Numeričko rješavanje rubnog problema za ODJ

Vježbe

Zadatak (Nelinearni rubni problem)

Rubni problem

$$y'' = g(x, y, y'), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

može se diskretizirati tako da prvu derivaciju zamijenimo centralnom podijeljenom diferencijom a drugu derivaciju s drugom podijeljenom diferencijom na ekvidistantnoj mreži (x_i) gdje je $x_i = i \cdot h$ i $h = 1/n$.

(a) Formulirajte dobivenu jednadžbu kao problem fiksne točke u $\mathbb{R}^{n-1}$ i definirajte odgovarajuće jednostavne iteracije.

(b) Napišite Matlab program koji korisi jednostavne iteracije iz (a) na problem

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 1.$$

Izvedite program za $n = 10, 100, 1000, 10000$. Iteracije zaustavite kada se dvije susjedne iteracije razlikuju za manje od $0.5e - 14$ u normi ∞.
Ispišite broj iteracija i pogrešku zadnje iteracije kao aproksimacije egzaktnog rješenja.
Uz pretpostavku da se pogreqv ska ponaša kao $\mathcal{O}(h^p)$, numerički odredite p.

(c) Primijenite jednostavne iteracije iz (a) na rubni problem iz Zadatka 1. Pokažite da je iteracijska funkcija kontrakcija. (*Uputa: koristite činjenicu da simetrična trodijagonalna* $(n-1) \times (n-1)$ *matrica* A *s elementima -2 na dijagonali i 1 na sporednim dijagonalama ima inverz koji zadovoljava* $\| A^{-1} \|_\infty \leq n^2/8$.)

Zadatak (Nelinearni rubni problem - Newtonova metoda)

(a) Riješite jednadžbu iz Zadatka 1(c) Newtonovom metodom umjesto jednostavnim iteracijama. Jednadžbu riješite za $n = 10, 100, 1000$ i toleranciju pogreške $0.5e - 14$. Ispišite broj iteracija i nacrtajte graf dobivenog rješenja.

Zadatak (Metoda gađanja)

Promatrajmo rubni problem koji opisuje kutno gibanje njihala:

$$y'' + \sin y = 0, \quad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{4},$$
$$y(0) = 0, \quad y\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 1.$$

(a) Koristeći Matlab funkciju ode45 izračunajte i nacrtajte rješenje $u(x; s)$ pridruženog inicijalnog problema

$$u'' + \sin u = 0, \quad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{4},$$
$$u(0) = 0, \quad u'(0) = s$$

za $s = 0.2(0.2)2$.

(b) Napišite i izvedite Matlab program koji primjenjuje metodu bisekcije (s točnošću $0.5e-12$) na jednadžbu

$$f(s) = 0, \quad f(s) = u(1; s) - 1.$$

Iskoristite graf iz (a) za izbor početnih točaka a_0 i b_0 takvih da je $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.
Ispišite broj bisekcija (iteracija) i dobivenu vrijednost za s.

(c) Nacrtajte graf rješenja rubnog problema $y(x) = u(x; s)$ gdje je s dobiven u (b).

Zadatak

Koristeći konačne diferencije unaprijed, diskretizirajte diferencijalnu jednadžbu

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = 0, \ u(1) = 0.$$

Je li metoda konvergentna? Ukoliko je konvergentna, koliki je red konvergencije?

Zadatak

Iz varijacijske formulacije za rubni problem

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = 0,\ u(1) = 0,$$

izvedite numeričku metodu koristeći linearne splajnove. Kako izgleda pripadni sustav jednadžbi? Ocijenite pogrešku metode.

Zadatak

Diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y' - y = -e^{-x}, \quad y(0) = 1,\ y(1) = e^{-1}$$

zapišite u varijacijskoj formulaciji.
Riješite jednadžbu primjenom metode konačnih elemenata koristeći linearne splajnove.
Odredite numerički red konvergencije.

Zadatak

Diferencijalnu jednadžbu iz prošlog zadatka riješite metodom konačnih razlika. Koliki je numerički red konvergencije?

Zadatak

Metodom konačnih razlika riješite diferencijalnu jednadžbu iz Zadatka 6.

Zadatak

Koliki je red metode konačnih razlika ukoliko subdivizija intervala nije ekvidistantna? Je li metoda konvergentna? Obrazložite odgovor.

Zadatak

Ukoliko u metodi konačnih razlika za problem

$$y'' + q\,y' + r\,y = f, \quad y'(0) = \alpha,\ y(1) = \beta$$

$y'(0)$ aproksimiramo pomoću derivacije polinoma drugog stupnja P_2 (s $P_2'(x_0)$), koji interpolira funkciju y u točkama x_0, x_1 i x_2 dobijemo malo drugačiju matricu sustava. Je li ona i dalje regularna?

Zadatak

Diferencijalna jednadžba

$$-y'' + f(x)\,y = g(x), \quad y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta$$

je na intervalu $[0, 1]$ aproksimirana s

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \beta_{-1} f_{i-1} y_{i-1} + \beta_0 f_i y_i + \beta_1 f_{i+1} y_{i+1} = \\ = \beta_{-1} g_{i-1} + \beta_0 g_i + \beta_1 g_{i+1},$$

gdje su β_{-1}, β_0 i β_1 konstante. Uz pretpostavku da je y dovoljno puta diferencijabilna, pokažite da pogreška odsjecanja ove metode može biti napisana u obliku:

(a) ako je $\beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 \neq 1$ tada je

$$T_i = (\beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1)\, y''(x_i) + Z_i^{(0)} h,$$

gdje je $\left|Z_i^{(0)}\right| \leq (|\beta_{-1}| + |\beta_1|)\, M_3$.

(b) ako je $\beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 = 1$ i $\beta_{-1} \neq \beta_1$ tada je

$$T_i = (\beta_{-1} - \beta_1)\, hy'''(x_i) + Z_i^{(1)} h^2,$$

gdje je $\left|Z_i^{(1)}\right| \leq \left[\frac{1}{2}\left(|\beta_{-1}| + |\beta_1|\right) + \frac{1}{12}\right] M_4$.

(c) ako je $\beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 = 1$, $\beta_{-1} = \beta_1$ i $\beta_1 \neq \frac{1}{12}$ tada je

$$T_i = \left(\beta_1 - \frac{1}{12}\right) h^2 y^{iv}(x_i) + Z_i^{(2)} h^3,$$

gdje je $\left|Z_i^{(3)}\right| \leq \left[\frac{1}{12}|\beta_1| + \frac{1}{360}\right] M_6$.

(d) ako je $\beta_{-1} = \beta_1 = \frac{1}{12}$ i $\beta_0 = \frac{5}{6}$ tada je

$$T_i = \frac{1}{240} h^4 y^{vi}(x_i) + Z_i^{(4)} h^6,$$

gdje je $\left| Z_i^{(2)} \right| \leq \frac{1}{60480} M_8$.

S M_k je označeno $\max_x |y^{(k)}(x)|$.