SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Radulović, Borja Rukavina

Osnove matematičke analize

– skripta –

Zagreb, 14. lipnja 2024.

Sadržaj

Poglavlje 1

Zasnivanje skupova $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$

1. Skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$

Zadatak 1.1. *Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

a) $2^n > n$,

b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Rješenje: Koristimo aksiom matematičke indukcije ($P3$):

a) Baza ($n = 1$): $2^1 > 1$

Korak: pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$2^n > n. \tag{1.1}$$

Tada iz (1.1) slijedi da je $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n = n + n \geq n + 1$.

b) Baza ($n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2. \tag{1.2}$$

Korak: pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2. \tag{1.3}$$

Tada je

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \tag{1.4}$$

□

Zadatak 1.2. *Dokažite da svaki neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima najmanji element, tj. $\exists s \in S$ takav da $s \leq k$, $\forall k \in S$.*

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da tvrdnja ne vrijedi. Tada postoji neprazni podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ koji nema najmanji element. Neka je

$$R\colon = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq s \text{ za svaki } s \in S\}. \tag{1.5}$$

Kako S nema najmanji element, jasno je da vrijedi $R \cap S = \emptyset$. Jasno je da je $1 \in R$ (aksiom ($P1$)). Pretpostavimo da je $k \in R$. Tada svaki prirodni broj manji ili jednak k mora također biti manji ili jednak s za svaki $s \in S$. Stoga je $1, 2, \ldots, k \in R$. Iz činjenice da $R \cap S = \emptyset$, vidimo da vrijedi $1, 2, \ldots, k \notin S$. Da je $k+1 \in S$, tada bi $k+1$ bio najmanji element skupa S. Ova činjenica implicira da $k+1 \in R$. Stoga, princip matematičke indukcije implicira da je $R = \mathbb{N}$. Tada je S prazan skup, što je kontradikcija s pretpostavkom da je S neprazan. Stoga, svaki neprazan skup prirodnih brojeva mora imati najmanji element. □

Zadatak 1.3. *Dokažite da jednadžba $q^2 = 2$ nema rješenja u skupu $\mathbb{Q}$.*

Rješenje: Pretpostavimo da postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $q^2 = 2$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $q = \frac{m}{n}$, za $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ te da su m i n relativno prosti, tj. nemaju zajedničkog djeljitelja različitog od -1 i 1 ("razlomak je maksimalno skraćen"). Tada je

$$\frac{m^2}{n^2} = 2, \tag{1.6}$$

odakle slijedi

$$m^2 = 2n^2, \tag{1.7}$$

pa je m^2 djeljiv s 2. Tada je i m djeljiv s 2, jer u slučaju da nije, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k + 1$ pa bi slijedilo da

$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1, \tag{1.8}$$

nije djeljiv s 2, što je kontradikcija. Dakle, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k$. Tada iz

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2, \tag{1.9}$$

slijedi

$$n^2 = 2k^2, \tag{1.10}$$

odakle slično vidimo da je i n djeljiv s 2, tj. postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $n = 2l$. Time smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da su m i n relativno prosti.

$\square$

Domaća zadaća

1. Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

2. Dokažite da za svaka tri prirodna broja x, y i z vrijedi

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

3. Dokažite da su definicije zbrajanja i množenja cijelih i racionalnih borjeva „dobre", tj. da ne ovise o izboru predstavnika klase.

4. Dokažite asocijativnost zbrajanja u skupu $\mathbb{Q}$.

2. Skup $\mathbb{R}$

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ definiramo pomoću aksioma:

1. Aksiomi zbrajanja $(+)$

   (A1) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (asocijativnost)

   (A2) $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = 0 + x = x$ (neutralni element)

   (A3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R})\ x + (-x) = (-x) + x = 0$ (inverz)

   (A4) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$ (komutativnost)

$(\mathbb{R}, +)$ je abelova grupa.

2. Aksiomi množenja $(\cdot)$

   (A5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (xy)z = x(yz)$ (asocijativnost)

   (A6) $(\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall x \in \mathbb{R})\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (neutralni element)

   (A7) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbb{R})\ x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$ (inverz)

   (A8) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ xy = yx$ (komutativnost)

   (A9) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x(y + z) = xy + xz$ (distributivnost $\cdot$ prema $+$)

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je polje.

Zadatak 2.1. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dokažite:*

a) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$,

b) $-(-x) = x$,

c) $x \neq 0,\ x \cdot y = x \Rightarrow y = 1$,

d) $0 \cdot x = 0$,

e) $(-x) \cdot y = -(xy)$.

Rješenje:

a) $y = (A2) = 0+y = (A3) = ((-x)+x)+y = (A1) = (-x)+(x+y) = (pretpostavka) = (-x) + (x + z) = (A1) = ((-x) + x) + z = (A3) = 0 + z = (A2) = z$,

b) $(-x) + (-(-x)) = (A3) = 0 = (A3) = (-x) + x \Rightarrow$ (koristimo a)) $-(-x) = x$,

c) $1 = (A7) = x^{-1} \cdot x = (pretpostavka) = x^{-1} \cdot (xy) = (A5) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = (A7) = 1 \cdot y = (A6) = y$,

d) $0 \cdot x = (A2) = (0 + 0) \cdot x = (A9) = 0 \cdot x + 0 \cdot x = 2 \cdot 0x$ $(1 \cdot 0x = 2 \cdot 0x)$
Pretpostavimo da vrijedi $0 \cdot x \neq 0$. Tada iz c) slijedi $1 = 2$ $(1 + 0 = 1 + 1)$, odakle dobijemo (koristeći dio a)) $0 = 1$, što je kontradikcija s $(A6)$. $(1 \neq 0)$

e) $-(xy) + xy = (A3) = 0 = (d)) = 0 \cdot y = (A3) = ((-x) + x) \cdot y = (A9) = (-x) \cdot y + xy$.
Iz dijela a) imamo $(-x) \cdot y = -(xy)$.

$\square$

3. Aksiomi uređaja

   (A10) $(\forall x, y, \in \mathbb{R})\ (x \leq y) \vee (y \leq x)$ (linearnost)

   (A11) $(\forall x, y, \in \mathbb{R})\ ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (x = y)$ (antisimetričnost)

   (A12) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z)$ (tranzitivnost)

   (A13) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \leq y) \Rightarrow x + z \leq y + z$ (usklađenost zbrajanja)

   (A14) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ ((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \Rightarrow x \cdot y \geq 0$ (usklađenost množenja)

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je totalno uređeno polje.

Zadatak 2.2. *Dokažite da za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

a) $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$,

b) $0 < 1$,

c) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$,

d) $0 \leq x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.

Rješenje:

a) Iz $x \leq 0$ koristeći (A13) imamo $0 = (A3) = (-x) + x \leq (-x) + 0 = (A2) = -x$, iz čega slijedi $0 \leq -x$.

b) Zbog (A6) imamo $0 \neq 1$ pa vrijedi $0 < 1$ ili $1 < 0$. Pretpostavimo da vrijedi $1 < 0$. Iz a) imamo $-1 > 0$ pa iz (A14) dobivamo $(-1) \cdot (-1) > 0$.

S druge strane, koristeći tvrdnje *b)* i *e)* iz Zadatka 2.1 imamo $(-1)\cdot(-1) = -(1\cdot(-1)) = -(-(1 \cdot 1)) = 1$, pa vrijedi $1 > 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $1 < 0$.

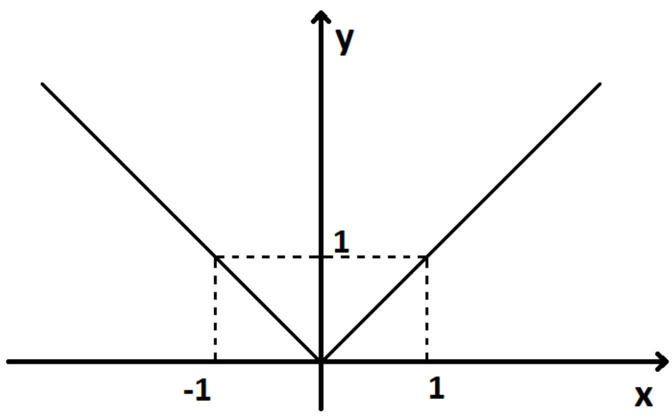
c) Koristeći tvrdnju *e)* iz Zadatka 2.1 dobivamo $(x-y)(x+y) = (A9) = (x-y)x + (x-y)y = (A9) = x^2 + (-y)x + xy + (-y)y = x^2 - xy + xy - y^2 = (A3) = x^2 + 0 - y^2 = (A2) = x^2 - y^2$.

d) $0 \leq x \leq y \Rightarrow x, y \geq 0$ i $y - x \geq 0$ pa imamo $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) \geq (A14) \geq 0$ (gdje je $y - x \geq 0$ i $y + x \geq y + 0 \geq 0 + 0 = 0$), dobivamo $y^2 \geq x^2$.

