiv 0$.

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^{k+2})$, $k \geq 0$:

Zadaće za više korektore glasi

$$\int_{\Omega} \partial_1 u_{k+2} \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_2 u_k \partial_2 v \, d\mathbf{x} = 0. \quad (5.3.9)$$

Čini se da opet imamo situaciju u kojoj su svi neparni korektori jednaki nuli, dok su parni rekurzivno zadani pomoću prošlih. Ova zadaća dobro je postavljena za nepoznatu u_{k+2} uz dani u_k u prostoru V , ponovno zbog istog tipa Poincaréove nejednakosti. Posebno, u_2 dobro je definirana funkcija iz V ako je dobro definirana prirodna desna strana gornje zadaće, a to je

$$- \int_{\Omega} \partial_2 u_0 \partial_2 v \, d\mathbf{x}.$$

Međutim, kao što smo komentirali za u_0 gubimo informaciju o njezinoj derivaciji u smjeru x_2 . Funkcija u_2 bit će dobro definirana tek ako dodatnom pretpostavkom nametnemo da postoji $\partial_2 u_0$. Zato za potrebe sljedećeg teorema pretpostavljamo da $\partial_2 f \in L^2(\Omega)$.

Zadatak 5.3.1

Dokažite da uvođenjem dodatne pretpostavke $\partial_2 f \in L^2(\Omega)$ nužno imamo $\partial_2 u_0 \in L^2(\Omega)$. (Najlakše: koristeći diferencijalnu formulaciju zadaće (5.1.4) eksplicitno izrazite u_0 kao (dvostruki) integral od f , derivirajte po integralom, pa ocjenama dokažite da je ta funkcija kvadratno integrabilna.)

Čini se da je sve spremno za dokaz ocjene pogreške višeg reda opravdanjem asimptotskog razvoja. To radimo kao i prije: u bilinearnu formu pridruženu familiji problema (5.1.3) uvrštavamo razliku $R^\varepsilon := u^\varepsilon - u^0$, oduzimajući jednačbe (5.1.3) i (5.1.4). Zbog funkcije u^2 , oduzmimo i jednačbu (5.3.9) za $k = 0$ pomnoženu s ε^2 . Članovi s f se krata, te dobivamo da za svaki $v \in V$ vrijedi

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_1 u^\varepsilon \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_2 u^\varepsilon \partial_2 v \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v \, d\mathbf{x} - \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_1 u_2 \partial_1 v \, d\mathbf{x} - \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_2 u_0 \partial_2 v \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo varijacijsku formulaciju za $R^\varepsilon := u^\varepsilon - u_0$: za svaki $v \in V$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \partial_1 R^\varepsilon \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_2 R^\varepsilon \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_1 u_2 \partial_2 v \, d\mathbf{x}.$$

Uvrštavanjem $v = R^\varepsilon$, pa Cauchy-Schwarzovom nejednakosti i algebarskim manipulacijama, dobivamo

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\partial_1 R^\varepsilon)^2 \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} (\partial_2 R^\varepsilon)^2 \, d\mathbf{x} = \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_1 u_2 \partial_2 R^\varepsilon \, d\mathbf{x} \\ & \leq \varepsilon^2 \|\partial_1 u_2\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_2 R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \|\partial_1 u_2\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\int_{\Omega} (\partial_1 R^\varepsilon)^2 \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} (\partial_2 R^\varepsilon)^2 \, d\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Dijeljenjem s korijenom s lijeve strane i korištenjem Poincaréove nejednakosti, uz potencijalno ažuriranje konstante C , dobivamo

$$c\|u^\varepsilon - u^0\|_{\tilde{V}} \leq \sqrt{\int_{\Omega} (\partial_1(u^\varepsilon - u^0))^2 d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} (\partial_2(u^\varepsilon - u^0))^2 d\mathbf{x}} \leq C\varepsilon. \quad (5.3.10)$$

5.4 Pojava rubnog sloja

Dvije tehnike dokazivanja konvergencije familije rješenja nude nam dva ipak suptilno različita rezultata, no ono što je najbitnije, ne nude nam ono što želimo.

Kao prvo, komentirajmo da ocjena (5.3.10) iz opravdanja apriornog razvoja nije točna! Naime, prilikom postupka, kao test funkciju uvrstili smo $v = R^\varepsilon = u^\varepsilon - u_0$. Međutim, u_0 , pa onda ni R^ε , nije dozvoljena test funkcija za jednadžbu (5.1.3). Zato zapravo u prošlom potpoglavlju zapravo nismo ništa dokazali.

Kao drugo, apriornim ocjenama dokazali smo konvergenciju, ali samo u slabijoj normi prostora $\tilde{V}$, dakle normi u kojoj nemamo kontrolu nad parcijalnom derivacijom po x_2 (dapače, limes u^* ju ne mora imati u $L^2(\Omega)$). To posebno znači da nemamo kontrolu ni nad tragom funkcije u^* na donjem rubu kvadrata, pa ne možemo garantirati da je ona tamo jednaka nuli. S druge strane, sve funkcije u^ε jesu jednake nuli na donjem rubu kvadrata.

Primijećujemo da se dogodila situacija slična kao u Uvodu (Primjer 1.0.2): sva rješenja ε -problema zadovoljavaju rubni uvjet, dok funkcija kojoj te funkcije teže ne zadovoljava taj uvjet. Kažemo da se dogodio **rubni sloj**.

Motivirajmo, a onda i objasnimo kako se rješavaju situacije u kojima se događa rubni sloj. Funkcija u_0 dobro aproksimira rješenja u^ε svugdje osim uz rub. Zato je logično da postojeće limitno rješenje iskoristimo kao glavni dio aproksimacije funkcije u^ε , a loše ponašanje uz problematični rub ažuriramo dodavanjem članova koji će imati vrijednosti bliske nuli svugdje osim uz taj rub. Dakle, *ansatz* je sljedeći: tražimo aproksimaciju oblika

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2) + \theta\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon^k}\right).$$

Funkcija θ imat će svojstvo da teži u nulu kada $|x_2|$ teži u beskonačnost. Zato su drugi argumenti funkcije dijeljeni s ε^k za neki $k > 0$: za jako male vrijednosti ε , područje u kojima funkcija trne se sužava upravo uz problematični rubni sloj. Vrijednost k broj je koji je lako odrediti i ovisi o redu jednadžbe i ostalim parametrima u samoj jednadžbi, kao što ćemo vidjeti u nastavku.

Ovaj ansatz uvrstavamo u jednadžbu (5.1.1) i dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= -\partial_{11}u^\varepsilon(x_1, x_2) - \varepsilon^2\partial_{22}u^\varepsilon(x_1, x_2) \\ &\approx -\partial_{11}u_0(x_1, x_2) - \varepsilon^2\partial_{22}u_0(x_1, x_2) \\ &\quad - \partial_{11}\theta\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon^k}\right) - \varepsilon^{2-2k}\partial_{22}\theta\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon^k}\right). \end{aligned}$$

Zadnji član u eksponentu ε pojavio se zbog deriviranja kompozicije. Sada vidimo i koju vrijednost za k želimo: kako bi (gotovo) svi članovi u razvoju bili istog reda, postavljamo $k = 1$. Sada jedini član koji nije reda ε^0 možemo zanemariti (ovo je formalni račun, pa je "sve dozvoljeno"). Koristeći činjenicu da u_0 zadovoljava (5.1.4) (odnosno da je $-\partial_{11}u_0(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$), dobivamo prvi uvjet na korektor θ :

$$-\partial_{11}\theta - \partial_{22}\theta = 0 \quad \text{u } (0, 1) \times (0, +\infty). \quad (5.4.11)$$

Uvrstimo sada ansatz i u preostale uvjete iz (5.1.1). Dobivamo uvjete

$$\begin{cases} \theta(0, x_2) = \theta(1, x_2) = 0 & \text{za } x_2 \in (0, +\infty), \\ \theta(x_1, 0) = -u_0(x_1, 0) & \text{za } x_1 \in (0, 1). \end{cases} \quad (5.4.12)$$

Striktno gledano, trebali bismo vidjeti i što se događa s Neumannovim rubnim uvjetom za θ kada uvrstimo ansatz u diferencijalnu formulaciju, međutim to se ne radi. Kao prvo, greška koju time radimo je dovoljno mala te će se iskontrolirati u dokazu konvergencije. Kao drugo, Neumannov rubni uvjet ne utječe na glavni problem zbog kojeg smo uveli θ , a to je da su zadovoljeni Dirichletovi rubni uvjeti za aproksimacijsko rješenje. Dirichletovi rubni uvjeti uvijek su nam bitniji jer ulaze u prostor rješenja za slabu formulaciju. I treće, iako nemamo zadovoljen Neumannov rubni uvjet za svaki $\varepsilon > 0$, on će biti zadovoljen kada pustimo $\varepsilon \rightarrow 0$ jer dodatno zadajemo uvjet

$$\lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \theta(x_1, y_2) = 0, \text{ za g.s. } x_1 \in (0, 1). \quad (5.4.13)$$

Za sada je sve ovo bio formalni račun koji bi trebalo rigorozno dokazati. Za to je potrebno napraviti dvije stvari: dokazati egzistenciju korektora θ koji zadovoljava uvjete (5.4.11), (5.4.12) i (5.4.13), a zatim dokazati da razlika ažuriranog rješenja limesne jednadžbe $u_0 + \theta(\cdot, \cdot/\varepsilon)$ i rješenja familija jednadžbi u^ε konvergira k nuli u jačoj normi prostora H^1 . To ćemo napraviti u sljedećoj sekciji.

5.5 Rigorozno opravdanje korektora rubnog sloja*

Korektor θ konstruirat ćemo direktno, koristeći Fourierov razvoj. Sjetimo se: rješenje jednadžbe $-\partial_{11}\theta - \partial_{22}\theta = 0$ tražimo u formatu

$$\sum_k X_k(x_1)Y_k(y_2),$$

gdje svaki od sumanada $X_k(x_1)Y_k(y_2)$ rješava diferencijalnu jednadžbu. Uvrštavanjem i sređivanjem, dobivamo da je $X_k''Y_k + X_kY_k'' = 0$, odnosno da vrijedi $-X_k''/X_k = Y_k''/Y_k$. Dobili smo jednakost dviju funkcija koje ne dijele varijable, pa to mora biti konstanta. Označavamo ju s λ_k^2 . Uvjet na X_k daje (sjetimo se i uvjeta (5.4.12) na lijevom i desnom rubu)

$$X_k'' + \lambda_k^2 X_k = 0, \quad X_k(0) = X_k(1) = 0,$$

odakle je $\lambda_k = k\pi$ te $X_k(x_1) = \sin(k\pi x_1)$, $k \in \mathbb{N}$. Uvrštavanjem nazad u za Y_k slijedi $Y_k(y_2) = a_k e^{-k\pi y_2} + b_k e^{k\pi y_2}$. Zbog uvjeta (5.4.13) uzimamo $b_k = 0$. Dakle, dobili smo da je

$$\theta(x_1, y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x_1) e^{-k\pi y_2}.$$

Koeficijente a_k dobivamo iz preostalog uvjeta, a to je nehomogeni Dirichletov rubni uvjet na donjem rubu. Slijedi

$$-u_0(x_1, 0) = \theta(x_1, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x_1).$$

To je zapravo raspis funkcije $-u_0(\cdot, 0)$ u Fourierov razvoj pomoću sinusa, ako definiramo

$$a_k = 2 \int_0^1 (-u_0(x_1, 0)) \sin(k\pi x_1) dx_1.$$

Poznato je da za funkciju iz $L^2(0, 1)$ njezin Fourierov red je dobro definiran i konvergira prema vrijednosti funkcije.

Ovo je zasad bio neprecizan izvod. Sve ćemo precizirati u sljedećem teoremu. U njemu ćemo koristiti i rezultat da se red funkcija smije derivirati član po član na otvorenom skupu ako je red deriviranih funkcija (red funkcija dobiven deriviranjem član po član) uniformno konvergentan na svakom kompaknom podskupu tog otvorenog skupa.

Teorem 5.5.1: Egzistencija i jedinstvenost rubnog korektora

Pretpostavimo da je $\partial_{22}u_0 \in L^2(\Omega)$ (što je prema Zadatku 5.3.1 ostvareno čim $\partial_{22}f \in L^2(\Omega)$). Tada prema teoremu o tragu postoji $u_0|_{x_2=0} \in H^1(0,1)$, za koju dodatno pretpostavljamo uvjet kompatibilnosti $u_0(0,0) = u_0(1,0) = 0$.

Tada je funkcija dana formulom

$$\theta(x_1, y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x_1) e^{-k\pi y_2} \quad (5.5.14)$$

dobro definirana na $\Omega_{\infty} := (0,1) \times (0,+\infty)$ (red konvergira u L^2 normi) i rješenje je sustava (5.4.11), (5.4.12) i (5.4.13). Dodatno, za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi ograda

$$\|\partial_2 \theta(\cdot, 1/\varepsilon)\|_{L^2(0,1)} \leq C e^{-\pi/\varepsilon}. \quad (5.5.15)$$

Dokaz.

Kao što smo komentirali, kako je $u_0(\cdot, 0) \in L^2(0,1)$, njezin sinusni Fourierov red

$$-u_0(x_1, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x_1), \quad a_k = 2 \int_0^1 (-u_0(x_1, 0)) \sin(k\pi x_1) dx_1$$

dobro je definiran (red konvergira u $L^2(0,1)$ ka $g := -u_0(\cdot, 0)$). Koristimo Parsevalov identitet koji kaže da za svaki vektor $\mathbf{v}$ iz Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ i njegovu ortonormiranu bazu $(\mathbf{e}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vrijedi

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_k |\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle|^2.$$

Kako funkcije $x_1 \mapsto \sqrt{2} \sin(k\pi x_1)$ čine ortonormiranu bazu na $L^2(0,1)$, primjenom identiteta na našu funkciju dobivamo koeficijente uz ortonormiranu bazu jednake $a_k/\sqrt{2}$, pa vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{2} = \|u_0(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \implies A := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty. \quad (5.5.16)$$

Dokažimo da red iz definicije (5.5.14) konvergira ka funkciji u $L^2(\Omega_{\infty})$ normi. Za g.s. $y_2 \in (0, +\infty)$, zbog ortogonalnosti sinusa, kvadrat norme parcijalne sume po varijabli x_1 iznosi:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x_1) e^{-k\pi y_2} \right\|_{L^2(0,1)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\| a_k \sin(k\pi x_1) e^{-k\pi y_2} \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_k^2 e^{-2k\pi y_2} \\ &\leq \frac{1}{2} e^{-2\pi y_2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{A}{2} e^{-2\pi y_2}. \end{aligned}$$

Zato za normu na cijeloj domeni imamo

$$\|\theta\|_{L^2(\Omega_{\infty})}^2 = \int_0^{\infty} \|\theta(\cdot, y_2)\|_{L^2(0,1)}^2 dy_2 \leq \int_0^{\infty} \frac{A}{2} e^{-2\pi y_2} dy_2 = \frac{A}{4\pi},$$

što pokazuje da ovako definirana funkcija θ pripada $L^2(\Omega_{\infty})$.

