JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij – 22. travnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Zadatak 1. (13 bodova)
Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ (-1)^m \frac{mn - n + m - 1}{2mn^2 + 4m + 4 + 2n^2} \;\middle|\; m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij – 22. travnja 2025.

Zadatak 2. (15 bodova)

(a) (7 bodova) Koristeći teorem o sendviču odredite limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)^n + (n+2)^n + \cdots + (n+2025)^n}}{2n+25}$$

(b) (8 bodova) Ispitajte je li niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan rekurzivno s

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

konvergentan te ako je, odredite mu limes.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij – 22. travnja 2025.

Zadatak 3. (10 bodova)
Neka je preslikavanje $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadano sa: za $x = (x_1, x_2)\,,\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$d(x,y) = \begin{cases} d_2(x,0) + d_2(y,0) & : x \neq k\, y\ ,\ \forall k \in \mathbb{R}\ , \\ d_2(x,y) & : x = k\, y\ ,\ \text{za neko } k \in \mathbb{R}\ , \end{cases}$$

gdje je d_2 Euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$. Pokažite da je d metrika na $\mathbb{R}^2$.

Rješenje: Pozitivnost, strogost i simetričnost slijede direktno iz definicije preslikavanja d i odgovarajućih svojstava metrike d_2. Za nejednakost trokuta prvo uočimo da po definiciji preslikavanja d i jer je d_2 metrika (pa d_2 zadovoljava nejednakost trokuta) vrijedi

$$d(x,y) \geq d_2(x,y)\ , \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^2\ . \tag{$\star$}$$

Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^2$. Promotrimo dva slučaja:

1. $\underline{x = k\, y \text{ za neko } k \in \mathbb{R}}$: sada je

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y) \\ &= d_2(x,z) + d_2(y,z) \leq d(x,z) + d(y,z) \end{aligned}$$

   pri čemu smo redom koristili definiciju preslikavanja d, nejednakost trokuta primijenjenu na metriku d_2, simetričnost od d_2 i svojstvo ($\star$).

2. $\underline{x \neq k\, y,\ \forall k \in \mathbb{R}}$: imamo dva podslučaja

   (a) $z = k\, x$ za neko $k \in \mathbb{R}$, pa je nužno $z \neq k\, y$, $\forall k \in \mathbb{R}$. Sada je

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d_2(x,0) + d_2(y,0) \leq d_2(x,z) + d_2(z,0) + d_2(y,0) \\ &= d_2(x,z) + d(z,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \end{aligned}$$

   gdje smo redom iskoristili definiciju preslikavanja d, nejednakost trokuta primijenjenu na $d_2(x,0)$, definiciju preslikvanja d primijenjenu na $d_2(z,0) + d_2(y,0)$ i svojstvo ($\star$).

   (b) $z \neq k\, x\ \forall k \in \mathbb{R}$ pa je

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d_2(x,0) + d_2(y,0) \leq d_2(x,0) + d_2(z,0) + d_2(y,z) \\ &= d(x,z) + d_2(y,z) \leq d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

   pri čemu smo redom koristili definiciju preslikavanja d, nejednakost trokuta primijenjenu na $d_2(y,0)$, definiciju preslikvanja d primijenjenu na $d_2(x,0) + d_2(z,0)$ i svojstvo ($\star$).

JMBAG　　　　IME I PREZIME　　　　BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij – 22. travnja 2025.

Zadatak 4. (12 bodova)

(a) (8 bodova) Definirajte pojam gomilišta niza realnih brojeva. Dokažite da je $a \in \mathbb{R}$ gomilište niza realnih brojeva (a_n) ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ otvoreni interval $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ sadrži beskonačno mnogo članova niza (a_n).

(b) (2 boda) Navedite primjer niza koji ima točno 5 gomilišta. Obrazložite odgovor.

(c) (2 boda) Neka su (a_n) i (b_n) dva ograničena niza realnih brojeva. Dokažite ili opovrgnite tvrdnju:

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

Rješenje:

(a) Vidjeti predavanja.

(b) Primjer takvog niza je

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 5k, k \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 5k+1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 2, & n = 5k+2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 3, & n = 5k+3, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 4, & n = 5k+4, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Vrijedi $\lim_{k\to\infty} a_{5k} = 0$, $\lim_{k\to\infty} a_{5k+1} = 1$, $\lim_{k\to\infty} a_{5k+2} = 2$, $\lim_{k\to\infty} a_{5k+3} = 3$, $\lim_{k\to\infty} a_{5k+4} = 4$, iz čega slijedi da su $0, 1, 2, 3, 4$ gomilišta niza (a_n).

To su jedina gomilišta jer za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4\}$, označimo

$$\varepsilon = \min\{|a|, |a-1|, |a-2|, |a-3|, |a-4|\}.$$

Tada okolina $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ na sadrži niti jedan član niza (a_n) pa a nije gomilište niza (a_n).

(c) Tvrdnja ne vrijedi općenito. Uzmimo npr. $a_n = (-1)^n$, $b_n = -(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 1$, dok je $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$ pa je $\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \neq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.