Rubni problem za ODJ:

- Uvod
- Metoda konačnih diferencija
- Metoda konačnih elemenata
- Nelinearni rubni problem

Rubni problem za ODJ

Diferencijalna jednadžba:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \ f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \ x \in [a, b] \, .$$

Inicijalni problem:

$$y(a) = y_0.$$

Rubni problem:

$$g(y(a), y(b)) = 0, \quad g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d.$$

Primjer

Odredite maksimalnu visinu projektila koji je ispaljen s vrha zgrade visoke 20 m i koji je pao na zemlju nakon 4 s.

Rješenje. Iz drugog Newtonovog zakona ($F = a \cdot m = -g \cdot m,\ g = 9.81\text{m/s}$) slijedi diferencijalna jednadžba

$$y''(t) = -g,$$

gdje je $y(t)$ visina projektila u trenutku t.

Mogli bismo je riješiti ukoliko znamo početne uvjete:

$$y(0) = 30, \quad y'(0) = v_0.$$

Početna brzina v_0 je nepoznata.

U zadatku je zadano: $\quad y(0) = 30, \quad y(4) = 0.$

$\rightarrow$ rubni uvjeti!

U primjenama se često javljaju tzv. rubni problemi, gdje uz diferencijalnu jednadžbu koja definira funkciju na nekoj domeni imamo i zadano ponašanje rješenja jednadžbe na rubovima domene.

Također, umjesto sustava jednadžbi, najčešće se javlja jednadžba višeg reda:

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k-1)}), \\ & \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad x \in [a, b]\,. \end{aligned}$$

U okviru kolegija ćemo promatrati metode za diferencijalne jednadžbe drugog reda.

Rubni problem za ODJ drugog reda

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad x \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

Napomena. BSO, radi jednostavnosti radimo na intervalu $[0, 1]$ umjesto na $[a, b]$.

Napomena. Mogu se promatrati i općenitiji rubni uvjeti

$$\gamma_0 \, y(0) + \delta_0 \, y'(0) = \alpha, \quad \gamma_1 \, y(1) + \delta_1 \, y'(1) = \beta,$$

$$|\gamma_0| + |\delta_0| > 0, \quad |\gamma_1| + |\delta_1| > 0$$

Egzistencija i jedinstvenost rješenja rubnog problema je složeniji problem nego za inicijalni problem.

Teorem

Pretpostavimo da za rubni problem

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad x \in [0,1] \subset \mathbb{R}$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

za neki $M > 0$ funkcija $f(x, y, z)$ zadovoljava:

(a) *parcijalne derivacije f_x, f_y i f_z su neprekidne;*

(b) $f_y(x, y, z) > 0$;

(c) $|f_z(x, y, z)| \le M$

za sve $x \in [0,1]$ i $y, z \in \mathbb{R}$.
Tada za rubni problem postoji jedinstveno rješenje $y(x)$.

Linearni rubni problem za ODJ drugog reda

Ukoliko je f linearna funkcija, tada je rubni problem za ODJ oblika

$$
\begin{aligned}
&p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1]\\
&y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta, \quad p(x) > 0.
\end{aligned}
$$

Ova jednadžba se naziva linearni rubni problem za ODJ.

Iz teorema direktno slijedi da je dovoljan uvjet za egzistenciju jedinstvenog rješenja: $r(x) \leq 0$ i $p(x) > 0$ (ili $r(x) \geq 0$ i $p(x) < 0$).

Ako jednadžbu podijelimo s $p(x)$ možemo promatrati ekvivalentni problem

$$
y''(x) + q(x)y'(x) - r(x)u(x) = f(x), \quad r(x) \geq 0.
$$

Metoda konačnih razlika

Segment $[0, 1]$ diskretiziramo na standardni način: odaberemo $n \in \mathbb{N}$, stavimo

$$h = \frac{1}{n+1}, \quad x_i = i \cdot h, \quad i = 0, \ldots, n+1.$$

U jednadžbi

$$y''(x) + q(x)y'(x) - r(x)u(x) = f(x)$$

y' i y'' zamijenimo s:

$$\begin{aligned} y''(x_i) &= \frac{y(x_i - h) - 2y(x_i) + y(x_i + h)}{h^2} - y^{(4)}(\xi_i)\frac{h^2}{12}. \\ y'(x_i) &= \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} - y^{(3)}(\zeta_i)\frac{h^2}{6} \end{aligned}$$

Dobijamo

$$\frac{y(x_{i-1})-2y(x_i)+y(x_{i+1})}{h^2} + q(x_i)\,\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h} - r(x_i)y(x_iS) =$$
$$= f(x_i) + y^{(4)}(\xi_i)\frac{h^2}{12} + y^{(3)}(\zeta_i)\frac{h^2}{6}.$$

Aproksimacije $y_i \approx y(x_i)$ ćemo odrediti tako da zadovoljavaju slične jednadžbe i to tako da zanemarimo nepoznati $\mathcal{O}(h^2)$ član i y_i definiramo (uz oznake $r_i = r(x_i)$, $f_i = f(x_i)$) s

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i - y_{i+1}}{h^2} + q_i\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - r_i y_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gdje je $y_0 = y(a) = \alpha$, $y_{n+1} = y(b) = \beta$.

Sve skupa $n+2$ linearne jednadžbe s $n+2$ nepoznanice $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$.