Dokažimo sada da sve derivacije funkcije θ možemo dobiti deriviranjem reda iz (5.5.14) član po član, te da pripadaju prostoru $L^2(\Omega_{\infty})$. Za proizvoljan $y_0 > 0$ promotrimo skup $K_{y_0} :=$

$[0, 1] \times [y_0, +\infty)$. Dovoljno je pokazati da redovi derivacija uniformno konvergiraju na svakom takvom K_{y_0} .

Prilikom svake parcijalne derivacije na desnoj strani (5.5.14) iz eksponencijalne funkcije i funkcije $\sin$ ispadaju faktori $\pm k\pi$, te se funkcija $\sin$ potencijalno pretvara u $\cos$ ili obratno. U svakom slučaju, red m -te derivacije član po član oblika je

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} a_k(k\pi)^m \tau(k\pi x_1) e^{-k\pi y_2},$$

gdje je $\tau \in \{\sin, \cos\}$. Na skupu K_{y_0} apsolutnu vrijednost općeg člana možemo ocijeniti sa

$$|a_k(k\pi)^m \tau(k\pi x_1) e^{-k\pi y_2}| \leq \sqrt{A}(k\pi)^m e^{-k\pi y_0},$$

jer za sve koeficijente vrijedi $|a_k| \leq \sqrt{A}$. Prema D'Alembertovom (ili Cauchyjevom) kriteriju red s desne strane konvergira za svaki $y_0 > 0$. Prema Weierstrassovom M-testu, red derivacija uniformno konvergira.

To posebno znači da postoje derivacije $\partial_{11}\theta$ i $\partial_{22}\theta$, te ih možemo računati član po član:

$$-\partial_{11}\theta - \partial_{22}\theta = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \pi^2 a_k \sin(k\pi x_1) e^{-k\pi y_2} - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \pi^2 a_k \sin(k\pi x_1) e^{-k\pi y_2} = 0.$$

Dakle, θ zadovoljava (5.4.11). Da zadovoljava uvjete na rubovima lako se vidi uvrštavanjem (za donji rub) i graničnim prijelazom.

Preostaje dokazati zadnju ocjenu trnjenja (5.5.15) na visini $y_2 = 1/\varepsilon$. Deriviranjem po y_2 i izračunom norme dobivamo:

$$\begin{aligned} \|\partial_2 \theta(\cdot, 1/\varepsilon)\|_{L^2(0,1)}^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} -a_k k \pi \sin(k\pi x_1) e^{-k\pi/\varepsilon} \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 k^2 e^{-2k\pi/\varepsilon} \\ &= \frac{\pi^2}{2} e^{-2\pi/\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (k^2 e^{-2(k-1)\pi/\varepsilon}). \end{aligned}$$

Promotrimo izraz $k^2 e^{-2(k-1)\pi/\varepsilon}$ kao niz po k . Taj niz je pozitivan teži k nuli, pa je ograničen odozgo s C , iz čega slijedi:

$$\|\partial_2 \theta(\cdot, 1/\varepsilon)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{\pi^2}{2} e^{-2\pi/\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} C a_k^2 = \frac{\pi^2 A C}{2} e^{-2\pi/\varepsilon}.$$

Vađenjem korijena dobivamo traženu ocjenu.

Sada napokon možemo dokazati poboljšanje rezultata koje smo dobili bez rubnog sloja. Ideja je da u^0 ne aproksimira rješenja u^ε na odgovarajuć način (u preslaboj normi). Zato kao bolju aproksimaciju predlažemo familiju surogat rješenja

$$U^\varepsilon = u_0 + \theta^\varepsilon,$$

pri čemu je

$$\theta^\varepsilon(x_1, x_2) := \theta\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}\right).$$

Ovako definirana funkcija zadovoljava sve rubne uvjete, te je u $H^1(\Omega)$ ako pretpostavimo da je $\partial_2 f \in L^2(\Omega)$ (prema Zadatku 5.3.1). Zato ju možemo uvrštavati u varijacijsku zadaću (5.1.3), kao i razliku

$R^\varepsilon := u^\varepsilon - U^\varepsilon$. Sada možemo provoditi ideju dokaza opravdanja asimptotskog razvoja.

Teorem 5.5.2

Neka je $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ familija rješenja zadaća (5.1.3), uz pretpostavku da funkcija s desne strane $f \in L^2(\Omega)$ zadovoljava uvjete kompatibilnosti $\partial_2 f, \partial_{22} f \in L^2(\Omega)$.

Neka je $u_0 \in \tilde{V}$ rješenje limitne zadaće (5.1.4), te neka je korektor $\theta \in H^1((0,1) \times (0,+\infty))$ rješenje sustava (5.4.11), (5.4.12), (5.4.13). Tada za aproksimaciju $U^\varepsilon = u_0 + \theta^\varepsilon \in V$ vrijede ocjene

$$\begin{aligned}\|u^\varepsilon - U^\varepsilon\|_{\tilde{V}} &\leq \tilde{C}\varepsilon^2, \\ \|u^\varepsilon - U^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} &\leq \tilde{C}\varepsilon.\end{aligned}$$

Dokaz.

Slično kao u pokušaju dokaza opravdavanjem asimptotskog razvoja, oduzimamo jednadžbe za u^ε, u^0 i θ . Za prve dvije funkcije koristimo (5.1.3) i (5.1.4), a za zadnju jednakost trebamo izvesti reskaliranu slabu formulaciju jednadžbe (5.4.11) (sada problem čini nehomogeni Neumannov uvjet na gornjem sloju). Dobivamo da za sve $v \in V$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \partial_1 u^\varepsilon \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_2 u^\varepsilon \partial_2 v \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \partial_1 \theta^\varepsilon \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_2 \theta^\varepsilon \partial_2 v \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_0^1 \partial_2 \theta^\varepsilon(x_1, 1) v(x_1, 1) \, dx_1 &= 0.\end{aligned}$$

Oduzimanjem dobivamo:

$$\int_{\Omega} \partial_1 R^\varepsilon \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_2 R^\varepsilon \partial_2 v \, d\mathbf{x} = -\varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_2 u_0 \partial_2 v \, d\mathbf{x} - \varepsilon^2 \int_0^1 \partial_2 \theta^\varepsilon(x_1, 1) v(x_1, 1) \, dx_1. \quad (5.5.17)$$

Uvrštavamo dopuštenu funkciju $v = R^\varepsilon$, te za prvi integral na desnoj strani koristimo parcijalnu integraciju (uočite da doprinos s gornjeg ruba propadne jer imamo implicitni homogeni Neumannov rubni uvjet na gornjem rubu):

$$\|\partial_1 R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_2 R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_{22} u_0 R^\varepsilon \, d\mathbf{x} - \varepsilon^2 \int_0^1 \partial_2 \theta^\varepsilon(x_1, 1) R^\varepsilon(x_1, 1) \, dx_1. \quad (5.5.18)$$

Koristeći ogradu iz Teorema 5.5.1 i trag funkcije R^ε , drugi član možemo ocijeniti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\left| \varepsilon^2 \int_0^1 \partial_2 \theta^\varepsilon(x_1, 1) R^\varepsilon(x_1, 1) \, dx_1 \right| &\leq C_1 \varepsilon^2 \|\partial_2 \theta(\cdot, 1/\varepsilon)\|_{L^2(0,1)} \|\partial_2 R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon^2 \cdot C_2 e^{-pi/\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \|R^\varepsilon\|_\varepsilon \\ &\leq C_3 \varepsilon^2 \|R^\varepsilon\|_\varepsilon\end{aligned} \quad (5.5.19)$$

(na kraju smo koristili i da eksponencijalna funkcija brže trne od linearne za male ε , te oznaku

$$\|v\|_\varepsilon^2 := \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_1 v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

Uvrštavajući tu ogradu u (5.5.18), uz Cauchy–Scharzovu nejednakost na prvom sumandu s desne strane, dobivamo

$$\|\partial_1 R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_2 R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \varepsilon^2 \|\partial_{22} u_0\|_{L^2(\Omega)} \|R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + C_3 \varepsilon^2 \|R^\varepsilon\|_\varepsilon \leq M \varepsilon^2 \|R^\varepsilon\|_\varepsilon. \quad (5.5.20)$$

Prema Poincaréovoj nejednakosti (Lema 5.1.2) $\|\partial_1 R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ kontrolira i $\|R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$, pa uz ažuriranje konstante M možemo pisati

$$\|R^\varepsilon\|_\varepsilon^2 \leq M\varepsilon^2 \|R^\varepsilon\|_\varepsilon, \quad (5.5.21)$$

što dijeljenjem slijeva i zdesna daje

$$\|R^\varepsilon\|_\varepsilon \leq M\varepsilon^2.$$

Sada tvrdnje teorema slijede iz nejednakosti $\|\cdot\|_\varepsilon \geq \|\cdot\|_{\tilde{V}}$ i $\|\cdot\|_\varepsilon \geq \varepsilon \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ koje slijede iz definicija tih normi.

Napomena 5.5.3

Da smo početnu zadaću zadali na prostoru $H_0^1(\Omega)$ (s homogenim Dirichletovim uvjetom na svim rubovima, pa i onim za $x_2 = 1$), limitno bi rješenje u_0 generiralo grešku na obje vodoravne stranice. U takvoj je situaciji potrebno dodati dva korektora. Konkretno, da smo problemu (5.1.1) tražili zadovoljenje Dirichletovog rubnog uvjeta na sve četiri dužine kvadrata, ansatz za surogat rješenje tada bi izgledala ovako:

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2) + \theta^D \left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon^k} \right) + \theta^G \left(x_1, \frac{1 - x_2}{\varepsilon^k} \right)$$

(oznake "G" i "D" označavaju tretiranje gornjeg i donjeg sloja). Raspisivanje kao u slučaju jednog rubnog sloja pokazalo bi nam da smijemo raspis rastaviti na dva odvojena analogna problema za θ^D i θ^G za koja bismo ponovno dokazali egzistenciju i jedinstvenost. Glavni problem stvorilo bi nam to što θ^D i θ^G ne zadovoljavaju uvjet na suprotnom rubu. Stoga moramo uvesti cut-off funkcije, i tek tada uvrstiti u problem. Detalje na ovom kolegiju preskačemo.

Napomena 5.5.4

Do sada smo u kolegiju se bavili isključivo traženjem limesa familije rješenja $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Motivacija s kojom smo kretali u kolegij je da je u mnogim slučajevima rješavanje ε problema za konkretan mali $\varepsilon > 0$ često loše uvjetovan ili numerički zahtjevan problem, pa zbog toga želimo to rješenje zamijeniti nekim drugim, lakše izračunljivim, ali bliskim rješenjem. Do sada je to u pravilu uvijek bio limes u_0 . Ovaj primjer pokazuje da to ne mora biti tako: ta aproksimacija može biti rješenje nekog surogat modela i U^ε . Dakle, aproksimacija za u_ε dodatno ovisi i o ε , ali je i dalje u pravilu lakše i preciznije izračunati rješenje surogat problema nego originalnog problema.

5.6 Numerička verifikacija metodom proizvoljnih rješenja (MMS)

Pored preciznih matematičkih dokaza o konvergenciji, u znanstvenim člancima često se modeli verificiraju i numerički. Cilj je fiksirati konkretne parametre (domenu, funkciju desne strane f i sl) te niz vrijednosti za ε , a onda analizirati grešku za koju smo ranije analitički dokazali da teži k nuli. Iako je to korisno zbog vizualizacije, numerička validacija nosi svoje probleme. Jer, osim što kao matematičari znamo da jedan numerički primjer ne služi kao dokaz, u prikazu greške nije jasno koliki udio greške zbog modela, a koliko zbog numeričke nestabilnosti (uvjetovanosti matrice, greške diskretizacije i slično).

Dio problema oko numeričke nestabilnosti možemo izbjeći tako što ćemo za numeričku validaciju koristiti metodu proizvoljnih rješenja (eng. method of manufactured solutions (MMS)). Naći ćemo egzaktne rješenja u^ε i u_0 za egzaktne desne strane f . Kako je to općenito dosta težak problem (jer

parcijalne diferencijalne jednačbe u pravilu ne možemo egzaktno riješiti), krećemo od izbora za u_0 i u_ε , a onda iz diferencijalne formulacije izračunamo f .

Za primjer (5.1.1) krećemo od izbora za u_0 . Cilj nam je da u_0 ne zadovolji sve Dirichletove rubne uvjete kako bismo vidjeli efekt rubnog sloja. Tražit ćemo da zadovolji Dirichletov rubni uvjet na lijevom i desnom rubu, te želimo da zadovolji Neumannov rubni uvjet na gornjem rubu. Biramo funkciju

$$u_0(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \left(1 - x_2 + \frac{1}{2}x_2^2\right). \quad (5.6.22)$$

Sada iz jednačbe $-\partial_{11}u_0 = f(x_1, x_2)$ dobivamo

$$f(x_1, x_2) = \pi^2 \sin(\pi x_1) \left(1 - x_2 + \frac{1}{2}x_2^2\right). \quad (5.6.23)$$

Rješavanjem zadaće za korektor $-\partial_{11}\theta - \partial_{YY}\theta = 0$ s uvjetom $\theta(x_1, 0) = -u_0(x_1, 0)$, dobivamo egzaktni izraz za rubni korektor:

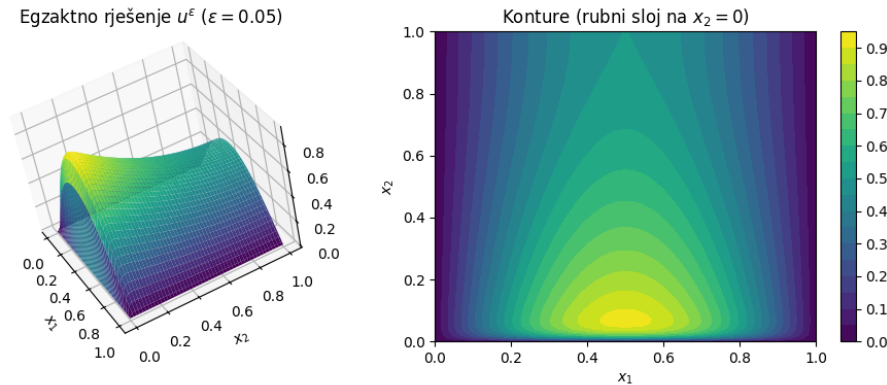
$$\theta(x_1, Y) = -\sin(\pi x_1)e^{-\pi Y} \implies \theta^\varepsilon(x_1, x_2) = -\sin(\pi x_1)e^{-\pi x_2/\varepsilon}.$$

S druge strane, pokazuje se da ova desna strana f daje egzaktno rješenje (5.1.1) za svaki $\varepsilon > 0$:

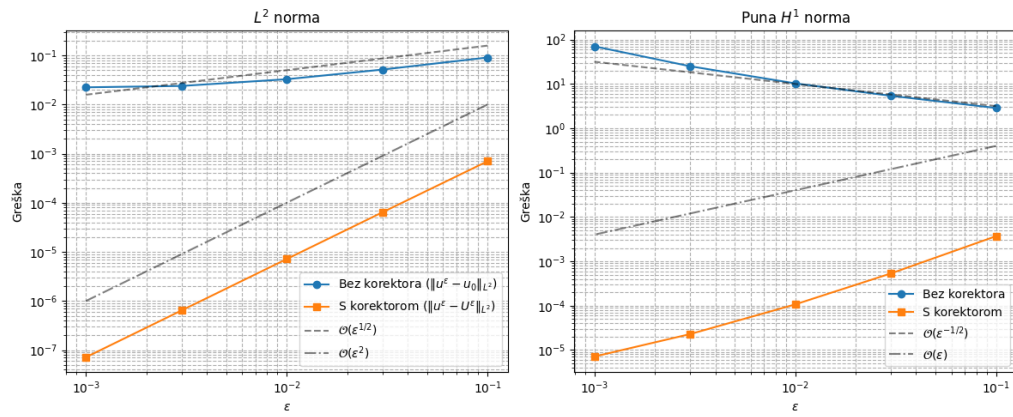
$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \left[1 - x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\varepsilon^2}{\pi^2} - \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\right) \frac{\cosh\left(\frac{\pi(1-x_2)}{\varepsilon}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)}\right]. \quad (5.6.24)$$

Rješenje nije bilo (toliko) teško za naći. Pogodili smo format rješenja $u^\varepsilon(x_1, x_2) = \rho^\varepsilon(x_1)\nu^\varepsilon(x_2)$, uvrstili u (5.1.1), se u suštini najviše bavili običnom diferencijalnom jednačbom za ν^ε .

