

Nižedimenzionalni modeli i homogenizacija 1

Matko Ljulj

2. listopada 2026.

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Pregled teorije i predznanja	7
2.1	Pregled osnovne teorije: Prostori integrabilnih funkcija	8
2.1.1	Lebesgueov integral	8
2.1.2	Lebesgueovi prostori L^p	8
2.1.3	Soboljevljevi prostori $W^{1,p}$	9
2.1.4	* Dualni prostor $H^{-1}(\Omega)$	13
2.1.5	Slaba konvergencija i teorem o kompaktnosti	14
2.2	Uvod u eliptičke rubne zadatke	17
2.2.1	Diferencijalna formulacija i rubni uvjeti	17
2.2.2	Izvod varijacijske formulacije	20
2.2.3	Egzistencija i jedinstvenost rješenja	20
3	Nesingularni problemi za eliptičke PDJ	24
3.1	Prvi primjer familije eliptičkih problema	24
3.2	Generalizirani rezultat za nesingularne probleme	25
3.3	Neprekidna ovisnost o geometriji (Regularne perturbacije domene)	26
4	Singularni problemi za eliptičke PDJ, penalizirajuća anizotropija	29
4.1	Familija eliptičkih zadataka i dobra postavljenost	29
4.2	Formalni asimptotski razvoj (bez dokaza)	30
4.2.1	Dokaz apriornim ocjenama i slabom konvergencijom	31
4.2.2	Dokaz opravdanjem asimptotskog razvoja	34

Poglavlje 1

Uvod

Na ovom kolegiju naučit ćemo osnovne principe asimptotske analize u parcijalnim diferencijalnim jednačbama. U modeliranju se pojavljuju problemi iskazani parcijalnim diferencijalnim jednačbama u ovisnosti o nekom malom parametru ε . Iz analitičkih ili numeričkih razloga može biti nezgodno zadržati jednačbu u takvom formatu te tražiti rješenje za originalni problem. Umjesto toga, može se naći promotriti što se događa kada $\varepsilon \rightarrow 0$ te se rješenje za male parametre aproksimira rješenjem limesne jednačbe (koja u pravilu bude jednostavnija), ili se nađe tzv. surogat model koji bude dobra i lako izračunljiva aproksimacija za male parametre.

Kolegij je nastao u jesen 2026. godine s idejom kao jedan od izbornih modula na diplomskom studiju Primijenjena matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Tema koja se obrađuje usko je vezana uz znanstveni rad desetak profesora i asistenata na Odsjeku. U prvom semestru bavit ćemo se osnovama asimptotske analize, s naglaskom na analitičke metode, te ćemo izvesti neke nižedimenzionalne modele iz teorije elastičnosti. Oni se pojavljuju kada domena parcijalne diferencijalne jednačbe postaje sve tanja (ovisi o parametru debljine ε koji teži k nuli). U drugom semestru bavit ćemo se homogenizacijom (kada u parcijalnim diferencijalnim jednačbama imamo oscilirajuće parametre sa sve manjim periodom) i naglaskom na numeriku.

Za uvod pogledajmo neke primjere iz rubnih problema običnih diferencijalnih jednačbi, kako se ponašaju neke familije problema ovisne o parametru ε i što se događa s eksplicitnim rješenjem kada taj parametar teži k nuli. Ovo su specifični primjeri, budući da ćemo se u nastavku kolegija baviti parcijalnim diferencijalnim jednačbama i da nećemo imati eksplicitna rješenja. U svim primjerima promatramo domenu $[0, 1]$ uz homogene rubne uvjete $u(0) = u(1) = 0$.

Primjer 1.0.1: Regularna perturbacija

Promatrajmo problem:

$$\begin{cases} -u'' + \varepsilon u = 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.0.1)$$

Egzaktno rješenje ovisno o parametru ε možemo zapisati pomoću eksponencijalnih funkcija:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{e^{\sqrt{\varepsilon}x} + e^{\sqrt{\varepsilon}(1-x)}}{e^{\sqrt{\varepsilon}} + 1} \right). \quad (1.0.2)$$

Kada formalno uvrstimo $\varepsilon = 0$, dobivamo limitni problem $-u_0'' = 1$, koji se lako rješava dvostrukom integracijom dajući $u_0(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$. Iako egzaktno rješenje $u_\varepsilon(x)$ sadrži eksponencijalne funkcije, kako $\varepsilon \rightarrow 0$, ono glatko konvergira prema paraboli u_0 . Mogli bismo nacrtati grafove rješenja u_0 i u_ε za neki parametar $\varepsilon > 0$, no golim okom ti grafovi izgledaju kao da se poklapaju.

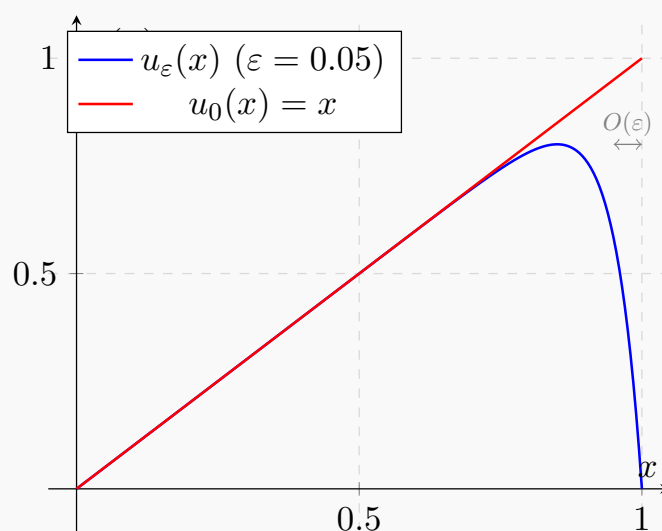
Primjer 1.0.2: Singularna perturbacija

Sada pomaknimo mali parametar uz najvišu derivaciju:

$$-\varepsilon u'' + u' = 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Egzaktno rješenje je:

$$u_\varepsilon(x) = x - \frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1}.$$



Ako uvrstimo $\varepsilon = 0$, limes jednadžba je $u'_0 = 1$, što daje $u_0(x) = x + C$. Da bismo zadovoljili $u_0(0) = 0$, mora vrijediti $u_0(x) = x$. Međutim, $u_0(1) = 1 \neq 0$. Limes rješenje ne može zadovoljiti oba rubna uvjeta jer je red jednadžbe pao s drugog na prvi.

Da bi zadovoljilo fizikalni rubni uvjet u $x = 1$, egzaktno rješenje u_ε mora naglo pasti s 1 na 0 na vrlo maloj udaljenosti. Ovo područje nazivamo *rubni sloj*.

Da bismo komentirali konvergenciju, moramo se sjetiti da u beskonačnodimenzionalnim prostorima nisu sve norme (a onda i konvergencije) ekvivalentne. Posebno, niz funkcija može u nekoj normi/topologiji konvergirati, dok u drugoj ne. Konkretno za ovaj primjer, može se pokazati da niz rješenja u_ε konvergira u u_0 :

- po točkama svuda osim u točki $x = 1$ (odnosno konvergira za $x \in [0, 1)$);
- u L^2 normi;

ali ne konvergira u L^∞ normi ni u H^1 normi. O detaljima tih normi i konvergencija pričat ćemo u nastavku.

Kako bismo popravili konvergenciju (i konkretno ponašanje blizu $x = 1$) uz limesno rješenje u_0 , uvest ćemo rubni korektor $\theta(x)$ koji eksponencijalno trne van okoline problematične točke $x = 1$. Konkretno, za ovaj problem, ažurirano rješenje za surogat problem zajedno s korektorom glasi:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = u_0(x) + \theta(x) = x - e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}.$$

Ovo je opet aproksimacija, ali ima bolju ocjenu pogreške od samog u_0 (razlika konvergira k nuli i u L^∞ i H^1 normi).

Primjer 1.0.3: Homogenizacija

Promotrimo problem s oscilirajućim koeficijentom:

$$-(a_\varepsilon(x)u'_\varepsilon)' = 1, \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0. \quad (1.0.3)$$

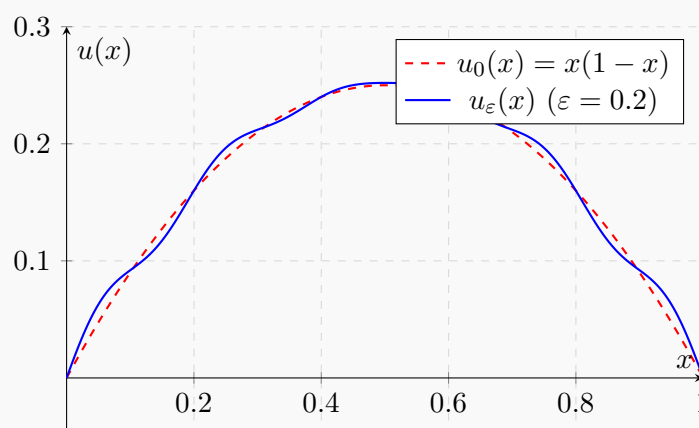
gdje je

$$a_\varepsilon(x) = \frac{1}{2 + \cos(2\pi x/\varepsilon)}$$

(relativno ružna funkcija koja će nam dati relativno lijepu eksplicitnu formulu za rješenje). Direktnom integracijom dobivamo:

$$u_\varepsilon(x) = x(1-x) - \frac{\varepsilon}{2\pi} \left(x - \frac{1}{2}\right) \sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon}) - \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2} (\cos(2\pi \frac{x}{\varepsilon}) - 1).$$

Kada $\varepsilon \rightarrow 0$, materijal se ponaša kao homogeni medij s efektivnim koeficijentom $a^* = 1/2$. Rješenje limes modela $-(a^*u'_0)' = 1$ je $u_0(x) = x(1-x)$. Međutim, za $\varepsilon > 0$ rješenje se sastoji od srednjeg člana $u_0(x)$ i oscilirajućeg dijela nižeg reda, kao posljedica toga što je problem ima oscilirajući koeficijent. Pokazuje se da rješenje u_ε konvergira u L^2 normi u u_0 , dok za snažniju H^1 normu moramo uključiti i takav oscilirajući član (tzv. korektor). Ovakvi primjeri tipični su za teoriju homogenizacije, te ćemo ih detaljnije obrađivati u sljedećem semestru.



Iako smo u prethodnim primjerima promatrali isključivo obične diferencijalne jednačbe (ODJ), već ovdje vidimo širok spektar problema koji se pojavljuju kada familija zadaća ovisi o malom parametru ε i kada taj parametar teži u nulu. Nije uvijek intuitivno jasno što točno predstavlja limitno rješenje, niti u kojoj topologiji (odnosno u kojoj normi) uopće možemo ostvariti konvergenciju. Probleme nižedimenzionalnih modela kojim ćemo se baviti u većini ovog kolegija ne možemo opisati problemima u ODJ.

Ovi fenomeni postat će znatno složeniji kada prijedemo na parcijalne diferencijalne jednačbe (PDJ), gdje u pravilu nećemo moći izračunati eksplicitne formule za rješenja u_ε . U takvim situacijama nećemo moći izravno računati limese, već ćemo morati promatrati same koeficijente i varijacijske zadaće koje ta rješenja zadovoljavaju te analizirati njihova apstraktna svojstva kada $\varepsilon \rightarrow 0$.

Napomena 1.0.4

Vrijedi komentirati i numerički aspekt ovih problema, odnosno zašto je u praksi iznimno važno i korisno proučavati surogat modele i limesne modele umjesto rješavanja originalne jednačbe. Da bismo numeričkim metodama točno uhvatili efekte malog parametra ε , diskretizacijska mreža mora biti izuzetno fina. Zamislite samo problem homogenizacije: mreža mora biti dovoljno sitna da uhvati svaku pojedinu oscilaciju materijalnog koeficijenta. U 2D i 3D domenama,

zbog male vrijednosti tog parametra, diskretizacijska mreža na kojoj možemo garantirati numeričku točnost vrlo brzo postaje pregusta za raspoloživi softver i hardver.

Zbog toga smo u praksi prisiljeni birati između dvije opcije:

- Rješavati originalan problem na iznimno gustoj domeni (ali možda i dalje ne dovoljno gusto), uz golema memorijska i vremenska ograničenja, pri čemu ćemo često dobiti rezultat s nepoznatom (i potencijalno velikom) numeričkom greškom.
- Rješavati surogat (asimptotski) problem na znatno rjeđoj diskretizacijskoj mreži, uz minimalna vremenska i memorijska ograničenja. U ovom slučaju imamo poznatu, analitičku pogrešku (zbog zamjene modela) koju možemo kontrolirati, te standardnu numeričku grešku koju nikada ne možemo izbjeći, ali koja je u ovom slučaju puno manja.

Glavna je poanta ovog kolegija uvjeriti vas da je ovaj drugi pristup znatno bolji te vam pokazati matematički aparat kojim se to precizno provodi.

Poglavlje 2

Pregled teorije i predznanja

Kako je ovaj kolegij mogu slušati i studenti četvrte godine studija Primijenjena matematika koji još nisu položili kolegije s četvrte godine, u ovom poglavlju proći ćemo kroz predznanja koja će nam biti potrebna za ovaj kolegij. To su u pravilu rezultati koji se obrađuju na neki način kroz obavezne kolegije 4. godine studija.

Prije uvođenja ostale teorije, prisjetimo se klasičnih integralnih identiteta koji povezuju ponašanje funkcije u unutrašnjosti domene s njezinim ponašanjem na rubu. U cijelom odjeljku pretpostavljamo da je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen, otvoren skup s rubom $\partial\Omega$ klase C^1 (ili općenitije, Lipschitzovim rubom), te da je $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_n)$ jedinični vektor vanjske normale na $\partial\Omega$.