$\square$

Definicija 2.1. *Apsolutna vrijednost je funkcija* $|\cdot| \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirana sa*

$$|x| \colon = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$



Napomena 2.2. *Apsolutna vrijednost ima sljedeća svojstva:*

a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

c) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$,

d) $||x| - |y|| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.3. *Dokažite da za $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|. \tag{2.2}$$

Rješenje: Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Baza: (n=1) $|x_1| \leq |x_1|$

Korak: Pretpostavimo da (2.2) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ $(*)$. Neka su $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Tada iz Napomene 2.2 *c*) i pretpostavke $(*)$:

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|. \tag{2.3}$$

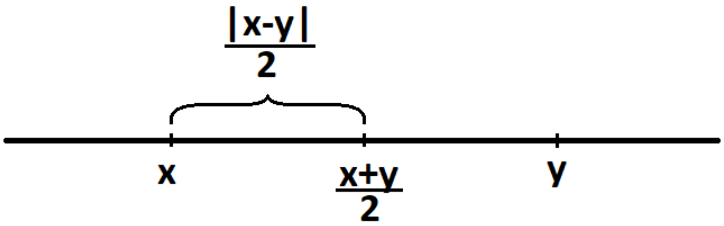
□

Zadatak 2.4. *Dokažite da za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

a) $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$, *b)* $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

Rješenje:

a) Grafički:



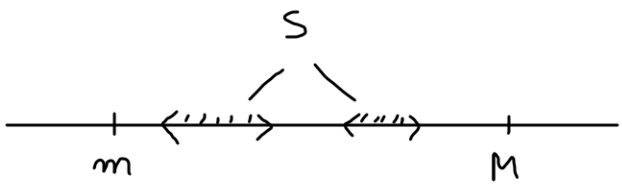
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \leq y$. Tada je $x - y \leq 0$, iz čega slijedi $|x - y| = -(x - y)$, pa je

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (-(x - y))}{2} = x = \min\{x, y\}. \tag{2.4}$$

b) Slično (domaća zadaća).

□

Definicija 2.3. *Skup $S \subset \mathbb{R}$ je omeđen odozgo (odozdo) ako postoji $M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$ takav da $(\forall x \in S)$ $x \leq M$ $(m \leq x)$. Kažemo da je M (m) gornja (donja) međa skupa S.*

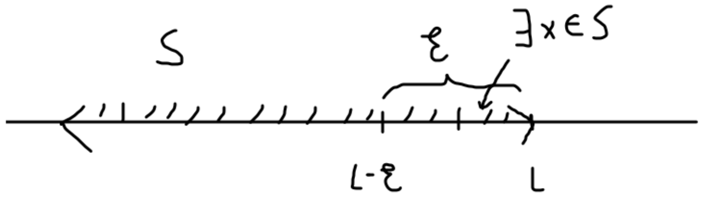


Najmanju gornju među zovemo supremum, a najveću donju među zovemo infimum skupa S. Pišemo: $\sup S$ *i* $\inf S$.

Ako je L gornja međa, tada je ona supremum ako i samo ako ne postoji manja gornja međa, odnosno $(\forall a \in \mathbb{R},\ a < L)\, \exists x \in S$ *t.d.* $a < x$*, odnosno*

i) $(\forall x \in S)\ x \leq L$,

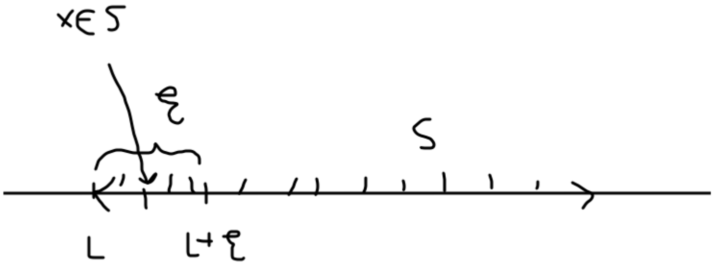
ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S)\ L - \varepsilon < x$.



Slično je donja međa L infimum skupa S ako i samo ako vrijedi $(\forall a \in \mathbb{R},\ a > L)\, \exists x \in S$ *t.d.* $a > x$*, odnosno*

i) $(\forall x \in S)\ x \geq L$,

ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S)\ L + \varepsilon > x$.



$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ i $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ zadovoljavaju (A1)-(A14).

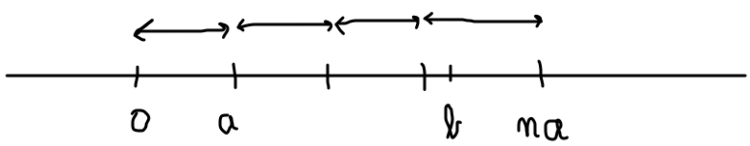
Uvodimo aksiom potpunosti:

(A15) Svaki neprazan i odozgo omeđen podskup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$ (tj. $\sup S \in \mathbb{R}$).

Napomena 2.4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ *ne zadovoljava (A15).*

Napomena 2.5. *U skupu $\mathbb{R}$ vrijedi Arhimedov aksiom:*

(AA) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a > 0,\ b > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$.



Definicija 2.6. *Neka je* $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$. *Ako je* $L\colon = \sup S \in S$ $(L\colon = \inf S \in S)$*, onda* $\sup S$ $(\inf S)$ *zovemo maksimum (minimum) skupa S i pišemo* $\max S\colon = L$ $(\min S\colon = L)$.

Zadatak 2.5. *Odredite infimum i supremum skupova:*

a) $A = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, *b)* $B = \left\{ \frac{x^2-4}{x^2+4} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

Rješenje:

(a) Primijetimo da vrijedi:

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{0+1} = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

iz čega slijedi da je 1 gornja međa skupa A. Nadalje, za $x = 0$ imamo

$$\frac{1}{x^2+1} = 1, \tag{2.6}$$

iz čega slijedi da je 1 maksimum skupa A. Dakle, $\sup A = \max A = 1$.

Nadalje, primijetimo da vrijedi:

$$\frac{1}{x^2+1} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

iz čega slijedi da je 0 donja međa skupa A.

Dokažimo da je $\inf A = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\frac{1}{x^2+1} < 0 + \varepsilon, \tag{2.8}$$

to jest

$$x^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Po Arhimedovom aksiomu za $a = \varepsilon$ i $b = 1$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n\varepsilon > 1. \tag{2.10}$$

Tada je za $x \geq n$

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Dakle, $\inf A = 0$.

(b) Primijetimo da vrijedi:

$$\frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{x^2+4-4-4}{x^2+4} = 1 - \frac{8}{x^2+4}. \tag{2.12}$$

Nadalje, imamo:

$$1 - \frac{8}{x^2+4} < 1, \tag{2.13}$$

jer je $\frac{8}{x^2+4} > 0$, pa imamo da je 1 gornja međa skupa B. Tvrdimo da je $\sup B = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tražimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$1 - \frac{8}{x^2+4} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{8}{x^2+4} \Leftrightarrow (x^2+4)\varepsilon > 8. \tag{2.14}$$

Po Arhimedovom aksiomu sada za $a = \varepsilon$ i $b = 8$ imamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \cdot \varepsilon > 8$, odakle je za $x \geq n$: $(x^2+4)\varepsilon \geq x^2\varepsilon \geq n^2\varepsilon \geq n\varepsilon > 8$.

Dakle, $\sup B = 1$.

S druge strane, primijetimo da vrijedi:

$$1 - \frac{8}{x^2+4} \geq 1 - \frac{8}{0+4} = 1 - 2 = -1, \tag{2.15}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $x^2 \geq 0$.

Sada za $x = 0$ imamo $1 - \frac{8}{x^2+4} = 1 - \frac{8}{4} = -1$, te imamo $\inf B = \min B = -1$.

□

Definicija 2.7. *Niz realnih brojeva je funkcija $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Umjesto $a(n)$ pišemo a_n. Niz označavamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Kažemo da je (a_n) rastući (padajući) ako $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$). U slučaju stroge nejednakosti ($<$ ili $>$) kažemo da je (a_n) strogo rastući (strogo padajući).*

Zadatak 2.6. *Odredite infimum i supremum skupova:*

a) $S = \{\frac{3n-2}{n+3} | n \in \mathbb{N}\}$, *b)* $S = \{\frac{n^2+1}{2n^2+n} | n \in \mathbb{N}\}$.

Rješenje:

(a) Imamo:

$$a_n = \frac{3n-2}{n+3} = \frac{3(n+3) - 3\cdot 3 - 2}{n+3} = 3 - \frac{11}{n+3}. \tag{2.16}$$

Dakle, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući niz, iz čega slijedi:

$$\inf S = \min S = a_1 = 3 - \frac{11}{4} = \frac{1}{4}. \tag{2.17}$$

Tvrdimo da je $\sup S = 3$. Vrijedi:

$$a_n = 3 - \frac{11}{n+3} \leq 3, \tag{2.18}$$

iz čega slijedi da je 3 gornja međa skupa S.