Zadane rubne vrijednosti možemo iskoristiti u prvoj i u zadnjoj jednadžbi. Tako na primjer u prvoj, koja glasi

$$\frac{y_0 - 2y_1 + u_2}{h^2} + q_1 \frac{y_2 - y_0}{2h} - r_1 y_1 = f_1$$

možemo iskorititi $y_0 = \alpha$ i dobiti

$$\frac{-2y_1 + y_2}{h^2} + q_1 \frac{y_2}{2h} - r_1 y_1 = f_1 - \frac{\alpha}{h^2} + q_1 \frac{\alpha}{2h}.$$

Analogono modificiramo i zadnju jednadžbu.

jednadžbe

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i - y_{i+1}}{h^2} + q_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - r_i y_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

možemo zapisati kao

$$\frac{1}{h^2} \Big[y_{i-1}(1 - q_i h/2) + y_i(-2 - r_i h^2) + y_{i+1}(1 + q_i h/2) \Big] = f_i.$$

Sustav jednadžbi možemo zapisati u matričnom obliku kao

$$-\frac{1}{h^2}A\mathbf{y}=\mathbf{f}$$

gdje je

$$A=\begin{bmatrix} 2+r_1h^2 & -1-q_1h/2 & & & & \\ -1+q_2h/2 & 2+r_2h^2 & -1-q_2h/2 & & & \\ & -1+q_3h/2 & 2+r_3h^2 & -1-q_3h/2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2+r_{n-1}h^2 & -1 \\ & & & & -1 & 2+r_nh^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_{n-1}\\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{f}=\begin{bmatrix} f_1-alpha/h^2+q_1\alpha/(2h)\\ f_2\\ f_3\\ \vdots\\ f_{n-1}\\ f_n-\beta/h^2-q_n\beta/(2h) \end{bmatrix}$$

Da bi aproksimacija bila dobro definirana, trebamo npr. imati osiguranu regularnost matrice A.

Je li matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2+r_1h^2 & -1-q_1h/2 & & & & \\ -1+q_2h/2 & 2+r_2h^2 & -1-q_2h/2 & & & \\ & -1+q_3h/2 & 2+r_3h^2 & -1-q_3h/2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1+q_{n-1}h/2 & 2+r_{n-1}h^2 & -1-q_{n-1}h/2 \\ & & & & -1+q_nh/2 & 2+r_nh^2 \end{bmatrix}$$

dijagonalno dominantna?

$$\left|2 + r_ih^2\right| - \left|-1 + q_i\frac{h}{2}\right| - \left|-1 - q_i\frac{h}{2}\right| \geq 0 \quad \textbf{?}$$

Jer je $r(x) \geq 0$ vrijedi

$$\left|2 + r_ih^2\right| = 2 + r_ih^2.$$

Za $h \approx 0$ je $\quad -1 + q_i h/2 \approx -1 \leq 0$.

Kada je

$$-1 \pm q_i \frac{h}{2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |q_i| \frac{h}{2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad h \leq \frac{2}{|q_i|}.$$

Dakle, za

$$h \leq \frac{2}{\| q \|_\infty}, \qquad \| q \|_\infty = \max_{[0,1]} |q(x)|,$$

je

$$\left| -1 \pm q_i \frac{h}{2} \right| = 1 \mp q_i \frac{h}{2}$$

Za $h \leq 2/ \parallel q \parallel_\infty$ je

$$\begin{aligned} &\left|2 + r_i h^2\right| - \left|-1 + q_i \tfrac{h}{2}\right| - \left|-1 + q_i \tfrac{h}{2}\right| = \\ &2 + r_i h^2 - \left(1 - q_i \tfrac{h}{2}\right) - \left(1 + q_i \tfrac{h}{2}\right) = r_i h^2 \geq 0, \end{aligned}$$

jer je $q(x) \geq 0$.

Teorem

Ako su $r_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, *i* $h \leq \dfrac{2}{\| q \|_\infty}$, *onda je matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 2+r_1h^2 & -1-q_1h/2 & & & & \\ -1+q_2h/2 & 2+r_2h^2 & -1-q_2h/2 & & & \\ & -1+q_3h/2 & 2+r_3h^2 & -1-q_3h/2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1+q_{n-1}h/2 & 2+r_{n-1}h^2 & -1-q_{n-1}h/2 \\ & & & & -1+q_nh/2 & 2+r_nh^2 \end{bmatrix}$$

dijagonalno dominantna.

Ukoliko je $r_i \geq r_{\min} > 0$ *tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{h^2 r_{\min}}$$

Dijagonalnu dominantnost matrice smo dokazali.

Ocjena za $\|A^{-1}\|_\infty$ slijedi iz sljedeće leme.

Lema

Neka je $A = [a_{ij}]$ dijagonalno dominantna matrica po retcima i neka postoji $c > 0$ takav da vrijedi

$$|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| > c, \quad \forall i.$$

Tada vrijedi

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{c}.$$

Dokaza leme.

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{y,\|y\|_\infty=1} \|A^{-1}y\|_\infty$$

Neka je $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\|_\infty = 1$, proizvoljan.

Označimo $x = A^{-1}y$ i neka je m, $1 \leq m \leq n$, takav da je

$$|x_m| = \|x\|_\infty$$

(indeks po apsolutnoj vrijednosti najveće komponente vektora x).