Kao što smo najavili, sada bi bilo zanimljivo napraviti dvije analize: kao prvo, koliko precizno se rješava ε problem (5.1.1) uspoređujući egzaktno rješenje i numeričku aproksimaciju (te isto za surogat rješenje), i kao drugo, koliko surogat rješenje dobro aproksimira originalno rješenje u^ε . U ovoj skripti odgovorit ćemo samo na drugo pitanje, za što možete vidjeti slike u nastavku.



Slika 5.1: Grafički prikaz numeričke aproksimacije rješenja u^ε za $\varepsilon = 0.05$. Uočiti pojavu rubnog sloja kod $x_2 = 0$.



Slika 5.2: Log-log plotovi normi razlika točnog rješenja od limesa te surogat rješenja u različitim normama. Primijetite da je *decay-rate* u oba slučaja bolji kada uključimo korektor u aproksimaciju.

Poglavlje 6

Jednadžbe linearizirane elastičnosti

U drugom dijelu kolegija bavit ćemo se izvodom lineariziranog modela elastične ploče iz jednadžbi linearizirane elastičnosti. U odnosu na dosadašnji dio kolegija imamo jednu veliku razliku: jednadžbe i nepoznanice koje promatramo više nisu skalarne, tj. kodomena nije jednodimenzionalna, nego će u ovom slučaju biti trodimenzionalna. Linearne eliptičke jednadžbe više ne možemo okarakterizirati samo preko Laplaceovog operatora (pomoću jednadžbe $-\operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u) = f$). Ipak, teorija egzistencija i rješenja i dalje slijedi iz Lax-Milgramove leme primijenjene na odgovarajući funkcionalni prostor (kojemu, dakako, kodomena mora biti prilagođena).

Za početak krećemo s jednadžbom linearizirane elastičnosti. Za to nam je potrebno uvesti nekoliko pojmova iz kolegija Teorija elastičnosti (obavezni kolegij na 5. godini studija). Također, motivirat ćemo te jednadžbe iz mehaničke strane. Želimo naglasiti da "izvod" jednadžbe linearizirane elastičnosti koji će slijediti nije rigorozan, nego služi samo kao motivacija.

6.1 Jednadžbe nelinearne elastičnosti

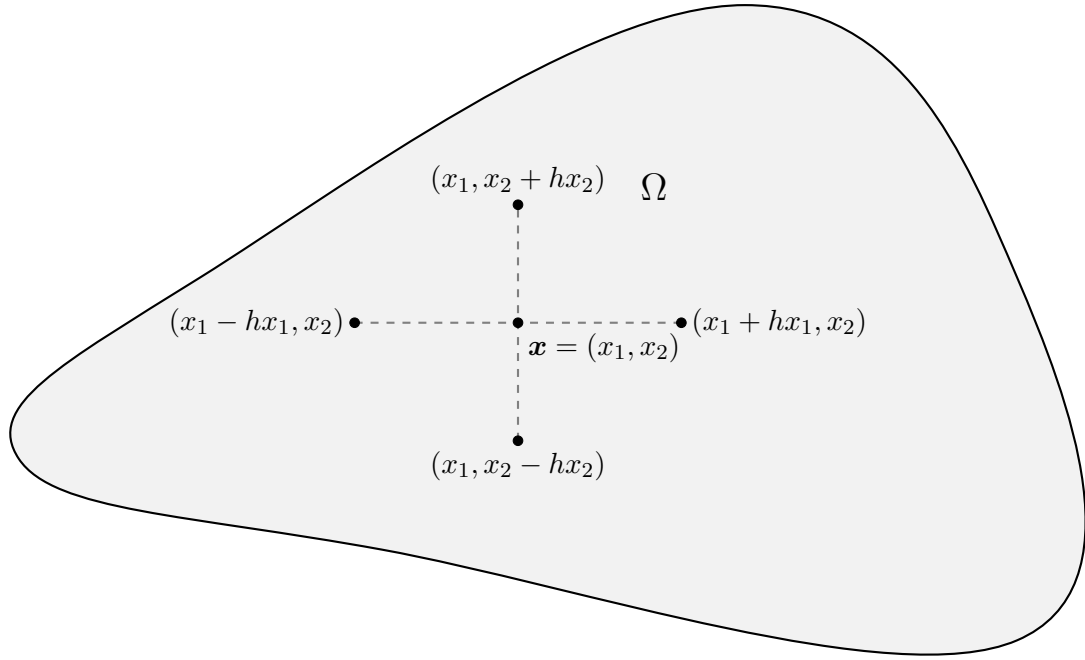
Promotrimo elastično tijelo koje zauzima referentnu konfiguraciju $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Tijelo se deformira pod djelovanjem vanjskih sila, a deformacija se opisuje preslikavanjem $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Za svaku točku $\mathbf{x} \in \Omega$ preslikavanje $\phi(\mathbf{x})$ daje novu poziciju čestice koja je u referentnoj konfiguraciji bila u točki $\mathbf{x}$. Promatramo stacionarnu deformaciju, tj. deformaciju u kojoj sve čestice tijela zauzimaju konačne pozicije nakon balansiranja sila i momenata.

Motivirajmo sljedeću notaciju: deformacija tijela usko je vezana uz mjeru

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \left(\nabla \phi^T \nabla \phi - \mathbf{I} \right), \quad (6.1.1)$$

koju zovemo **Green–St. Venantov tenzor deformacije**, te je zapravo u jeziku diferencijalne geometrije **metrički tenzor** na deformiranom tijelu.

Da bismo to ostvarili, pogledajmo objašnjenje sličnom onom iz Napomene 2.2.2. Za potrebe objašnjenja, neka je domena dvodimenzionalna i neka svaka točka $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ima četiri susjedne točke: $(x_1 \pm hx_1, x_2)$, $(x_1, x_2 \pm hx_2)$ kao na slici.



Elastične efekte u svakoj točki možemo mjeriti

- koliko se tijelo lokalno proširilo ili stisnulo (promjena udaljenosti između susjednih točaka), te
- koliko se tijelo lokalno zakrenulo (promjena kuta između susjednih točaka).

Za prve efekte uspoređujemo udaljenosti između susjednih točaka u referentnoj i deformiranoj konfiguraciji. Što se više tijelo deformiralo, to će izrazi

$$\frac{1}{h^2} |\phi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - \phi(\mathbf{x})|^2 - 1 \approx |\partial_i \phi(\mathbf{x})|^2 - 1 = \partial_i \phi(\mathbf{x}) \cdot \partial_i \phi(\mathbf{x}) - 1$$

(za $i = 1, 2$) imati veću vrijednost. Za druge efekte uspoređujemo kutove između susjednih točaka u referentnoj i deformiranoj konfiguraciji, a njih mjerimo skalarnim umnošcima dvaju neparalelnih vektora. Što se više tijelo deformiralo, to će izrazi

$$\frac{1}{h^2} \langle \phi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) - \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_2) - \phi(\mathbf{x}) \rangle \approx \langle \partial_1 \phi(\mathbf{x}), \partial_2 \phi(\mathbf{x}) \rangle = \partial_1 \phi(\mathbf{x}) \cdot \partial_2 \phi(\mathbf{x})$$

imati veću vrijednost. Te izraze možemo zapisati matrično upravo kao $\nabla \phi^T \nabla \phi - \mathbf{I}$. Dakle, što su elementi Green-St. Venantovog tenzora deformacije veći, to je deformacija tijela veća.

Također, primijetimo da elastično tijelo nije zauzelo referentnu konfiguraciju, nego da je nedeformirani položaj bio opisan nekom funkcijom $\phi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, u tom slučaju u metričkom tenzoru član $\mathbf{I}$ zamijenili bismo s $\nabla \phi_0^T \nabla \phi_0$.

Još jedna potvrda zašto Green-St. Venantov tenzor deformacije je dobra mjera je u tome što kruti pomaci generiraju $\mathbf{E} = 0$. Kruti pomaci su deformacije općenito su translacije i rotacije tijela te ih sve možemo okarakterizirati preslikavanjem $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ uz $\mathbf{R} \in SO(3)$ ($SO(3)$ je skup ortogonalnih matrica s determinantom 1) i $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Primijetite da $\mathbf{R}$ i $\mathbf{c}$ ne ovise o $\mathbf{x}$. Intuitivno je da kod kruti pomaci ne spremaju elastičnu energiju u tijelo, pa je logično da bi mjera deformacije trebala biti jednaka nuli. Zaista, za krute pomake vrijedi $\nabla \phi = \mathbf{R}$, te kako je $\mathbf{R}$ ortogonalna matrica vrijedi $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}^T \mathbf{R} - \mathbf{I}) = 0$.

6.2 Linearizacija tenzora deformacije

Pokazuje se da teorija koja proizlazi iz Green-St. Venantovog tenzora deformacije vodi na nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe. Radi jednostavnosti u praksi se taj tenzor linearizira kako bismo došli do linearnih jednačbi. To ćemo napraviti i ovdje.

Umjesto da promatramo nepoznanicu ϕ (deformaciju) tijela, jednačbe ćemo zapisati pomoću nepoznanice $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} := \phi - id$ koja će nam označavati pomak tijela u točki $\mathbf{x} \in \Omega$. Linearizacija će biti provedena u režimu malih deformacija, tj. kada su vrijednosti funkcije i derivacije $\mathbf{u}$ malene. Zanimarito ćemo članove višeg reda. Kao što smo najavili u uvodu ovog poglavlja, do jednačbi dolazimo na neprecizan način, međutim jednačbe koje ćemo dobiti su standardne u literaturi i rigorozno su opravdane.

Uvrštavanjem $\phi = id + \mathbf{u}$ odnosno $\nabla \phi = I + \nabla \mathbf{u}$ u (6.1.1) dobivamo

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left((I + \nabla \mathbf{u})^T (I + \nabla \mathbf{u}) - I \right) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) =: \mathbf{e}(\mathbf{u}).$$

Dobili smo novu mjeru

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1 & \frac{1}{2}(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) & \frac{1}{2}(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3) \\ \frac{1}{2}(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) & \partial_2 u_2 & \frac{1}{2}(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3) \\ \frac{1}{2}(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3) & \frac{1}{2}(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3) & \partial_3 u_3 \end{bmatrix},$$

koja se naziva **linearizirani tenzor deformacije**. Ovaj tenzor uzima simetrični dio gradijenta pomaka $\nabla \mathbf{u}$, pa je zato uvriježena oznaka $\text{sym}(\nabla \mathbf{u})$ i naziv **simetrizirani gradijent**.

Prije nastavka, primijetimo da smo linearizacijom izgubili svojstvo da kruti pomaci generiraju nul tenzor. Polje pomaka $\mathbf{u}$ zadovoljava jednakost $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = 0$ ako i samo ako je oblika $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ gdje je $\mathbf{A}$ antisimetrična matrica. Međutim, i za to postoji objašnjenje vezano uz linearizaciju (nelinearnih) krutih pomaka. Za početak, sjetimo se da za svaku rotaciju $\mathbf{R} \in SO(3)$ postoji vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ takav da je $\mathbf{R}$ rotacija oko osi $\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$ za kut $\|\mathbf{w}\|$. To možemo zapisati u obliku $\mathbf{R} = \exp(\mathbf{A}_{\mathbf{w}})$ gdje je

$$\mathbf{A}_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

antisimetrična matrica reprezentirana (aksijalnim) vektorom $\mathbf{w}$ (primijetite da vrijedi $\mathbf{A}_{\mathbf{w}}\mathbf{x} = \mathbf{w} \times \mathbf{x}$ za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$). Linearizacijom eksponencijalne funkcije (tj., razvojem u Taylorov red) dobivamo

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (\mathbf{R} - I)\mathbf{x} + \mathbf{c} \approx \mathbf{A}_{\mathbf{w}}\mathbf{x} + \mathbf{c}.$$

Zato takva polja pomaka zovemo **infinitesimalni kruti pomaci**.

Zadatak 6.2.1

Neka je $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ proizvoljno polje deformacije, a $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ proizvoljno polje pomaka. Pokažite da je $\mathbf{E}(\phi) = 0$ ako i samo ako postoji ortogonalna matrica* $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ i vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ takvi da je $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ te da je $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = 0$ ako i samo ako postoji antisimetrična matrica $\mathbf{A}$ i vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ takvi da je $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$. Radi potrebe izvoda, pretpostavite da je Ω povezana domena i da su ϕ i $\mathbf{u}$ klase C^∞ .

* Za matricu $\mathbf{R}$ se u slučaju krutih pomaka dokazuje da ima determinantu 1 iz dodatnih uvjeta na funkcional elastične energije koji ne dopušta da gradijent preslikavanja ϕ ima negativnu determinantu (to bi impliciralo da je preslikavanje ϕ orijentacijski nepravilno, odnosno da se tijelo negdje "preklapa").