Teorem 2.0.1: Gauss-Greenov teorem i Teorem o divergenciji

Neka je $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Tada za svaku komponentu $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi Gauss-Greenov teorem:

$$\int_{\Omega} \partial_i u \, dx = \int_{\partial\Omega} u n_i \, dS.$$

Kao izravnu posljedicu, za vektorsko polje $\mathbf{F} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ dobivamo Teorem o divergenciji:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Teorem 2.0.2: Formula parcijalne integracije

Neka su $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$. Tada za svaki indeks $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi:

$$\int_{\Omega} (\partial_i u) v \, dx = - \int_{\Omega} u (\partial_i v) \, dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, dS.$$

Teorem 2.0.3: Greenove formule

Neka su $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Koristeći oznaku $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ za usmjerenu derivaciju duž vanjske normale, vrijede sljedeći identiteti:

(i) **Prva Greenova formula:**

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

(ii) **Druga Greenova formula:**

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

U iskazima teorema trebaju nam i objašnjenje operatora div i Δ . Za zadanu dovoljno glatku vektorsku funkciju (polje) $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, **divergenciju** definiramo kao

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (2.0.1)$$

Divergencija mjeri jakost izvora ili ponora vektorskog polja u danoj točki. **Laplaceov operator** (ili laplasijan) skalarne funkcije u definira se kao divergencija njezinog gradijenta:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \quad (2.0.2)$$

2.1 Pregled osnovne teorije: Prostori integrabilnih funkcija

2.1.1 Lebesgueov integral

U klasičnoj analizi integral se uvodi po Riemannu, tako da se domena integracije dijeli na konačno mnogo podintervala, a površina ispod krivulje aproksimira se konačnim brojem vertikalnih pravokutnika (Darbouxove sume). Glavno ograničenje ovog pristupa leži u činjenici da je prostor Riemann-integrabilnih funkcija nepotpun, što stvara ozbiljne poteškoće kada se rješenja diferencijalnih jednadžbi traže kao limesi nizova funkcija. Lebesgueov integral rješava taj problem. Za razliku od Riemannovog integrala, ovdje integral aproksimiramo pomoću prebrojivo mnogo općenitijih geometrijskih objekata (histogram nad izmjerivim skupovima, a ne nužno uzastopnim intervalima). To omogućuje integraciju funkcija s izrazito divljim i isprekidanim domenama.

U tu svrhu koristimo pojam Lebesgue izmjerivog skupa. Neprecizno govoreći, Lebesgue izmjerivi skupovi su oni kojima je dobro definirana Lebesgueova mjera (što predstavlja generalizaciju pojma volumena). Ti se skupovi mogu dobiti prebrojivim presjecima, unijama i komplementima intervala (što generira Borelove skupove), uz jedno dodatno i ključno svojstvo **potpunosti**: svi podskupovi izmjerivog skupa mjere nula su također izmjerivi i imaju mjeru nula.

Nakon toga definiramo Lebesgue izmjerive funkcije kao one $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kojima je domena Lebesgue izmjeriva te je za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ skup $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\}$ Lebesgue izmjeriv. Kao što smo najavili, Lebesgueov integral se tada definira prvo za nenegativne funkcije kao

$$\int_{\Omega} f \, dx = \sup \left\{ \int_{\Omega} s \, dx : 0 \leq s \leq f, \, s \text{ je jednostavna} \right\}$$

(jednostavne funkcije su funkcije oblika $\sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}(x)$, gdje su c_i konstante, a A_i izmjerivi skupovi), dok se za općenite funkcije definira kao razlika integrala pozitivnog i negativnog dijela funkcije.

2.1.2 Lebesgueovi prostori L^p

Definicija 2.1.1: Lebesgueovi prostori L^p

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue izmjeriv skup i $1 \leq p < \infty$. Lebesgueov prostor $L^p(\Omega)$ definira se kao skup svih (klasa ekvivalencije) Lebesgue izmjerivih funkcija $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ za koje vrijedi:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Pripadna norma na ovom prostoru zadana je s:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Za granični slučaj $p = \infty$, prostor $L^\infty(\Omega)$ definira se kao skup svih izmjerivih funkcija koje su esencijalno ograničene, odnosno za koje postoji konstanta $C \geq 0$ takva da je $|f(x)| \leq C$ gotovo

svuda na Ω . Pripadna norma zadana je kao esencijalni supremum:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ g.s. na } \Omega\}.$$

Napomena 2.1.2

U teoriji Lebesgueova integrala i prostora L^p , oznaka **g.s.** (*gotovo svuda*) označava da neko svojstvo vrijedi svuda na domeni osim na skupu Lebesgueove mjere nula.

Ovo ima izravnu implikaciju na definiciju elemenata prostora L^p . Ako se dvije izmjerive funkcije f i g razlikuju samo na skupu mjere nula (tj. $f = g$ g.s.), njihov Lebesgueov integral daje identične rezultate. Zbog toga elementi prostora L^p nisu pojedinačne funkcije, već **klase ekvivalencije** funkcija koje se podudaraju gotovo svuda. Izmjenom vrijednosti funkcije u jednoj točki ili na bilo kojem prebrojivom skupu točaka ne mijenja se element u prostoru L^p .

Isto tako, norma na prostoru $L^\infty(\Omega)$ koristi esencijalni supremum (ess sup) umjesto uobičajenog supremuma (sup). Intuitivno, esencijalni supremum ignorira ponašanje funkcije na skupovima mjere nula.

To znači da je funkcija $f \in L^\infty(\Omega)$ zapravo **uniformno ograničena gotovo svuda**. Primjerice, ako funkcija u prebrojivo mnogo točaka prima vrijednosti koje teže u beskonačnost, dok u svim ostalim točkama iznosi 17, njezin klasični supremum bit će beskonačan. Međutim, kako je prebrojiv skup točaka ujedno i skup Lebesgueove mjere nula, njezin esencijalni supremum iznositi će točno 17.

Navodimo temeljne rezultate koji opisuju strukturu ovih prostora. Kao prvo, za svaki $1 \leq p \leq \infty$ funkcija $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ zaista jest norma. Najteži korak je dokazati nejednakost trokuta $\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$, što se zove nejednakost Minkowskog. Još jednu nejednakost koja će nam trebati pišemo u nastavku.

Teorem 2.1.3: Hölderova nejednakost

Neka su $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugirani eksponenti, tj. takvi da vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako je $f \in L^p(\Omega)$ i $g \in L^q(\Omega)$, tada produkt $fg \in L^1(\Omega)$ i vrijedi:

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Ovu nejednakost najčešće ćemo koristiti za $p = q = 2$ i zvati Cauchy-Scharzovom nejednakosti.

Napomena 2.1.4

U situacijama koje će biti na ovom kolegiju, domena Ω je ograničena (ili općenitije, konačne Lebesgueove mjere $\mu(\Omega) < \infty$). Tada za eksponente $1 \leq p \leq q \leq \infty$ vrijedi monotonost, odnosno obrnuta inkluzija prostora:

$$L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

Ovaj rezultat izravno slijedi primjenom Hölderove nejednakosti na funkciju $|f|^p \cdot 1$. Na neograničenim domenama beskonačne mjere ova hijerarhija ne vrijedi (npr. funkcija može pripadati prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$ zbog brzog trnuća u beskonačnosti, ali ne i prostoru $L^1(\mathbb{R}^n)$).

2.1.3 Soboljevljevi prostori $W^{1,p}$

U analizi parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prostori L^p nisu dovoljni jer same jednadžbe sadrže derivacije nepoznate funkcije. Budući da klasične derivacije zahtijevaju glatkoću koju limesi u L^p ne

čuvaju, uvodimo pojam *slabe derivacije* i pripadne Soboljevljeve prostore.

Prije toga, još jedna oznaka: ukratko, prostor $L^1_{loc}(\Omega)$ obuhvaća funkcije koje imaju konačan integral na svakom zatvorenom i ograničenom (kompaktnom) podskupu domene, što im dopušta da budu neintegrabilne ili teže u beskonačnost isključivo kako se približavamo samom rubu domene $\partial\Omega$. Ta definicija nam je potrebna samo da bi integral s desne strane jednakosti u sljedećoj definiciji bio dobro definiran.

Definicija 2.1.5: Slaba derivacija

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Kažemo da je funkcija $\partial_i u \in L^1_{loc}(\Omega)$ slaba parcijalna derivacija funkcije u po varijabli x_i ako za svaku test funkciju $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vrijedi:

$$\int_{\Omega} u \partial_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \partial_i u \varphi \, dx.$$

Uočimo da u definiciji namjerno koristimo potpuno istu oznaku $\partial_i u$ kao i za klasičnu derivaciju. U jednodimenzionalnom slučaju ($n = 1$), ako je $\Omega = (a, b)$, funkciju $u' \in L^1_{loc}(a, b)$ nazivamo slabom derivacijom funkcije u ako vrijedi:

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) \, dx = - \int_a^b u'(x) \varphi(x) \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a, b).$$

Primjećujemo da slaba derivacija po samoj svojoj definiciji zadovoljava upravo onu integralnu relaciju koju klasična derivacija inače zadovoljava zahvaljujući formuli za parcijalnu integraciju. Budući da test funkcije φ po definiciji imaju kompaktan nosač unutar domene Ω (neprecizno rečeno: jednake su nuli u blizini ruba Ω netrivialne debljine), svi rubni članovi koji bi inače proizašli iz parcijalne integracije ovdje prirodno iščezavaju.

Pokazuje se da svaka funkcija koja je klasično diferencijabilna (uz pretpostavku da joj je klasična derivacija lokalno integrabilna) ujedno ima i slabu derivaciju, te se klasična i slaba derivacija tada poklapaju gotovo svuda, što opravdava korištenje istih oznaka za (klasičnu) derivaciju i slabu derivaciju. Osim toga, definicija implicitno kaže i da je slaba derivacija svake funkcije jedinstvena g.s. (ako uopće postoji).

Pojam slabe derivacije prirodno se poopćuje na derivacije višeg reda, koje definiramo induktivno kao slabe derivacije već postojećih slabih derivacija. Pritom je važno naglasiti da i u slabom smislu vrijedi Schwarzov teorem, odnosno komutativnost mješovitih parcijalnih derivacija ($\partial_{ij} u = \partial_{ji} u$ gotovo svuda), pod uvjetom da te derivacije postoje.

Sada možemo definirati sljedeće funkcijske prostore u kojima ćemo tražiti rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Definicija 2.1.6: Soboljevljev prostor $W^{1,p}$

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $1 \leq p \leq \infty$. Soboljevljev prostor $W^{1,p}(\Omega)$ definira se kao prostor svih funkcija $u \in L^p(\Omega)$ za koje postoji slaba parcijalna derivacija $\partial_i u \in L^p(\Omega)$ za sve $i = 1, \dots, n$.

Pripadna norma definirana je kao:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{za } 1 \leq p < \infty,$$

dok je za $p = \infty$:

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Za poseban slučaj $p = 2$, prostor se tradicionalno označava kao $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.

Analogno, definiramo skup funkcija $W^{2,p}(\Omega)$ kao skup funkcija $u \in L^p(\Omega)$ kojima postoje sve slabe prve i druge derivacije i pripadaju $L^p(\Omega)$. U normu tog prostora uključene su i L^p norme svih drugih derivacija. Analogno definiramo i ostale prostor $W^{k,p}$, te imamo oznaku $H^k \equiv W^{k,2}$.

Primjer 2.1.7

Promatrajmo funkciju $u(x) = |x|$ na intervalu $(-1, 1)$. Pokazat ćemo da je njezina slaba derivacija funkcija predznaka, $v(x) = \text{sgn}(x)$, tako što ćemo izravno provjeriti zadovoljava li definiciju. Za svaku test funkciju $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$ mora vrijediti:

$$\int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 \text{sgn}(x) \varphi(x) dx.$$

Krenimo od lijeve strane definicije i rastavimo integral na dva dijela, ovisno o predznaku argumenta pod apsolutnom vrijednosti, pa koristimo parcijalnu integraciju:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx &= \int_{-1}^0 (-x) \varphi'(x) dx + \int_0^1 x \varphi'(x) dx \\ &= \underbrace{[-x\varphi(x)]_{-1}^0}_{=0} - \int_{-1}^0 (-1) \varphi(x) dx + \underbrace{[x\varphi(x)]_0^1}_{=0} - \int_0^1 1 \cdot \varphi(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 \text{sgn}(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

gdje smo na kraju iskoristili definiciju funkcije sgn .

Primjer 2.1.8: Nepostojanje slabe derivacije za funkciju sa skokom

Promatrajmo funkciju $u(x) = \text{sgn}(x)$ na intervalu $[-1, 1]$. Pokažimo detaljno zašto ova funkcija nema slabu derivaciju.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji slaba derivacija $v \in L^1(-1, 1)$ takva da za svaku test funkciju $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$ vrijedi:

$$\int_{-1}^1 \text{sgn}(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx.$$

Izračunajmo lijevu stranu integrala rastavljanjem na dva podintervala, pa direktnom integracijom (prema Newton-Leibnizovoj formuli) dobivamo:

$$\int_{-1}^1 \text{sgn}(x) \varphi'(x) dx = \int_{-1}^0 (-1) \varphi'(x) dx + \int_0^1 \varphi'(x) dx = -2\varphi(0).$$

Naša pretpostavka se svodi na zahtjev da za svaki $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$ vrijedi:

$$-2\varphi(0) = - \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx \implies 2\varphi(0) = \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx. \quad (2.1.3)$$

Dokažimo da ne postoji funkcija v za koju je gornja relacija zadovoljena za sve φ . Za test funkcije φ možemo uzeti tzv. izgladivače (eng. mollifiers). Za $\varepsilon > 0$ izgladivači se općenito definiraju kao funkcije sa $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-n} \eta(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad \eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} Ce^{1/(|\mathbf{x}|^2-1)} & |\mathbf{x}| < 1, \\ 0 & |\mathbf{x}| \geq 1 \end{cases},$$

gdje je $C > 0$ t.d. $\int_{\mathbb{R}^n} \eta d\mathbf{x} = 1$. To su C_c^∞ funkcije s nosačem u kugli radijusa ε oko nule. U našem slučaju gledamo $n = 1$.

