

Najkraća Möbiusova traka

Roberta Vela

Möbiusova traka jedan je od najpoznatijih objekata u topologiji. Dobiva se tako da se pravokutna traka, na primjer papirnata, zakrene za pola okreta (180°) te se njezini krajevi spoje. Takva ploha ima samo jednu stranu i jedan rub, zbog čega je zanimljiva matematičarima još od 19. stoljeća.

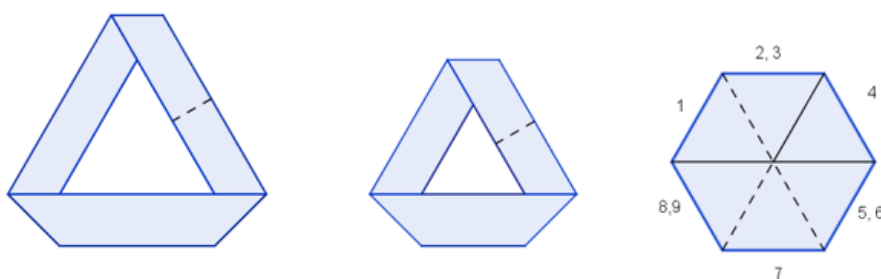


Slika 1 : Möbiusova traka izrađena od papirne trake.

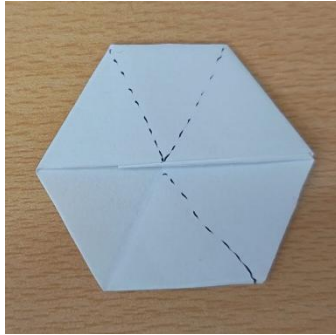
Prirodno se nameće pitanje koja je najmanja moguća duljina Möbiusove trake. Upravo tim pitanjem se bavio i Stephen Barr u svojoj knjizi *Experiments in topology* u poglavlju *The Shortest Möbius Strip*, gdje istražuje koliko kratka Möbiusova traka može biti u odnosu na svoju širinu. Barr je do rezultata došao proučavajući različite načine savijanja Möbiusove trake. Barr je najprije promatrao običnu Möbiusovu traku dobivenu od pravokutne papirne vrpce. Postupnim presavijanjem i skraćivanjem trake pokušao je pronaći njezinu najmanju moguću duljinu. Kako se duljina smanjivala, središnji otvor Möbiusove trake postajao je sve manji, sve dok se u jednom trenutku potpuno nije zatvorio.



Slika 2: Pravokutna traka od koje se formira Möbiusova traka. Krajevi AB i $A'B'$ spajaju se nakon poluokreta od 180° .

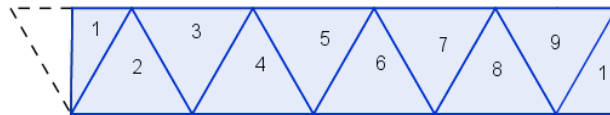


Slika 3 : Oblik dobiven postupnim skraćivanjem Möbiusove trake.

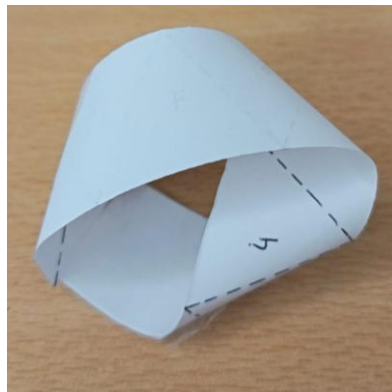


Slika 4: Vlastiti model zatvaranja središnjeg otvora Möbiusove trake.

Barr je uočio da zatvaranje središnjeg otvora ne mora predstavljati konačnu granicu skraćivanja. Zbog toga je razmotrio novi model sastavljen od devet jednakostraničnih trokuta te proučavao njegove mogućnosti presavijanja.

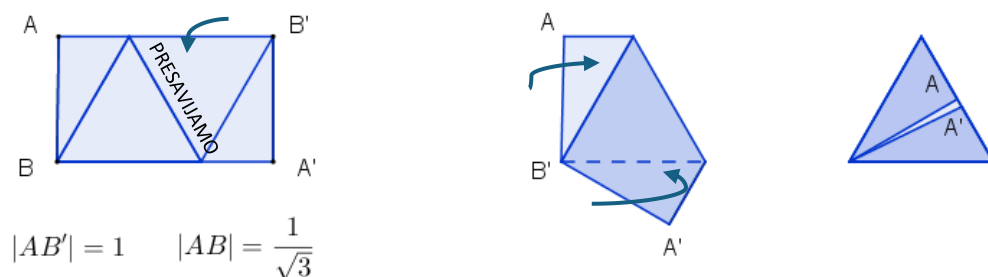


Slika 5 : Traka sastavljena od devet jednakostraničnih trokuta.

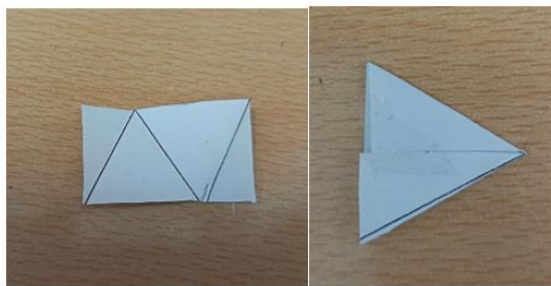


Slika 6: Möbiusova traka dobivena presavijanjem i spajanjem trake sastavljene od devet jednakostraničnih trokuta.

Daljnijim proučavanjem primijetio je da se i taj model može dodatno skraćivati promjenom načina presavijanja i spajanja rubova. Nastavljajući taj postupak, postupno je dolazio do sve kraćih oblika, pri čemu se traka približavala graničnom slučaju prikazanom pomoću triju jednakostraničnih trokuta (slika 7) .



Slika 7: konstrukcije najkraće Möbiusove trake.



Slika 8:Završna faza konstrukcije najkraće Möbiusove trake.

Analizirajući geometrijska svojstva tog konačnog modela, Barr je zaključio da najmanji mogući omjer duljine trake (l) i njezine širine (w) iznosi

$$\frac{l}{w} = \sqrt{3}.$$

To znači da duljina Möbiusove trake mora biti barem $\sqrt{3}$ puta veća od njezine širine kako bi se mogla oblikovati bez narušavanja svojih svojstava. Ovaj rezultat potvrđen je i suvremenim matematičkim istraživanjima koja pokazuju da je upravo trokutasta Möbiusova traka optimalan model.

Reference:

- Barr, S. (1961). *Experiments in Topology*.
- Richard Evan Schwartz (2023). [The Optimal Paper Moebius Band](#). (pristupljeno 10. 6. 2026.)