Ovime smo došli do linearizirane mjere deformacije $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ za koju je logično da na temelju nje gradimo model linearizirane elastičnosti. Bez daljnjeg objašnjenja i motivacije, navedimo model linearizirane elastičnosti za homogeni i izotropni materijal u jakoj formi:

$$-\text{div } \Sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{u } \Omega \tag{6.2.2}$$

gdje je $\Sigma(\mathbf{u})$ **tenzor naprežanja** zadan **konstitutivnom jednađbom** $\Sigma(\mathbf{u}) = 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u})) \mathbf{I}$, pri čemu su $\mu, \lambda > 0$ **Laméovi parametri** (konstante koje opisuju svojstva materijala). Parametar μ naziva se i modulom smicanja jer mjeri otpornost materijala na promjenu oblika, dok je λ usko vezan uz otpornost na promjenu volumena (kompresibilnost). Na desnoj strani je $\mathbf{f}$ volumna gustoća sile. Ovaj model je poznat kao **model linearizirane elastičnosti**. Uvedemo li tenzor (tj. linearni operator s prostora simetričnih 3×3 matrica u isti taj prostor) $\mathcal{C} : \mathbb{M}_3 \rightarrow \mathbb{M}_3$, $\mathcal{C}\mathbf{E} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I}$, možemo izvesti varijacijsku formulaciju ovog problema na prostoru funkcija

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_D\},$$

gdje je Γ_D dio ruba pozitivne površinske mjere na kojem su zadani Dirichletovi uvjeti. Varijacijska formulacija ovog problema glasi: pronaći $\mathbf{u} \in V$ takvu da vrijedi

$$\int_{\Omega} \mathcal{C}\mathbf{e}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (6.2.3)$$

Ovaj model promatra tijelo koje je homogeno (u svakoj točki svojstva materijala su jednaka) te izotropno (svojstva materijala ne ovise o smjeru), što se u literaturi naziva **St. Venant-Kirchhoffov model**.

Primijetite da je na lijevoj strani jednakosti iskorištena oznaka " $\cdot$ " koja u ovom kontekstu označava Frobeniusov skalarni produkt dviju matrica, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$. Da bi se razlikovalo od skalarnog produkta dvaju vektora, u literaturi se ponekad koristi oznaka ":" za Frobeniusov skalarni produkt. Međutim, kako su oba produkta zapravo skalarni, koristimo istu oznaku (mijenjaju se samo objekti koji sudjeluju u produktu).

Napomena 6.2.2

Ovaj model dan je linearnom parcijalnom diferencijalnom jednađbom, međutim model zovemo **model linearizirane elastičnosti**. Iako se u literaturi može naći i naziv model linearne elastičnosti, to je u svojoj suštini krivo budući da elastičnost ne može biti linearna.

Kao što ime kaže, model linearizirane elastičnosti nastao je linearizacijom nelinearnog modela elastičnosti. Odbacivanjem članova višeg reda u Green-St. Venantovom tenzoru deformacije radimo grešku u modelu, međutim ovaj model je i dalje vrlo dobar za opisivanje deformacija tijela u režimu malih deformacija. Ovaj model se koristi u inženjerskoj praksi i računalnoj mehanici, a njegova prednost je što je linearan i time ga je lakše numerički rješavati, dokle god su deformacije (i posljedično sile na tijelo) male.

Prilikom izvoda varijacijske formulacije (6.2.3) implicitno smo iskoristili simetričnost tenzora naprežanja $\Sigma(\mathbf{u})$, tj. $\Sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} = \Sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v})$, te homogeni Neumannov rubni uvjet $\Sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0}$ na dijelu ruba Γ_N , koji interpretiramo kao slobodni rub domene.

Nakon nepreciznog izvoda modela (6.2.3) vraćamo se u matematičku preciznost. Prirodno pitanje koje se postavlja je je li ta varijacijska formulacija dobro postavljena, znamo li da postoji rješenje i je li ono jedinstveno. Kako je to eliptička jednađba drugog reda, dokaz temeljimo na Lax-Milgramovoj lemi. Kao i uvijek, najteži dio za provjeriti je koercivnost bilinearnih formi. Pod pretpostavkom da su μ i λ pozitivni, za izraz na lijevoj strani varijacijske formulacije (6.2.3) vrijedi

$$\int_{\Omega} \mathcal{C}\mathbf{e}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = 2\mu \int_{\Omega} |\mathbf{e}(\mathbf{u})|^2 \, d\mathbf{x} + \lambda \int_{\Omega} (\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u})))^2 \, d\mathbf{x} \geq 2\mu \|\mathbf{e}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2.$$

Koercitivnost će slijediti ako zadnji član možemo odozdo kontrolirati s $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2$. To do sada nije bilo uobičajeno: u $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ nalazi se samo simetrični dio gradijenta, tj. efektivno šest koordinata s linearnim kombinacijama matrica derivacija funkcije $\mathbf{u}$, a ne svih devet koordinata, tako da ne možemo primijeniti Poincaréovu nejednakost. Međutim, postoji jedna druga poznata nejednakost koja nam omogućuje da kontroliramo normu funkcije $\mathbf{u}$ s normom simetriziranog gradijenta $\mathbf{e}(\mathbf{u})$, a to je Kornova nejednakost.

Teorem 6.2.3: Kornova nejednakost

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ povezana domena s Lipschitzovim rubom. Tada na prostoru

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_D\},$$

postoji konstanta $C > 0$ (ovisna samo o Ω i Γ_D) takva da za svaku funkciju $\boldsymbol{u} \in V$ vrijedi

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq C \|\mathbf{e}(\boldsymbol{u})\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}.$$

Dakle, dobra postavljenost zadatke direktno slijedi iz Kornove nejednakosti i Lax–Milgramove leme u Hilbertovom prostoru V .

Poglavlje 7

Postavljanje problema za izvod elastične ploče

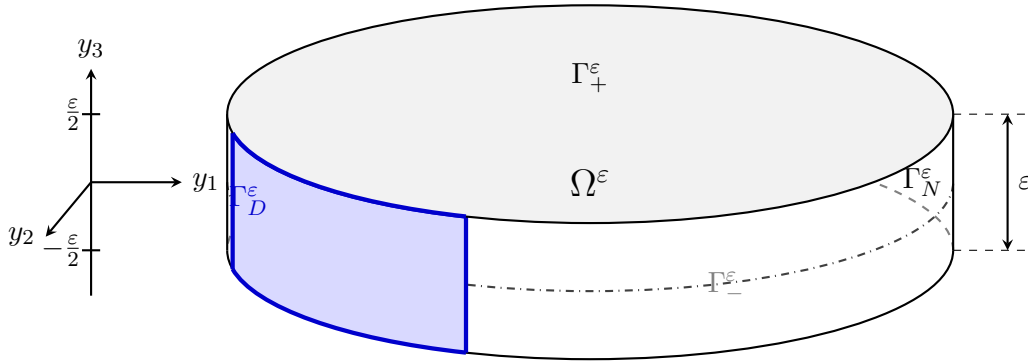
7.1 Prva familija problema

U ovom poglavlju, kao što kaže naslov, postavljamo posebne uvjete na parametre jedandžbe linearizirane elastičnosti (6.2.3) kako bismo izveli linearni model elastične ploče.

Neka je $\omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena domena s Lipschitzovim rubom $\partial\omega$. Ona predstavlja središnju plohu ravnog tankog elastičnog tijela. To tijelo ima debljinu $\varepsilon > 0$, stoga ćemo uvesti familiju trodimenzionalnih cilindričnih tijela (tankih ploča) indeksiranih parametrom debljine $\varepsilon > 0$:

$$\Omega^\varepsilon = \omega \times \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Lateralni dio ruba označavamo s $\Gamma_0^\varepsilon = \partial\omega \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$, dok su gornja i donja baza $\Gamma_\pm^\varepsilon = \omega \times \{\pm\varepsilon/2\}$.



Na ovim domenama promatramo stacionarni problem linearizirane elastičnosti iz prethodnog poglavlja. Pretpostavljamo da je ploča kruto uklještena na dijelu lateralnog ruba. Preciznije, postoji $\gamma_D \subset \partial\omega$ takav da je zadovoljen homogeni Dirichletov rubni uvjet na $\Gamma_D^\varepsilon := \gamma_D \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$, dok je na ostatku lateralnog ruba $\Gamma_N^\varepsilon := \Gamma_0^\varepsilon \setminus \Gamma_D^\varepsilon$ te gornjoj i donjoj bazi $\Gamma_\pm^\varepsilon$ zadovoljen homogen Neumannov uvjet (površine su slobodne od naprezanja). Prostor rješenja za fiksni $\varepsilon > 0$ je:

$$V^\varepsilon = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^3) : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_D^\varepsilon\}.$$

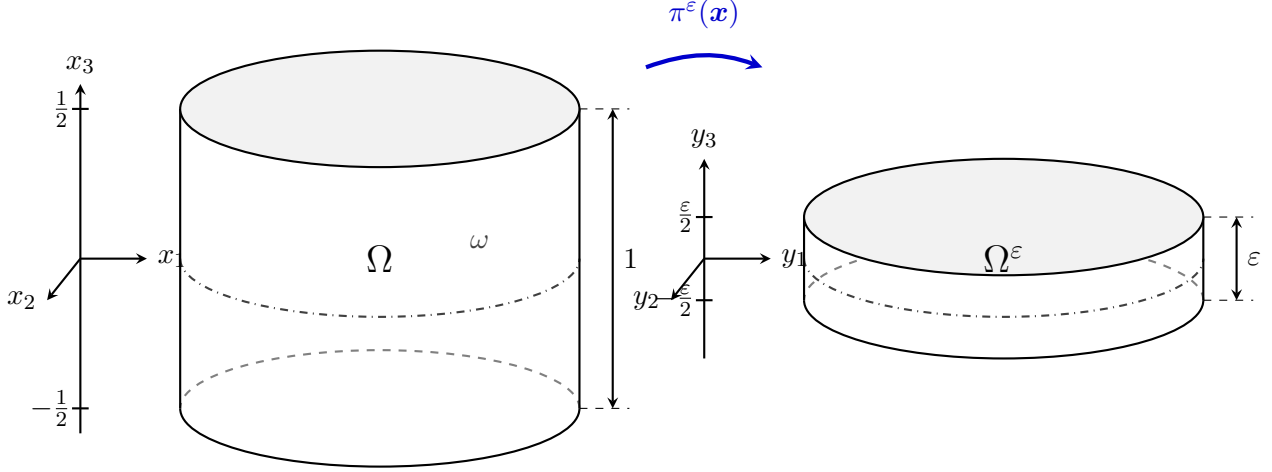
Promatramo zadaće oblika (6.2.3): naći $\mathbf{u}(\varepsilon) \in V^\varepsilon$ takav da

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{C}\mathbf{e}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{y} = \int_{\Omega^\varepsilon} f_1(\varepsilon)v_1 + f_2(\varepsilon)v_2 + f_3(\varepsilon)v_3 \, d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{v} \in V^\varepsilon. \quad (7.1.1)$$

Zahvaljujući Kornovoj nejednakosti koja vrijedi za svaku fiksnu domenu Ω^ε obzirom da imamo Dirichletov rub pozitivne mjere, te primjeni Lax–Milgramove leme, varijacijska zadaća za polje pomaka $\mathbf{u}(\varepsilon) \in V^\varepsilon$ ima jedinstveno rješenje za svaki $\varepsilon > 0$. Konstane iz Lax–Milgramove leme možda nisu uniformne, ali to zasad nije bitno pitanje.

7.2 Reskaliranje na referentnu domenu

Kako su rješenja $\mathbf{u}(\varepsilon)$ definirana na različitim domenama, nemoguće ih je usporediti na klasičan način. Puno je praktičnije uspoređivati ih na istim domenama. Također, znamo promatrati konvergenciju problema ovisnih o parametru ε kada se parametar nalazi u jednadžbama, a ne u domeni. To nas sve motivira da reskaliramo domene Ω^ε na jedinstvenu, tzv. referentnu konfiguraciju.



Definirajmo

$$\Omega := \omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Omega^1.$$

Analogno definiramo i rubove neovisne od ε :

$$\Gamma_0 := \Gamma_0^1, \quad \Gamma_\pm := \Gamma_\pm^1, \quad \Gamma_D := \Gamma_D^1, \quad \Gamma_N := \Gamma_N^1.$$

Nakon toga definiramo preslikavanje koordinata $\pi^\varepsilon : \Omega \rightarrow \Omega^\varepsilon$ zadano s:

$$(y_1, y_2, y_3) = \pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3).$$

Za to preslikavanje vrijedi

$$\nabla \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Funkcije nepoznanice $\mathbf{u}(\varepsilon)$ te desnu stranu $\mathbf{f}(\varepsilon)$ možemo sada pomoću tog preslikavanja prebaciti na referentnu domenu. Uz to, paralelno ćemo drugačije skalirati komponente tih preslikavanja (kasnije ćemo objasniti motivaciju iza toga). Za svaki $\varepsilon > 0$ definiramo polje $\mathbf{u}^\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ kao

$$\begin{aligned} u_\alpha^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) &= u_\alpha(\varepsilon)(\pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3)) = u_\alpha(\varepsilon)(x_1, x_2, \varepsilon x_3), \quad \alpha = 1, 2 \\ u_3^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon u_3(\varepsilon)(\pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3)) = \varepsilon u_3(\varepsilon)(x_1, x_2, \varepsilon x_3). \end{aligned}$$

Kraće zapisano, vrijedi

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \mathbf{u}(\varepsilon) \circ \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \nabla \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\varepsilon) \circ \pi^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Koristeći da je $\nabla \pi^\varepsilon(\mathbf{x})$ konstanta, derivirajući kompoziciju dobivamo

$$\nabla \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \nabla \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u}(\varepsilon)(\mathbf{y}) \nabla \pi^\varepsilon(\mathbf{x}),$$

odakle je

$$\nabla \mathbf{u}(\varepsilon)(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \nabla \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}.$$

Tada za simetrizirani gradijent vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{u}(\varepsilon)(\mathbf{y})) &= \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}(\varepsilon)(\mathbf{y}) + \nabla \mathbf{u}(\varepsilon)(\mathbf{y})^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \left(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})^T \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Koristeći pokrate

$$\mathbf{e}_0(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \partial_1 v_1 & \frac{1}{2}(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) & 0 \\ \cdot & \partial_2 v_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(\partial_3 v_1 + \partial_1 v_3) \\ \cdot & 0 & \frac{1}{2}(\partial_3 v_2 + \partial_2 v_3) \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \partial_3 v_3 \end{bmatrix}$$

(točkama označavamo koordinate kojima implicitno znamo vrijednosti jer je matrica simetrična), možemo pisati

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}(\varepsilon)(\mathbf{y})) = \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})).$$

Napomena 7.2.1

Ovakvo skaliranje koordinata nepoznanica radimo po uzoru na Philippe G. Ciarleta (autora serije od 3 knjige vezane uz elastičnost i nižedimenzionalne modele, vidjeti literaturu kolegija). Iako se izvod elastične ploče može provesti i bez reskaliranja koordinata nepoznanica, ovakav postupak koristan je jer simetrizirani gradijent $\mathbf{e}$ ostaje simetričan i nakon reskaliranja (uvjerite se sami da u slučaju da smo definirali $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\varepsilon) \circ \pi^\varepsilon(\mathbf{x})$ da bi simetrizirani gradijent bio asimetričan), a time i se na svakoj koordinati reskaliranog simetriziranog gradijenta nalazi zbroj parcijalnih derivacija pomnožen istim redom veličine ε^k . Generalno, kada bismo imali reskaliranje nekom kompliciranijom funkcijom π^ε , i dalje u većini slučajeva funkcionira trik $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \nabla \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\varepsilon) \circ \pi^\varepsilon(\mathbf{x})$.