Neka je $\varepsilon > 0$. Imamo:

$$\begin{aligned} a_n > 3 - \varepsilon &\Leftrightarrow 3 - \frac{11}{n+3} > 3 - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{11}{n+3} \Leftrightarrow (n+3)\varepsilon > 11. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Po Arhimedovom aksiomu, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0\varepsilon > 11$ ($a = \varepsilon$, $b = 11$), pa je $(n_0+3)\varepsilon > 11$, odakle slijedi $a_{n_0} > 3 - \varepsilon$. Dakle, $\sup S = 3$.

(b) Imamo niz:

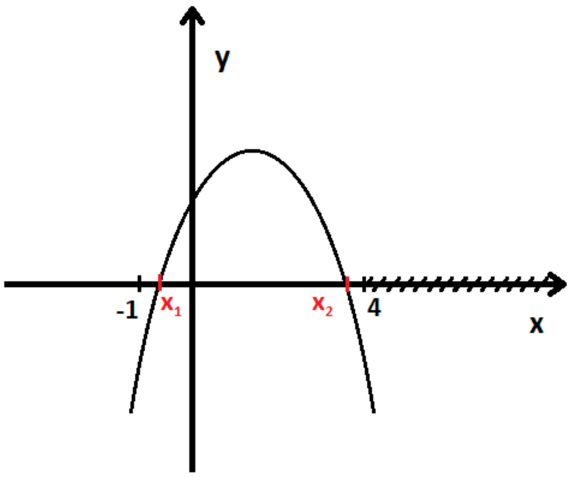
$$a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n}. \tag{2.20}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{n^2+1}{2n^2+n} < \frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2+n+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{n^2+1}{2n^2+n} < \frac{n^2+2n+2}{2n^2+5n+3} \\ &\Leftrightarrow (n^2+1)(2n^2+5n+3) < (n^2+2n+2)(2n^2+n) \\ &\Leftrightarrow 2n^4+5n^3+5n^2+5n+3 < 2n^4+5n^3+6n^2+2n \\ &\Leftrightarrow -n^2+3n+3 < 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Vrijedi:

$$-x^2+3x+3=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+12}}{-2}=\frac{3\mp\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x_1=-0.79\ x_2=3.79. \tag{2.22}$$



Dakle, (2.21) vrijedi za $n > x_2 \Leftrightarrow n \geq 4$. Tada je niz rastući. Imamo:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 < a_5 < a_6 < \dots. \tag{2.23}$$

Slijedi da je $\inf S = \min S = a_4 = \frac{17}{36}$.

$\sup S = ?$. Imamo:

$$a_1 = \frac{1^2+1}{2\cdot 1^2+1} = \frac{2}{3}. \tag{2.24}$$

Vrijedi:

$$a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n} = \frac{1}{2}\frac{n^2+1}{n^2+\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\frac{n^2+\frac{n}{2}-\frac{n}{2}+1}{n^2+\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2}-1}{n^2+\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}-\frac{n-2}{4n^2+2n} \leq \frac{1}{2},\ n\geq 2. \tag{2.25}$$

Dakle, $\sup S = \max S = a_1 = \frac{2}{3}$. □

Zadatak 2.7. *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđeni skupovi. Dokažite:*

(a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$,

(b) $\sup(A\cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Rješenje:

(a) Zbog

$$x+y \leq \sup A + \sup B,\ \forall x \in A,\ y \in B, \tag{2.26}$$

je $\sup A + \sup B$ gornja međa skupa $A+B$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada

$$(\exists x_0 \in A)(\exists y_0 \in B)\ x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } y_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.27}$$

Tada je $x_0+y_0 \in A+B$ i $x_0+y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + \sup B - \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \sup B - \varepsilon$.

(b) Bez smanjenja općenitosti imamo $\sup A \leq \sup B$ (inače zamijenimo uloge A i B). Vrijedi:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ili } x \in B \Rightarrow x \leq \sup A \leq \sup B \text{ ili } x \leq \sup B. \tag{2.28}$$

Dakle, imamo:

$$(\forall x \in S = A \cup B)\ x \leq \sup B, \tag{2.29}$$

pa je $\sup B$ gornja međa skupa $A \cup B$. Dokažimo da je to i supremum. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada

$$(\exists x_0 \in B \subset A \cup B = S)\ x_0 > \sup B - \varepsilon. \tag{2.30}$$

Dakle, $\sup B$ je najmanja gornja međa skup $A \cup B$.

Slijedi da je $\sup B = \max\{\sup A, \sup B\}$ supremum skupa $A \cup B$.

$\square$

Napomena 2.8. *Slično se pokaže (DZ): Ako su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni skupovi, onda vrijedi:*

(a) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$*,*

(b) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$*.*

Zadatak 2.8. *Odredite infimum i supremum skupova:*

(a) $S = \{\frac{m-n-1}{mn+4m+3n+12} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$*,*

(b) $S = \{(-1)^n \frac{n^2+2}{n^2+7} \mid n \in \mathbb{N}\}$*.*

Rješenje:

(a) Vrijedi:

$$\frac{m-n-1}{mn+4m+3n+12} = \frac{m-n-1}{(m+3)(n+4)} = \frac{m+3-(n+4)}{(m+3)(n+4)} = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{m+3}. \tag{2.31}$$

Dakle, $S = A + B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \left\{\frac{1}{n+4} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \\ B &:= \left\{-\frac{1}{m+3} \mid m \in \mathbb{N}\right\}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} &\sup A = \max A = \frac{1}{5}\ (n = 1), \quad \sup B = 0, \\ &\inf A = 0, \quad \inf B = \min B = -\frac{1}{4}\ (m = 1). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} &\sup S = \sup A + \sup B = \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{5} \text{ (nije maksimum)}, \\ &\inf S = \inf A + \inf B = 0 + (-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} \text{ (nije minimum)}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

(b) Definiramo $S := A \cup B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \left\{(-1)^{2k}\frac{(2k)^2+2}{(2k)^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{4k^2+2}{4k^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\right\}, \\ B &:= \left\{(-1)^{2k-1}\frac{(2k-1)^2+2}{(2k-1)^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\right\} = \left\{-\frac{(2k-1)^2+2}{(2k-1)^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\right\}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Skup A. Definiramo:

$$a_k = \frac{4k^2+2}{4k^2+7} = 1 - \frac{5}{4k^2+7} < 1. \tag{2.36}$$

Niz a_k je rastući pa vrijedi $\inf A = \min A = a_1 = \frac{6}{11}$.

Uočimo da je 1 je gornja međa skupa A. Dokažimo da je $\sup A = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} a_k > 1-\varepsilon &\Leftrightarrow 1 - \frac{5}{4k^2+7} > 1-\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{4k^2+7} \Leftrightarrow (4k^2+7)\varepsilon > 5. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon$ i $b = 5$) postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0\varepsilon > 5$, pa vrijedi:

$$(4k_0^2+7)\varepsilon > (4k_0^2)\varepsilon > k_0^2\varepsilon \geq k_0\varepsilon > 5. \tag{2.38}$$

Dakle, $\sup A = 1$.

Skup B. Definiramo:

$$b_k = -\frac{(2k-1)^2+2}{(2k-1)^2+7} = -1 + \frac{5}{(2k-1)^2+7}. \tag{2.39}$$

Niz b_k je padajući pa vrijedi $\sup B = \max B = b_1 = -\frac{3}{8}$.

Uočimo da je -1 donja međa skupa B. Dokažimo da je $\inf B = -1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} b_k < -1+\varepsilon &\Leftrightarrow -1 + \frac{5}{(2k-1)^2+7} < -1+\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{(2k-1)^2+7} \Leftrightarrow ((2k-1)^2+7)\varepsilon > 5. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon$ i $b = 5$) postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0\varepsilon > 5$ pa vrijedi:

$$((2(k_0+1)-1)^2+7)\varepsilon > (4k_0^2)\varepsilon > k_0^2\varepsilon \geq k_0\varepsilon > 5. \tag{2.41}$$

Dakle, $\inf B = -1$.

Sada imamo

$$\begin{aligned} \sup S &= \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} = \max\left\{1, -\frac{3}{8}\right\} = 1, \\ \inf S &= \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} = \min\left\{\frac{6}{11}, -1\right\} = -1. \end{aligned} \tag{2.42}$$

$\square$

Zadatak 2.9. *Neka su $A, B \subset [0, \infty\rangle$ odozgo omeđeni i neprazni. Definiramo:*

$$A \cdot B = \{xy \mid x \in A,\ y \in B\}. \tag{2.43}$$

Dokažite

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Rješenje: Ako je $\sup A = 0$, onda je $A = \{0\}$ pa je $A \cdot B = \{0\}$ i tvrdnja slijedi.