Iz $Ax = y$ slijedi da je

$$a_{mm}\, x_m + \sum_{j\neq m} a_{mj}\, x_j = y_m,$$

odnosno

$$a_{mm}\, x_m = y_m - \sum_{j\neq m} a_{mj}\, x_j.$$

Za apsolutne vrijednosti je:

$$
\begin{aligned}
|a_{mm}||x_m| &\le |y_m| + \sum_{j\neq m} |a_{mj}||x_j| \le \\
&\le |y_m| + \sum_{j\neq m} |a_{mj}||x_m|
\end{aligned}
$$

Sada je

$$
\begin{aligned}
|y_m| &\ge |a_{mm}||x_m| - \sum_{j\neq m} |a_{mj}||x_m| = \\
&= |x_m| \left(|a_{mm}| - \sum_{j\neq m} |a_{mj}| \right) \ge \\
&\ge |x_m| c.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
\|A^{-1} y\|_\infty = \|x\|_\infty = |x_m| \le \frac{1}{c} |y_m| \le \frac{1}{c} \|y\|_\infty = \frac{1}{c}
$$

Teorem

Neka su q, r i f takve da rubni problem

$$y''(x) + q(x)y'(x) - r(x)u(x) = f(x), \quad y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta$$

ima rješenje $y \in C^4[0,1]$. *Nadalje, neka postoji* $r_{\min}$ *takav da je*

$$r(x) \geq r_{\min} > 0, \quad \forall x \in [0,1] \quad \textit{i neka je} \quad h \leq \frac{2}{\|q\|_\infty}.$$

Tada postoji konstanta C (nezavisna o h) takva da diskretne aproksimacije $y_1, \ldots, y_n$ *dobivene metodom konačnih razlika zadovoljavaju*

$$|y(x_i) - y_i| \leq C\, h^2 \left(\|y^{(3)}\|_\infty + \|y^{(4)}\|_\infty \right).$$

Dokaz. Označimo

$$e_i = y(x_i) - y_i \quad \text{i} \quad \tau_i = y^{(4)}(\xi_i)\frac{h^2}{12} + y^{(3)}(\zeta_i)\frac{h^2}{6}.$$

Oduzimanjem

$$\frac{y(x_{i-1})-2y(x_i)+y(x_{i+1})}{h^2} + q(x_i)\,\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h} - r(x_i)y(x_i) =$$
$$= f(x_i) + y^{(4)}(\xi_i)\frac{h^2}{12} + y^{(3)}(\zeta_i)\frac{h^2}{6}.$$

i

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i - y_{i+1}}{h^2} + q_i\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - r_i y_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

dobijemo

$$\frac{e_{i-1} - 2e_i - e_{i+1}}{h^2} + q_i\,\frac{e_{i+1} - e_{i-1}}{2h} - r_i e_i = \tau_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

odnosno

$$\frac{1}{h^2}\Big[e_{i-1}(1-q_ih/2)+e_i(-2-r_ih^2)+e_{i+1}(1+q_ih/2)\Big]=\tau_i.$$

Uočimo da je $e_0 = e_n = 0$.

Uz oznaku

$$e=[e_1,\dots e_n]^T \quad \text{i} \quad t=[t_1,\dots t_n]^T$$

dobijamo matričnu jednadžbu

$$-\frac{1}{h^2}A\,e=t, \quad \text{odnosno} \quad e=-h^2A^{-1}t.$$

$$\Rightarrow \|e\|_\infty \le h^2\|A^{-1}\|_\infty\|t\|_\infty.$$

Jer je

$$\|A^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{h^2 r_{\min}} \quad \text{i} \quad \|t\|_\infty \le \frac{h^2}{6}\left(\|y^{(3)}\|_\infty+\|y^{(4)}\|_\infty\right)$$

slijedi tvrdnja teorema uz $C = 1/(6r_{\min})$,

Napomena. Uvjet $r(x) \geq r_{\min} > 0$ je prejak.

Tvrdnja vrijedi i za $r(x) \geq 0$ jedino je dokaz tehnički složeniji.

Na drugi način se ocjenjuje $\|A^{-1}\|_\infty$.

Primjer

$$u''(x) + (2/x)u'(x) - (2/x^2)u(x) = 0,$$
$$u(1) = 5, \quad u(2) = 3.$$

Analitičko rješenje: $u(x) = x + 4/(x^2)$.

Primjer

$$-u''(x) + 400u(x) = -400\cos^2(\pi x) - 2\pi^2\cos(2\pi x),$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Analitičko rješenje:

$$u(x) = \frac{e^{-20}}{1+e^{-29}}e^{20x} + \frac{1}{1+e^{-20}}e^{-20x} - \cos^2(\pi x).$$

Matlab live ...

Neumannov rubni uvjet

Neumannnov rubni uvjet - zadana je derivacija u rubovima:

$$y'(0) = \alpha \quad \text{i/ili} \quad y'(1) = \beta.$$

Kako diskreditizirati ovaj uvjet?

Neka je sada rubni uvjet u $x_0 = a$ umjesto $u(0) = \alpha$ dan s $u'(0) = \alpha$.

Dakle, $u_0 = u(x_0)$ nije zadan rubnim uvjetom, već je nepoznanica.

Znači da u jednadžbe

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - r_i u_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

moramo dodati i jednu jednadžbu za $i = 0$.

Diskretizacija rubnog uvjeta:

$$y'(x_0) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} - \frac{h}{2} y''(\xi)$$

nije dobra!