Za reskaliranje sile na referentnu domenu definiramo $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} f_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= f_\alpha(\varepsilon)(\pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3)) = f_\alpha(\varepsilon)(x_1, x_2, \varepsilon x_3), \quad \alpha = 1, 2 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon^{-1} f_3(\varepsilon)(\pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3)) = \varepsilon^{-1} f_3(\varepsilon)(x_1, x_2, \varepsilon x_3). \end{aligned}$$

Dodatno, pretpostavimo da $\mathbf{f}$ zapravo ne ovisi o x_3 , tj. $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{f}(x_1, x_2)$, pa je efektivno $\mathbf{f} \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$.

Napomena 7.2.2

Time što smo definirali gustoću sile $\mathbf{f}$ neovisnu o ε implicitno smo definirali asimptotsko ponašanje gustoće sile kad $\varepsilon \rightarrow 0$. Primijetite da je ono drugačije u tangencijalnom i normalnom smjeru na ravninu u kojoj se nalazi središnja ploha tijela (na originalnoj domeni omjer tih sila je ε^2). Zasad to možemo objasniti samo na intuitivnoj razini: tanko elastično tijelo mnogo je lakše savinuti u poprečnom smjeru nego istegnuti u paralelnom smjeru (zamislite elastičnu traku i elastičnu gumu).

Uz uvaŹavanje Jakobijana preslikavanja $J_{\pi^\varepsilon} = \varepsilon$ (koji se pojavi na obje strane jednakosti, pa njime moŹemo odmah dijeliti), dobivamo familiju reskaliranih problema: naći $\mathbf{u}^\varepsilon \in V$,

$$V := \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_D\}, \quad (7.2.2)$$

takav da

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{C} \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon) \right) \\ & \quad \cdot \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{v}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Dakle, reskalirali smo originalan problem na fiksnu domenu, te sada moŹemo uspoređivati razliĉita rješenja na fiksnoj domeni. U daljnjim poglavljima promatratat ćemo što se događa kada $\varepsilon \rightarrow 0$, metodama koje smo predstavili na skalarnim jednadŹbama. Prvo pitanje koje se postavlja je postoje li uopće $\mathbf{u}^\varepsilon$, rješenja gornjih zadaća. Kao prvo, znamo da postoje budući da su nastala reskaliranjem zadaća (7.1.1). Kao drugo, ući ćemo odmah u koštac s teŹim problemom: umjesto dokazivanja koercitivnosti pripadne bilinearne forme za svaki pojedini $\varepsilon > 0$, traŹit ćemo uniformne konstante kako bismo dokazali apriorne ocjene. Međutim, prije rigoroznog izvoda provest ćemo formalni račun.

Prije nastavka, primijetimo da smo kroz već analizirane skalarne probleme implicitno obradili i asimptotiku nekih niŹedimenzijskih modela. Promatrajmo Poissonovu jednadŹbu $-\Delta u^\varepsilon = f$ na tankoj pravokutnoj domeni $\Omega_\varepsilon = (0, 1) \times (0, \varepsilon)$ uz odgovarajuće rubne uvjete (Dirichletove na vertikalnim, a Neumannove na horizontalnim rubovima). Uvođenjem zamjene varijabli $x_1 = x$ i $x_2 = y/\varepsilon$, domena se preslikava na fiksni jediniĉni kvadrat $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Prema lanĉanom pravilu, parcijalne derivacije transformiraju se u $\partial_x = \partial_1$ i $\partial_y = \frac{1}{\varepsilon} \partial_2$. Uvrštavanjem u laplasijan, problem na tankoj domeni toĉno se svodi na ranije prouĉavanu jednadŹbu s jakom anizotropijom na fiksnoj domeni (4.1.1). Sliĉno tome, ukoliko promatramo domenu tanku u x -smjeru, oblika $(0, \varepsilon) \times (0, 1)$, skaliranje $x_1 = x/\varepsilon$ i $x_2 = y$ generira diferencijalni operator oblika $-\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{11} - \partial_{22}$. MnoŹenjem cijele jednadŹbe s ε^2 (uz pretpostavku odgovarajućeg skaliranja člana na desnoj strani redom $\varepsilon^{-2}f$), problem direktno prelazi u familiju sa slabom anizotropijom (5.1.1) s drugaĉijim rubnim uvjetima.

Poglavlje 8

Formalni asimptotski razvoj problema linearne elastične ploče

8.1 Formalni asimptotski razvoj

U ovom poglavlju provodimo formalni asimptotski razvoj za problem izveden na kraju prošlog poglavlja. Naša tehnika rigoroznog izvoda neće biti temeljena na opravdanju ovog razvoja, nego na temelju apriornih ocjena i slabe konvergencije, međutim u ovom poglavlju upoznat ćemo se s limesnim problemom i dobiti intuiciju oko toga što treba na kraju dokazati.

Kao i prije, pretpostavljamo

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2 + \varepsilon^3 \mathbf{u}^3 + \dots, \quad (8.1.1)$$

i uvrštavamo u danu varijacijsku zadaću. Ono što komplicira zapis je činjenica da se sada ne radi o skalarnoj jednadžbi nego o sustavu s tri nepoznate funkcije, činjenica da imamo simetrizirani gradijent koji "miješa" parcijalne derivacije, te da se razni dijelovi tog simetriziranog gradijenta već pojavljuju u tri reda veličine ovisnim o ε . Da bi si olakšali postupak, prvo uvodimo pokrate:

$$\mathbf{E}_{-2} = \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^0), \quad \mathbf{E}_{-1} = \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^0) + \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^1), \quad \mathbf{E}_k = \mathbf{e}_k(\mathbf{u}^0) + \mathbf{e}_{k+1}(\mathbf{u}^1) + \mathbf{e}_{k+2}(\mathbf{u}^2), \quad (k \geq 0),$$

pa možemo pisati

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) &= \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^0 \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon) \\ &= \varepsilon^0 \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^0) + \varepsilon^1 \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^1) + \dots \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^0) + \varepsilon^0 \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^1) + \varepsilon^1 \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^2) + \dots \\ &\quad + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^0) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^1) + \varepsilon^0 \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^2) + \varepsilon^1 \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^3) + \dots \\ &= \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_{-2} + \varepsilon^{-1} \mathbf{E}_{-1} + \varepsilon^0 \mathbf{E}_0 + \varepsilon^1 \mathbf{E}_1 + \dots \end{aligned}$$

S tim pokratama dobivamo

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \mathcal{C} \left(\varepsilon^{-2} \mathbf{E}_{-2} + \varepsilon^{-1} \mathbf{E}_{-1} + \varepsilon^0 \mathbf{E}_0 + \dots \right) \\ &\quad \cdot \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{v}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Sada krećemo od reda $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ s najmanjim k i provodimo zaključke. Najniži red je za $k = -4$.

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^{-4})$:

$$\int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_{-2}) \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^0)) \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0. \quad (8.1.3)$$

Kako ova jednakost vrijedi za sve $\mathbf{v} \in V$, možemo uvrstiti $\mathbf{v} = \mathbf{u}^0$. Kako je $\mathcal{C}$ pozitivno definitan tenzor, zaključujemo $\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^0)$ skoro svuda, odnosno $\partial_3 u_3^0 = 0$.

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^{-3})$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_{-2}) \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_{-1}) \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^1) + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^0)) \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

(kako je $\mathbf{E}_{-2} = \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^0) = 0$, preostaje samo drugi integral). O njemu ćemo moći reći nešto više kada izračunamo sljedeći član u asimptotskom razvoju.

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_{-2}) \cdot \mathbf{e}_0(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_{-1}) \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^1) + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^0)) \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^2) + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^1) + \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^0)) \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

(prvi integral opet je nula). Sada možemo dobiti nešto vezano uz $\mathbf{E}_{-1} = \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^1) + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^0)$ tako da u jednadžbu (8.1.4) uvrstimo $\mathbf{v} = \mathbf{u}^1$, a u (8.1.5) uvrstimo $\mathbf{v} = \mathbf{u}^0$ (propast će zadnji integral) i zbrojimo. Iz koercitivnosti $\mathcal{C}$ dobivamo

$$\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^1) + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^0) = 0.$$

Kako $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_1$ imaju netrivialne elemente na različitim koordinatama, zapravo dobivamo $\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^1) = \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^0) = 0$. Za $\mathbf{u}^1$ slijedi $\partial_3 u_3^1 = 0$, dok za $\mathbf{u}^0$ u kombinaciji s prethodnim zaključkom dobivamo više.

Lema 8.1.1

Neka $\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ zadovoljava $\mathbf{e}_2(\mathbf{v}) = 0$ i $\mathbf{e}_1(\mathbf{v}) = 0$ (u smislu slabih derivacija). Tada $\mathbf{v} \in V_{KL}$, gdje je

$$\begin{aligned} V_{KL} := & \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \exists \zeta_1, \zeta_2 \in H^1(\omega), \zeta_3 \in H^2(\omega) \text{ takvi da} \right. \\ & \left. v_\alpha(\mathbf{x}) = \zeta_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha \zeta_3(x_1, x_2), \alpha = 1, 2, \quad v_3(\mathbf{x}) = \zeta_3(x_1, x_2) \right\}. \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

Dodatno, ako je $\mathbf{v} = 0$ na Γ_D , tada su $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ i $\frac{\partial \zeta_3}{\partial n}$ jednaki nula na γ_D (projekcija Γ_D na središnju plohu ω); prostor takvih funkcija $\boldsymbol{\zeta}$ označavat ćemo s V_{KL}^0 .

Kratice "KL" dolazi od **Kirchhoff–Love** teorije ploča koja pretpostavlja da poprečni presjeci ostaju okomiti (u infinitezimalnom smislu) na središnju plohu i nakon deformacije.

Dokaz.

Lakši dio dokaza su algebarski identiteti. Iz $\mathbf{e}_2(\mathbf{v}) = 0$ odmah imamo $\partial_3 v_3 = 0$, odakle v_3 ne ovisi o x_3 , pa zaključujemo da postoji funkcija $\zeta_3 : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $v_3(x_1, x_2, x_3) = \zeta_3(x_1, x_2)$. Iz $\mathbf{e}_1(\mathbf{v}) = 0$ na svakoj od koordinata slijedi $\partial_3 v_\alpha = -\partial_\alpha v_3$. Integriranjem po x_3 (ne zaboraviti integracijsku "konstantu" ζ_α ovisnu o x_1 i x_2) i korištenjem da $v_3 = \zeta_3$ ne ovisi o x_3 dobivamo

$$v_\alpha(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \partial_\alpha \zeta_3 + \zeta_\alpha(x_1, x_2).$$

Teži dio dokaza je pokazati tražene regularnosti za $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, što se može napraviti po definiciji slabe derivacije, te dokazati da su zadovoljeni rubni uvjeti.

Zadatak 8.1.2

Dovršite dokaz leme: dokažite tražene regularnosti: $\zeta_1, \zeta_2 \in H^1(\omega)$, $\zeta_3 \in H^2(\omega)$, i homogene rubne uvjete za te funkcije.

Jednaždba (8.1.5) sada postaje

$$\int_{\Omega} \mathcal{C} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (8.1.7)$$

Lema 8.1.3

Neka za $\mathbf{E} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \mathcal{C} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = 0$$

za sve $\mathbf{v} \in V$. Tada je

$$(\mathcal{C} \mathbf{E})_{(3,3)} = 0, \quad \text{te} \quad \mathbf{E}_{3,3} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} (\mathbf{E}_{1,1} + \mathbf{E}_{2,2}).$$

Dokaz.

Uvjet je ekvivalentan s

$$\int_{\Omega} (\mathcal{C} \mathbf{E})_{(3,3)} \partial_3 v_3 \, d\mathbf{x} = 0.$$

Odaberimo proizvoljnu $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, te definirajmo $v_3(x_1, x_2, x_3) = \int_{-1/2}^{x_3} \phi(x_1, x_2, s) \, ds$ (tako da je $\partial_3 v_3 = \phi$). Osnovnom lemom varijacijskog računa dobivamo $(\mathcal{C} \mathbf{E})_{(3,3)} = 0$.

Sada prvi put koristimo definiciju tenzora $\mathcal{C}$: $\mathcal{C} \mathbf{E} = 2\mu \mathbf{E} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I}$. Na poziciji $(3, 3)$ imamo

$$0 = (\mathcal{C} \mathbf{E})_{(3,3)} = 2\mu \mathbf{E}_{(3,3)} + \lambda (\mathbf{E}_{(1,1)} + \mathbf{E}_{(2,2)} + \mathbf{E}_{(3,3)}),$$

odakle je

$$\mathbf{E}_{3,3} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} (\mathbf{E}_{1,1} + \mathbf{E}_{2,2}).$$

Nastavljamo dalje s asimptotskim razvojem.

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_{-1}) \cdot \mathbf{e}_0(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^2) + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^1) + \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^0)) \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^3) + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^2) + \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^1)) \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

Uvrštavanjem $\mathbf{v}$ takve da je $\partial_3 v_3 = 0$ (tj. takve da je $\mathbf{e}_2(\mathbf{v}) = 0$), dobivamo

$$\int_{\Omega} \mathcal{C} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (8.1.9)$$

Lema 8.1.4

Neka za $\mathbf{E} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \mathcal{C}\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = 0$$

za sve $\mathbf{v} \in V$ za koje je $\partial_3 v_3 = 0$. Tada je

$$(\mathcal{C}\mathbf{E})_{(\alpha,3)} = 0, \quad \text{te} \quad \mathbf{E}_{(\alpha,3)} = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Dokaz.

Uvjet je ekvivalentan s

$$\int_{\Omega} (\mathcal{C}\mathbf{E})_{(1,3)}(\partial_3 v_1 + \partial_1 v_3) + (\mathcal{C}\mathbf{E})_{(2,3)}(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Odabirom $v_3 = 0$ jednadžbe se separiraju. Svaka od njih istog je oblika kao u dokazu Leme 8.1.3, pa dobivamo $(\mathcal{C}\mathbf{E})_{(\alpha,3)} = 0$. Iz definicije tenzora $\mathcal{C}$ slijedi i $\mathbf{E}_{(\alpha,3)} = 0$.

