MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 27. lipnja 2022.

Zadatak 1 (12 bodova)

(a) (5 bodova) Je li funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|}{\sqrt{7x^2+y^2}}, & \text{ako je } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{ako je } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

neprekidna na $\mathbb{R}^2$?

(b) (7 bodova) Može li se funkcija

$$f(x,y) = \frac{2x^2y - xy^2}{x^2 + 3y^2}$$

dodefinirati do funkcije klase C^1 na $\mathbb{R}^2$?

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 27. lipnja 2022.

Zadatak 2 (12 bodova)

(a) (6 bodova) Ispitajte povezanost i kompaktnost skupa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; xy > 1,\; |y| \leq 2\}.$$

Obrazložite sve svoje tvrdnje.

(b) (6 bodova) Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadana s $f(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$. Odredite sve točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ u kojima f ima lokalni inverz, te u tim točkama odredite $(f^{-1})'(f(x, y))$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 27. lipnja 2022.

Zadatak 3 (13 bodova)

(a) (5 bodova) Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje među metričkim prostorima neprekidno u točki $x_0 \in X$. Dokažite da za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X takav da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

(b) (5 bodova) Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klase C^2 i neka je $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zadana kao $\gamma(t) = (2, t^2)$.

Definirajte parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ funkcije f u točki (x_0, y_0).

Ako je $g = f \circ \gamma$, odredite $g''(t)$.

(c) (3 boda) Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |xy|$ diferencijabilna u $(0, 0)$, ali nije diferencijabilna niti na jednom otvorenom krugu s centrom u $(0, 0)$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 27. lipnja 2022.

Zadatak 4 (13 bodova)

(a) (6 bodova) Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funkcija. Definirajte derivabilnost funkcije f u točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dokažite da ako je f derivabilna na $\mathbb{R}^n$ da je onda i neprekidna na $\mathbb{R}^n$.

(b) (4 bodova) Neka je $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ te $f : K \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija na K. Neka je P subdivizija pravokutnika K zadana s

$$
\begin{aligned}
a_1 = x_1^{(0)} < x_1^{(1)} < \ldots < x_1^{(p_1)} = b_1 \\
a_2 = x_2^{(0)} < x_2^{(1)} < \ldots < x_2^{(p_2)} = b_2.
\end{aligned}
$$

Precizno definirajte donju Darbouxovu sumu funkcije f s obzirom na subdiviziju P te donji Riemannov integral funkcije f na skupu K.

(c) (3 boda) Zadana je funkcija $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ formulom

$$
f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x_1 \geq \frac{1}{2} \\ 2, & \text{inače} \end{cases}
$$

Odredite gornji i donji Riemannov integral funkcije f. Je li f Riemann integrabilna? Odgovore detaljno obrazložite.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 27. lipnja 2022.

Zadatak 1 (12 bodova)

(a) (5 bodova) Je li funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+6y^2}}, & \text{ako je } (x,y) \neq (0,0), \\ 2, & \text{ako je } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

neprekidna na $\mathbb{R}^2$?

(b) (7 bodova) Može li se funkcija

$$f(x,y) = \frac{x^2y - 3xy^2}{2x^2 + y^2}$$

dodefinirati do funkcije klase C^1 na $\mathbb{R}^2$?

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 27. lipnja 2022.

Zadatak 2 (12 bodova)

(a) (6 bodova) Ispitajte povezanost i kompaktnost skupa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \geq 1,\ |y| < 2\}.$$

Obrazložite sve svoje tvrdnje.

(b) (6 bodova) Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadana s $f(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$. Odredite sve točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ u kojima f ima lokalni inverz, te u tim točkama odredite $(f^{-1})'(f(x, y))$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 27. lipnja 2022.

Zadatak 3 (13 bodova)

(a) (5 bodova) Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje među metričkim prostorima takvo da za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X takav da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Dokažite da je tada f neprekidno u točki x_0.

(b) (5 bodova) Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klase C^2 i neka je $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zadana kao $\gamma(t) = (t^2, 1)$.

Definirajte parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ funkcije f u točki (x_0, y_0).

Ako je $g = f \circ \gamma$, odredite $g''(t)$.

(c) (3 boda) Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |xy|$ diferencijabilna u $(0, 0)$, ali nije diferencijabilna niti na jednom otvorenom krugu s centrom u $(0, 0)$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 27. lipnja 2022.

Zadatak 4 (13 bodova)

(a) (6 bodova) Neka je $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funkcija. Definirajte derivabilnost funkcije g u točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dokažite da ako je g derivabilna na $\mathbb{R}^n$ da je onda i neprekidna na $\mathbb{R}^n$.

(b) (4 bodova) Neka je $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ te $f : K \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija na K. Neka je P subdivizija pravokutnika K zadana s

$$\begin{aligned} a_1 = x_1^{(0)} < x_1^{(1)} < \ldots < x_1^{(p_1)} = b_1 \\ a_2 = x_2^{(0)} < x_2^{(1)} < \ldots < x_2^{(p_2)} = b_2. \end{aligned}$$

Precizno definirajte gornju Darbouxovu sumu funkcije f s obzirom na subdiviziju P te gornji Riemannov integral funkcije f na skupu K.

(c) (3 boda) Zadana je funkcija $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Odredite gornji i donji Riemannov integral funkcije f. Je li f Riemann integrabilna? Odgovore detaljno obrazložite.