Uvrstimo $\varphi = \eta_\varepsilon$ u relaciju (2.1.3). Za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ nosač funkcije η_ε strogo je unutar $(-1, 1)$, pa integracije preživljavaju samo na $[-\varepsilon, \varepsilon]$:

$$2\eta_\varepsilon(0) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v(x)\eta_\varepsilon(x) dx.$$

Ocijenimo desnu stranu po apsolutnoj vrijednosti, koristeći spomenuto svojstvo maksimuma izgladivača:

$$2\eta_\varepsilon(0) \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v(x)|\eta_\varepsilon(x) dx \leq \eta_\varepsilon(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v(x)| dx.$$

Budući da je $\eta_\varepsilon(0) > 0$, cijelu nejednakost možemo podijeliti s tim članom, što nas vodi do:

$$2 \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v(x)| dx.$$

Kada pustimo limes $\varepsilon \rightarrow 0$, zbog apsolutne neprekidnosti Lebesgueovog integrala za funkciju $v \in L^1(-1, 1)$, integral na desnoj strani teži u nulu. Time dobivamo očitu kontradikciju $2 \leq 0$, čime je dokaz završen.

Iako u dimenziji $n = 1$ vrijedi da sve neprekidne funkcije imaju slabu derivaciju, pa time posebno vrijedi $H^1(a, b) \subset C(a, b)$, u višim dimenzijama ($n \geq 2$) to općenito ne vrijedi.

U nastavku navedimo neka svojstva Soboljevljevih prostora.

Teorem 2.1.9: Aproksimacija glatkim funkcijama (Meyers-Serrin)

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $1 \leq p < \infty$. Tada je prostor $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ gust u $W^{1,p}(\Omega)$. Ako je k tome Ω ograničena domena s Lipschitzovim rubom, tada je i prostor $C^\infty(\bar{\Omega})$ (restrikcije glatkih funkcija s $\mathbb{R}^n$ na Ω) gust u $W^{1,p}(\Omega)$. To znači da za svaku funkciju $u \in W^{1,p}(\Omega)$ postoji niz funkcija $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ takav da:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0.$$

Teorem 2.1.10: Rellich-Kondrašovljev teorem kompaktnosti

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena domena s Lipschitzovim rubom. Za svaki $1 \leq p < \infty$, ulaganje

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

je kompaktno.

Drugim riječima, ako je niz $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uniformno ograničen u Soboljevljevu prostoru $W^{1,p}(\Omega)$, odnosno postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq M$ za svaki $m \in \mathbb{N}$, tada postoji podniz $(u_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ i funkcija $u \in L^p(\Omega)$ takva da:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{m_k} - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Teorem 2.1.11: Teorem o tragu na dijelu ruba

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena domena s Lipschitzovim rubom $\partial\Omega$, i neka je $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ relativno otvoren podskup ruba čija je $(n-1)$ -dimenzionalna Lebesgueova mjera strogo pozitivna ($\mu_{n-1}(\Gamma_0) > 0$).

Tada za svaki $1 \leq p \leq \infty$ postoji jedinstven ograničen linearni operator

$$\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma_0)$$

takav da za svaku funkciju $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ vrijedi $\gamma_0(u) = u|_{\Gamma_0}$. Nadalje, operator je neprekidan, odnosno postoji konstanta $C = C(\Omega, \Gamma_0, p) > 0$ takva da vrijedi:

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^p(\Gamma_0)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Teorem o tragu na kompliciran način kaže sljedeću (pomalo nepreciznu) stvar: da bismo za funkciju definiranu na n -dimenzionalnom skupu definirali njezinu restrikciju na $(n-1)$ -dimenzionalni skup, moramo "platiti" jednom slabom derivacijom. Restrikcija $W^{1,p}$ funkcije na manje dimenzionalni skup je klase L^p , dok L^p funkciju općenito ne možemo restringirati na skup manje dimenzije (što je u skladu s Lebesgueovom mjerom).

Teorem 2.1.12: Poincaréova nejednakost uz djelomični Dirichletov uvjet

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena domena s Lipschitzovim rubom, te neka je $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ dio ruba pozitivne mjere ($\mu_{n-1}(\Gamma_0) > 0$). Definirajmo potprostor funkcija koje iščezavaju na tom dijelu ruba:

$$W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \gamma_0(u) = 0 \text{ na } \Gamma_0\}.$$

Tada za svaki $1 \leq p < \infty$ postoji konstanta $C = C(\Omega, \Gamma_0, p) > 0$ takva da za svaku funkciju $u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega)$ vrijedi:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Kao posljedica, polunorma $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ predstavlja normu na prostoru $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega)$ koja je ekvivalentna standardnoj Soboljevskoj normi.

Poincaréova nejednakost kaže da gradijent $W^{1,p}$ funkcije kontrolira cijelu L^p ili čak i $W^{1,p}$ normu funkcije uz uvjet da znamo da ta funkcija nije identički jednaka netrivialnoj konstanti (u ovoj najpoznatijoj verziji teorema zahtijevamo da je na netrivialnom dijelu ruba domene funkcija jednaka nuli).

Teorem 2.1.13: Potpunost prostora L^p i $W^{1,p}$

Za $1 \leq p \leq \infty$, prostori $L^p(\Omega)$ i $W^{1,p}(\Omega)$ su Banachovi prostori, što znači da je svaki Cauchyjev niz u tim prostorima jako konvergentan. Posebno, za $p = 2$, prostori $L^2(\Omega)$ i $H^1(\Omega)$ su potpuni unitarni prostori, odnosno Hilbertovi prostori.

Za slučaj $p = 2$ posebna oznaka H^1 sugerira da je u tom slučaju prostor Hilbertov.

2.1.4 * Dualni prostor $H^{-1}(\Omega)$

Definicija 2.1.14: Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Dualni prostor Hilbertovog prostora $H_0^1(\Omega)$ (što je po definiciji oznaka za $W_0^{1,2}(\Omega)$) označava se s $H^{-1}(\Omega)$. To je prostor svih ograničenih (neprekidnih) linearnih funkcionala na $H_0^1(\Omega)$. Norma funkcionala $f \in H^{-1}(\Omega)$ definirana je standardno kao operatorska norma:

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}},$$

gdje $\langle f, v \rangle$ označava djelovanje funkcionala f na test funkciju v (dualno sprezanje).

Teorem 2.1.15: Karakterizacija prostora $H^{-1}(\Omega)$

Funkcional f pripada prostoru $H^{-1}(\Omega)$ ako i samo ako postoje funkcije $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$ takve da se f može prikazati u obliku:

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^n \partial_i f_i$$

u smislu distribucija. To znači da za svaku test funkciju $v \in H_0^1(\Omega)$ djelovanje funkcionala glasi:

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f_0(x) v(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i(x) \partial_i v(x) dx.$$

Nadalje, norma na dualnom prostoru može se karakterizirati kao:

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=0}^n \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} : f = f_0 + \sum_{i=1}^n \partial_i f_i \right\}.$$

2.1.5 Slaba konvergencija i teorem o kompaktnosti

Iako nam potpunost garantira postojanje limesa za Cauchyjeve nizove, u praksi (primjerice, kod primjene direktne metode varijacijskog računa) najčešće imamo samo informaciju da je niz aproksimacija *uniformno ograničen*. U konačnodimenzionalnim prostorima poput $\mathbb{R}^n$, Bolzano-Weierstrassov teorem garantira da svaki ograničen niz ima konvergentan podniz. U beskonačnodimenzionalnim prostorima to svojstvo jake kompaktnosti propada. Recimo, za niz funkcija

$$(u_n)_n \subset L^2(0, 2\pi), \quad u_n(x) = \sin(nx), \quad \text{za } n \in \mathbb{N}. \quad (2.1.4)$$

Za taj niz funkcija vrijedi

$$\|u_n\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \pi, \quad \|u_m - u_n\|_{L^2}^2 = 2\pi.$$

Udaljenost između bilo koja dva člana niza je konstantna i iznosi $\sqrt{2\pi}$. Zbog toga niti jedan podniz ne može biti Cauchyjev, pa posljedično ograničen niz (u_n) ne posjeduje jako konvergentan podniz u prostoru $L^2(0, 2\pi)$.

Da bismo vratili svojstvo kompaktnosti za ograničene nizove te omogućili granične prijelaze u diferencijalnim jednadžbama, moramo oslabiti zahtjeve na topologiju. To nas vodi do pojma slabe konvergencije, koja mjeri konvergenciju "u prosjeku" umjesto u normi.

Definicija 2.1.16: Slaba konvergencija

Neka je X Banachov prostor i X' njegov topološki dual (prostor svih neprekidnih linearnih funkcionala na X). Kažemo da niz $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ **slabo konvergira** prema elementu $u \in X$, u oznaci $u_n \rightharpoonup u$, ako za svaki funkcional $f \in X'$ vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n \rangle_{X', X} = \langle f, u \rangle_{X', X}.$$

U kontekstu prostora $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p < \infty$, prema Rieszovom teoremu reprezentacije svaki se funkcional može poistovjetiti s integracijom protiv funkcije iz dualnog prostora $L^q(\Omega)$ (gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Stoga $u_n \rightharpoonup u$ u $L^p(\Omega)$ znači da za svaku test funkciju $v \in L^q(\Omega)$ vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) v(x) dx = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

Za prostor $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, definicija slabe konvergencije uključuje prostor $H^{-1}(\Omega)$, no karakterizacija je jednostavnija: kažemo da $u_n \rightharpoonup u$ u $W^{1,p}(\Omega)$ ako i samo ako $u_n \rightharpoonup u$ u $L^p(\Omega)$ i $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ u $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Za niz funkcija iz (2.1.4) pokazuje se (netrivijalno) da konvergira slabo k nuli funkciji. Napomenimo da osim po imenu, jaka i slaba konvergencija imaju i dokazanu vezu u tome što jaka konvergencija implicira slabu, te da je linearna kombinacija funkcija koje konvergiraju slabo opet slabo konvergentna.

Ovakva definicija konvergencije omogućuje nam sljedeći ključni rezultat.

Teorem 2.1.17: Eberlein-Šmuljan / Banach-Alaoglu

Neka je X refleksivan Banachov prostor (što uključuje $L^p(\Omega)$ i $W^{1,p}(\Omega)$ za stroge granice $1 < p < \infty$). Tada je svaki ograničen niz u X **nizovno slabo kompaktan**.

Preciznije, ako postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|u_n\|_X \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tada postoji podniz $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ i element $u \in X$ takav da

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{slabo u } X.$$

Napomenimo da prema Teoremu o uniformnoj ograničenosti, vrijedi i neki oblik obrata gornje tvrdnje: svaki slabo konvergentan niz u refleksivnom Banachovom prostoru je uniformno ograničen (u normi).

Napomena 2.1.18: Rubni slučajevi $p = 1$ i $p = \infty$

Prostori $L^1(\Omega)$ i $L^\infty(\Omega)$ nisu refleksivni, stoga teorem o slabo kompaktности ograničenih nizova za njih ne vrijedi direktno. Ograničen niz u $L^1(\Omega)$ općenito nema slabo konvergentan podniz u L^1 (konvergencija često "pobjegne" u prostor mjera, uzrokujući koncentracije poput Diracove delte). Za $L^\infty(\Omega)$, s obzirom na to da je dual od L^1 , ograničeni nizovi posjeduju podnizove koji konvergiraju u još slabijoj, tzv. **slabo-*** topologiji.

Napomena 2.1.19: Jedinstvenost limesa kroz prostor distribucija

U analizi parcijalnih diferencijalnih jednadžbi neprestano ispreplićemo različite prostore funkcija (poput L^p , H^1 , H^{-1}) i pripadne topologije (jaka i slaba konvergencija). Presudno je razumjeti da se svi ti prostori mogu neprekidno uložiti u jedan veliki, nadređeni prostor — **prostor distribucija** $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Budući da je topologija na prostoru distribucija Hausdorffova, limesi konvergentnih nizova u njoj su **jedinstveni**. Zbog toga se svaki niz koji konvergira u bilo kojoj od naših jakih ili slabih topologija nužno mora konvergirati istom tom limesu i u smislu distribucija. Iz ove naizgled

apstraktne činjenice proizlaze dva iznimno važna praktična alata koja ćemo često koristiti:

1. **Usklađenost limesa:** Ako niz (f_n) konvergira prema g u jednoj topologiji (npr. slabo u L^2), a prema h u nekoj sasvim drugoj topologiji (npr. jako u H^{-1}), tada se ta dva limesa moraju podudarati u $\mathcal{D}'(\Omega)$, iz čega izravno slijedi $g = h$ gotovo svuda.
2. **Zatvorenost operatora derivacije:** Operacija deriviranja je neprekidno preslikavanje u prostoru distribucija. To znači da iz $f_n \rightarrow f$ u $\mathcal{D}'$ automatski slijedi $\nabla f_n \rightarrow \nabla f$ u $\mathcal{D}'$.
U praksi to koristimo na sljedeći način: ako izvučemo informaciju da $f_n \rightarrow f$ (u nekoj topologiji) i istovremeno $\nabla f_n \rightarrow \mathbf{g}$ (u nekoj, možda i potpuno drugoj topologiji), tada nužno mora vrijediti $\nabla f = \mathbf{g}$ u smislu distribucija (odnosno u smislu slabe derivacije). Posebno, ako naknadno ustanovimo da $f \in L^p(\Omega)$ i $\mathbf{g} \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, iz te jednakosti automatski proizlazi da je $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

Prije nastavka pokazat ćemo još jedan rezultat Poincaréovog tipa. Teorem sam po sebi je koristan, ali ćemo ga dokazati kako bismo pokazali korištenje dosad iskazanih rezultata u praksi.

Teorem 2.1.20: Poincaré-Wirtingerova nejednakost

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena povezana domena s Lipschitzovim rubom i $1 \leq p < \infty$. Tada postoji konstanta $C > 0$, ovisna samo o Ω i p , takva da za svaku funkciju $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vrijedi:

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad (2.1.5)$$

gdje je $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$ prosječna (srednja) vrijednost funkcije u na domeni Ω .

Ovaj teorem opet pokazuje da gradijent funkcije kontrolira vrijednosti funkcije u L^p normi čim se na neki način izbace netrivialne konstante iz igre.

Dokaz.