Iz Lema 8.1.3 i 8.1.4 sad vidimo da sve informacije o $\mathbf{E}_0$ možemo zapisati pomoću elemenata u gornjem 2×2 bloku te matrice, a po definiciji $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^2) + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^1) + \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^0)$ (i kako svi $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ imaju netrivialne elemente na različitim koordinatama) vidimo da je to zapravo u terminima $\mathbf{u}^0$. Konkretno, dobivamo

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1^0 & \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) & 0 \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) & \partial_2 u_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}(\partial_1 u_1^0 + \partial_2 u_2^0) \end{bmatrix}. \quad (8.1.10)$$

Ostali članovi u (8.1.8) ne sadrže $\mathbf{u}^0$, pa nam je slutnja da neće biti bitni u limesnoj jednadžbi. zato nastavljamo sa zadnjim korakom asimptotskog razvoja.

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{e}_0(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^2) + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^1) + \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^0)) \cdot \mathbf{e}_0(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^3) + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^2) + \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^1)) \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^4) + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^3) + \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^2)) \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

Ovo je jednadžba u kojoj se pojavljuje sila, pa je logično da to bude zadnja jednadžba iz koje ćemo izvući model. U prvom sumandu nalazi se $\mathbf{u}^0$, kao što smo rekli, logično je da taj sumand nosi informaciju o modelu. Također, logično je da u modelu test funkcije pripadaju istom prostoru kao i rješenje. Zato ovdje uvrštavamo $\mathbf{v} \in V_{KL}^0$ (odakle je $\mathbf{e}_2(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) = 0$, čime propadaju svi sumandi osim prvog, te dobivamo zadaću: naći $\mathbf{u}^0 \in V_{KL}^0$ takvu da za sve $\mathbf{v} \in V_{KL}^0$ vrijedi

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{e}_0(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ \Rightarrow & \int_{\Omega} \mathcal{C} \begin{bmatrix} \partial_1 u_1^0 & \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) & 0 \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) & \partial_2 u_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}(\partial_1 u_1^0 + \partial_2 u_2^0) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8.1.12)$$

8.2 Svođenje na dvodimenzionalnu domenu

Jednakost (8.1.12) limesna je jednadžba za $\mathbf{u}^0$, i kao što ćemo kasnije vidjeti, zaista na jedinstven način određuje $\mathbf{u}^0$. Međutim, koristeći definiciju od $\mathcal{C}$, te kako je prostor V_{KL}^0 posebnog oblika (zapisiv pomoću funkcija definiranih na ω), ovu jednadžbu možemo zapisati na jednostavniji način.

Kao prvo, iz $\mathcal{C}\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = 2\mu\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \operatorname{tr}(\mathbf{F})$, imamo

$$\begin{aligned} & \mathcal{C} \begin{bmatrix} \partial_1 u_1^0 & \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) & 0 \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) & \partial_2 u_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}(\partial_1 u_1^0 + \partial_2 u_2^0) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0(\mathbf{v}) \\ &= 2\mu \begin{bmatrix} \partial_1 u_1^0 & \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) & \partial_2 u_2^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 v_1 & \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) \\ \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) & \partial_2 v_2 \end{bmatrix} \\ & \quad + \lambda(\partial_1 u_1^0 + \partial_2 u_2^0) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right) (\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2) \\ &= \mathcal{A}\mathbf{e}'(\mathbf{u}^0) \cdot \mathbf{e}'(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

gdje je $\mathcal{A} : \mathbb{M}_2 \rightarrow \mathbb{M}_2$, $\mathcal{A}\mathbf{E} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I}$ **reducirani tenzor elastičnosti za ploču** definiran s

$$\mathcal{A}\mathbf{E} = 2\mu\mathbf{E} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I}, \quad (8.2.13)$$

a $\mathbf{e}'(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \partial_1 v_1 & \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) \\ \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) & \partial_2 v_2 \end{bmatrix}$ (općenito, apostrof ćemo koristiti za uobičajene oznake prilagođene za dvodimenzionalni slučaj). Sada za (8.1.12) imamo jednostavniji zapis: naći $\mathbf{u}^0 \in V_{KL}^0$ takvu da za sve $\mathbf{v} \in V_{KL}^0$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}\mathbf{e}'(\mathbf{u}^0) \cdot \mathbf{e}'(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad (8.2.14)$$

Sada iskoristimo posebnu strukturu prostora V_{KL}^0 . Koristeći funkcije $\eta_1^0, \eta_2^0, \zeta_1, \zeta_2 \in H_{\gamma_D}^1(\omega)$, $\eta_3^0, \zeta_3 \in H_{\gamma_D}^2(\omega)$, možemo pisati

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) &= (\eta_1^0(\mathbf{x}') - x_3 \partial_1 \eta_3^0(\mathbf{x}'), \eta_2^0(\mathbf{x}') - x_3 \partial_2 \eta_3^0(\mathbf{x}'), \eta_3^0(\mathbf{x}')), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= (\zeta_1(\mathbf{x}') - x_3 \partial_1 \zeta_3(\mathbf{x}'), \zeta_2(\mathbf{x}') - x_3 \partial_2 \zeta_3(\mathbf{x}'), \zeta_3(\mathbf{x}')), \\ \mathbf{e}'(\mathbf{u}^0) &= \mathbf{e}'(\eta^0) - x_3 \mathbf{e}'(\nabla \eta_3^0) \\ &= \mathbf{e}'(\eta^0) - x_3 \begin{bmatrix} \partial_{11} \eta_3^0 & \frac{1}{2}(\partial_{12} \eta_3^0 + \partial_{12} \eta_3^0) \\ \frac{1}{2}(\partial_{12} \eta_3^0 + \partial_{12} \eta_3^0) & \partial_{22} \eta_3^0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{e}'(\eta^0) - x_3 \nabla^2 \eta_3^0 \\ \mathbf{e}'(\mathbf{v}^0) &= \mathbf{e}'(\zeta) - x_3 \mathbf{e}'(\nabla \zeta_3) \\ &= \mathbf{e}'(\zeta) - x_3 \begin{bmatrix} \partial_{11} \zeta_3 & \frac{1}{2}(\partial_{12} \zeta_3 + \partial_{12} \zeta_3) \\ \frac{1}{2}(\partial_{12} \zeta_3 + \partial_{12} \zeta_3) & \partial_{22} \zeta_3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{e}'(\zeta) - x_3 \nabla^2 \zeta \end{aligned} \quad (8.2.15)$$

(s ∇^2 označili smo Hesseovu matricu). Limesna jednadžba sada postaje

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{A} \left(\mathbf{e}'(\eta^0) - x_3 \nabla^2 \eta_3^0 \right) \cdot \left(\mathbf{e}'(\zeta) - x_3 \nabla^2 \zeta_3 \right) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} f_1(\zeta_1(\mathbf{x}') - x_3 \partial_1 \zeta_3(\mathbf{x}')) + f_2(\zeta_2(\mathbf{x}') - x_3 \partial_2 \zeta_3(\mathbf{x}')) + f_3 \zeta_3(\mathbf{x}') \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8.2.16)$$

Primijetimo da je sada ovisnost o trećoj varijabli dana eksplicitno u jednadžbi, pa to znači da možemo i eksplicitno integrirati. Za proizvoljnu $A \in L^2(\omega)$ koristit ćemo identitete

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} A(x_1, x_2) d\mathbf{x} &= \left(\int_{\omega} A(x_1, x_2) d\mathbf{x}' \right) \int_{-1/2}^{1/2} dx_3 = \int_{\omega} A(x_1, x_2) d\mathbf{x}'; \\ \int_{\Omega} A(x_1, x_2) x_3 d\mathbf{x} &= \left(\int_{\omega} A(x_1, x_2) d\mathbf{x}' \right) \int_{-1/2}^{1/2} x_3 dx_3 = 0; \\ \int_{\Omega} A(x_1, x_2) x_3^2 d\mathbf{x} &= \left(\int_{\omega} A(x_1, x_2) d\mathbf{x}' \right) \int_{-1/2}^{1/2} x_3^2 dx_3 = \frac{1}{12} \int_{\omega} A(x_1, x_2) d\mathbf{x}'.\end{aligned}$$

Na desnoj strani x_3 se pojavljuje s potencijama 0 i 1. Kako linearni članovi propadaju, na desnoj strani preostaje

$$\int_{\omega} f_1 \zeta_1(\mathbf{x}') + f_2 \zeta_2(\mathbf{x}') + f_3 \zeta_3(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_{\omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\zeta} d\mathbf{x}'.$$

Na lijevoj strani imamo članove reda 0 (kad se množe članovi s $\mathbf{e}'$) i članove reda 2 (kad se množe članovi s ∇^2) koji preostaju, te članovi reda 1 (kad se ti članovi međusobno množe) koji propadaju. Na lijevoj strani preostaje

$$\int_{\omega} \mathcal{A} \mathbf{e}'(\eta^0) \cdot \mathbf{e}'(\zeta) d\mathbf{x}' + \frac{1}{12} \int_{\omega} \mathcal{A} \nabla^2 \eta_3^0 \cdot \nabla^2 \zeta_3 d\mathbf{x}'$$

Konačno (bez rigoroznog dokaza) zaključujemo: $\mathbf{u}^0 \in V$ limes je rješenja $(\mathbf{u}^\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset V$ zadatice (7.2.3) ako postoji $\boldsymbol{\eta}^0 \in H_{\gamma_D}^1(\omega) \times H_{\gamma_D}^1(\omega) \times H_{\gamma_D}^2(\omega)$ takva da vrijedi (8.2.15) te za svaku $\zeta \in H_{\gamma_D}^1(\omega) \times H_{\gamma_D}^1(\omega) \times H_{\gamma_D}^2(\omega)$ vrijedi

$$\int_{\omega} \mathcal{A} \mathbf{e}'(\eta^0) \cdot \mathbf{e}'(\zeta) d\mathbf{x}' + \frac{1}{12} \int_{\omega} \mathcal{A} \nabla^2 \eta_3^0 \cdot \nabla^2 \zeta_3 d\mathbf{x}' = \int_{\omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\zeta} d\mathbf{x}'. \quad (8.2.17)$$

Kasnije ćemo pokazati da zadaća (8.2.17) jedinstveno definira rješenje $\boldsymbol{\eta}^0$.

Primijetimo da se sustav definiran zadaćom (8.2.17) može separirati, te zapravo imamo dva problema. To je moguće isključivo zato što je domena ravna. Za prvu zadaću imamo

$$\int_{\omega} \mathcal{A} \mathbf{e}'(\eta^0) \cdot \mathbf{e}'(\zeta) = \int_{\omega} f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_2 d\mathbf{x}'. \quad (8.2.18)$$

Ova jednadžba govori o tangencijalnim pomacima ploče pod utjecajem tangencijalnih sila. Ovaj model često se naziva **membranskim modelom ploče**, jer modelira membranu odnosno membranske efekte. Primijetimo da se u toj jednadžbi pojavljuje dvodimenzionalna verzija lineariziranog tenzora naprežanja $\mathbf{e}'(\eta^0)$, što se može opravdati na intuitivnoj razini. Efekti koji se penaliziraju kada se na ploču djeluje tangencijalnim silama rastezanja i skupljanja, što se može matematički opravdati kao lokalna promjena udaljenosti i kutova između deformiranog i nedeformiranog objekta, analogno kao prilikom "izvoda" trodimenzionalnih jednadžbi.

Druga zadaća

$$\frac{1}{12} \int_{\omega} \mathcal{A} \nabla^2 \eta_3^0 \cdot \nabla^2 \zeta_3 d\mathbf{x}' = \int_{\omega} f_3 \cdot \zeta_3 d\mathbf{x}'. \quad (8.2.19)$$

Ova jednadžba opisuje poprečne pomake ploče pod utjecajem poprečnih sila. Model se često naziva **fleksijskim modelom ploče**, jer modelira fleksiju/savijanje. Linearizirani tenzor naprežanja zamišljen je drugom derivacijom poprečne varijable, što opet nije nelogično budući da savijanje ovisi o zakrivljenosti plohe, a zakrivljenost plohe (ili krivulje) u diferencijalnoj geometriji izražava se pomoću njezine druge derivacije.

U literaturi se često može naći jednostavnija verzija ove jednadžbe koja vrijedi samo kada je ploča pričvršćena na cijelom svojem lateralnom rubu ($\gamma_D = \partial\omega$). U tom slučaju parcijalnom integracijom lako je provjeriti da vrijedi

$$\int_{\omega} \partial_{12}\eta_3^0 \partial_{12}\zeta_3 d\mathbf{x}' = \int_{\omega} \partial_{11}\eta_3^0 \partial_{22}\zeta_3 d\mathbf{x}',$$

pa je moguće pojednostaviti tenzor elastičnosti. Konkretno, dobiva se jednadžba

$$\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \int_{\omega} \Delta\eta_3^0 \cdot \Delta\zeta_3 d\mathbf{x}' = \int_{\omega} f_3 \cdot \zeta_3 d\mathbf{x}'.$$

U diferencijalnoj formulaciji, to je

$$\begin{cases} \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \Delta^2 \eta_3^0 = f_3 & \text{u } \omega, \\ \eta_3^0 = 0 & \text{na } \partial\omega, \\ \frac{\partial \eta_3^0}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{na } \partial\omega \end{cases}$$

tzv. biharmonijska jednadžba (jer je $\Delta^2 \zeta = \Delta(\Delta \zeta) = \partial_{1111}\zeta + 2\partial_{1122}\zeta + \partial_{2222}\zeta$ biharmonijski operator).

U modelu (8.2.17) pojavljuje se tenzor $\mathcal{A}$, koji je dvodimenzionalna verzija tenzora $\mathcal{C}$ s ažuriranom konstantom $\tilde{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$, koju ponekad zovemo **reducirani ili efektivni Laméov parametar**.

Primijetite da iako se jednadžbe separiraju po η_{α}^0 i η_3^0 , efekti se ne separiraju po u_{α}^0 i u_3 jer se komponenta η_3^0 pojavljuje i u tangencijalnim pomacima u_{α}^0 (vidjeti definiciju prostora V_{KL}). Ona nam govori da čak i kod poprečne sile dolazi do pomaka u tangencijalnom smjeru, iako je taj efekt manjeg reda (što je malo teže vidjeti nakon što smo do $\mathbf{u}^{\varepsilon}$ došli reskaliranjem koordinata rješenja $\mathbf{u}(\varepsilon)$). Taj pomak događa se samo s poprečnim presjekom ploče, te, kao što smo već komentirali, osigurava da i u deformiranoj ploči poprečni presjek ostaje okomit na deformiranu središnju plohu.

Poglavlje 9

Rigorozan izvod modela linearne elastične ploče

Vraćamo se na problem (7.2.3): naći $\mathbf{u}^\varepsilon \in V$,

$$V := \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_D\}, \quad (9.0.1)$$

takav da

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{C} \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon) \right) \\ & \quad \cdot \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{v}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (9.0.2)$$

Dokažimo rigorozno da rješenje takvih problema konvergiraju ka onom modelu opisanom na kraju prošlog poglavlja. U pravilu u elastičnosti rijetko se rade dokazi direktnim opravdavanjem asimptotskog razvoja budući da simetrizirani gradijent komplicira notaciju i korektore. Zato se sjetimo koraka dokazivanja apriornim ocjenama i slabom konvergencijom:

1. naaći apriorne ocjene;
2. izdvojiti slabo konvergentni podniz;
3. izvesti limesnu jednadžbu za taj slabi limes;
4. dokazati dobru postavljenost limesne jednadžbe;
5. dokazati jaku konvergenciju.