Pogreška diskretizacije je $\mathcal{O}(h)$ dok je za ostale jednadžbe ista pogreška $\mathcal{O}(h^2)$.

Treba točnija aproksimacija. $y'(x_0)$ možemo aproksimirati pomoću $y(x_0)$, $y(x_1)$ i $y(x_2)$ koristeći interpolacijske formule. Pogreška je tada $\mathcal{O}(h^2)$.

Drugi pristup: koristimo iste formule, ali uvedimo nepostojeći čvor x_{-1}:

$$\alpha = y'(x_0) \approx \frac{y(x_0 + h) - y(x_0 - h)}{2h} = \frac{u_1 - y_{-1}}{2h}$$

Sada se pojavio y_{-1}. Trebamo još jednu jednadžbu.

Didkretiziramo diferencijalnu jednadžbu u x_0:

$$\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + q_0\alpha - r_0 y_0 = f_0.$$

Iz

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}\\ f_0 &= \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + q_0\alpha - r_0 u_0.\end{aligned}$$

slijedi

$$y_{-1} = y_1 - 2h\alpha.$$

a jednadžba u x_0 glasi

$$\frac{y_1 - 2y_0 + y_1 - 2h\alpha}{h^2} + q_0\alpha - r_0 u_0 = f_0$$

tj.

$$(-r_0 h^2 - 2)y_0 + 2y_1 = h^2 f_0 + \alpha(2h - h^2 q_0)$$

Uočite da je sustav jednadžbi opet strogo dijagonalno dominantan.

To ne bi vrijedilo da smo ostavili y_{-1} u sustavu jednadžbi.

Primjer

$$u''(x) + (2/x)u'(x) - (2/x^2)u(x) = 0,$$
$$u'(1) = -7, \quad u(2) = 3.$$

Analitičko rješenje: $u(x) = x + 4/(x^2)$.

Vježba .... live (i/ili za zadaću).

Metoda konačnih elemenata
Operatorski pristup

Promatramo rubni problem u obliku:

$$\begin{aligned} &-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = g(x),\ x \in [0,1] \\ &u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \end{aligned} \tag{1}$$

uz pretpostavke da je

$$\begin{aligned} &p \in C^1[0,1], \quad p(x) \geq p_{\min} > 0 \\ &q \in C[0,1], \quad q(x) \geq 0 \\ &f \in C[0,1] \end{aligned}$$

Napomena. Očito je da jednadžbu

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = g(x)$$

možemo zapisati u obliku

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x).$$

Vrijedi i obrat:

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = -pu'' - p'u' + q\,u = g;$$

Trebalo bi biti

$$\frac{p'}{p} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad p = e^{\int \frac{b}{a}}.$$

Jednadžbu podijelimo s a i pomnožimo s p.

Uočimo:

$$\mathcal{C}^2[0,1] \ni v \mapsto L(v) \equiv -(pv')' + qv \in \mathcal{C}[0,1]$$

je linearno preslikavanje pa gornju diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati u obliku $L(u) = f$.

Da bi L bio dobro definiran, moramo mu specificirati domenu i kodomenu.

Operatorski pristup - domena i rubni uvjeti

Sada pogledajmo dodatne rubne uvjete. Ako je $\alpha = \beta = 0$, onda je

$$\mathcal{D}(L) \equiv \{v \in C^2[0,1] \ : \ v(0) = v(1) = 0\} \subset C^2[0,1]$$

vektorski potprostor. Sada L definiramo kao operator

$$L \ : \ C^2[0,1] \supset \mathcal{D}(L) \longrightarrow C[0,1].$$

Polazni problem (1) je ekvivalentan operatorskoj jednadžbi

$$L(u) = f, \ u \in \mathcal{D}(L).$$

Za ocjenu točnosti aproksimacije rjesenja i praćenje konvergencije, trebamo normu. Uvedimo skalarni produkt i pripadnu normu:

$$(u, v) \equiv \int_a^b u(x)v(x)dx, \ \ \|u\|_2 = \sqrt{(u,u)}.$$

L je simetričan operator

Teorem

Operator L je u skalarnom produktu $(\cdot,\cdot)$ simetričan na $\mathcal{D}(L)$: za sve $u, v \in \mathcal{D}(L)$ vrijedi $(L(u), v) = (u, L(v))$.

Dokaz. Provjera direktnim računom koristeći parcijalnu integraciju i definiciju prostora $\mathcal{D}(L)$. Vrijedi

$$
\begin{aligned}
(u, L(v)) &= \int_a^b u(x)[-(p(x)v'(x))' + q(x)v(x)]dx \\
&= -u(x)p(x)v'(x)\Big|_a^b + \int_a^b (p(x)v'(x)u'(x) + q(x)u(x)v(x))dx \\
&= \int_a^b (p(x)v'(x)u'(x) + q(x)u(x)v(x))dx = (v, L(u)) = (L(u), v),
\end{aligned}
$$

jer je zadnji izraz simetričan u u i v; $(\cdot,\cdot)$ je također simetričan.

Apsolutno neprekidne funkcije

Iz prethodnog računa vidimo da je izraz $(L(u), v)$ definiran na većoj klasi funkcija – na primjer, za razliku od $L(u)$ uopće ne koristi drugu derivaciju.