Jedan od načina dokaza ovakvih nejednakosti je kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno, takva konstanta $C > 0$ ne postoji. To znači da za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ možemo pronaći funkciju $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ takvu da vrijedi:

$$\|u_n - \bar{u}_n\|_{L^p(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.1.6)$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|u_n - \bar{u}_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$ (eventualnim reskaliranjem). Time smo dobili da je niz s lijeve strane nejednakosti (2.1.6) ograničen u $L^p(\Omega)$, pa prema Banach-Alaoguluovom teoremu vrijedi da postoji slabo konvergentan podniz u $L^p(\Omega)$. Također, za niz s desne strane vrijedi $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} < 1/n$, odakle zaključujemo da taj niz konvergira jako k nuli. Dokaz će biti gotov ako dokažemo kao posljedicu da i niz slijeva konvergira jako k nuli (jer će se to kositi s tvrdnjom da su norme članova tog niza jednake 1). Uvedimo još pokratu $v_n = u_n - \bar{u}_n$. Kako je $\bar{u}_n$ konstanta, vrijedi $\nabla v_n = \nabla u_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz gornjeg raspisa zaključujemo da postoji podniz tog niza i limes v_0 za koji vrijedi

$$\begin{aligned} v_{n_k} &\rightharpoonup v_0 \quad \text{slabo u } L^p(\Omega), \\ \nabla v_{n_k} &\rightarrow 0 \quad \text{jako u } L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Budući da je niz v_{n_k} ograničen u $L^p(\Omega)$, a njegov gradijent ∇v_{n_k} teži k nuli (pa je time također ograničen), cijeli niz je uniformno ograničen u Soboljevljevom prostoru $W^{1,p}(\Omega)$. Kako je Ω ograničena domena s Lipschitzovim rubom, po Rellich-Kondrašovljevom teoremu o kompaktnom ulaganju slijedi da iz uniformne ograničenosti u $W^{1,p}(\Omega)$ možemo izvući jako konvergentan

podniz u $L^p(\Omega)$. Kompaktnost nam osigurava da slabo konvergentan niz v_{n_k} zapravo konvergira *jako* u $L^p(\Omega)$ prema istom limesu v_0 .

Iz jake konvergencije neposredno slijedi konvergencija normi:

$$\|v_0\|_{L^p(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} = 1.$$

S druge strane, kako konvergencije komutiraju s deriviranjem u smislu distribucija, iz $\nabla v_{n_k} \rightarrow 0$ u $L^p(\Omega)$ slijedi da je slaba derivacija limesa nula, odnosno $\nabla v_0 = 0$ g.s. u Ω . Kako je domena Ω povezana, funkcija v_0 mora biti konstanta, tj. $v_0 = c$ g.s.

Konačno, primijetimo da je srednja vrijednost svakog elementa niza v_n jednaka nuli:

$$\bar{v}_n = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (u_n - \bar{u}_n) dx = \bar{u}_n - \bar{u}_n = 0.$$

Zbog jake konvergencije $v_{n_k} \rightarrow v_0$ u $L^p(\Omega)$ konvergiraju i njihove srednje vrijednosti, pa je i prosjek limesa v_0 jednak nuli. Konstanta čija je srednja vrijednost nula mora biti jednaka nuli, stoga je $v_0 \equiv 0$.

Ovo predstavlja direktnu kontradikciju jer smo dobili da je $v_0 \equiv 0$, dok nam norma s druge strane iznosi $\|v_0\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Time je pretpostavka bila pogrešna i konstanta C mora postojati.

Zadatak 2.1.21

U prošlom rješenju iskoristili smo dvije tvrdnje:

- ako $u_n \rightarrow u$ u $L^p(\Omega)$, onda $\overline{u_n} \rightarrow \bar{u}$;
- ako $u_n \rightarrow u$ u $L^p(\Omega)$, onda $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

Dokažite te tvrdnje (oduzmite lijevu i desnu stranu u tvrdnjama u koje treba dokazati i možda iskoristite Hölderovu nejednakost).

Zadatak 2.1.22

Neka je $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ niz funkcija koji konvergira jako k $u \in L^p(\Omega)$, te $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^q(\Omega)$ niz funkcija koji konvergira slabno k $v \in L^q(\Omega)$, uz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dokažite da tada vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) v_n(x) dx = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx. \quad (2.1.7)$$

2.2 Uvod u eliptičke rubne zadaće

2.2.1 Diferencijalna formulacija i rubni uvjeti

Najpoznatiji i najjednostavniji primjer eliptičke parcijalne diferencijalne jednadžbe je Poissonova jednadžba, koja uključuje Laplaceov operator:

$$-\Delta u = f \quad \text{u } \Omega, \quad \text{gdje je } \Delta u := \partial_{11}u + \partial_{22}u + \dots \partial_{nn}u.$$

U jednodimenzionalnom slučaju ($n = 1$), Laplaceov operator svodi se na običnu drugu derivaciju u'' , pa eliptičke jednadžbe možemo smatrati višedimenzionalnom generalizacijom stacionarnih uvodnih problema. Gornju jednadžbu zovemo **Poissonova jednadžba**, odnosno u slučaju $f = 0$ govorimo o **Laplaceovoj jednadžbi**. Općenito, svaka skalarna linearna eliptička jednadžba drugog reda može

se zapisati u formi

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u + c(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \quad \text{u } \Omega, \quad (2.2.8)$$

gdje je $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrica koeficijenta koja je simetrična i uniformno pozitivno definitna, vektor $\mathbf{b}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ predstavlja konvektivno (advektivno) polje brzine, skalarna funkcija $c(\mathbf{x})$ označava reaktivni član (uz standardnu pretpostavku $c(x) \geq 0$), a $f(\mathbf{x})$ je zadana funkcija izvora. U nastavku za potrebe uvoda baratamo slučajem $\mathbf{b} = 0$ i $c = 0$.

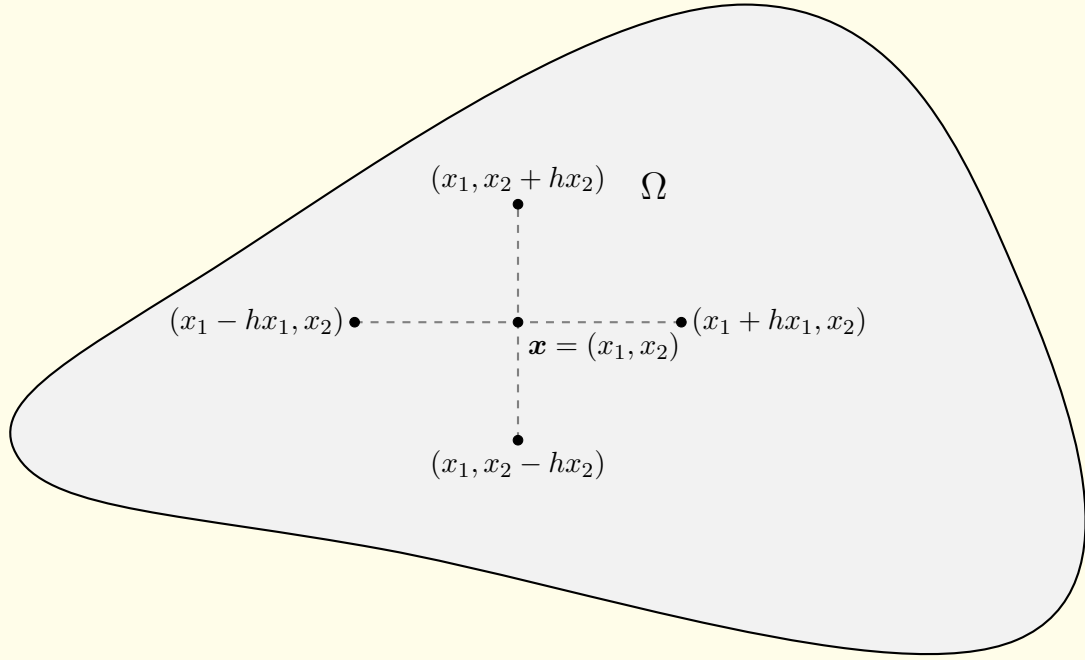
Napomena 2.2.1: Teorija linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi

Objasnimo neke pojmove iz vezane za (2.2.8). Jednačba je *skalarna* jer je kodomena nepoznanice u jednodimenzionalna. Ona je linearna jer se zapisuje kao linearna kombinacija u nepoznanici u i njezinim derivacijama (koeficijenti $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, c i f ne ovise o u , ali smiju ovisiti o $\mathbf{b}$). Ona je drugog reda jer je druga najviša derivacija koja se pojavljuje.

Konačno, ova jednačba je eliptička. Najjednostavniji način za motiviranje ovog pojma bio bi da sve parcijalne derivacije zamijenite monomima x_i^k (gdje je k red derivacije) i promatrate koji geometrijski objekt ta jednačba predstavlja. U dvije dimenzije znamo da svi mogući polinomi drugog reda u dvije varijable jednačbom $P(x_1, x_2) = 0$ mogu generirati tri poprilično različite vrste krivulja: elipse, parabole i hiperbole. Zato možete povjerovati da i u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačbi postoji različito ponašanje jednačbi u sličnim oblicima. U teoriji paraboličkih i hiperboličkih jednačbi prirodno je jednu od varijabli tretirati kao "vrijeme" te se njihova teorija onda naslanja na eliptičke jednačbe. Zato se na ovom kolegiju bavimo samo najjednostavnijom familijom jednačbi drugog reda, a to su eliptičke jednačbe.

Napomena 2.2.2: Laplaceova jednačba i modeliranje koncentracije

Općenito, eliptičke jednačbe modeliraju anizotropnu difuziju ili vodljivost (ovisno o obliku matrice $\mathbf{A}$). Jedna od motivacija za takvo što napravljena je na kolegiju Parcijalne diferencijalne jednačbe 1 koristeći interpretaciju operatora divergencije, ali to možemo motivirati i na poprilično neprecizan način. Zamislimo područje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ koje je ispunjeno nekom tvari te je u njezina koncentracija. Pretpostavimo i da je tvar u ravnoteži, tj. da se koncentracija ne mijenja u vremenu, te da je u svakoj točki širenje tvari jednako i izotropno (podjednako u svim smjerovima). Promotrimo proizvoljnu točku $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i pretpostavimo da ta točka ima četiri "susjeda": $(x_1 \pm hx_1, x_2)$, $(x_1, x_2 \pm hx_2)$ kao na slici.



Da bi koncentracija bila u balansu, u svakom trenu želimo da je koncentracija u u nekoj točki jednaka prosjeku koncentracija u susjednim točkama. To možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4} (u(x_1 + hx_1, x_2) + u(x_1 - hx_1, x_2) + u(x_1, x_2 + hx_2) + u(x_1, x_2 - hx_2)) \\ &= \frac{1}{4} (u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) + u(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_1) + u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_2) + u(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_2)). \end{aligned}$$

Dijeljenjem s h^2 i preuređivanjem, dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{4h^2} [(u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) - u(\mathbf{x})) + (u(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_1) - u(\mathbf{x})) \\ &\quad + (u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_2) - u(\mathbf{x})) + (u(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_2) - u(\mathbf{x}))] \\ &\approx \frac{1}{4h} \left(\partial_1 u \left(\mathbf{x} + \frac{h}{2} \mathbf{e}_1 \right) - \partial_1 u \left(\mathbf{x} - \frac{h}{2} \mathbf{e}_1 \right) + \partial_2 u \left(\mathbf{x} + \frac{h}{2} \mathbf{e}_2 \right) - \partial_2 u \left(\mathbf{x} - \frac{h}{2} \mathbf{e}_2 \right) \right) \\ &\approx \frac{1}{4} (\partial_{11} u(\mathbf{x}) + \partial_{22} u(\mathbf{x})) \\ &= \frac{1}{4} \Delta u(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Time smo neprecizno izveli Laplaceovu jednadžbu (pretpostavili smo da ne postoji vanjski utjecaj f koji bi utjecao na distribuciju koncentracije u).

Kako bi rješenje jednadžbe bilo jedinstveno, na rubu domene $\partial\Omega$ zadajemo rubne uvjete. Pretpostavimo da je rub podijeljen na dva disjunktna dijela, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Najčešći uvjeti su:

- **Dirichletov rubni uvjet:** Zadajemo vrijednost funkcije na rubu, npr. $u = 0$ na Γ_D .
- **Neumannov rubni uvjet:** Zadajemo tok (derivaciju u smjeru vanjske normale) na rubu, npr. $(A\nabla u) \cdot \mathbf{n} = g$ na Γ_N . U slučaju Laplaceovog operatora to je klasična normalna derivacija $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g$.

2.2.2 Izvod varijacijske formulacije

Za prelazak s jake (diferencijalne) na slabu (varijacijsku) formulaciju, jednadžbu (2.2.8) množimo proizvoljnom test funkcijom v te integriramo po domeni Ω :

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(A \nabla u) v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Primjenom Teorema o divergenciji (odnosno više-dimenzionalne formule za parcijalnu integraciju - Greenov identitet), prebacujemo jednu derivaciju na test funkciju:

$$\int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} ((A \nabla u) \cdot \mathbf{n}) v \, dS = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (2.2.9)$$

Ovdje presudnu ulogu igraju rubni uvjeti: Budući da tražimo rješenje koje zadovoljava Dirichletov uvjet $u = 0$ na Γ_D , test funkcije v također moraju iščezavati na Γ_D (zbog toga se on ugrađuje direktno u prostor). Zbog toga dio rubnog integrala po Γ_D iščezava. Na dijelu Γ_N imamo Neumannov uvjet $(A \nabla u) \cdot \mathbf{n} = g$, kojeg jednostavno uvrstimo u preostali dio rubnog integrala.

Prebacivanjem poznatih članova na desnu stranu dobivamo **varijacijsku formulaciju**: Naći $u \in V$ takav da

$$\int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} g v \, dS, \quad \forall v \in V, \quad (2.2.10)$$

gdje je $V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}$. U pravilu tokom ovog kolegija gotovo uvijek ćemo promatrati varijacijsku formulaciju, a ne diferencijalnu. Jedna od najvećih prednosti je ta što se eliptična jednadžba drugog reda (u kojoj se pojavljuju druge derivacije) u varijacijskoj formulaciji zapisuje samo pomoću prvih derivacija, pa se rješenja traže u prostoru $W^{1,2}(\Omega) \equiv H^1(\Omega)$.