Iako ne dokazujemo opravdavanjem formalnog asimptotskog razvoja, pokazat će se da smo ipak u prošlom poglavlju odradili veliki posao koji će nam pomoći u ovom poglavlju.

9.1 Apriorne ocjene na referentnoj domeni

Lema 9.1.1

Neka je za svaki $\varepsilon > 0$ $\mathbf{u}^\varepsilon \in V$ rješenje varijacijske zadaće (9.0.2). Tada postoji konstanta $C > 0$ neovisna o ε takva da za sve $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 \leq C \\ & \|\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \|\varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \|\varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \leq C. \end{aligned}$$

Nadalje, postoji podniz $(\mathbf{u}^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset V$, $\mathbf{u}^0 \in V$ i $\mathbf{E}^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ takvi da

$$\mathbf{u}^{\varepsilon_n} \rightharpoonup \mathbf{u}^0 \text{ slabo u } H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \quad (9.1.3)$$

$$\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon_n}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon_n}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon_n}) \rightharpoonup \mathbf{E}^0 \text{ slabo u } L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3}) \quad (9.1.4)$$

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon_n}) \rightarrow 0 \text{ jako u } L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3}) \quad (9.1.5)$$

$$\mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon_n}) \rightarrow 0 \text{ jako u } L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3}). \quad (9.1.6)$$

Zasad moramo biti oprezni s notacijom. U ovom trenutku koristimo $\mathbf{u}^0$ kao multi korektor iz asimptotskog razvoja i slabi limes podniza $(\mathbf{u}^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Ispostavit će se da su to te iste funkcije, no u ovom trenutku to ne znamo, pa dotad nećemo koristiti nijedan zaključak iz prošlog poglavlja.

Dokaz.

Koristimo da je $\mathcal{C}$ pozitivno definitan tenzor (jer $\mathcal{C}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \geq 2\mu|\mathbf{E}|^2$), da je $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}$ (dapače, da je taj zbroj "ortogonalan" odnosno da se ne miješaju koordinate), da je $\varepsilon \leq 1$, a na kraju Kornovu nejednakost:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{C} \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right) \\ & \quad \cdot \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right) dx \\ & \geq 2\mu \left\| \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \\ & = 2\mu \left(\left\| \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \left\| \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \left\| \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \right) \\ & \geq 2\mu \left(\left\| \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \left\| \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \left\| \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \right) \\ & = 2\mu \left\| \mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \\ & \geq 2\mu C_K \left(\left\| \mathbf{u}^{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 \right) \end{aligned}$$

Za desnu stranu koristimo samo Cauchy-Schwarzovu nejednakost i definiciju H^1 norme:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u}^{\varepsilon} dx \leq \left\| \mathbf{f} \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} \left\| \mathbf{u}^{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}.$$

Uvrštavanjem $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\varepsilon}$ u (9.0.2) dobivamo

$$\begin{aligned} & 2\mu C_K \left(\left\| \mathbf{u}^{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 \right) \\ & \leq 2\mu \left(\left\| \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \left\| \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \left\| \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \right) \\ & \leq \int_{\Omega} \mathcal{C} \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right) \\ & \quad \cdot \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \right) dx \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u}^{\varepsilon} dx \\ & \leq \left\| \mathbf{f} \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} \left\| \mathbf{u}^{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Dijeljenjem s $\left\| \mathbf{u}^{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}$ u prvom i zadnjem izrazu dobivamo da je upravo taj član uniformno ograničen neovisno o ε . To znači da je i zadnji izraz uniformno ograničen, pa su onda i svi članovi u lancu nejednakosti uniformno ograničeni. Posebno dobivamo uniformnu ograničenost svih izraza u iskazu leme. Prema Banach–Alaogluovom teoremu dobivamo egzistenciju podnizova i konvergencije.

9.2 Identifikacija limesa

Izvućimo dodatne zaključke o limesima $\mathbf{u}^0$ i $\mathbf{E}^0$. Kako $\mathbf{u}^{\varepsilon_n}$ konvergiraju slabo u H^1 , sve parcijalne derivacije konvergiraju slabo u L^2 , odakle $\mathbf{e}'(\mathbf{u}^{\varepsilon_n}) \rightharpoonup \mathbf{e}'(\mathbf{u}^0)$ slabo u L^2 . S druge strane iz gornjeg lijevog 2×2 bloka u (9.1.3) slijedi

$$\mathbf{e}'(\mathbf{u}^{\varepsilon_n}) = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1^{\varepsilon_n} & \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^{\varepsilon_n} + \partial_2 u_1^{\varepsilon_n}) \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^{\varepsilon_n} + \partial_2 u_1^{\varepsilon_n}) & \partial_2 u_2^{\varepsilon_n} \end{bmatrix} \rightharpoonup \mathbf{E}_{(1:2,1:2)}^0 \text{ slabo u } L^2(\Omega; \mathbb{R}^{2 \times 2}).$$

Iz jedinstvenosti slabih limesa zaključujemo

$$\mathbf{E}_{(1:2,1:2)}^0 = \mathbf{e}'(\mathbf{u}^0). \quad (9.2.7)$$

Slično tako, iz jedinstvenosti limesa, iz $\mathbf{e}'(\mathbf{u}^{\varepsilon_n}) \rightharpoonup \mathbf{e}'(\mathbf{u}^0)$ slabo u L^2 zajedno sa (9.1.5) i (9.1.6) zaključujemo $\mathbf{e}_1(\mathbf{u}^0) = \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^0) = 0$. To znači da $\mathbf{u}^0$ zadovoljava uvjete Leme 8.1.1, pa postoji $\boldsymbol{\eta}^0 \in V_\zeta$,

$$V_\zeta := \{\zeta \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega) : \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \frac{\partial \zeta_3}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ na } \gamma_D\}, \quad (9.2.8)$$

takva da

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = (\eta_1^0(\mathbf{x}') - x_3 \partial_1 \eta_3^0(\mathbf{x}'), \eta_2^0(\mathbf{x}') - x_3 \partial_2 \eta_3^0(\mathbf{x}'), \eta_3^0(\mathbf{x}')). \quad (9.2.9)$$

Sada je trenutak da puštamo dobivene slabe limese u jednadžbe (9.0.2). Za razliku od Poglavlja 4 kada smo odmah u prvom koraku pustili test funkciju koja dolazi iz prostora rješenja, sada to ne možemo napraviti jer će nam ostati članovi koji možda divergiraju (jer su reda $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ i $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$). Zato se moramo prvo zabaviti njima. Također, u ovom trenutku nismo okarakterizirali cijeli $\mathbf{E}^0$, ali to ćemo dobiti upravo u tim koracima.

Dakle, prvo biramo proizvoljnu test funkciju oblika $\varepsilon_n^2 \mathbf{v} \in V$, uvrstimo je u (9.0.2) i pustimo limes. Desna strana teži u nulu. U test funkcijama na lijevoj strani preživjet će samo član $\mathbf{e}_2(\mathbf{v})$. U dijelu s $\mathbf{u}^\varepsilon$ znamo da (skalirani) tenzor naprezanja teži slabo u $\mathbf{E}^0$. Sve zajedno za proizvoljnu $\mathbf{v} \in V$ dobivamo

$$\int_\Omega \mathcal{C} \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0.$$

Primijećujemo da je to pretpostavka Leme 8.1.3. Pretpostavku druge leme dobit ćemo u drugom koraku. Uzmimo proizvoljnu $\mathbf{v} \in V$ takvu da je $\mathbf{e}_2(\mathbf{v}) = 0$ (što je ekvivalentno s $\partial_3 v_3 = 0$) i uvrstimo test funkciju $\varepsilon_n \mathbf{v}$ u (9.0.2). Puštanjem limesa, opet na desnoj strani dobivamo nulu, a na lijevoj strani dobivamo dio s $\mathbf{E}^0$ za nepoznanicu i $\mathbf{e}_1$ za test funkciju ($\mathbf{e}_2$ kod test funkcija nestaje jer smo tako izabrali test funkciju). Dakle, za proizvoljnu $\mathbf{v} \in V$ uz $\partial_3 v_3$ dobivamo

$$\int_\Omega \mathcal{C} \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0.$$

Dakle, $\mathbf{E}^0$ zadovoljava pretpostavke Leme 8.1.3 i Leme 8.1.4, što znači da zadnji stupac i redak matrice funkcije $\mathbf{E}^0$ možemo iskazati pomoću gornjeg lijevog 2×2 bloka. Međutim, taj blok već smo indentificirali u (9.2.7). Zaključujemo:

$$\mathbf{E}^0 = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1^0 & \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) & 0 \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) & \partial_2 u_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}(\partial_1 u_1^0 + \partial_2 u_2^0) \end{bmatrix}. \quad (9.2.10)$$

(usporediti s (8.1.10)). Tek sada puštamo limes (9.0.2) s test funkcijom $\mathbf{v}$ koja pripada limitnom prostoru rješenja. Dakle, odaberimo $\mathbf{v} \in V_{KL}^0$, odnosno odaberimo proizvoljne $\zeta \in V_\zeta$, te

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (\zeta_1(\mathbf{x}') - x_3 \partial_1 \zeta_3(\mathbf{x}'), \zeta_2(\mathbf{x}') - x_3 \partial_2 \zeta_3(\mathbf{x}'), \zeta_3(\mathbf{x}')).$$

Takav izbor test funkcije $\mathbf{v}$ osigurava $\mathbf{e}_1(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_2(\mathbf{v}) = 0$, pa možemo pustiti limes na lijevoj strani (9.0.2). Dobivamo

$$\int_{\Omega} \mathcal{C}\mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{e}_0(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \quad (9.2.11)$$

To smo dobili i u prošlom poglavlju (vidjeti (8.1.12)), te smo pokazali da je taj problem ekvivalentan problemu: naći $\boldsymbol{\eta}^0 \in V_{\eta}$ takvu da za svaku $\zeta \in V_{\eta}$ vrijedi

$$\int_{\omega} \mathcal{A}\mathbf{e}'(\boldsymbol{\eta}^0) \cdot \mathbf{e}'(\zeta) \, d\mathbf{x}' + \frac{1}{12} \int_{\omega} \mathcal{A}\nabla^2 \eta_3^0 \cdot \nabla^2 \zeta_3 \, d\mathbf{x}' = \int_{\omega} \mathbf{f} \cdot \zeta \, d\mathbf{x}'. \quad (9.2.12)$$

Dokažimo da je taj problem dobro postavljen.

Lema 9.2.1

Problem (9.2.12) je dobro postavljen, odnosno postoji jedinstveno rješenje te zadaće.

Dokaz.

Malo (iako nepotrebno) pojednostavljenje je gledati separirane probleme zasebno. Prvo dokažimo da postoji jedinstveno rješenje zadaće: naći $(\eta_1^0, \eta_2^0) \in H^1(\omega; \mathbb{R}^2)$ uz $\eta_1^0 = \eta_2^0 = 0$ takvu da za sve $(\zeta_1, \zeta_2) \in H^1(\omega; \mathbb{R}^2)$ uz $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ vrijedi

$$\int_{\omega} \mathcal{A}\mathbf{e}'(\boldsymbol{\eta}^0) \cdot \mathbf{e}'(\zeta) \, d\mathbf{x}' = \int_{\omega} f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_2 \, d\mathbf{x}'. \quad (9.2.13)$$

Koercitivnost dobivamo pozitivnom definitnošću tenzora $\mathcal{A}$ te 2d verzijom Kornove nejednakosti, dok ograničenosti bilinearne i linearne forme slijede trivijalno kao i inače. Nakon toga treba dokazati da postoji jedinstveno rješenje zadaće: naći $\eta_3^0 \in H^2(\omega)$ uz $\eta_3^0 = \frac{\partial \eta_3^0}{\partial \mathbf{n}} = 0$ takvu da za sve $\zeta_3 \in H^2(\omega)$ uz $\zeta_3^0 = \frac{\partial \zeta_3}{\partial \mathbf{n}} = 0$ vrijedi

$$\frac{1}{12} \int_{\omega} \mathcal{A}\nabla^2 \eta_3^0 \cdot \nabla^2 \zeta_3 \, d\mathbf{x}' = \int_{\omega} f_3 \cdot \zeta_3 \, d\mathbf{x}'. \quad (9.2.14)$$

Dosad nismo promatrali dobru postavljenost zadaća četvrtog reda, ali i za njih vrijedi Lax–Milgramova lema. Za dokaz koercitivnosti potrebna nam je i dvostruka primjena Poincaréove nejednakosti kako bismo L^2 normu od $\nabla^2 \zeta_3$ odozdo ograničili s H^2 normom od ζ_3 .

Zadatak 9.2.2

Provedite sve detalje gornjeg dokaza, uključujući ograde koercitivnosti i definicije Hilbertovih prostora nad kojima promatramo zadaće.

Klasičnim argumentom kao i prije zaključujemo da kako podniz familije $(\mathbf{u}^{\varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka jedinstvenom rješenju $\mathbf{u}^0 \in V_{KL}^0$, tada nužno cijela familija $(\mathbf{u}^{\varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka $\mathbf{u}^0 \in V_{KL}^0$.