Definicija

Kažemo da je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidna na $[a, b]$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaki konačan niz podintervala $[a_i, b_i]$ s $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \cdots < a_n < b_n \leq b$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Ako je f apsolutno neprekidna onda je ona i neprekidna i $f'(x)$ postoji gotovo svuda.

Vrijedi i $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. Ako su f i g apsolutno neprekidne onda vrijedi formula parcijalne integracije.

Definirajmo prostor funkcija

$$\mathcal{K}^m[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ f^{(m-1)} \text{ aps. neprekidna, } f^{(m)} \in \mathbf{L}^2[0,1]\}.$$

$[u, v] = (L(u), v)$

Vidimo da je $(L(u), v)$ dobro definiran i na skupu

$$\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{K}^1[0,1] \ : \ u(0) = u(1) = 0\}$$

na kojem možemo definirati simetričnu bilinearnu formu

$$[u, v] = \int_0^1 (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))dx \ (= (L(u), v))$$

$\boxed{\text{Uočimo, } \mathcal{D} \supset \mathcal{D}(L).}$

Teorem (T1)

Postoje pozitivne konstane $\gamma > 0$ i $\Gamma > 0$ tako da za svaki $u \in \mathcal{D}$ vrijedi

$$\gamma \|u\|_\infty^2 \leq [u, u] \leq \Gamma \|u'\|_\infty^2.$$

Specijalno je, za svaki $u \in \mathcal{D}(L) \setminus \{\mathbf{0}\}$, $[u, u] \equiv (L(u), u) > 0$.

Primjer primjene teorema T1.

Neka su $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(L)$ dva rješenja problema (1), vrijedi

$$L(y_1) = L(y_2) = f,$$

pa je odmah

$$L(y_1 - y_2) = \mathbf{0}.$$

Iz teorema je

$$0 = (y_1 - y_2, L(y_1 - y_2)) \geq \gamma \|y_1 - y_2\|_\infty^2 \geq 0,$$

pa je $y_1 = y_2$.

Dokaz teorema T1. Uzmimo $u \in \mathcal{D}$. Vrijedi

$$
\begin{aligned}
u(x) &= u(0) + \int_0^x u'(t)dt = \int_0^x u'(t)dt \\
u(x)^2 &= \left(\int_0^x 1 \cdot u'(t)dt\right)^2 \leq \\
&\leq \int_0^x 1^2 dt \int_0^x u'(t)^2 dt \leq 1 \cdot \int_0^1 u'(t)^2 dt
\end{aligned}
$$

i zaključujemo da je

$$
\|u\|_\infty^2 \leq \int_0^1 u'(t)^2 dt \leq \|u'\|_\infty^2.
$$

Sada koristeći $p(x) \geq p_0 > 0$ i $q(x) \geq 0$ imamo

$$\begin{aligned} [u,u] &= \int_0^1 (p(x)u'(x)^2 + q(x)u(x)^2)dx \geq \\ &\geq p_0 \int_1^1 u'(x)^2 dx \geq p_0 \|u\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Također,

$$\begin{aligned} [u,u] &\leq \|p\|_\infty \|u'\|_\infty^2 + \|q\|_\infty \|u\|_\infty^2 \leq \\ &\leq \|p\|_\infty + \|q\|_\infty \|u'\|_\infty^2 \end{aligned}$$

pa tvrdnja teorema vrijedi sa

$$\gamma = p_0, \quad \Gamma = \|p\|_\infty + \|q\|_\infty.$$

$\square$

Sada definiramo funkcional

$$F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(u) = \frac{1}{2}[u, u] - (f, u).$$

Teorem (T2)

Neka je $y \in \mathcal{D}(L)$ rješenje rubnog problema (1). Tada

$$\forall u \in \mathcal{D}, u \neq y \quad \Rightarrow \quad F(u) > F(y).$$

($F(y) = 0.5(L(y), y) - (L(y), y) = -0.5[y, y]$)

Dokaz. Jer je y rješenje, vrijedi $f = L(y)$! Iz definicije je $(L(y), u) = [y, u]$. Uzmimo $u \in \mathcal{D}$ i računajmo

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2}[u, u] - (L(y), u) = \frac{1}{2}([u, u] - 2[y, u] + [y, y] - [y, y]) \\ &= \frac{1}{2}([u - y, u - y] - [y, y]) > -\frac{1}{2}[y, y] = F(y). \end{aligned}$$

Minimizacija funkcionala F po $\mathcal{D} \supset \mathcal{D}(L)$

Gornji rezultat daje ideju da rješenje y pokušamo dobiti minimizacijom funkcionala F po $\mathcal{D}$.

Samu minimizaciju ćemo provesti aproksimativno, na sljedeći način:

Odaberimo n–dimenzionalni potprostor $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$, $n < \infty$, i pokušajmo izračunati

$$u_{\mathcal{S}} = \arg\min_{u \in \mathcal{S}} F(u).$$

Da bi račun bio praktično i konkretno provediv, $\mathcal{S}$ zadajemo bazom $u_1, \ldots, u_n$, u kojoj je svaki $u \in \mathcal{S}$ prikazan s $u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i$.