Pretpostavimo da je $\sup A > 0$. Vrijedi:

$$xy \leq \sup A \sup B,\ \forall x \in A,\ \forall x \in B, \tag{2.44}$$

pa slijedi da je $\sup A \sup B$ gornja međa skupa $A \cdot B$.

Dokažimo da je supremum.

Prvi način: Neka je $0 < \varepsilon < \sup A \sup B$. Tada za:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon}{2 \sup B} > 0\ (\exists x \in A)\ x > \sup A - \varepsilon_1, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon}{2 \sup A} > 0\ (\exists y \in B)\ y > \sup B - \varepsilon_2. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Sada imamo:

$$xy > (\sup A - \varepsilon_1)(\sup B - \varepsilon_2) = \sup A \sup B - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4 \sup A \sup B} > \sup A \sup B - \varepsilon. \tag{2.46}$$

Drugi način: Stavimo oznaku $C = A \cdot B$. Već smo dokazali da je $\sup A \sup B$ gornja međa skupa $C = A \cdot B$. Kako je skup C odozgo ograničen, po aksiomu potpunosti, C ima supremum u $\mathbb{R}$, a kako je supremum najmanja gornja međa, vrijedi

$$\sup C \leq \sup A \sup B \quad (1)$$

Dokažimo sada da vrijedi i $\sup A \sup B \leq \sup C$. Vrijedi $ab \leq \sup C$ za sve $a \in A, b \in B$. Budući da smo pretpostavili $\sup A > 0$, postoji $a' \in A \setminus \{0\}$. Vrijedi $b \leq \frac{\sup C}{a'}$ za sve $b \in B$ pa je $\frac{\sup C}{a'}$ gornja međa skupa B, iz čega slijedi

$$\sup B \leq \frac{\sup C}{a'}.$$

Ukoliko je $\sup B = 0$, onda je $B = \{0\}$ pa je $C = \{0\}$ i onda tvrdnja očito vrijedi jer je u ovom slučaju $\sup C = \sup A \sup B = 0$. Ako je $\sup B > 0$, onda možemo zaključiti da je

$$a' \leq \frac{\sup C}{\sup B}$$

za sve $a' \in A \setminus \{0\}$, a zapravo vrijedi i

$$a \leq \frac{\sup C}{\sup B}$$

za sve $a \in A$. Stoga je $\frac{\sup C}{\sup B}$ gornja međa skupa A pa je

$$\sup A \leq \frac{\sup C}{\sup B},$$

odnosno

$$\sup A \sup B \leq \sup C. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi $\sup A \sup B = \sup C$. $\square$

Napomena 2.9. *Ako su* $A, B \subset [0, \infty\rangle$, *vrijedi* $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$ *(domaća zadaća).*

Napomena 2.10. *Ako su* $A, B \subset \mathbb{R}$ *neprazni i omeđeni, tada je*

$$\begin{aligned} \sup(A \cdot B) &= \max\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}, \\ \inf(A \cdot B) &= \min\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Zadatak 2.10. *Odredite infimum i supremum skupova:*

(a) $S = \{\frac{2n-1}{n}\frac{1+m}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $S = \{\frac{n^2 x}{n^2 x + 2x + n^2 + 2} \mid n \in \mathbb{N},\ x \geq 0\}$.

Rješenje:

(a) Neka je $S = A \cdot B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \left\{\frac{2n-1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subset [0, \infty\rangle, \\ B &:= \left\{\frac{1+m}{m} \,|\, m \in \mathbb{N}\right\} \subset [0, \infty\rangle. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Dobivamo da je $\sup A = 2$, $\inf A = \min A = 1$ (postiže se za $n = 1$) te $\sup B = \max B = 2$ (postiže se za $m = 1$) i $\inf B = 1$.

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \sup S &= \sup A \cdot \sup B = 2 \cdot 2 = 4, \\ \inf S &= \inf A \cdot \inf B = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned} \tag{2.49}$$

(b) Vrijedi

$$S = \left\{\frac{n^2}{n^2+2} \cdot \frac{x}{x+1} \ \mid\ n \in \mathbb{N},\ x \geq 0\right\} = A \cdot B, \tag{2.50}$$

gdje je

$$A := \left\{\frac{n^2}{n^2+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq [0, \infty\rangle,\ \ B := \left\{\frac{x}{x+1} \mid x \geq 0\right\} \subseteq [0, \infty\rangle. \tag{2.51}$$

Lako dobivamo da je $\sup A = 1$ i $\inf A = \min A = \frac{1}{3}$ $(n = 1)$.

Vrijedi

$$\frac{x}{x+1} \geq 0$$

pa je 0 donja međa skupa B, a ujedno i minimum skupa B jer se dostiže za $x = 0$. Stoga je $\inf B = 0$.

Nadalje,

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} < 1$$

za $x \geq 0$ pa je 1 gornja međa skupa B. Dokažimo da je $\sup B = 1$. Treba dokazati

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \geq 0)(1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{x+1}),$$

što je ekvivalentno s $\varepsilon(x+1) > 1$. Primjenom Arhimedovog aksioma na ε i 1, dobivamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon n > 1$. Sada je

$$\varepsilon(n+1) > \varepsilon n > 1,$$

tj.

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Slijedi da je $\sup B = 1$ te $\inf B = \min B = 0$ $(x = 0)$.

Sada vidimo da je $\sup S = \sup A \cdot \sup B = 1 \cdot 1 = 1$ te $\inf S = \inf A \cdot \inf B = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 = \min S$.

□

Domaća zadaća

1. Odredite supremume i infimume sljedećih skupa (ako postoje):

   a) $A = \left\{(-1)^{n+1}\frac{2n^2-1}{n^2+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   b) $B = \left\{\frac{2m+2n-3}{2mn-2m-n+1} : m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\}$.

   c) $C = \left\{(-1)^{n+m}\frac{mn+m}{2mn+n-2m-1} : m, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\right\}$.

   d) $D = \left\{(-1)^{n-m} \cdot \frac{2mn-m+6n-3}{mn+n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

   e) $E = \left\{\frac{2nm^2+4nm-2n-3m^2-6m+3}{nm^2+2mn} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$

   f) $F = \left\{\frac{nx^2-4nx+2}{n} : n \in \mathbb{N}, x \in \langle 0, 3]\right\}$

   g) $G = \left\{\frac{n^2+1}{3n^2+n}(2 + \cos(m\pi)) : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

2. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni skupovi. Dokažite:

   (a) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$,

   (b) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

3.* Neka su $A, B \subseteq [0, +\infty\rangle$. Dokažite da je

$$\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

4. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni ograničeni skupovi. Vrijedi li nužno:

   a) Ako je $A \subsetneq B$, onda je $\sup A < \sup B$?

   b) Ako je $A \subsetneq B$, onda je $\inf A > \inf B$?

   c) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$?

   d) $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$?

   e) $\sup(A - B) = \sup(A) - \sup(B)$, gdje je $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$?

   f) $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$?

Ako neke od tih tvrdnji vrijede općenito, dokažite ih, a ako ne vrijede općenito, navedite kontraprimjer.

5. Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Dokažite:

   a) $\langle a, b\rangle \sim [a, b\rangle \sim \langle a, b] \sim [a, b] \sim \mathbb{R}$.

   b) $[a, +\infty\rangle \sim \langle -\infty, a] \sim \mathbb{R}$.

6. Dokažite da je skup iracionalnih brojeva neprebrojiv skup.

7.* Dokažite da je skup iracionalnih brojeva gust u $\mathbb{R}$, tj. da za svaki $x \in \mathbb{R}$ i za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\langle x - \epsilon, x + \epsilon\rangle \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

Poglavlje 2

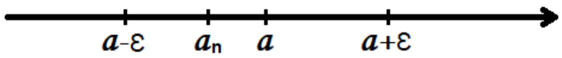
Nizovi u $\mathbb{R}$

1. Konvergencija nizova

Definicija 1.1. *Niz realnih brojeva* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira k realnom broju* a *ako vrijedi:*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0. \tag{1.1}$$

Pišemo: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.



Zadatak 1.1. *Dokažite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0,\ p > 0. \tag{1.2}$$

Rješenje: Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{n^p} < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \\ \Leftrightarrow\ &n \cdot \varepsilon^{1/p} > 1,\ \forall n \geq n_0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon^{1/p}$ i $b = 1$) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $n_0\varepsilon^{1/p} > 1$. □

Teorem 1.2 (Teorem o sendviču)**.** *Neka su* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentni nizovi tako da vrijedi* $a_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ *i* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: L$. *Ako je* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz takav da je* $a_n \leq c_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, *onda je i* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentan i* $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

Zadatak 1.2. *Izračunajte limese:*

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2\cos(n)+8n}{n^3+1}$,

b) $\lim_{n\to\infty} q^n,\ q \in \langle 0, 1\rangle$,

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$,

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a},\ a \geq 1$,

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n!}$.