Ovime smo pokazali da diferencijalna formulacija (2.2.8) (uz $b = 0$, $c = 0$) implicira varijacijsku formulaciju (2.2.10). Za obrat nam je potreban sljedeći rezultat.

Lema 2.2.3: Osnovna lema varijacijskog računa

Neka je $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Ako za svaku test funkciju $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vrijedi

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

tada je $u(\mathbf{x}) = 0$ gotovo svuda u Ω .

Napomena 2.2.4: Zašto uvodimo Soboljevljeve prostore?

Prirodno bi bilo tražiti rješenja varijacijske zadaće u prostoru $C^1(\bar{\Omega})$. Međutim, prostor neprekidno diferencijabilnih funkcija opremljen integralnom (energetskom) normom **nije potpun**. Ako konstruiramo aproksimativni (npr. Galerkinov) niz rješenja, on će biti Cauchyjev u H^1 normi, ali njegov limes ne mora nužno biti diferencijabilna ili čak neprekidna funkcija. Soboljevljevi prostori (poput $H^1(\Omega)$) uvode se upravo kao upotpunjenja takvih prostora kako bismo si osigurali postojanje limesa i primjenjivost moćnih alata funkcionalne analize.

2.2.3 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

Apstraktni okvir za rješavanje linearnih eliptičkih jednadžbi daje čuvena Lax-Milgramova lema, koja generalizira Rieszov teorem reprezentacije na nesimetrične bilinearne forme.

Teorem 2.2.5: Lax-Milgramova lema

Neka je V Hilbertov prostor. Neka je $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma (linearna po svakoj od dvije varijable), a $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ linearan funkcional. Pretpostavimo da vrijedi:

1. **Ograničenost (neprekidnost) forme:** $\exists M > 0$ takav da $|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$ za sve $u, v \in V$.
2. **Koercitivnost (V-eliptičnost):** $\exists \alpha > 0$ takav da $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$ za sve $u \in V$.
3. **Neprekidnost funkcionala:** $l \in V'$.

Tada postoji jedinstveno rješenje $u \in V$ varijacijske zadaće

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

Nadalje, rješenje je stabilno s obzirom na desnu stranu te vrijedi apriorna ocjena:

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{V'}.$$

U slučaju da je bilinearna forma a simetrična, odnosno $a(u, v) = a(v, u)$, dodatno možemo iskoristiti i sljedeći rezultat.

Teorem 2.2.6: Minimizacija energije

Neka su ispunjene pretpostavke Lax-Milgramove leme i neka je forma $a(\cdot, \cdot)$ **simetrična**. Definirajmo funkcional ukupne energije $E : V \rightarrow \mathbb{R}$ kao:

$$E(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v).$$

Tada je element $u \in V$ jedinstveno rješenje varijacijske zadaće $a(u, v) = l(v)$ za svaki $v \in V$ ako i samo ako u strogo minimizira funkcional energije na prostoru V , odnosno:

$$E(u) = \min_{v \in V} E(v).$$

Pokažimo ove rezultate u jednom (umjetnom) primjeru. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena domena s Lipschitzovim rubom $\partial\Omega$. Promatramo klasičnu rubnu zadaću s homogenim Dirichletovim rubnim uvjetom:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x_1, x_2) \nabla u) = f(x_1, x_2) & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2.11)$$

gdje je $f \in L^2(\Omega)$ neka fiksna zadana funkcija, a matrica koeficijenata $A(x_1, x_2)$ zadana je s:

$$A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3 + \sin(x_1) & 1 \\ 1 & 3 + \cos(x_2) \end{bmatrix}.$$

Kao u uvodu, izvodimo varijacijsku (slabu) formulaciju i dobivamo zadaću: naći $u \in V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \partial\Omega\}$ takvu da za sve $v \in V$ vrijedi

$$\int_{\Omega} A(x_1, x_2) \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (2.2.12)$$

Da bismo provjerili dobru postavljenost (egzistenciju i rješenje zadaće), definiramo forme $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ i $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ kao

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A(x_1, x_2) \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}, \quad l(v) = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Forma je a je očito bilinearna (dodatno je i simetrična) te l linearna. Ostala svojstva provjeravamo redom. Očito je V Hilbertov prostor kao zatvoreni podskup od H^1 . Primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti u L^2 dobivamo:

$$|l(v)| \leq \int_{\Omega} |fv| \, dxdy \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Slijedi da je $l \in V'$ ograničen funkcional s normom $\|l\|_{V'} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Nadalje, budući da koeficijenti matrice A ne prelaze vrijednost 4 (jer je $\max(3 + \sin x) = 4$), postoji konstanta $M > 0$ takva da je $|A(x, y)\xi| \leq M|\xi|$. Primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti imamo:

$$|a(u, v)| \leq \int_{\Omega} |A \nabla u \cdot \nabla v| \, dxdy \leq M \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| \, dxdy \leq M \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Kako po definiciji H^1 norme vrijedi $\|\nabla u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$, forma je ograničena: $|a(u, v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Preostalo nam je provjeriti smo koercitivnost, koja je u pravilu uvijek najteža za provjeriti.

Za svaki vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ograničavamo odozdo kvadratnu formu $\xi^T A(x_1, x_2) \xi$. Budući da je $\sin(x_1) \geq -1$ i $\cos(x_2) \geq -1$, vrijedi $3 + \sin(x_1) \geq 2$ i $3 + \cos(x_2) \geq 2$. Slijedi:

$$\begin{aligned} \xi^T A(x_1, x_2) \xi &= (3 + \sin x_1) \xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 + (3 + \cos x_2) \xi_2^2 \\ &\geq 2\xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 + 2\xi_2^2 \\ &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 + \xi_2^2) \\ &= |\xi|^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2 \geq |\xi|^2. \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da je matrica A uniformno pozitivno definitna na Ω s konstantom eliptičnosti $\alpha = 1$. Uvrštavamo $v = u$ u formu i dobivamo

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u^T A(x, y) \nabla u \, dxdy \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dxdy = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Budući da $u \in H_0^1(\Omega)$ zadovoljava homogeni Dirichletov uvjet na cijelom rubu, na njega možemo primijeniti Poincaréovu nejednakost (Teorem 2.1.16). Postoji konstanta $C_P > 0$ ovisna samo o domeni Ω takva da je $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Iz definicije pune norme $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2$ slijedi:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (C_P^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Uvrštavanjem ovog rezultata u ocjenu za formu a dobivamo:

$$a(u, u) \geq \frac{1}{C_P^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Forma a je koercitivna s konstantom $\tilde{\alpha} = \frac{1}{C_P^2 + 1} > 0$.

Budući da su ispunjeni svi uvjeti Lax-Milgramove leme, varijacijska zadaća (2.2.12) ima jedinstveno rješenje $u \in H_0^1(\Omega)$. Uz to, vrijedi i apriorna ocjena koja nam jamči stabilnost rješenja s obzirom na desnu stranu:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \|l\|_{V'} \leq (C_P^2 + 1) \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

U nastavku skripte primjenjivat ćemo sličnu analizu koju ćemo u pravilu sve manje obrazlagati jer će se pojavljivati u sve kompliciranijem kontekstu (u pravilu u situacijama s familijama diferencijalnih zadaća ovisne o parametru ε).

Zadatak 2.2.7

U ovom poglavlju raspisali smo varijacijsku formulaciju za diferencijalnu jednadžbu (2.2.8) uz pretpostavke $\mathbf{b} = 0$, $c = 0$. Raspišite kako bi glasila varijacijska formulacija za generalni izbor

funkcija $\mathbf{b}$ i c , te nađite neke uvjete na $\mathbf{b}$ i c za koje je Lax-Milgramova lemma zadovoljena (a da nije $\mathbf{b} = 0$).

Poglavlje 3

Nesingularni problemi za eliptičke PDJ

3.1 Prvi primjer familije eliptičkih problema

Kao uvod u opću apstraktnu teoriju, promatramo familiju eliptičkih problema na fiksnoj ograničenoj domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s Lipschitzovim rubom, kod kojih se matricno polje koeficijenata $A_\varepsilon(\mathbf{x})$ i desna strana $f_\varepsilon(\mathbf{x})$ blago mijenjaju pod utjecajem malog parametra $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon) = f_\varepsilon & \text{u } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Pretpostavimo da je familija simetričnih matrica $A_\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ uniformno pozitivno definitna, tj. postoji konstanta eliptičnosti $\alpha > 0$ neovisna o ε takva da vrijedi:

$$A_\varepsilon(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \quad \text{g.s. } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

Dakle, konstantna pozitivne definitnosti uniformna je i po $\mathbf{x}$ i po $\varepsilon > 0$.

Nadalje, pretpostavimo da koeficijenti konvergiraju uniformno, $A_\varepsilon \rightarrow A_0$ u $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, te da desne strane konvergiraju $f_\varepsilon \rightarrow f_0$ jako u $L^2(\Omega)$. Dokazat ćemo da niz rješenja u_ε konvergira jako prema rješenju limitnog problema u_0 u prostoru $V = H_0^1(\Omega)$ koji je dan s matricom A_0 i desnom stranom f_0 .

Na prostoru $V = H_0^1(\Omega)$ definiramo familiju bilinearnih formi $a_\varepsilon : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ i linearnih funkcionala $l_\varepsilon \in V'$ za svaki $\varepsilon \geq 0$:

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega A_\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad l_\varepsilon(v) = \int_\Omega f_\varepsilon v \, dx.$$

Varijacijske formulacije za perturbirani i limitni problem (za $\varepsilon \geq 0$) glase

$$\text{Naći } u_\varepsilon \in V \text{ t.d. } a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v), \quad \forall v \in V.$$

Prvo ćemo dokazati da uniformna pozitivna definitnost matrica A_ε povlači uniformnu koercitivnost bilinearnih funkcionala a_ε . Za proizvoljnu $v \in V$ vrijedi

$$\int_\Omega A(\mathbf{x})\nabla v \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} \geq c_P \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

gdje smo na kraju iskoristili i Poincaréovu nejednakost. Dakle, dokazali smo

$$\exists \tilde{\alpha} > 0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 : \quad a_\varepsilon(v, v) \geq \tilde{\alpha} \|v\|_V^2. \quad (3.1.2)$$

U tu nejednakost uvrštavamo $v := u_\varepsilon - u_0$. Ako dokažemo da lijeva strana ide k nuli, dobit ćemo da isto vrijedi i za desnu, što znači da ćemo dobiti jaku konvergenciju rješenja u H^1 normi. Koristeći linearnost forme, slijedi

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) = a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) - a_\varepsilon(u_0, u_\varepsilon - u_0).$$

Budući da je u_ε rješenje varijacijske zadaće uz formu a_ε , vrijedi $a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) = l_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0)$. Uvrštavanjem toga i dodavanjem te oduzimanjem izraza $a_0(u_0, u_\varepsilon - u_0) = l_0(u_\varepsilon - u_0)$, dobivamo:

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) &= l_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) - a_\varepsilon(u_0, u_\varepsilon - u_0) \\ &= l_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) - l_0(u_\varepsilon - u_0) + a_0(u_0, u_\varepsilon - u_0) - a_\varepsilon(u_0, u_\varepsilon - u_0) \\ &= (l_\varepsilon - l_0)(u_\varepsilon - u_0) + (a_0 - a_\varepsilon)(u_0, u_\varepsilon - u_0). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Za prvi član s desne strane iz Cauchy-Schwarzove i Poincaréove nejednakosti imamo

$$|(l_\varepsilon - l_0)(u_\varepsilon - u_0)| = \int_{\Omega} (f_\varepsilon - f_0)(u_\varepsilon - u_0) d\mathbf{x} \leq \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon - u_0\|_V. \quad (3.1.4)$$

Za drugi član iz uzastopne primjene Hölderove nejednakosti i Poincaréove nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} |(a_0 - a_\varepsilon)(u_0, u_\varepsilon - u_0)| &= \left| \int_{\Omega} (A_0(x) - A_\varepsilon(x)) \nabla u_0 \cdot \nabla (u_\varepsilon - u_0) dx \right| \\ &\leq \|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla (u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_0\|_V \|u_\varepsilon - u_0\|_V. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Kad vratimo u (3.1.3) dobivamo

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \leq \left(C \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_0\|_V \right) \|u_\varepsilon - u_0\|_V.$$

Korištenjem (3.1.2) i dijeljenjem s $\|u_\varepsilon - u_0\|_V$ dobivamo izravnu ocjenu za pogrešku u normi:

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \left(C \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_0\|_V \right).$$

Budući da po pretpostavci $\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ i $\|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$ kada $\varepsilon \rightarrow 0$, desna strana nejednakosti teži u nulu. Slijedi:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u_0\|_V = 0,$$

čime je jaka konvergencija rješenja $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ u prostoru $H_0^1(\Omega)$ u potpunosti dokazana.

3.2 Generalizirani rezultat za nesusingularne probleme

Prethodni primjer je primjer tzv. nesusingularnih problema: familija zadaća ne mijenja prirodu problema. Iako se ovisnost o ε nalazi uz najviše (i jedine) derivacija lijeve strane, matrice su uniformno pozitivno definitne. Ovak primjer podsjeća na Primjer 1. Ovak pristup, iako već i u ovom formatu generalan, može se još više generalizirati. To možemo tako da uključimo još i članove nižeg reda u jednadžbu, ali i tako da gledamo sustave umjesto jednadžbi (nepoznanica u može imati kodomenu $\mathbb{R}^m$ umjesto $\mathbb{R}$). To ćemo postići apstrahiranjem i iskazivanjem problema pomoću bilinearnih formi a_ε , linearne forme l_ε i postavljanjem uvjeta na njih.

Ključ raspisa prošlog primjera je raspis dan u (3.1.3). Lijevu stranu smo ograničili pomoću (3.1.2), a desne strane time što smo dobili da desne strane u (3.1.4) i (3.1.5) podijeljene s $\|u_\varepsilon - u_0\|_V$ teže u nulu. Ako uvedemo pretpostavke koje to omogućuju u generalnom slučaju, tvrdnja i dokaz će proći na isti način.