Na taj način je $\mathcal{S} \simeq \mathbb{R}^n$ pa minimiziramo

$$\begin{aligned}\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n) &= F(\sum_{j=1}^n \xi_j u_j) = \frac{1}{2}[\sum_{j=1}^n \xi_j u_j, \sum_{k=1}^n \xi_k u_k] - (f, \sum_{k=1}^n \xi_k u_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [u_k, u_j]\xi_k\xi_j + \sum_{k=1}^n \xi_k (f, u_k).\end{aligned}$$

Uz oznake

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} [u_1, u_1] & \cdots & [u_1, u_n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [u_n, u_1] & \cdots & [u_n, u_n] \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} (f, u_1) \\ \vdots \\ (f, u_n) \end{pmatrix}$$

imamo problem minimizacije na $\mathbb{R}^n$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b \longrightarrow \min$$

Teorem (T3)

Problem minimizacije

$$F(u) \longrightarrow \min, \quad u \in \mathcal{S},$$

ima jedinstveno rješenje

$$u_{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i$$

u kojem su koeficijenti $x_* = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ *određeni kao jedinstveno rješenje sustava jednadžbi*

$$Ax_* = b.$$

Ako je $y \in \mathcal{D}(L)$ *rješenje problema (1), tj.* $L(y) = f$*, onda je*

$$[u_{\mathcal{S}} - y, u_{\mathcal{S}} - y] = \min_{u \in \mathcal{S}} [u - y, u - y].$$

Dokaz. Dokaz ide u četiri koraka:

- Matrica $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivno definitna.

  To vidimo iz

$$x^T Ax = [u, u] \geq 0 \quad \text{i} \quad \mathbb{R}^n \ni x = \mathbf{0} \Leftrightarrow u = \mathbf{0} \in \mathcal{S}.$$

- $\nabla\Phi(x) = Ax - b$.
  To se lako dobije računanjem parcijalnih derivacija.

- Neka je $Ax_* = b$ i neka je $\delta x \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan, $x = x_* + \delta x$.

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{1}{2}(x_* + \delta x)^T A(x_* + \delta x) - (x_* + \delta x)^T b \\ &= \frac{1}{2}x_*^T Ax_* + \frac{1}{2}\delta x^T Ax_* + \frac{1}{2}x^T A\delta x + \frac{1}{2}\delta x^T A\delta x - x_*^T b - \delta x^T b \\ &= \Phi(x_*) + \frac{1}{2}\delta x^T A\delta x.\end{aligned}$$

  Dakle, ako je $\delta x \neq \mathbf{0}$, $\Phi(x) > \Phi(x_*)$.

- I na kraju, primijetimo da vrijedi (uz $F(u) = 0.5[u, u] - (f, u)$)

$$[u - y, u - y] = 2F(u) + [y, y]. \quad \text{(minimum za } u = u_S\text{)}$$

$\square$

Teorem (T4)

Uz oznake teorema T1, T2 i T3 postoji konstanta $C > 0$ *takva da vrijedi*

$$\|u_{\mathcal{S}} - y\|_\infty \leq C\|u' - y'\|_\infty, \ \ u \in \mathcal{S} \text{ proizvoljan.}$$

Dokaz. Koristimo teorem T1.

Postoje pozitivne konstane $\gamma > 0$ i $\Gamma > 0$ tako da za svaki $u \in \mathcal{D}$ vrijedi

$$\gamma\|u\|_\infty^2 \leq [u, u] \leq \Gamma\|u'\|_\infty^2.$$

Specijalno je, za svaki $u \in \mathcal{D}(L) \setminus \{\mathbf{0}\}$, $[u, u] \equiv (L(u), u) > 0$.

Uzmimo $u \in \mathcal{S}$ i

$$\gamma\|u_{\mathcal{S}} - y\|_\infty^2 \leq [u_{\mathcal{S}} - y, u_{\mathcal{S}} - y] \leq [u - y, u - y] \leq \Gamma\|u' - y'\|_\infty^2,$$

tj. $\quad \|u_{\mathcal{S}} - y\|_\infty \leq \sqrt{\Gamma/\gamma}\|u' - y'\|_\infty.$ $\square$

Primjer prostora $\mathcal{S}$: kubični splajnovi

Na segmentu $[0, 1]$ načinimo podjelu

$$\Delta : \quad 0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1.$$

Funkcija $s \equiv s_\Delta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ je kubični spline ako je

- Restrikcija od s na svaki $[x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, polinom stupnja najviše tri.

Ukoliko je $s \in C^2[0, 1]$ tada je s kubični splajn klase C^2.

Za fiksiranu particiju Δ s $\mathcal{S}_\Delta$ označimo prostor splajnova klase C^2.

Je li $\mathcal{S}_\Delta$ vektorski prostor?

u, v - splajnovi, $u, v \in \mathcal{S}_\Delta$

Da li je i $u + v \in \mathcal{S}_\Delta$?

u, v polinomi stupnja (barem) 3 na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$
$\Rightarrow \quad u + v$ polinom stupnja 3 na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$

$$u, v \in C^2(0,1) \quad \Rightarrow \quad u + v \in C^2(0,1)$$

Da li je za $\alpha \in \mathbf{R}$ i $\alpha u \in \mathcal{S}_\Delta$?

u polinom stupnja 3 na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$
$\Rightarrow \quad \alpha u$ polinom stupnja 3 na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$

$$u \in C^2(0,1) \quad \Rightarrow \quad \alpha u \in C^2(0,1)$$

Pokazali smo $\quad u, v \in \mathcal{S}_\Delta \quad \Rightarrow \quad \alpha\, u + \beta\, v \in \mathcal{S}_\Delta.$

$\mathcal{S}_\Delta$ je **vektorski prostor**

Kolika je dimenzija prostora $\mathcal{S}_\Delta$?