Rješenje:

a) Vrijedi:

$$0 \leq \left|\frac{5n^2\cos n + 8n}{n^3+1}\right| \leq \frac{5n^2|\cos n| + 8n}{n^3+1} \leq \frac{5+\frac{8}{n}}{n+\frac{1}{n^2}} \to 0,\ n \to \infty. \tag{1.4}$$

Po Teoremu o sendviču slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2\cos n + 8n}{n^3+1} = 0. \tag{1.5}$$

b) Vrijedi (koristimo binomni teorem):

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n = \left(1+\frac{1}{q}-1\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{q}-1\right)^k \geq \binom{n}{1}\left(\frac{1}{q}-1\right), \tag{1.6}$$

gdje smo iskoristili da je $\frac{1}{q}-1>0$. Dakle, slijedi:

$$0 \leq q^n \leq \frac{1}{\frac{1}{q}-1}\frac{1}{n} \to 0,\ n\to\infty. \tag{1.7}$$

Po Teoremu o sendviču slijedi da

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0,\ q\in\langle 0,1\rangle. \tag{1.8}$$

c) Vrijedi:

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1+(\sqrt[n]{n}-1))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt[n]{n}-1)^k \geq 1+\binom{n}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2. \tag{1.9}$$

Sada dobivamo:

$$\begin{aligned} n &\geq 1+\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{n}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt[n]{n} \leq 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 1,\ n\to\infty, \end{aligned} \tag{1.10}$$

za $n \geq 2$.

Po Teoremu o sendviču slijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1. \tag{1.11}$$

d) Vrijedi:

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n},\ \forall n \geq a. \tag{1.12}$$

Znamo da $\sqrt[n]{n}\to 1,\ n\to\infty$ po *c*) dijelu Zadatka, pa po Teoremu o sendviču imamo:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1. \tag{1.13}$$

e) Vrijedi:

$$4 = \sqrt[n]{0+0+4^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \leq \sqrt[n]{4^n+4^n+4^n} \leq 4\cdot\sqrt[n]{3}. \tag{1.14}$$

Znamo da $\sqrt[n]{a}\to 1,\ n\to\infty$ po *d*) dijelu Zadatka, pa po Teoremu o sendviču vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} = 4. \tag{1.15}$$

f) Vrijedi:

$$0 \leq \frac{\sqrt{n^2+1}}{n!} \leq \frac{\sqrt{n^2+n^2}}{n!} \leq \frac{n\sqrt{2}}{n!} = \frac{\sqrt{2}}{(n-1)!} \leq \frac{\sqrt{2}}{n-1} \to 0,\ n\to\infty. \tag{1.16}$$

Po Teoremu o sendviču vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n!} = 0. \tag{1.17}$$

$\square$

Napomena 1.3. *Vrijedi:*

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0,\\&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\\&\lim_{n\to\infty}q^n=0,\ q\in\langle -1,1\rangle.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Teorem 1.4. *Vrijedi:*

i) Ako je (a_n) rastući i odozgo omeđen, onda je konvergentan i $\lim_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$.

ii) Ako je (a_n) padajući i odozdo omeđen, onda je konvergentan i $\lim_{n\to\infty}a_n=\inf\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$.

Zadatak 1.3. *Izračunajte:*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}.\tag{1.19}$$

Rješenje: Definiramo:

$$a_n:=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}.\tag{1.20}$$

Tada je

$$a_{n+1}=\Big(2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{n korijena}}\Big)^{1/2}\tag{1.21}$$

Imamo: $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Dokazati ćemo da je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući i odozgo omeđen pomoću matematičke indukcije.

Dokazujemo da je $(a_n)_n$ rastući, tj. da vrijedi

$$a_n\le a_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}.\tag{1.22}$$

Baza. $(n=1)$, $a_1=\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}=a_2$.

Korak. Pretpostavimo da je $a_n\le a_{n+1}$ za neki $n\in\mathbb{N}$.

Tada vrijedi (koristimo pretpostavku indukcije):

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\le\sqrt{2+a_{n+1}}=a_{n+2}.\tag{1.23}$$

Dokazujemo da je $(a_n)_n$ odozgo omeđen s 2, tj. da vrijedi

$$a_n\le 2,\ \forall n\in\mathbb{N}.\tag{1.24}$$

Baza. $(n=1)$, $a_1=\sqrt{2}\le 2$.

Korak. Pretpostavimo da je $a_n\le 2$ za neki $n\in\mathbb{N}$. Tada je

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\le\sqrt{2+2}=2.\tag{1.25}$$

Dakle, (a_n) je rastući i odozgo omeđen pa je po Teoremu 1.4 niz (a_n) konvergentan.

Označimo $L := \lim_{n\to\infty} a_n$.

Tada iz

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \tag{1.26}$$

dobijemo:

$$\begin{aligned} L = \sqrt{2+L} \Leftrightarrow L^2 = 2 + L \Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow (L-2)(L+1) = 0 \Leftrightarrow L = 2 \text{ ili } L = -1. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Odbacujemo $L = -1$ jer iz $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ slijedi $L \geq 0$.

Dakle, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. □

Zadatak 1.4 (Domaća zadaća)**.** *Dokažite:*

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{12 + \sqrt{12 + \cdots + \sqrt{12}}}}_{n \text{ korijena}} = 4. \tag{1.28}$$

Zadatak 1.5. *Dokažite da je* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Rješenje: Definiramo $a_n = \frac{n}{2^n}$. Tada je

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n} a_n. \tag{1.29}$$

Zbog

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n} < 1 \Leftrightarrow n > 1, \tag{1.30}$$

vidimo da je (a_n) padajući za $n \geq 2$. Očito je (a_n) odozdo omeđen s 0 pa je konvergentan. Označimo $L := \lim_{n\to\infty} a_n$. Iz

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} a_n \tag{1.31}$$

dobijemo $L = \frac{1}{2} L$, tj. $L = 0$. □

Definicija 1.5. *Niz $(b_n)_n$ je podniz niza $(a_n)_n$ ako postoji strogo rastuća funkcija $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $b_n = a_{p_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Lema 1.6. *Svaki niz u $\mathbb{R}$ ima monoton podniz.*

Teorem 1.7 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Svaki omeđeni niz ima konvergentan podniz.*

Teorem 1.8. *Ako je niz (a_n) konvergentan s limesom $L \in \mathbb{R}$, onda je svaki njegov podniz konvergentan s istim limesom L.*

Definicija 1.9. *Kažemo da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k $+\infty$ ako*

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ a_n > M,\ \forall n \geq n_0. \tag{1.32}$$

Pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Slično definiramo niz koji konvergira k $-\infty$.

Definiramo prošireni skup realnih brojeva s $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definicija 1.10. *Kažemo da je $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ gomilište niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako postoji podniz $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ niza $(a_n)_n$ takav da je:*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha. \tag{1.33}$$

Napomena 1.11. *Iz Leme 1.6 svaki niz ima barem jedno gomilište u $\overline{\mathbb{R}}$. Iz Bolzano-Weierstrassovog teorema 1.7 slijedi da svaki omeđeni niz ima barem jedno gomilište u $\mathbb{R}$.*

Primjer 1.12.

a) Niz $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ima dva gomilišta: -1 i 1, jer je

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1} + \frac{1}{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \to -1,\ k\to\infty, \\ a_{2k} &= (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1,\ k\to\infty. \end{aligned} \tag{1.34}$$

b) Niz $a_n = (-1)^n n$ nema gomilišta u $\mathbb{R}$, ali ima u $\overline{\mathbb{R}}$: $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (-1)^{2k}\cdot 2k = 2k \to \infty, \\ a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1}\cdot(2k-1) = -(2k-1) \to -\infty. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Definicija 1.13. *Neka je (a_n) niz realnih brojeva i $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ skup svih gomilišta niza (a_n). Definiramo limes superior i limes inferior niza (a_n) s:*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup A \ \ i \ \ \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf A. \tag{1.36}$$

Napomena 1.14. *Ako A nije odozgo/odozdo omeđen, onda definiramo:*

$$\sup A = \infty,\ \inf A = -\infty. \tag{1.37}$$

Zadatak 1.6. *Dokažite da je za $q > 1$*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty. \tag{1.38}$$

Rješenje: Neka je $M > 0$. Trebamo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$q^n > M,\ \forall n \geq n_0. \tag{1.39}$$

Sada imamo (zbog $q - 1 > 0$ i binomnog teorema):

$$q^n = ((q-1)+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (q-1)^k \geq n(q-1). \tag{1.40}$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = q - 1$ i $b = M$) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$n_0(q-1) > M, \tag{1.41}$$

pa je

$$q^n \geq n(q-1) \geq n_0(q-1) > M,\ \forall n \geq n_0, \tag{1.42}$$

što je trebalo i dokazati. □

Zadatak 1.7 (Domaća zadaća)**.** *Dokažite da je za $q > 1$ $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n} = \infty$. Uputa: slijediti rješenje prethodnog Zadatka s $k = 2$.*

Zadatak 1.8. *Izračunajte:*

a) $\limsup_{n\to\infty} \frac{1+n\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n+1}$, *b)* $\liminf_{n\to\infty} \frac{(1+(-1)^n)^n+n\cos(n\pi)}{2n+1}$.