9.3 Jaka konvergencija

Preostalo je dokazati da su slabe konvergencije iz Leme 9.1.1 u stvari jake. Taj dio dokaza je sličan onom kako smo izveli u Poglavlju 4. Definiramo

$$\Lambda(\varepsilon) := \int_{\Omega} \mathcal{C} \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon}) - \mathbf{E}^0 \right) \cdot \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon}) - \mathbf{E}^0 \right) \, d\mathbf{x}.$$

Kao prvo, ograničavanjem odozdo sličnom kao u dokazu Leme 9.1.1 dobivamo

$$\begin{aligned}\Lambda(\varepsilon) &\geq 2\mu \left(\left\| \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon) - \mathbf{E}_{(1:2,1:2)}^0 \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon) - \mathbf{E}_{(1:2,3)}^0 - \mathbf{E}_{(3,1:2)}^0 \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \left\| \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon) - \mathbf{E}_{(3,3)}^0 \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \right) \\ &\geq 2\mu \left\| \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon) - \mathbf{E}_{(1:2,1:2)}^0 \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2.\end{aligned}$$

Dokažemo li da $\Lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$, kao prvo, dobit ćemo da je konvergencija (9.1.4) u stvari jaka, a kao drugo dobit ćemo da $\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)_{(1:2,1:2)} \rightarrow \mathbf{E}_{(1:2,1:2)}^0$ jako u $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{2 \times 2})$. Kako prema (9.1.5) i (9.1.6) imamo jaku konvergenciju i za preostale komponente od $\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)$, prema Kornovoj nejednakosti dobit ćemo da i $\mathbf{u}^\varepsilon$ konvergira jako u $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ (odnosno da je konvergencija (9.1.3) jaka). Preuređivanjem izraza $\Lambda(\varepsilon)$ i puštanjem poznatih slabih limesa, dobivamo

$$\begin{aligned}\Lambda(\varepsilon) &= \int_{\Omega} \mathcal{C} \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon) - \mathbf{E}^0 \right) \cdot \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon) - \mathbf{E}^0 \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{C} \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon) \right) \cdot \left(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon) \right) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathcal{C} \left(\mathbf{E}^0 \right) \cdot \left(2(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon)) - \mathbf{E}^0 \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^\varepsilon dx - \int_{\Omega} \mathcal{C} \mathbf{E}^0 \cdot \left(2(\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^\varepsilon)) - \mathbf{E}^0 \right) dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^0 dx - \int_{\Omega} \mathcal{C} \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{E}^0 dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^0 dx - \int_{\Omega} \mathcal{C} \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{e}_0(\mathbf{u}^0) dx - \int_{\Omega} \mathcal{C} \mathbf{E}^0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}(\partial_1 u_1^0 + \partial_2 u_2^0) \end{bmatrix} dx\end{aligned}$$

(u zadnjem koraku koristili smo rastav, odnosno relaciju za $\mathbf{E}^0$ iz (9.2.10)). U zadnjem dobivenom izrazu prva dva sumanda daju nulu jer je to limesni model (u (9.2.11) uvrstimo $\mathbf{v} = \mathbf{u}^0$), a zadnji sumand je nula jer kao posljedica Leme 8.1.3 vrijedi $(\mathcal{C} \mathbf{E}^0)_{(3,3)} = 0$. Dakle, dokazali smo $\Lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$, što uz komentar s početka pokazuje jake konvergencije pomaka i tenzora naprezanja.

Konačno, imamo sve elemente dokaza, dakle u ovom poglavlju rigorozno smo dokazali sljedeći rezultat.

Teorem 9.3.1

Neka je za svaki $\varepsilon > 0$ $\mathbf{u}^\varepsilon \in V$ rješenje varijacijske zadaće (9.0.2), nastao reskaliranjem problema (7.1.1) linearizirane elastičnosti za tanke ravne ploče u tri dimenzije. Tada familija rješenja $(\mathbf{u}^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ jako konvergira ka funkciji $\mathbf{u}^0 \in V_{KL}^0$. Limes $\mathbf{u}^0$ može se okarakterizirati pomoću

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = (\eta_1^0(\mathbf{x}') - x_3 \partial_1 \eta_3^0(\mathbf{x}'), \eta_2^0(\mathbf{x}') - x_3 \partial_2 \eta_3^0(\mathbf{x}'), \eta_3^0(\mathbf{x}')),$$

gdje je $\boldsymbol{\eta}^0 \in V_\eta$ (V_η definiran u (9.2.8)) jedinstveno rješenje problema: naći $\boldsymbol{\eta}^0 \in V_\eta$ takvu da za svaku $\boldsymbol{\zeta} \in V_\eta$ vrijedi

$$\int_{\omega} \mathcal{A} \mathbf{e}'(\boldsymbol{\eta}^0) \cdot \mathbf{e}'(\boldsymbol{\zeta}) d\mathbf{x}' + \frac{1}{12} \int_{\omega} \mathcal{A} \nabla^2 \eta_3^0 \cdot \nabla^2 \zeta_3 d\mathbf{x}' = \int_{\omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\zeta} d\mathbf{x}'.$$

Dodatno, vrijedi

$$\mathbf{e}_0(\mathbf{u}^{\varepsilon_n}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{e}_1(\mathbf{u}^{\varepsilon_n}) + \varepsilon^{-2} \mathbf{e}_2(\mathbf{u}^{\varepsilon_n}) \rightarrow \mathbf{E}^0 \text{ jako u } L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3}), \quad (9.3.15)$$

gdje je

$$\mathbf{E}^0 = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1^0 & \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) & 0 \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_2^0 + \partial_2 u_1^0) & \partial_2 u_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}(\partial_1 u_1^0 + \partial_2 u_2^0) \end{bmatrix}.$$

Poglavlje 10

Dokaz Kornove nejednakosti*

10.1 Dokaz Kornove nejednakosti

U ovom poglavlju pokazat ćemo dokaz Kornove nejednakosti (Teorem 6.2.3). Za dokaz Kornove nejednakosti potreban nam je prostor $H^{-1}(\Omega)$. Njegova definicija i karakterizacija dana je u Poglavlju 2.1.4. Kako je to napredniji koncept iz teorije parcijalnih diferencijalnih jednačbi koji će nam trebati u malo mjeri, pokušat ćemo ga ovdje uvesti uz minimalno potrebnih informacija.

Na početku kolegija uvjerali smo se da pojam derivacije možemo proširiti na poveliku familiju funkcija u $L^2(\Omega)$. Uveli smo pojam slabe derivacije i Soboljevljev prostor $H^1(\Omega)$ funkcija kao one koje su u $L^2(\Omega)$ te im je slaba derivacija funkcija u $L^2(\Omega)$. Pokazuje se da se deriviranje može još više poopćiti tako da svaka funkcija u $L^2(\Omega)$ ima slabu derivaciju (iako taj objekt više nije funkcija već tzv. distribucija – funkcional koji je definiran na prostoru C_c^∞ funkcija).

Kakav god to objekt bio, za svaku funkciju $f \in L^2(\Omega)$ postoji $\partial_i f$ (za sve $i = 1, \dots, n$) te pripada prostoru $H^{-1}(\Omega)$. Za takve derivacije koristit ćemo da generalizira pojam klasične i jake derivacija, da i dalje vrijedi Schwarzovo pravilo ($\partial_{i,j} f = \partial_{j,i} f$), te da vrijedi sljedeći teorem.

Lema 10.1.1: Nečas–Lionsova lema

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ograničena domena s Lipschitzovim rubom. Ako je za $f \in H^{-1}(\Omega)$ vrijedi da je i $\nabla f \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})$, tada je $f \in L^2(\Omega)$. Nadalje, postoji konstanta $C > 0$ ovisna samo o domeni Ω takva da vrijedi:

$$\|f\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq C \left(\|f\|_{H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^3)} + \|\nabla f\|_{H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})} \right). \quad (10.1.1)$$

Tvrđnja vrijedi i za bilo koju drugu dimenziju prostora kojoj pripada domena. Jedna od posljedica gornje nejednakosti je i da niz funkcija $u_n \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ slabo/jako konvergira u $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ka funkciji $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ako i samo ako niz $(u_n, \nabla u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ slabo/jako konvergira u $H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^{3+3 \times 3})$ ka $(u, \nabla u) \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^{3+3 \times 3})$.

Ako nam je i dalje nejasan prostor $H^{-1}(\Omega)$, ukratko imamo sljedeće: svaku $L^2(\Omega)$ funkciju (ili konvergenijski identitet) možemo derivirati, te ćemo završiti u $H^{-1}(\Omega)$. U tom prostoru možemo koristiti Scharzovo pravilo, te se vratiti u $L^2(\Omega)$ samo ako i funkcija i sve njezine derivacije se nalaze (ili konvergiraju) u $H^{-1}(\Omega)$.

Dokažimo sada Kornovu nejednakost (Teorem 6.2.3).

Dokaz.

Postupamo slično kao u dokazu Poincaré–Wirtingerove nejednakost (Teorem 2.1.20). Pretpostavimo da ne vrijedi Kornova nejednakost: nakon pretpostavke bez smanjenja općenitosti,

postoji niz funkcija $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ takav da vrijedi

$$\|\mathbf{u}^n\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 1, \quad \|\mathbf{e}(\mathbf{u}^n)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})} = 1/n.$$

Prema Rellich–Kondrašovljevu teoremu i Banach–Alaougluovom teoremu, postoji podniz (prvo uzmemo jedan podniz iz jednog teorema, pa onda podniz podniza iz drugog) $(\mathbf{v}^k)_{k \in \mathbb{N}} := (\mathbf{u}^{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset V$ takvi da vrijedi

$$\mathbf{v}^k \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{slabo u } H^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad (10.1.2)$$

$$\mathbf{v}^k \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{jako u } L^2(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad (10.1.3)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{v}^k) \rightarrow 0 \quad \text{jako u } L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3}). \quad (10.1.4)$$

Prema karakterizaciji slabe konvergencije u $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, iz prve konvergencije slijedi

$$\nabla \mathbf{v}^k \rightharpoonup \nabla \mathbf{u} \quad \text{slabo u } L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3}). \quad (10.1.5)$$

Kontradikciju ćemo naći tako što ćemo dokazati da $\mathbf{v}^k \rightarrow 0$ jako u $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ (jer je to u kontradikciji da su im norme jednake 1). Konvergenciju (10.1.4) možemo raspisati po komponentama:

$$\mathbf{e}(\mathbf{v}^k) = \begin{bmatrix} \partial_1 v_1^k & \frac{1}{2}(\partial_1 v_2^k + \partial_2 v_1^k) & \frac{1}{2}(\partial_1 v_3^k + \partial_3 v_1^k) \\ \cdot & \partial_2 v_2^k & \frac{1}{2}(\partial_2 v_3^k + \partial_3 v_2^k) \\ \cdot & \cdot & \partial_3 v_3^k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{jako u } L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3}) \quad (10.1.6)$$

(točke označavaju podatke koje ne treba ponovno pisati budući da je matrica simetrična). Iz gornjeg raspisa vidimo da dijagonale gradijenta u (10.1.5) konvergiraju k nuli. Za ostale komponente gradijenta $\mathbf{v}^k$ imamo problem jer se u simetriziranom gradijentu miješaju. To ćemo riješiti prelaskom na prostor H^{-1} . Umjesto da dokažemo da $\nabla \mathbf{v}^k \rightarrow *$ u L^2 , dokazat ćemo da $\nabla \mathbf{v}^k \rightarrow *$ u H^{-1} i $\nabla^2 \mathbf{v}^k \rightarrow *$ u H^{-1} (druge derivacije). Putem ćemo dodatno dokazati da su ti limesi nul-funkcije.

Derivirajući (10.1.3) dobivamo

$$\nabla \mathbf{v}^k \rightarrow \nabla \mathbf{u} \quad \text{jako u } H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3}). \quad (10.1.7)$$

Za druge derivacije trebamo dokazati da sve derivacije oblika $\partial_{ii} v_i$, $\partial_{ij} v_i$ i $\partial_{ij} v_k$ (za sve moguće međusobno različite indekse $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$) konvergiraju jako u $H^{-1}(\Omega)$.

Radi jednostavnosti (i bez smanjenja općenitosti), dokazat ćemo za konkretne i, j, k . Za $\partial_{11} v_1^k$ derivirajmo (1, 1) komponentu $\mathbf{e}(\mathbf{v}^k)$ po prvoj varijabli. Iz (10.1.6) slijedi

$$\partial_{11} v_1^k = \partial_1 \mathbf{e}(\mathbf{v}^k)_{(1,1)} \rightarrow 0 \quad \text{jako u } H^{-1}(\Omega).$$

Sada derivirajmo (1, 2) komponentu $\mathbf{e}(\mathbf{v}^k)$ po prvoj varijabli i oduzmimo polovicu (1, 1) komponente $\mathbf{e}(\mathbf{v}^k)$ derivirane po drugoj varijabli:

$$\frac{1}{2} \partial_{11} v_2^k = \frac{1}{2} (\partial_{11} v_2^k + \partial_{12} v_1^k - \partial_1 v_1^k) = \partial_1 \mathbf{e}(\mathbf{v}^k)_{(1,2)} - \frac{1}{2} \partial_1 \mathbf{e}(\mathbf{v}^k)_{(1,1)} \rightarrow 0 \quad \text{jako u } H^{-1}(\Omega).$$

Konačno, za zadnji oblik drugih derivacija pogledajmo linearnu kombinaciju sljedećeg oblika:

$$\begin{aligned} & \partial_2 \mathbf{e}(\mathbf{v}^k)_{(1,3)} + \partial_3 \mathbf{e}(\mathbf{v}^k)_{(1,2)} - \partial_1 \mathbf{e}(\mathbf{v}^k)_{(2,3)} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{12} v_3^k + \partial_{23} v_1^k + \partial_{13} v_2^k + \partial_{23} v_1^k - \partial_{12} v_3^k - \partial_{13} v_2^k) \\ &= \partial_{23} v_1^k. \end{aligned}$$

Zato imamo

$$\partial_{23}v_1^k = \partial_2\mathbf{e}(\mathbf{v}^k)_{(1,3)} + \partial_3\mathbf{e}(\mathbf{v}^k)_{(1,2)} - \partial_1\mathbf{e}(\mathbf{v}^k)_{(2,3)} \rightarrow 0 \quad \text{jako u } H^{-1}(\Omega).$$

Dakle, dobili smo da sve druge derivacije funkcije $\mathbf{v}^k$ konvergiraju jako k nuli u H^{-1} . Zajedno s (10.1.7), primjenom Lionsove leme, možemo zaključiti da

$$\nabla \mathbf{v}^k \rightarrow \nabla \mathbf{u} \quad \text{jako u } L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3}). \quad (10.1.8)$$

Dapače, kako druge derivacije teže k nuli, zaključujemo da je $\nabla \mathbf{u}$ konstanta. Iz (10.1.8), zajedno s (10.1.3) zaključujemo da $\mathbf{u}^k \rightarrow \mathbf{u}$ jako u $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Preostalo je dokazati da je $\mathbf{u} = 0$.

Iz jedinstvenosti limesa, kako druge derivacije teže k nuli, zaključujemo da je $\mathbf{u}$ afina funkcija, odnosno postoji $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ i $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ takva da je $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$. Dodatno, iz (10.1.4), dodatno znamo da je $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = 0$, što uvrštavanjem daje da je $\mathbf{A}$ antisimetrična matrica, pa postoji vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ takav da je $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \times \mathbf{x} + \mathbf{c}$. No, $\mathbf{u}$ zadovoljava Dirichletov rubni uvjet na rubu Γ_D (jer i svi $\mathbf{v}^k$ zadovoljavaju Dirichletov rubni uvjet, te imamo H^1 konvergenciju). Kako je Γ_D dio ruba pozitivne površinske mjere, postoje tri međusobno nekolinearne točke $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)} \in \Gamma_D$. Za svaku od njih vrijedi da je vrijednost od $\mathbf{u}$ u njima nula, pa imamo:

$$0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(2)}) = \mathbf{w} \times (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}), \quad 0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(3)}) = \mathbf{w} \times (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(3)}).$$

Vektorski umnožak dvaju vektora je nula samo ako su oni paralelni. Kako su $\mathbf{x}^{(i)}$ nekolinearne točke, nužno je $\mathbf{w} = 0$, a onda lako vidimo da je i $\mathbf{c} = 0$.

Dakle, dobili smo da $\mathbf{v}^k \rightarrow 0$ jako u $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, što je u kontradikciji s $\|\mathbf{v}^k\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 1$, čime je dokaz Kornove nejednakosti gotov.