Kako izgleda baza prostora $\mathcal{S}_\Delta$?

Iz problema interpolacije (UNM) znamo da je kubični splajn (klase C^2) jednoznačno određen interpolacijskim uvjetima

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n \quad \text{i} \quad s'(0) = f'(0),\ s'(1) = f'(1).$$

$n + 3$ (linearna) uvjeta. $\quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{S}_\Delta = n + 3.$(**?**)

Baza prostora $\mathcal{S}_\Delta$
B-splajnovi

Odredimo najmanji mogući k takav da splajn $B_i \in \mathcal{S}_\Delta$ zadovoljava:

$$\begin{aligned} B_i &\in C^2(0,1), \\ B_i(x) &= 0 \quad \text{za} \quad x \notin [x_i, x_{i+k}] \\ B_i &\not\equiv 0. \end{aligned}$$

Rješenje.

k-intervala $\quad \rightarrow \quad 4 \cdot k$ koeficijenata

$B_i \in C^2(a,b) \quad \rightarrow \quad 3 \cdot (k+1)$ uvjeta (u $x_i, \ldots, x_{i+k}$)

$4 \cdot k - 3 \cdot (k+1) = k - 3$

$B_i \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad k - 3 > 0$

Najmanji k: $\quad k = 4$

B-splajn - splajn s minimalnim kompaktnim nosačem:

$$\begin{aligned} B_i &\in C^2(0,1), \\ B_i(x) &= 0 \quad \text{za} \quad x \notin [x_i, x_{i+4}] \\ B_i &\neq 0. \end{aligned}$$

Naziv (engl.): B(asis) spline.
Subdiviziju Δ segmenta $[0, 1]$

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1.$$

proširimo s proizvoljnim točkama

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < 0 \quad \text{i} \quad 1 < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+2}.$$

Za novu subdiviziju

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+2}$$

promatramo B-splajnove

$$B_{-3}, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$$

To su svi netrivijalni B-splajnovi na (a, b).
Čine bazu prostora $\mathcal{S}_\Delta$

Napomena.

U subdiviziji možemo imati i čvorove višestrukog multipliciteta.

Proširena subdivizija je

$$x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+2}$$

odnosno

$$\tilde{\Delta} = \{x_0, x_0, x_0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_n, x_n, x_n\}\,.$$

B-splajnovi nisu jedinstveno određeni: ako je B_i B-splajn onda je i αB_i B-splajn (za $\alpha \neq 0$).

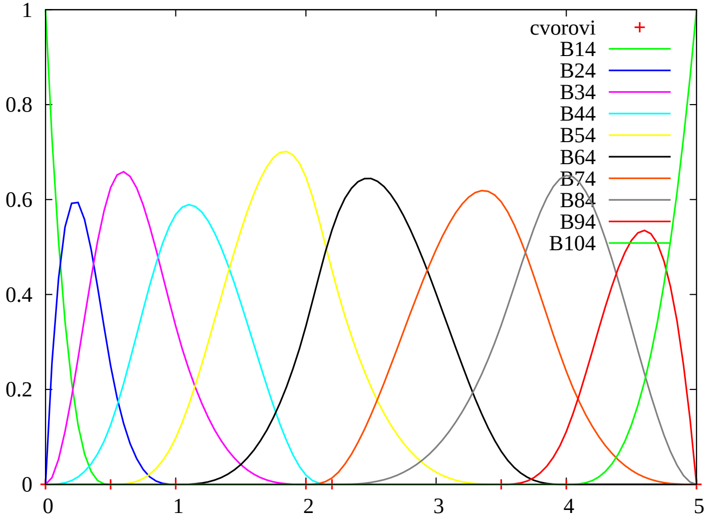
Normiranje:

$$\sum_i B_i(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1]$$

-particija jedinice

B-splajn je različit od 0 na (x_i, x_{i+4})
Ako je $B_i(x) = 0$ za $x \in (x_i, x_{i+4})$ onda $B_i \equiv 0$.

B-splajnovi reda 4



Eksplicitni izraz za B-splajnove

Neka su

$$
\begin{aligned}
C_0(t) &= \frac{1}{6}\left(-t^3 + t^2 - 3t + 1\right) = \frac{1}{6}(1-t)^3, \\
C_1(t) &= \frac{1}{6}\left(3t^3 - 6t^2 + 4\right), \\
C_2(t) &= \frac{1}{6}\left(-3t^3 + 3t^2 - 3t + 1\right), \\
C_3(t) &= \frac{1}{6}t^3.
\end{aligned}
$$

Za **ekvidistantnu** particiju Δ $(x_{i+1} - x_i = h)$, B-splajn je zadan s

$$
B_i(x) = C_j((x - x_{i+j})/h),
$$

$$
\text{za} \quad x \in [x_{i+j}, x_{i+j+1}], \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad i = 0, \ldots, n-4.
$$

Rubni B-splajnovi B_{-3}, B_{-2}, B_{-1} i $B_{n-3}, B_{n-2}, B_{n-1}$ mogu se opisati na sličan način.

Eksplicitni izraz nam nije bitan jer se B-splajnovi računaju na drugačiji način.

U MATLAB-u se definiraju preko particije. Rubni B-splajnovi imaju prvi (zadnji) čvor veće multipliciteta.