Rješenje:

a) Neka je

$$a_n = \frac{1+n\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n+1}. \tag{1.43}$$

Sada imamo:

$$\cos(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0, \ n = 2k-1 \ (1,3,5,7,\dots) \\ 1, \ n = 4k \ (0,4,8,\dots) \\ -1, \ n = 4k-2 \ (2,6,\dots) \end{cases} \tag{1.44}$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= \frac{1+(2k-1)\cdot 0}{2(2k-1)+1} = \frac{1}{4k-1} \to 0, \ k\to\infty, \\ a_{4k} &= \frac{1+4k}{2\cdot 4k+1} = \frac{1+4k}{8k+1} \to \frac{1}{2}, \ k\to\infty, \\ a_{4k-2} &= \frac{1+(4k-2)\cdot(-1)}{2\cdot(4k-2)+1} = \frac{-4k+3}{8k-3} \to -\frac{1}{2}, \ k\to\infty. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Dakle, $A = \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ pa je $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup A = \frac{1}{2}$.

b) Neka je

$$a_n = \frac{(1+(-1)^n)^n + n\cos(n\pi)}{2n+1}. \tag{1.46}$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{(1+(-1)^{2k})^{2k} + 2k\cdot\cos(2k\pi)}{2\cdot 2k+1} = \frac{2^{2k}+2k}{4k+1} \to \infty, \ k\to\infty, \\ a_{2k-1} &= \frac{(1+(-1)^{2k-1})^{2k-1} + (2k-1)\cdot(-1)}{2\cdot(2k-1)+1} = \frac{-2k+1}{4k-1} \to -\frac{1}{2}, \ k\to\infty. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Dakle, $A = \{-\frac{1}{2}, \infty\}$ pa je $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf A = -\frac{1}{2}$. □

Teorem 1.15. *Niz (a_n) je konvergentan u $\overline{\mathbb{R}}$ ako i samo ako*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n. \tag{1.48}$$

Napomena 1.16. *Za $q < -1$ niz $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije konvergentan. Naime,*

$$\begin{aligned} q^{2k} &= (q^2)^k \to \infty \ (q^2 > 1), \\ q^{2k-1} &= \frac{1}{q}(q^2)^k \to -\infty \ (\frac{1}{q} < 0), \end{aligned} \tag{1.49}$$

jer je

$$\liminf_{n\to\infty} q^n = -\infty \neq \infty = \limsup_{n\to\infty} q^n. \tag{1.50}$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \textit{ne postoji}, \ q \le -1, \\ 0, \ -1 < q < 1, \\ 1, \ q = 1, \\ \infty, \ q > 1. \end{cases} \tag{1.51}$$

Zadatak 1.9. *Neka je*

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} + (1+a)\sin(\frac{n\pi}{2}). \tag{1.52}$$

Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da niz (a_n) bude konvergentan.

Rješenje: Odredi skup gomilišta A:

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{3^{2k} + (-2)^{2k}}{3^{2k+1} + (-2)^{2k+1}} + (1+a)\cdot 0 = \frac{3^{2k} + 2^{2k}}{3^{2k+1} - 2^{2k+1}} \to \frac{1}{3},\ k \to \infty,\\
a_{4k-1} &= \frac{3^{4k-1} + (-2)^{4k-1}}{3^{4k} + (-2)^{4k}} + (1+a)\cdot(-1) = \frac{3^{4k-1} - 2^{4k-1}}{3^{4k} + 2^{4k}} - (1+a) \to \frac{1}{3} - 1 - a,\ k \to \infty,\\
a_{4k-3} &= \frac{3^{4k-3} + (-2)^{4k-3}}{3^{4k-2} + (-2)^{4k-2}} + (1+a)\cdot 1 = \frac{3^{4k-3} - 2^{4k-3}}{3^{4k-2} + 2^{4k-2}} + 1 + a \to \frac{1}{3} + 1 + a.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Dakle, $A = \{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} - a, \frac{4}{3} + a\}$.

Da bi (a_n) bio konvergentan, treba vrijediti:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n, \tag{1.54}$$

pa skup A treba biti jednočlan skup, tj.

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - a = \frac{4}{3} + a, \tag{1.55}$$

odakle je $a = -1$. $\square$

Definicija 1.17. *Kažemo da je niz realnih brojeva (a_n) Cauchyjev ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |a_n - a_m| < \varepsilon,\ \forall n, m \geq n_0. \tag{1.56}$$

Teorem 1.18 (Potpunost skupa $\mathbb{R}$). *Niz (a_n) u $\mathbb{R}$ je konvergentan akko je Cauchyjev.*

Zadatak 1.10. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{3^n},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.57}$$

Je li (x_n) konvergentan?

Rješenje: Dokazati ćemo da je (x_n) Cauchyjev. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Imamo:

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \leq\\
&\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq\\
&\leq \frac{1}{3^{m-1}} + \frac{1}{3^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n}(1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \cdots + (\frac{1}{3})^{m-n-1}) =\\
&= \frac{1}{3^n}\frac{1 - (\frac{1}{3})^{m-n}}{1 - \frac{1}{3}} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{3^n},
\end{aligned} \tag{1.58}$$

gdje je $1 - (\frac{1}{3})^{m-n} \leq 1$. Dakle,

$$|x_n - x_m| \leq \frac{3}{2}\frac{1}{3^n},\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n. \tag{1.59}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \ \forall m \geq n \geq n_0. \tag{1.60}$$

Zbog nejednakosti (1.59) je dovoljno pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da

$$\frac{3}{2}\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon \Leftrightarrow 3^{n_0}\varepsilon > \frac{3}{2}. \tag{1.61}$$

Zbog $3^{n_0} = (1+2)^{n_0} = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} 2^k \geq n_0 \cdot 2$ i Arhimedovog aksioma (za $a = 2\varepsilon$ i $b = \frac{3}{2}$) vidimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$3^{n_0}\varepsilon \geq n_0 \cdot 2\varepsilon > \frac{3}{2}. \tag{1.62}$$

□

Domaća zadaća

1. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje (ako je tvrdnja istinita, dokažite je, a ako je lažna, navedite kontraprimjer):

   a) Neka je $(a_n)_n$ konvergentni niz realnih brojeva takav da je
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$
   Tada u skupu $[0, 1\rangle$ postoji beskonačno mnogo članova niza.

   b) Neka je $(a_n)_n$ niz realnih brojeva takav da za svaki $a \in \mathbb{R}$ postoji $\epsilon > 0$ takav da interval $\langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$ sadrži konačno mnogo članova niza $(a_n)_n$. Tada je niz $(a_n)_n$ neograničen.

   c) Neka je $(a_n)_n$ konvergentni niz realnih brojeva takav da je $a_n < 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i neka je
   $$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$
   Tada je $a \leq 0$.

   d) Svaki niz u intervalu $\langle 0, 1\rangle$ ima podniz koji konvergira k nekom broju iz $\langle 0, 1\rangle$.

   e) Svaki niz u segmentu $[0, 1]$ ima podniz koji konvergira k nekom broju iz $[0, 1]$.

   f) Ako niz realnih brojeva a_n konvergira k 5, onda izvan intervala $\langle 3, 6\rangle$ postoji beskonačno mnogo elemenata niza.

   g) Neka je $(b_n)_n$ niz realnih brojeva takav da za svaki $b \in \mathbb{R}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da interval $\langle b - \frac{1}{m}, b + \frac{1}{m}\rangle$ sadrži konačno mnogo članova niza $(b_n)_n$. Tada je niz $(b_n)_n$ neograničen.

   h) Neka su $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$ nizovi realnih brojeva takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i neka je x gomilište nizova $(a_n)_n$ i $(c_n)_n$. Tada je x nužno gomilište niza $(b_n)_n$.

2. a) Nađite primjer niza kojemu je skup gomilišta $\{-8, 0, 8\}$.

   b) Odredite limes inferior i limes superior niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ zadanog sa
   $$a_n = \frac{n^4\cos(\pi\sin(\frac{n\pi}{2})) + 10n^4\sin(\frac{n\pi}{2}) + n^2}{(n^2-1)(n^2+1)}.$$

3. a) Dokažite da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan formulom

$$a_n = \frac{n^3 \sin(\sin(n^{2023})) + 7n\cos(\cos(n^{2023}))}{(-n)^5 + (-n)^3}$$

konvergentan.

b) Ispitajte je li niz zadan rekurzivno s

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

konvergentan te ako je, odredite mu limes.