Teorem 3.2.1:

Neka je V Hilbertov prostor. Neka su $a_\varepsilon : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ($\varepsilon \geq 0$) bilinearne forme te $l_\varepsilon \in V'$ linearni funkcionali koji zadovoljavaju sljedeća svojstva:

1. **Uniformna koercitivnost:** Postoji $\alpha > 0$ t.d. $a_\varepsilon(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ za sve $v \in V$ i sve $\varepsilon \geq 0$;

2. **Konvergenција formi u L^∞ smislu:** Za sve $u, v \in V$ vrijedi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|a_\varepsilon(u, v) - a_0(u, v)|}{\|u\|_V \|v\|_V} = 0;$$

3. **Konvergenција desne strane:** $l_\varepsilon \rightarrow l_0$ jako u V' .

Tada familija $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset V$ jedinstvenih rješenja zadaća

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v), \quad \forall v \in V$$

konvergira jako u V ka jedinstvenom rješenju $u_0 \in V$ zadaće

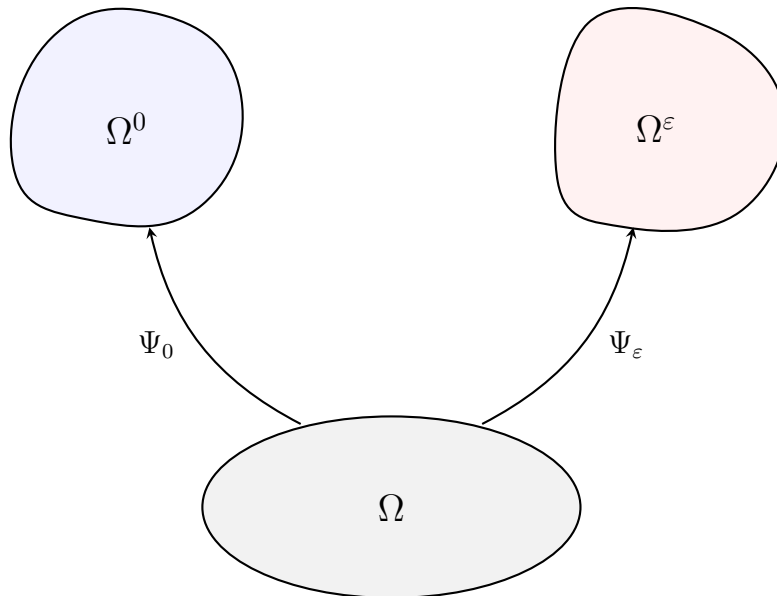
$$a_0(u^0, v) = l_0(v), \quad \forall v \in V.$$

Zadatak 3.2.2

Provjerite detalje dokaza, uvjerite se da raspis iz početnog poglavlja funkcionira i u ovoj generalnoj postavci.

3.3 Neprekidna ovisnost o geometriji (Regularne perturbacije domene)

U ovom dijelu primijenit ćemo Teorem 3.2.1 na probleme koji imaju istu jednadžbu, ali različite domene. U drugom dijelu ovog kolegija bavit ćemo se nižedimenzionalnim modelima: izvodit ćemo jednadžbe za probleme kod kojih debljina domene teži u nulu. Ovaj rezultat neće pokriti takve slučajeve, ali će poslužiti kao uvod u ono što nas čeka. Kako bismo pojednostavnili ono što se može pojednostaviti, umjesto generalne jednadžbe promatrat ćemo Laplaceovu jednadžbu $-\Delta u = f$ s homogenim Dirichletovim rubnim uvjetom na cijelom rubu, samo što će biti zadane na raznim domenama Ω^ε , $\varepsilon > 0$.



Način uspoređivanja tih domena, odnosno argumenta da domene $(\Omega^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ konvergiraju u neku domenu Ω^0 , bit će prebacivanje na parametrizaciju tih domena i promatranje konvergenije funkcija koje parametriziraju te domene.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fiksna, ograničena referentna domena s Lipschitzovim rubom. Za sve $\varepsilon \geq 0$, na njoj zadajemo glatka preslikavanja (homeomorfizme) $\Phi_\varepsilon : \Omega \rightarrow \Omega^\varepsilon$:

$$\Omega^\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega).$$

Primijetite da je uključivanje parametrizacija logičan korak, jer nije jasno kako bismo inače drugačije mogli usporediti rješenja (ili bilo kakve funkcije) sa različitih domena osim ako ih povučemo da imaju zajedničku domenu.

Korolar 3.3.1: Nепrekidna ovisnost rješenja o domeni

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fiksna ograničena domena s Lipschitzovim rubom i neka je $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Neka su $\Phi_\varepsilon : \Omega \rightarrow \Omega^\varepsilon$ ($\varepsilon \geq 0$) homeomorfizmi za koje vrijedi:

- $\Phi_\varepsilon \rightarrow \Phi_0$ jako u $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ kada $\varepsilon \rightarrow 0$,
- Φ_0 je bi-Lipschitzovo preslikavanje (funkcija i njezin inverz su Lipschitzove (tj. $W^{1,\infty}$) funkcije) uz uvjet da postoji konstanta $c > 0$ takva da vrijedi:

$$|J_0(x)| = |\det(D\Phi_0(x))| \geq c > 0 \quad \text{g.s. u } \Omega.$$

Neka je, za svaki $\varepsilon \geq 0$, funkcija $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ jedinstveno slabo rješenje Dirichletove zadaće

$$-\Delta u^\varepsilon = f \quad \text{u } \Omega^\varepsilon, \quad u^\varepsilon = 0 \quad \text{na } \partial\Omega^\varepsilon.$$

Tada transformirana rješenja $\hat{u}^\varepsilon = u^\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ konvergiraju jako u prostoru $H_0^1(\Omega)$ prema $\hat{u}^0 = u^0 \circ \Phi_0$, transformiranom rješenju limitne zadaće na Ω^0 .

U nastavku dokazujemo taj rezultat. Varijacijska formulacija na Ω^ε glasi: naći $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ t.d.

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \nabla_{x^\varepsilon} u^\varepsilon \cdot \nabla_{x^\varepsilon} v^\varepsilon \, d\mathbf{x}^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f v^\varepsilon \, d\mathbf{x}^\varepsilon, \quad \forall v^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon). \quad (3.3.6)$$

Koristeći lančano pravilo na $\hat{u}^\varepsilon = u^\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$, gradijent se transformira kao $\nabla_{x^\varepsilon} u^\varepsilon = (D\Phi_\varepsilon)^{-T} \nabla_x \hat{u}^\varepsilon$, dok se element volumena transformira u $d\mathbf{x}^\varepsilon = |J_\varepsilon| d\mathbf{x}$. Uvrštavanjem ovih izraza u (3.3.6), dobivamo ekvivalentnu zadaću na fiksnoj domeni Ω :

$$\int_{\Omega} \left((D\Phi_\varepsilon)^{-T} \nabla \hat{u}^\varepsilon \right) \cdot \left((D\Phi_\varepsilon)^{-T} \nabla \hat{v} \right) |J_\varepsilon| \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f \circ \Phi_\varepsilon) \hat{v} |J_\varepsilon| \, d\mathbf{x}. \quad (3.3.7)$$

Ovu ružnu formulaciju prebacujemo u *setting* Teorema 3.2.1. Prvo definiramo familiju $A_\varepsilon(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ kao:

$$A_\varepsilon(\mathbf{x}) = |J_\varepsilon(\mathbf{x})| (D\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} (D\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}))^{-T}, \quad (3.3.8)$$

a onda definiramo bilinearne forme $a_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ i linearne funkcionalne $l_\varepsilon \in (H_0^1(\Omega))'$ kao

$$a_\varepsilon(\hat{u}, \hat{v}) = \int_{\Omega} A_\varepsilon \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{v} \, d\mathbf{x}, \quad l_\varepsilon(\hat{v}) = \int_{\Omega} (f \circ \Phi_\varepsilon) \hat{v} |J_\varepsilon| \, d\mathbf{x}.$$

Kako bismo primijenili Teorem 3.2.1, moramo provjeriti njegova tri uvjeta. Iz konvergencije $\Phi_\varepsilon \rightarrow \Phi_0$ u $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ izravno slijedi da matrice Jakobijana $D\Phi_\varepsilon \rightarrow D\Phi_0$ te determinante $|J_\varepsilon| \rightarrow |J_0|$ konvergiraju uniformno (u $L^\infty(\Omega)$). Budući da je limitno preslikavanje Φ_0 regularno, njegova pripadna matrica $A_0 = |J_0| (D\Phi_0)^{-1} (D\Phi_0)^{-T}$ je strogo pozitivno definitna, tj. postoji $\alpha_0 > 0$ takav da $A_0(\mathbf{x}) \xi \cdot \xi \geq \alpha_0 |\xi|^2$ g.s. u Ω . Zbog konvergencije $A_\varepsilon \rightarrow A_0$ u $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ sve matrice A_ε zadržavaju pozitivnu definitnost s uniformnom konstantom, primjerice $\alpha = \alpha_0/2$. To nam daje traženu uniformnu koercitivnost familije formi a_ε .

Nadalje, zbog spomenute konvergencije koeficijenata $A_\varepsilon \rightarrow A_0$ u $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, imamo direktnu ocjenu:

$$|a_\varepsilon(\hat{u}, \hat{v}) - a_0(\hat{u}, \hat{v})| \leq \|A_\varepsilon - A_0\|_{L^\infty} \|\nabla \hat{u}\|_{L^2} \|\nabla \hat{v}\|_{L^2}.$$

Zadnje, uz standardnu pretpostavku da je $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, kompozicija $f \circ \Phi_\varepsilon$ konvergira prema $f \circ \Phi_0$ jako u $L^2(\Omega)$. U kombinaciji s $|J_\varepsilon| \rightarrow |J_0|$ u $L^\infty(\Omega)$, slijedi da desne strane konvergiraju jako, odnosno $\|l_\varepsilon - l_0\|_{(H_0^1)'} \rightarrow 0$.

Sva tri uvjeta Teorema 3.2.1 su zadovoljena. Zaključujemo da rješenja $\hat{u}^\varepsilon$ transformiranih problema konvergiraju jako u $H_0^1(\Omega)$ prema limitnom rješenju $\hat{u}^0$.

Zadatak 3.3.2

Koristeći argument gustoće s C^∞ funkcijama opravdajte da kompozicija $f \circ \Phi_\varepsilon$ konvergira prema $f \circ \Phi_0$ jako u $L^2(\Omega)$.

Poglavlje 4

Singularni problemi za eliptičke PDJ, penalizirajuća anizotropija

4.1 Familija eliptičkih zadaća i dobra postavljenost

U prošlom poglavlju gledali smo probleme vezane za familije nesingularnih eliptičkih PDJ. To smo prepoznali u tome što su matrice $A_\varepsilon(\mathbf{x})$ bile uniformno ograničene odozgo i uniformno koercitivne. Nadalje gledamo probleme kod kojih neće biti tako. Počet ćemo s onima kod kojih ćemo imati problema s ograničenosti odozgo (pa posebno nećemo imati $A_0(\mathbf{x})$ takvu da $A_\varepsilon \rightarrow A_0$ u L^∞ . Za ovo i sljedeće poglavlje, radi jednostavnosti, fiksiramo domenu $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$.

U ovom poglavlju za $\varepsilon > 0$ promatramo zadaću

$$\begin{cases} -\partial_{11}u^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_{22}u^\varepsilon = f(x_1, x_2) & \text{u } \Omega, \\ u^\varepsilon(0, x_2) = u^\varepsilon(1, x_2) = 0 & \text{za } x_2 \in (0, 1), \\ \partial_2u^\varepsilon(x_1, 0) = \partial_2u^\varepsilon(x_1, 1) = 0 & \text{za } x_1 \in (0, 1). \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Priklada prostor za ovu zadaću je $V = \{v \in H^1(\Omega) : v(0, x_2) = v(1, x_2) = 0 \text{ g.s.}\}$. Drugim riječima, matrično polje A_ε je zapravo konstantna matrica $A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} \end{bmatrix}$. Standardnim postupkom (množenjem jednadžbe test funkcijom $v \in V$, integracijom po domeni Ω te primjenom parcijalne integracije) dobivamo slabu formulaciju: naći $u^\varepsilon \in V$ takav da za svaku test funkciju $v \in V$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \partial_1 u^\varepsilon \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 u^\varepsilon \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (4.1.2)$$

Prije promatranja što se događa kada $\varepsilon \rightarrow 0$, dokažimo da je za svaki ε ova zadaća dobro postavljena. Za je ključno dokazati koercitivnost i ograničenost bilinearne forme, a za to smo naučili da je dovoljno promatrati matrice A_ε . Za $\varepsilon \in (0, 1]$ i za svaki $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$|\boldsymbol{\xi}|^2 \leq A_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = \xi_1^2 + \varepsilon^{-2} \xi_2^2 \leq \varepsilon^{-2} |\boldsymbol{\xi}|^2,$$

pa su matrice A_ε pozitivno definitne i ograničene odozgo. Postupanjem kao i ranije (provjerom svih uvjeta Lax-Milgramove leme, te primjenom Poincaréove nejednakosti) dobivamo sljedeći rezultat.

Teorem 4.1.1: Dobra postavljenost zadaće

Neka je $f \in L^2(\Omega)$. Za svaki fiksni parametar $\varepsilon > 0$, varijacijska zadaća pripadna diferencijalnom problemu (4.1.1) ima jedinstveno slabo rješenje $u^\varepsilon \in V$.

4.2 Formalni asimptotski razvoj (bez dokaza)

Kod singularnih problema kod kojih nemamo intuiciju kako će izgledati rješenje na limesu česti korak uvesti pretpostavku da rješenje u^ε možemo razviti u red potencija malog parametra ε . Takav red nazivamo formalnim asimptotskim razvojem (formalnim jer u ovom trenutku još ne znamo konvergira li taj red uopće). Nakon toga možemo ili opravdati taj razvoj ili primijeniti neke druge tehnike dokaza nevezane uz razvoj, ali koristeći formalni razvoj kao informaciju o tome što želimo dokazati.

Pretpostavimo rješenje u obliku:

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\mathbf{x}).$$

Naš je cilj otkriti koje zadaće zadovoljavaju funkcije $u_0, u_1, u_2, \dots$ te u konačnici pronaći jednadžbu za vodeći član u_0 , koji predstavlja *limitno rješenje*.