Ocjena pogreške

Ocjena pogreške za interpolaciju je dana sljedećim teoremom.

Teorem (T5)

Neka je $f \in \mathcal{C}^4[0,1]$ *i neka je*

$$h = \max_j (x_{j+1} - x_j), \quad \kappa_\Delta = h / \min_j (x_{j+1} - x_j).$$

Ako je s interpolacijski spline za funkciju f:

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n \quad i \quad s'(0) = f'(0),\ s'(1) = f'(1),$$

onda postoje konstante $c_k \leq 2$ *tako da za svaki* $x \in [0,1]$ *vrijedi*

$$|f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq c_k h^{4-k} \|f^{(4)}\|_\infty,\ k = 0, 1, 2, 3$$

Pri tome je $c_0 = 5/384$, $c_1 = 1/24$, $c_2 = 3/8$, $c_3 = (\kappa_\Delta + 1/\kappa_\Delta)/2$

Odaberimo sada

$$\mathcal{S} = \{s \in \mathcal{S}_\Delta \ : \ s(0) = s(1) = 0\},$$

gdje je $\mathcal{S}_\Delta$ prostor splineova. Očito je $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}$.

Teorem (T6)

Neka je y egzaktno rješenje problema (1), i $y \in C^4[0,1]$. Neka je

$$\mathcal{S} = \{s \in \mathcal{S}_\Delta \ : \ s(0) = s(1) = 0\}$$

i

$$u_{\mathcal{S}} = \arg\min_{u \in \mathcal{S}} F(u).$$

Tada je

$$\|u_{\mathcal{S}} - y\|_\infty \leq \frac{1}{24}\sqrt{\frac{\Gamma}{\gamma}}\|y^{(4)}\|_\infty h^3.$$

Dokaz. Ako odaberemo spline u koji interpolira točno rješenje na način da je

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n \quad \text{i} \quad s'(0) = f'(0), \ s'(1) = f'(1),$$

onda prvo uočavamo da je takav $u \in \mathcal{S}$ pa prema Teoremu T5

$$\|u' - y'\|_\infty \leq c_1 h^3 \|y^{(4)}\|_\infty.$$

Teorema T4 kaže da postoji C takav da

$$\|u_{\mathcal{S}} - y\|_\infty \leq C\|u' - y'\|_\infty, \quad u \in \mathcal{S} \text{ proizvoljan.}$$

Sada je

$$\|u_{\mathcal{S}} - y\|_\infty \leq C\|u' - y'\|_\infty \leq Cc_1 h^3 \|y^{(4)}\|_\infty.$$

Iz teorema T4 je $C = \sqrt{\frac{\Gamma}{\gamma}}$ a iz teorema T5 je $c_1 = 1/24$. $\square$

Algoritam

Za rubni problem

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = g(x),\; x \in [0,1]$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

Tražimo rješenje oblika:

$$s = \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(x).$$

Jer je B_{-3} jedini B-splajn za koji je $B_i(0) \neq 0$ a B_{n-1} jedini za koji je $B_i(1) \neq 0$, slijedi da je

$$\alpha_{-3} = 0 \quad \text{i} \quad \alpha_{n-1} = 0$$

pa je s oblika

$$s = \sum_{i=-2}^{n-2} \alpha_i B_i(x).$$

Uz oznake

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_{-2} \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} [B_{-2}, B_{-2}] & \cdots & [B_{-2}, B_{n-2}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [B_{n-2}, B_{-2}] & \cdots & [B_{n-2}, B_{n-2}] \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} (f, B_{-2}) \\ \vdots \\ (f, B_{n-2}) \end{pmatrix}$$

nepoznate koeficijente dobijemo kao rješenje sustava

$$A\,x = b.$$

Zbog $B_i(x) = 0$ za $x \notin [x_i, x_{i+4}]$ je

$$[B_i, B_j] = 0 \quad \text{za} \quad |i-j| > 3.$$

Matrica A je trakasta (7-dijagonalna).

Za $|i-j| \leq 3$ je

$$\begin{aligned} [B_i, B_j] &= \int_0^1 \left[p(x)B_i'(x)B_j'(x) + q(x)B_i(x)B_j(x)\right] dx = \\ &= \int_{x_{\max\{i,j\}}}^{x_{\min\{i,j\}+4}} \left[p(x)B_i'(x)B_j'(x) + q(x)B_i(x)B_j(x)\right] dx. \end{aligned}$$

Slično

$$(f, B_i) = \int_0^1 f(x)B_i(x)dx = \int_{x_i}^{x_i+4} f(x)B_i(x)dx.$$

Ne integriramo po cijelom segmentu $[0, 1]$ već po znatno manjem, najviše po 4 podintervala.

Kako izračunati

$$\int_{x_i}^{x_i+1} g(x)\, dx?$$

Egzaktno? **NE.**

Numerička integracija. Koja?

Pokazali smo da je pogreška metode reda h^3.

Pogreška integracijske metode treba biti istog ili većeg reda (ne previše većeg).

Izbor: Gaussove integracijske formule u jednoj točki ili u dvije točke. Pogreška metoda je

$$E_1 = \frac{h^3}{24}\|g^{(2)}\|_\infty \quad \text{i} \quad E_2 = \frac{h^5}{4320}\|g^{(4)}\|_\infty.$$

Preporuka je integracija u dvije točke.