4. a) Odredite, ako postoji, limes niza:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 7}, \quad n \in \mathbb{N},$$

b) Odredite skup gomilišta niza:

$$b_n = \frac{n^4 + 4^n\cos(n\pi) + 3^n}{n^4 + 3\cdot 4^n + 2^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

5. Odredite sve parametre $b \in \mathbb{R}$ tako da niz

$$b_n = \frac{2^{3n+5} + n^5 + 17}{n^8 + 2^{3n+1}} + (b^2 - 9)\cos(\frac{n\pi}{2})$$

bude konvergentan.

Poglavlje 3

Topologija prostora $\mathbb{R}^n$

1. Otvorene i zatvorene kugle

Definicija 1.1. *Neka je $X \neq \emptyset$. Preslikavanje $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ je metrika ako vrijedi:*

(M1) $d(x,y) \geq 0,\ \forall x,y \in X$ *(pozitivnost)*

(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(strogost)*

(M3) $d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in X$ *(simetričnost)*

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ \forall x,y,z \in X$ *(nejednakost trokuta)*

Uređeni par (X,d) zovemo metrički prostor.

Zadatak 1.1. *Neka je (X,d) metrički prostor. Definiramo:*

$$d'(x,y) := \alpha d(x,y) + \beta, \tag{1.1}$$

za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kakve uvjete moraju zadovoljavati α i β tako da bi (X,d') bio metrički prostor?

Rješenje: Provjeravamo svojstva metrike:

(M3) Vrijedi za d' (jer (M3) vrijedi za d).

(M2) Treba vrijediti: $d'(x,x) = \alpha d(x,x) + \beta = \beta \Rightarrow \beta = 0$.

S druge strane, sada imamo da $0 = d'(x,y) = \alpha d(x,y) \Rightarrow x = y$ (jer (M2) vrijedi za d).

(M1) Vrijedi:

$$0 \leq d'(x,y) = \alpha d(x,y) \Leftrightarrow \alpha > 0. \tag{1.2}$$

(M4) Vrijedi:

$$d'(x,y) = \alpha d(x,y) \leq \alpha(d(x,z) + d(z,y)) = d'(x,z) + d'(z,y). \tag{1.3}$$

Dakle, da bi d' bila metrika, treba vrijediti $\alpha > 0$ i $\beta = 0$.

$\square$

Promatramo slučaj n-dimenzionalnog Euklidskog prostora:

$$X = \mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},\ n \geq 1 \tag{1.4}$$

Definiramo preslikavanja:

$$\begin{aligned} &d_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}, \\ &d_\infty \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

za $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Zadatak 1.2. *Dokažite da je $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ metrički prostor.*

Rješenje:

(M1) Vrijedi pozitivnost:

$$d_\infty(x,y) \geq 0. \tag{1.6}$$

(M2) Vrijedi strogost:

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) = 0 &\Leftrightarrow |x_1 - y_1| = \cdots = |x_n - y_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n \Leftrightarrow x = y. \end{aligned} \tag{1.7}$$

(M3) Vrijedi simetričnost:

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\} = \max\{|y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n|\} = d_\infty(y,x). \tag{1.8}$$

(M4) Za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi nejednakost trokuta:

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y), \tag{1.9}$$

odakle dobijemo:

$$d_\infty(x,y) \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y). \tag{1.10}$$

□

Zadatak 1.3. *a) Dokažite Cauchy-Schwarzovu nejednakost:*

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

b) Dokažite da je $(\mathbb{R}^n, d_2)$ metrički prostor.

Rješenje:

a) Neka je $f(t) := \sum_{i=1}^n (|x_i|t + |y_i|)^2$, $t \in \mathbb{R}$. Tada je:

$$f(t) = (\sum_{i=1}^n x_i^2)t^2 + 2t \sum_{i=1}^n |x_i y_i| + \sum_{i=1}^n y_i^2 = At^2 + Bt + C, \tag{1.12}$$

gdje je

$$A = \sum_{i=1}^n x_i^2, \ B = 2\sum_{i=1}^n |x_i y_i|, \ C = \sum_{i=1}^n y_i^2. \tag{1.13}$$

Zbog činjenice da vrijedi $f(t) = \sum_{i=1}^n (|x_i|t + |y_i|)^2 \geq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$, diskriminanta mora biti nepozitivna, tj.

$$0 \geq D = B^2 - 4AC = (2\sum_{i=1}^n |x_i y_i|)^2 - 4(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}. \tag{1.14}$$

b)(M1) Vrijedi pozitivnost:

$$d_2(x,y) \geq 0. \tag{1.15}$$

(M2) Vrijedi strogost:

$$0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \Leftrightarrow |x_1 - y_1|^2 = \cdots = |x_n - y_n|^2 = 0 \Leftrightarrow x = y. \tag{1.16}$$

(M3) Vrijedi simetričnost:

$$d_2(x, y) = d_2(y, x). \tag{1.17}$$

(M4) Vrijedi nejednakost trokuta (koristimo Cauchy–Schwartzovu nejednakost (1.11)):

$$\begin{aligned}
d_2^2(x, y) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i||z_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 = \\
&= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}\right)^2 = (d_2(x, z) + d_2(z, y))^2.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

□

Napomena 1.2. $\mathbb{R}^n$ *je također unitaran prostor sa skalarnim produktom:*

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{1.19}$$

Tada za normu induciranu tim skalarnim produktom

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{1.20}$$

vrijedi

$$||x - y|| = d_2(x, y). \tag{1.21}$$

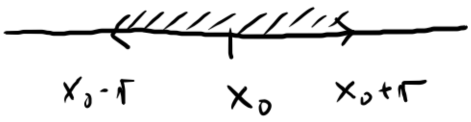
Zadatak 1.4 (Domaća zadaća)**.** *Dokažite da je* $(\mathbb{R}^n, d_1)$ *metrički prostor, ako je*

$$d_1(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|. \tag{1.22}$$

Definicija 1.3. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $x_0 \in X$ *i* $r > 0$*. Otvorena kugla sa središtem u* x_0 *i radijusom* r *je skup*

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}. \tag{1.23}$$

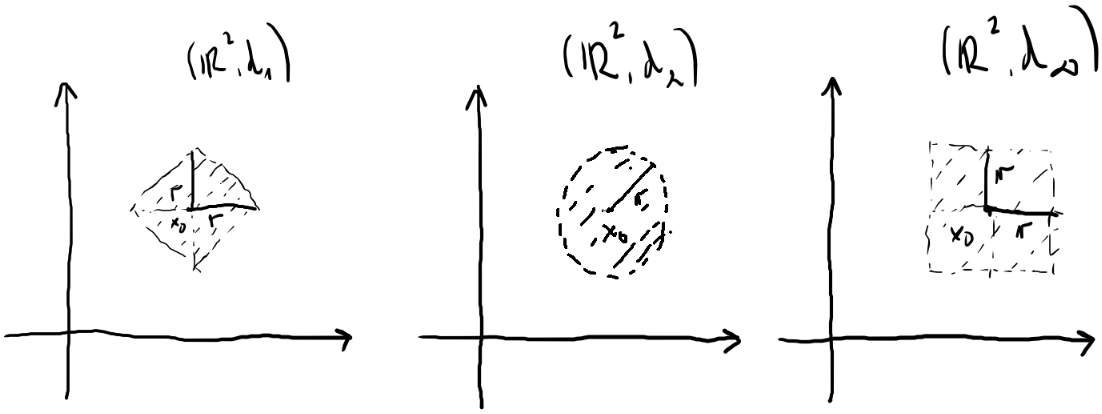
Primjer 1.4. *a)* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *je metrički prostor.*



Sada je

$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle. \tag{1.24}$$

b) Imamo:



Definicija 1.5. *Podskup* $U \subset X$ *metričkog prostora* X *je otvoren ako se može prikazati kao unija otvorenih kugala u* X.

Primjer 1.6. $K(x_0, r)$ *je otvoren skup.*

Teorem 1.7.

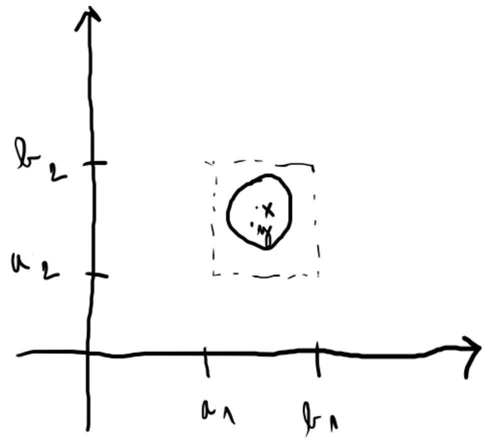
$$U \text{ je otvoren} \Leftrightarrow (\forall x_0 \in U)(\exists r > 0)\ K(x_0, r) \subset U. \tag{1.25}$$

Zadatak 1.5. *Dokažite da je skup*

$$U = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle \tag{1.26}$$

otvoren u $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

Rješenje: Skiciramo u $\mathbb{R}^2$:



Primijetimo da je $U = \{y \in \mathbb{R}^n \colon\ a_i < y_i < b_i,\ \forall i = 1, \ldots, n\}$. Neka je $x \in U$.