Uvrstimo naš pretpostavljeni red za u^ε u slabu formulaciju (4.1.2):

$$\int_{\Omega} \partial_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k \right) \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k \right) \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V.$$

Zbog linearnosti integrala i derivacije, možemo izlučiti potencije parametra ε i grupirati članove:

$$\varepsilon^{-2} \int_{\Omega} \partial_2 u_0 \partial_2 v + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} \partial_2 u_1 \partial_2 v + \varepsilon^0 \left(\int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v + \int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v \right) + \cdots = \varepsilon^0 \int_{\Omega} f v.$$

Kako bi ova jednakost vrijedila za svaki $\varepsilon > 0$, koeficijenti uz svaku potenciju od ε s lijeve i desne strane moraju biti jednaki. Time dobivamo niz varijacijskih jednakosti koje moraju vrijediti za svaku test funkciju $v \in V$. Krećemo od one s najnižom potencijom od ε .

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$:

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_0 \partial_2 v \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in V.$$

Ako u ovoj jednakosti odaberemo $v = u_0$, dobivamo $\int_{\Omega} |\partial_2 u_0|^2 = 0$, što izravno implicira da je $\partial_2 u_0 = 0$ gotovo svuda. Dakle, vodeći član razvoja uopće ne ovisi o varijabli x_2 :

$$u_0 = u_0(x_1).$$

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$:

Slično kao gore, dobivamo $\int_{\Omega} \partial_2 u_1 \partial_2 v = 0$, iz čega proizlazi da i prvi korektor ovisi samo o x_1 , odnosno $u_1 = u_1(x_1)$.

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$:

$$\int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V. \quad (4.2.3)$$

Ova jednakost je prva u kojoj nam se pojavljuje sila na desnoj strani, pa je zato ta jednakost u pravilu ona koja nam služi za pronalazak jednadžbe koju zadovoljava u_0 (ta funkcija nosi najveću informaciju o limesu funkcija u_ε , dok su ostale funkcije njezini korektori). Zato tražimo način kako se riješiti svih ostalih funkcija u_k iz jednakosti. Odgovarajući integral s u_2 će nestati ako za test funkciju odaberemo onu za koju vrijedi $\partial_2 v = 0$. Ono što nije slučajno je da je to upravo uvjet koji već zadovoljava i funkcija u_0 od ranije. Odnosno, dobit ćemo jednadžbu za u_0 s istim prostorom test funkcija u kojem se već funkcija u_0 nalazi.

Neka je dakle $v = v(x_1) \in H_0^1(0, 1)$ i neka drugi integral u (4.2.3) nestaje. Preostaje nam:

$$\int_0^1 \int_0^1 \partial_1 u_0(x_1) v'(x_1) dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) v(x_1) dx_2 dx_1.$$

Budući da u_0 , v i v' ne ovise o x_2 , možemo izračunati integral po x_2 :

$$\int_0^1 u_0'(x_1) v'(x_1) \left(\int_0^1 1 dx_2 \right) dx_1 = \int_0^1 v(x_1) \left(\int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$

Ako definiramo srednju vrijednost desne strane po presjeku kao $\bar{f}(x) = \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2$, dobivamo:

$$\int_0^1 u_0'(x_1) v'(x_1) dx_1 = \int_0^1 \bar{f}(x_1) v(x_1) dx_1, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1). \quad (4.2.4)$$

Ovim smo postupkom otkrili da limitno rješenje $u_0(x)$ zadovoljava 1D varijacijsku zadaću koja odgovara diferencijalnoj jednadžbi $-u_0''(x) = \bar{f}(x)$ uz rubne uvjete $u_0(0) = u_0(1) = 0$. Dakle, formalni razvoj sugerira nam da član ε^{-2} u originalnoj jednadžbi (4.1.2) penalizira derivaciju po drugoj varijabli tjerajući da funkcija na limesu ne ovisi o drugoj varijabli, i čime esencijalno dobivamo problem na domeni koja ima dimenziju manje. Ostali članovi bez epsilon preostaju u jednadžbi.

Formalni razvoj u pravilu tu zaustavljamo jer smo dobili jednadžbu za u_0 . Ako bi nas zanimalo više o korektorima (koje jednadžbe jedinstveno određuju u_1 , u_2 i sl) nastavili bismo ovaj proces.

4.2.1 Dokaz apriornim ocjenama i slabom konvergencijom

Kao što smo najavili, formalni asimptotski razvoj je samo formalni račun bez dokaza. Da bismo dokazali da u^ε ima ovakav limes, moramo to i dokazati. U ovom dijelu prikazujemo prvi od dva pristupa. Algoritam je sljedeći:

- Iz familije zadaća naći *apriorne* ocjene koje zadovoljava niz rješenja $(u^\varepsilon)_\varepsilon$, tj. dokazati da vrijedi $\|u^\varepsilon\| \leq C$ u nekoj normi, za sve $\varepsilon > 0$ s konstantom $C > 0$ neovisnom o $\varepsilon > 0$.
- Te apriorne ocjene iskoristiti kao pretpostavku Banach-Alaouglvog teorema (Teorem 2.1.17) pomoću kojeg zaključujemo da postoji niz $(\varepsilon^n)_{n \in \mathbb{N}}$ koji teži k nuli i slabo konvergentni niz $(u^{\varepsilon^n})_{n \in \mathbb{N}}$ rješenja ε_n problema. Topologija konvergencije ovisi o normi u kojoj ostvarimo apriornu ocjenu.
- Iskoristiti taj slabo konvergentni niz kako bismo u ε problemima pustili limes s odgovarajućim test funkcijama $v \in V$, te na limesu dokazali da slabi limes funkcija $(u^{\varepsilon^n})_{n \in \mathbb{N}}$ zadovoljava limesnu jednadžbu.
- Dokazati da je limesna jednadžba dobro postavljena (ima jedinstveno rješenje), što implicitno pokazuje da cijeli familija rješenja $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ slabo konvergira ka rješenju.
- U konačnici dokazati jaku konvergenciju tehnikom sličnoj onoj iz prošlog poglavlja.

Prva dva koraka u većini slučajeva se spajaju, budući da je drugi korak samo čista primjena postojećeg rezultata funkcionalne analize. Tako ćemo napraviti i ovdje. Najčešći cilj apriornih ocjena je dokazati da imamo slabu H^1 konvergenciju funkcija rješenja (što je ekvivalentno tome da funkcije i njezine derivacije slabo L^2 konvergiraju). Međutim, zbog prirode ovog problema u apriorne ocjene možemo dodati još nešto. U formalnom razvoju smo primijetili da funkcija u_0 na limesu ne ovisi o varijabli x_2 , pa to možemo odmah dokazati na ovom mjestu.

Propozicija 4.2.1: Apriorne ocjene i slaba konvergencija

Neka je $u^\varepsilon \in V$ rješenje varijacijske zadaće (4.1.2). Tada postoji konstanta $C > 0$, neovisna o ε , takva da za sve $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi:

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \quad \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Nadalje, postoji podniz $(u^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ i funkcija $u^* \in V$ koja ovisi samo o x_1 ($u^* = u^*(x_1)$), takvi da $u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup u^*$ slabo u V kada $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Dokaz.

Testiramo varijacijsku formulaciju sa samim rješenjem, tj. uzimamo test funkciju $v = u^\varepsilon$, te na desnoj strani primjenjujemo Cauchy-Schwarzovu nejednakost. Dobivamo

$$\|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} f u^\varepsilon dx \leq \|f\|_{L^2} \|u^\varepsilon\|_{L^2}. \quad (4.2.5)$$

Za ocjenu lijeve strane koristimo Poincaréovu nejednakost, čime dobivamo kontrolu nad L^2 normom od u^ε . Uz konstantu $C_P > 0$ (i pretpostavku $\varepsilon \leq 1$) vrijedi:

$$C_P \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2}^2.$$

Spajanjem gornjih ocjena dobivamo:

$$C_P \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|u^\varepsilon\|_{L^2}.$$

Dijeljenjem s $\|u^\varepsilon\|_{L^2}$ zaključujemo da je $\|u^\varepsilon\|_{L^2} \leq \frac{1}{C_P} \|f\|_{L^2}$, odnosno da je L^2 norma niza (u^ε) uniformno ograničena.

Kako je $\|u^\varepsilon\|_{L^2}$ ograničena, ograničena je i desna strana početne jednakosti. To povlači da je ograničen i cijeli izraz na lijevoj strani (4.2.5), pa postoji konstanta $M > 0$ (neovisna o ε) takva da:

$$\|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq M \quad \text{ i } \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq M.$$

Iz ovoga neposredno slijedi da su derivacije $\partial_1 u^\varepsilon$ i $\partial_2 u^\varepsilon$ ograničene u $L^2(\Omega)$, pa je ukupna norma $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ ograničena. Zbog rubnih uvjeta i teorema o tragovima, znamo da rješenja zapravo leže u prostoru $V \subset H^1(\Omega)$. Dakle, cijeli niz (u^ε) je uniformno ograničen u prostoru V .

Također, iz druge ocjene posebno naglašavamo ograničenost skalirane derivacije:

$$\frac{1}{\varepsilon} \|\partial_2 u^\varepsilon\|_{L^2} \leq \sqrt{M}.$$

Sada možemo prijeći na limes $\varepsilon \rightarrow 0$. Prema Banach-Alaogluovom teoremu, zbog uniformne ograničenosti niza u Hilbertovom prostoru V , možemo izvući slabo konvergentan podniz te postoji $u^* \in V$ takav da:

$$u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup u^* \quad \text{ slabo u } V.$$

Slaba konvergencija u V implicira slabu konvergenciju gradijenata u $L^2(\Omega)$. Međutim, ocjena za drugu komponentu gradijenta pokazuje da $\|\partial_2 u^{\varepsilon_n}\|_{L^2} \rightarrow 0$, odnosno $\partial_2 u^{\varepsilon_n}$ konvergira jako u nulu. Zbog podudaranja slabog i jakog limesa slijedi da je:

$$\partial_2 u^* = 0 \quad \text{ g.s. u } \Omega,$$

što znači da limitno rješenje ovisi isključivo o prvoj varijabli.

Sada je trenutak za treći korak: puštanje slabih limesa i ostvarivanje limesne jednadžbe. Uz kvalitne apriorne ocjene kakve imamo, ovo će biti jako kratko (inače može biti kompleksnije i potrebno je više koraka). Kako smo dobili da limesna funkcija u^* pripada prostoru

$$\{v \in H^1(\Omega) : v(0, \cdot) = v(1, \cdot) = 0, \partial_2 v = 0\} \equiv \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = v(1) = 0\} = H_0^1(0, 1),$$

prirodno je tražiti isto i za test funkciju. Dakle, uzmimo proizvoljnu test funkciju $v \in H_0^1(0, 1)$ (4.1.2) i pustimo $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Iz Propozicije 4.2.1 znamo da $\partial_1 u^{\varepsilon_n}$ konvergira slabo u $L^2(\Omega)$, pa imamo konvergenciju prvog integrala s lijeve strane (4.1.2). Drugi integral s lijeve strane te jednakosti je jednak nuli, a desna strana ima uvijek istu vrijednost. Dobivamo istu jednadžbu kao i u formalnom raskupu:

$$\int_0^1 \int_0^1 \partial_1 u^*(x_1) v'(x_1) dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) v(x_1) dx_2 dx_1, \quad (4.2.6)$$

a onda uz istu oznaku $\bar{f}(x) = \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2$, dobivamo:

$$\int_0^1 u'_0(x_1) v'(x_1) dx_1 = \int_0^1 \bar{f}(x_1) v(x_1) dx_1, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

Za četvrti korak moramo dokazati da ova jednadžba ima jedinstveno rješenje. Prema Lax-Milgramovoj lemi, treba pokazati koercitivnost lijeve strane, što je jednostavan zadatak prema Poincaréovoj nejednakosti. Za svaku $v \in H_0^1(0, 1)$, kako imamo homogeni Dirichletov rubni uvjet, imamo

$$\|v\|_{H^1(0,1)}^2 = \|v\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v'\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_P^2 \|v'\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v'\|_{L^2(0,1)}^2 = (1 + C_P^2) \int_0^1 v'(x) v'(x) dx.$$

Dokaze za ograničenost forme s lijeve strane i neprekidnost s desne preskačemo. Time smo dokazali da limesna jednadžba ima jedinstveno rješenje. To ujedno implicitno pokazuje i da cijela familija $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ teži ka u^* . Naime, pretpostavimo suprotno, neka postoji podniz $(u^{\varepsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$ koji ne konvergira slabo ka u^* (divergira ili konvergira prema nekom drugom limesu). Za njega provedimo rezultate odozgo: iz apriornih ocjena iz tog podniza uzmimo podniz (koji ćemo označiti s $(u_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$) koji konvergira slabo. Račun pokazuje da konvergira ka u^* , što je nemoguće za podniz niza koji bježi od u^* , čime smo dobili kontradikciju.

U znanstvenim člancima ovaj zadnji argument se često niti ne spominje, nego odmah nakon dokaza jedinstvenosti limesne jednadžbe se piše rezultat.

Teorem 4.2.2: Slaba konvergencija rješenja anizotropne zadaće

Neka je $u^\varepsilon \in V$ rješenje varijacijske zadaće (4.1.2), i neka je $u^* \in H_0^1(0, 1)$ jedinstveno rješenje 1D zadaće

$$\int_0^1 (u^*)'(x_1) v'(x_1) dx_1 = \int_0^1 \bar{f}(x_1) v(x_1) dx, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1), \quad (4.2.7)$$

gdje je $\bar{f}(x_1) = \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2$. Tada cijeli niz (u^ε) slabo konvergira prema u^* u $H^1(\Omega)$.

Međutim, osim slabe konvergencije, imamo i jaku konvergenciju.

Teorem 4.2.3: Jaka konvergencija rješenja anizotropne zadaće

Neka je $u^\varepsilon \in V$ rješenje varijacijske zadaće (4.1.2), i neka je $u^* \in H_0^1(0, 1)$ jedinstveno rješenje 1D zadaće (4.2.7). Tada cijeli niz (u^ε) jako konvergira prema u^* u $H^1(\Omega)$.

Dokaz.

Za jaku konvergenciju pristupamo slično kao u prošlom poglavlju. Promatramo funkcional po ε takav da u (4.1.2) umjesto i nepoznate funkcije i test funkcije stavimo razliku $u^\varepsilon - u^*$:

$$\Lambda(\varepsilon) = \int_{\Omega} (\partial_1(u^\varepsilon - u^*))^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2(u^\varepsilon - u^*))^2 d\mathbf{x}.$$

Iz koercitivnosti bilinearne forme (kao u dokazu Teorema 4.1.1 i Poincaréove nejednakosti slijedi

$$\Lambda(\varepsilon) \geq \|\nabla(u^\varepsilon - u^*)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{C_P^2} \|(u^\varepsilon - u^*)\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Zato, ako dokažemo da $\Lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$ kad $\varepsilon \rightarrow 0$, bit će dokazana jaka konvergencija.

Ako je bilinearna forma a simetrična kao u ovom slučaju, onda vrijedi

$$a(u - v, u - v) = a(u, u) - a(v, u - 2v).$$

Korištenjem tog raspisa na $\Lambda(\varepsilon)$ dobivamo

$$\begin{aligned} \Lambda(\varepsilon) &= \int_{\Omega} (\partial_1 u^\varepsilon)^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2(u^\varepsilon))^2 d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} \partial_1 u^* \partial_1(u^* - 2u^\varepsilon) d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 u^* \partial_2(u^* - 2u^\varepsilon) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Koristimo ovakav raspis iz sljedećeg razloga: u drugom retku možemo pustiti slabi limes jer pod integralima imamo umnožak konstantnog izraza (derivacija od u^*) i slabo konvergentnog izraza. Međutim, u prvom retku to nemamo. Općenito integral umnoška slabo konvergentnih nizova nije konvergentan! Za njega zato koristimo da zadovoljava jednadžbu (4.1.2) za svaku $v \in H^1(0, 1)$, pa tako i za $v = u^\varepsilon$. Te članove zato mijenjamo s izrazom s desne strane (4.1.2) i dobivamo

$$\Lambda(\varepsilon) = \int_{\Omega} f u^\varepsilon d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_1 u^* \partial_1(u^* - 2u^\varepsilon) d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 u^* \partial_2(u^* - 2u^\varepsilon) d\mathbf{x}.$$

Sada koristimo $\partial_2 u^* = 0$ (iako smo mogli i ranije), i puštamo slabi limes. Slijedi

$$\Lambda(\varepsilon) \rightarrow \Lambda(0) := \int_{\Omega} f u^* d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_1 u^* \partial_1(-u^*) d\mathbf{x} = 0,$$

budući da je to upravo limitna jednadžba s test funkcijom $v = u^*$. Dokazali smo željeno, $\Lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$, pa zato imamo jaku konvergenciju u $H^1(\Omega)$.

4.2.2 Dokaz opravdanjem asimptotskog razvoja

Nakon što smo dokazali jaku konvergenciju familije rješenja jednom tehnikom, pokažimo i drugu tehniku. Kada već imamo formalni asimptotski razvoj, ima logike pokušati ga opravdati. Za to prvo moramo na jednoznačan način odrediti funkcije koje se pojavljuju u asimptotskom razvoju. Za sad imamo samo jedinstveno dređeni u_0 . Da bismo odredili ostale funkcije, trebamo ponovno iskoristiti jednadžbu (4.2.3) (nismo izvukli sve informacije iz nje, samo smo uvrstili posebnu test funkciju), te vidjeti i kako glase sve ostale funkcije.

Članovi uz $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ za $k \geq 1$:

Izjednačavanjem koeficijenata uz potenciju ε^k ($k \geq 1$) dobivamo općenitu rekurzivnu relaciju:

$$\int_{\Omega} \partial_1 u_k \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_2 u_{k+2} \partial_2 v \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in V. \quad (4.2.8)$$

Sada pogledajmo što sve možemo saznati o u_k , $k \geq 1$. Odabirom test funkcije $v = v(x_1) \in H_0^1(0, 1)$ (za koju je $\partial_2 v = 0$) drugi integral u (4.2.8) iščezava, pa ostaje uvjet kompatibilnosti:

$$\int_0^1 \int_0^1 \partial_1 u_k(x_1, x_2) v'(x_1) \, dx_2 dx_1 = 0 \implies \int_0^1 \bar{u}'_k(x_1) v'(x_1) \, dx_1 = 0, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1),$$

gdje je $\bar{u}_k(x_1) = \int_0^1 u_k(x_1, x_2) \, dx_2$. Uz rubne uvjete, to povlači da su srednje vrijednosti svih korektora nula, tj. $\bar{u}_k \equiv 0$ za sve $k \geq 1$.

Dodatno, kako je $u_1 = u_1(x_1)$ i zbog $\bar{u}_1 = 0$ nužno $u_1 \equiv 0$, indukcijom slijedi da iščezavaju svi članovi s neparnim indeksima: $u_{2m+1} \equiv 0$ za sve $m \geq 0$.

Za parne indekse vratimo se na jednadžbu uz (4.2.3). Prebacimo poznate funkcije f i u_0 na desnu stranu jednakosti, te dobivamo

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V.$$

Zajedno s uvjetom $\bar{u}_2 = 0$, dokazat ćemo da ova zadaća ima jedinstveno rješenje.

Lema 4.2.4: Dobra postavljenost zadaće za u_2

Neka je $f \in L^2(\Omega)$ i neka u_0 zadovoljava zadaću limitnog rješenja. Varijacijska zadaća: naći $u_2 \in W$ takav da

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in W,$$

gdje je

$$W = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \partial_2 v \in L^2(\Omega), \int_0^1 v(x_1, x_2) \, dx_2 = 0 \text{ za g.s. } x_1 \in (0, 1) \right\}$$

Hilbertov prostor s normom $\|v\|_W = \|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)}$, ima jedinstveno rješenje.

Dokaz.

Uočimo prvo da izraz na desnoj strani zadane jednakosti formalno zahtijeva da test funkcija v ima slabu derivaciju po varijabli x_1 . Kako bismo problem korektno zadali u prostoru W , koji od funkcija zahtijeva derivabilnost samo u smjeru x_2 , desnu stranu možemo preurediti. Ako integriramo po dijelovima po varijabli x_1 i iskoristimo diferencijalnu jednadžbu za limitno rješenje $-\partial_{11} u_0 = \bar{f}$, slijedi da je $\int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \bar{f} v \, d\mathbf{x}$. Zato desnu stranu možemo definirati jednostavno kao linearni funkcional $l(v) = \int_{\Omega} (f - \bar{f}) v \, d\mathbf{x}$.

Zadaća se time svodi na pronalazak $u_2 \in W$ takvog da:

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f - \bar{f}) v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in W.$$

Dokaz sada provodimo izravnom primjenom Lax-Milgramove leme na Hilbertov prostor W . Bilinearna forma $a(u, v) = \int_{\Omega} \partial_2 u \partial_2 v \, d\mathbf{x}$ je očito ograničena (neprekidna) po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti:

$$|a(u, v)| \leq \|\partial_2 u\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_W \|v\|_W.$$

Nadalje, forma je uniformno koercitivna s konstantom eliptičnosti $\alpha = 1$, jer trivijalno vrijedi $a(v, v) = \|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v\|_W^2$.

Da bismo pokazali neprekidnost funkcionala $l(v)$, potrebna nam je kontrola nad normom $\|v\|_{L^2(\Omega)}$. Zbog svojstva da je prosjek funkcije po presjeku jednak nuli, na prostoru W vrijedi Poincaré-Wirtingerova nejednakost u smjeru varijable x_2 : postoji konstanta $C_P > 0$ takva da je $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)} = C_P \|v\|_W$. Pomoću nje i Cauchy-Schwarzove nejednakosti odozgo ocjenjujemo funkcional:

$$|l(v)| = \left| \int_{\Omega} (f - \bar{f})v \, d\mathbf{x} \right| \leq \|f - \bar{f}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|f - \bar{f}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_W.$$

Svi uvjeti Lax-Milgramove leme su zadovoljeni, pa jedinstveno rješenje $u_2 \in W$ postoji.

Zadatak 4.2.5: Poincaré-Wirtingerova nejednakost u jednom smjeru

Dokažite nejednakost korištenu u gornjem dokazu: postoji konstanta $C > 0$ takva da $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)}$ za sve $v \in W$. Uputa: *Dokaz provedite kontradikcijom, prateći identične korake kao u dokazu općeg Teorema o Poincaré-Wirtingerovoj nejednakosti. Pritom primijetite da slabi limes v_0 zbog $\partial_2 v_0 = 0$ ovisi samo o x_1 , a zbog uvjeta nulte srednje vrijednosti na presjeku nužno slijedi $v_0 \equiv 0$.*

Za parne $k \geq 4$ koristimo jednadžbe (4.2.8) u kojima rekurzivno određujemo u_k preko u_{k-2} :

$$\int_{\Omega} \partial_2 u_{k+2} \partial_2 v \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \partial_1 u_k \partial_1 v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V,$$

koje uz uvjet $\bar{u}_k = 0$ imaju jedinstveno rješenje (dokaz analogan kao za egzistenciju i jedinstvenost od u_2).

Teorem 4.2.6: Ocjena pogreške bez rubnih slojeva

Neka je $u^\varepsilon \in V$ slabo rješenje (4.1.2) i neka je $u_0 \in V$ rješenje limitne zadaće (4.2.4). Tada postoji konstanta $C > 0$, neovisna o ε , takva da vrijedi

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon.$$

Dokaz.

Slično kao i u dokazu jake konvergencije u prošlom pristupu, cilj je ograničiti $a_\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon)$, gdje je $R^\varepsilon = u^\varepsilon - u_0$. Budući da i točno rješenje u^ε i limitno rješenje u_0 pripadaju prostoru V (imaju dovoljnu glatkoću i zadovoljavaju rubne uvjete), njihova razlika $R^\varepsilon = u^\varepsilon - u_0$ također pripada prostoru V te je stoga dopustiva test funkcija.

Rješenje u^ε zadovoljava (4.1.2) za svaku $v \in V$, dok u_0 zadovoljava (4.2.3) za svaku $v \in V$. Oduzimanjem tih dviju jednakosti desne strane tih jednakosti se krata, pa dobivamo da za sve $v \in V$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \partial_1 u^\varepsilon \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 u^\varepsilon \partial_2 v \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \partial_1 u_0 \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_2 u_0 \partial_2 v \, d\mathbf{x} = 0.$$

Uzimajući u obzir da iz konstrukcije znamo da vrijedi $\partial_2 u_0 = 0$, dobivamo da za sve $v \in V$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \partial_1 (u^\varepsilon - u_0) \partial_1 v \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \partial_2 (u^\varepsilon - u_0) \partial_2 v \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \partial_2 u_0 \partial_2 v \, d\mathbf{x}. \quad (4.2.9)$$

Na ovaj način dobili smo varijacijsku formulaciju za razliku $R^\varepsilon = u^\varepsilon - u_0$, za koju se može

dokazati da je dobro postavljena i da ima jedinstveno rješenje (trebalo nam je zato i da je u_2 jedinstveno dana funkcija). Uvrštavanjem $v = R^\varepsilon$, pa Cauchy-Schwarzovom nejednakosti i algebarskim manipulacijama, dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_1(R^\varepsilon))^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2 R^\varepsilon)^2 d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \partial_2 u_2 \partial_2 R^\varepsilon d\mathbf{x} \\ &\leq \|\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_2 R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \|\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\int_{\Omega} (\partial_1(R^\varepsilon))^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2 R^\varepsilon)^2 d\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Dijeljenjem s korijenom lijeve strane, dobivamo

$$\sqrt{\int_{\Omega} (\partial_1(R^\varepsilon))^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2 R^\varepsilon)^2 d\mathbf{x}} \leq \varepsilon \|\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega)} = C\varepsilon$$

(budući da je u_2 fiksna i dobro definirana funkcija). Uz već više puta iskorištenu ogradu za $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$ odozdo, dobivamo

$$\frac{1}{C_P} \|u^\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{\int_{\Omega} (\partial_1(R^\varepsilon))^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (\partial_2 R^\varepsilon)^2 d\mathbf{x}} \leq C\varepsilon,$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena 4.2.7

Načini dokazivanja jake konvergencije rješenja $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ prema u^* i u_0 (što su na kraju iste funkcije, naravno, budući da je limes jedinstven) jako su slični. U oba slučaja u bilinearne forme želimo na obje koordinate staviti razliku u^ε i funkcije za koju želimo dokazati da je traženi limes. Međutim, tehnika kojoj nastavljamo rješenje razlikuje se jer se razlikuju i pretpostavke o funkcijama u^* i u_0 . Iako obje limes funkcije zadovoljavaju limitnu jednadžbu, u prvom slučaju, ona je dana kao slabi limes funkcija $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, dok za u_0 znamo vezu s njezinim korektorom u_2 . Te dvije tehnike (i pretpostavke iz tih tehnika) ne možemo miješati.

Kada već imamo asimptotski razvoj funkcije u^ε , mogli bismo dokazati ocjenu pogreške za proizvoljan broj članova asimptotskog razvoja. Tehnika je slična: opet na lijevu stranu varijacijske formulacije želimo imati razliku $R^\varepsilon := u^\varepsilon - \sum_{k=0}^N u_k$, te konačna ocjena ovisi o članovima s indeksima većim od N (u ovom slučaju o u_{N+2} , za parne N). Međutim, u ovom slučaju to nije toliko jednostavno jer funkcija R^ε **ne pripada** prostoru V . Uz dodatne pretpostavke na domenu ili funkciju f ne znamo da ijedna funkcija u_k za parne $k \geq 2$ zadovoljava Dirichletove rubne uvjete. Zato funkcija R^ε ne može biti uvrštena u varijacijsku formulaciju (kao što smo u prošlom dokazu to napravili u jednakosti (4.2.9)). Postoje načini kako to izbjeći: ili za funkcije s većim indeksima koristimo cut-off funkcije, ili dodajemo članove za rubni sloj.