Definiramo:

$$r := \min\{x_i - a_i, b_i - x_i \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}. \tag{1.27}$$

Tada je za $y \in K(x, r)$ te $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$|y_i - x_i| \leq d_2(x, y) < r, \tag{1.28}$$

pa je

$$\begin{aligned} y_i - x_i < r \leq b_i - x_i \Rightarrow y_i < b_i, \\ x_i - y_i < r \leq x_i - a_i \Rightarrow y_i > a_i. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Slijedi da vrijedi:

$$a_i < y_i < b_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{1.30}$$

pa je $y \in U$. Dakle,

$$K(x, r) \subset U. \tag{1.31}$$

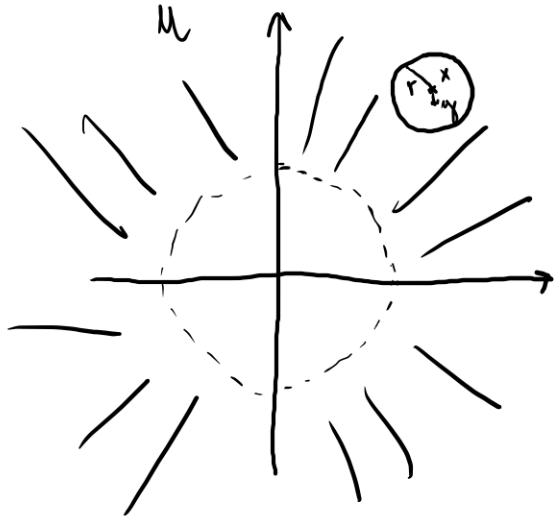
Po Teoremu je U otvoren. □

Zadatak 1.6. *Dokažite da je*

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 > 4\}, \tag{1.32}$$

otvoren u $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Rješenje: Skiciramo:



Neka je $x \in U$. Tada je $x_1^2 + x_2^2 > 4$. Neka je $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2$. Dokažimo da je $K(x, r) \subset U$.

Neka je $y \in K(x, r)$. Tada je (koristimo nejednakost trokuta):

$$\begin{aligned} &\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = d(x, 0) \leq d(x, y) + d(y, 0) < r + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ &\Leftrightarrow 2 < \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 > 4 \Leftrightarrow y \in U. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Dakle, $K(x, r) \subset U$, pa je po Teoremu 1.7 U otvoren. □

Definicija 1.8. *Topologija na skupu $X \neq \emptyset$ je familija τ podskupova od X koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(T1) $\emptyset, X \in \tau$

(T2) Ako je $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset \tau$ proizvoljna familija iz τ, tada je $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

(T3) Za $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_n \in \tau$ slijedi da je $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Teorem 1.9. *U metričkom prostoru (X, d) familija*

$$\tau := \{U \subseteq X \mid U \text{ otvoren}\} \tag{1.34}$$

je topologija na X.

Zadatak 1.7. *Neka je $X \neq \emptyset$ i $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{1.35}$$

a) Dokažite da je d metrika.

b) Odredite familiju otvorenih skupova τ.

Rješenje:

a)(M1) Vrijedi pozitivnost:
$$d(x,y) \geq 0,\ \forall x,y \in X. \tag{1.36}$$

(M2) Vrijedi strogost:
$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \tag{1.37}$$

(M3) Vrijedi simetričnost:
$$d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in X. \tag{1.38}$$

(M4) Neka je $x,y,z \in X$. Vrijedi nejednakost trokuta:
$$x = y \Rightarrow d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y), \tag{1.39}$$
jer je $d(x,z) \geq 0$ i $d(z,y) \geq 0$. Nadalje, vrijedi:
$$x \neq y \Rightarrow z \neq x \text{ ili } z \neq y \Rightarrow d(z,x) + d(z,y) \geq 1 = d(x,y). \tag{1.40}$$

b) Vrijedi:
$$K(x,1) = \{y \in X : d(x,y) < 1\} = \{x\}. \tag{1.41}$$

Neka je $A \subseteq X$ proizvoljan. Tada je
$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} = \bigcup_{x \in A} K(x,1), \tag{1.42}$$
pa je po definiciji A otvoren.

Stoga je $\tau = \mathcal{P}(X)$. (svaki podskup $A \subseteq X$ je otvoren)

$\square$

Napomena 1.10. *Metrika iz Zadatka 1.7 se zove diskretna metrika.*

Definicija 1.11. *Podskup A metričkog prostora je zatvoren ako je $A^c = X \setminus A$ otvoren.*

Zadatak 1.8. *(Ovaj zadatak se radio na predavanjima) Dokažite da su sljedeći skupovi zatvoreni u metričkom prostoru (X,d):*

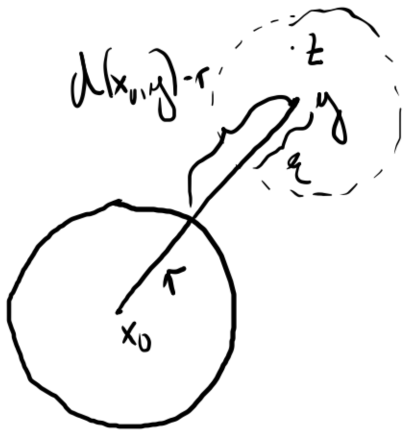
a) zatvorena kugla: $\overline{K}(x_0,r) := \{x \in X \mid d(x_0,x) \leq r\}$,

b) $\{x\}$, $x \in X$.

Rješenje:

a) Trebamo dokazati da je $\overline{K}(x_0,r)^c$ otvoren.

Neka je $y \in \overline{K}(x_0,r)^c$. Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}(d(x_0,y) - r)$.



Neka je $z \in K(y, \varepsilon)$. Imamo:

$$z \in K(y,\varepsilon) \Rightarrow d(z,y) < \frac{1}{2}(d(x_0,y)-r) \Rightarrow r + 2d(z,y) < d(x_0,y) \leq d(x_0,z) + d(z,y). \tag{1.43}$$

jer $d(z,y) \geq 0$, sada je $d(x_0,z) > r$, dakle $z \in \overline{K}(x_0,r)^c$. Jer je $z \in K(y,\varepsilon)$ bio proizvoljan zaključujemo $K(y,\varepsilon) \subset K(x_0,r)^c$.

Slijedi da je $K(y,\varepsilon) \subset \overline{K}(x_0,r)^c$ pa je po Teoremu 1.7 $\overline{K}(x_0,r)^c$ otvoren.

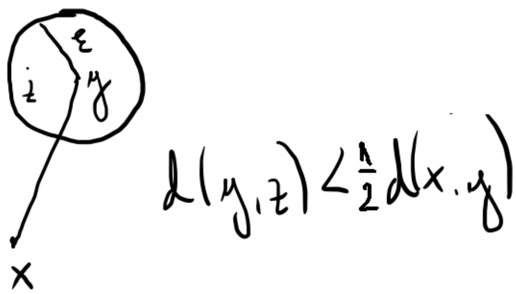
b) Neka je $x \in X$ i $A := \{x\}$. Tada za $y \notin A$ slijedi da je $y \neq x$, pa za $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x,y)$ vrijedi:

$$z \in K(y,\varepsilon) \Rightarrow d(y,z) < \varepsilon < d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \tag{1.44}$$

pa imamo

$$d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z) > d(x,y) - \frac{1}{2}d(x,y) = \frac{1}{2}d(x,y) > 0, \tag{1.45}$$

tj. $x \neq z$, pa je $z \notin A$. ($K(y,\varepsilon) \subset A^c$)



Dakle, $K(y,\varepsilon) \subset A^c$ pa je po Teoremu 1.7 A^c otvoren.

□

2. Zatvarač, interior i rub skupa

Definicija 2.1. *Neka je A podskup metričkog prostora X. Definiramo:*

- ***zatvarač** skupa A:* $\quad \mathrm{Cl}\,A = \bigcap\limits_{\substack{A\subseteq F \\ F \text{ zatvoren}}} F \qquad$ *(druga oznaka : $\overline{A}$)*
- ***interior** skupa A:* $\quad \mathrm{Int}\,A = \bigcup\limits_{\substack{U\subseteq A \\ U \text{ otvoren}}} U$
- ***rub** skupa A:* $\quad \partial A = \mathrm{Cl}\,A \cap \mathrm{Cl}\,(A^C)$

Napomena 2.2.

1) $\mathrm{Cl}\,A$ *i* ∂A *su zatvoreni skupovi.*

2) $\mathrm{Int}\,A$ *je otvoren skup.*

3) Skup A je zatvoren ako i samo ako vrijedi $A = \mathrm{Cl}\,A$.

4) $\mathrm{Int}\,A \subseteq A \subseteq \mathrm{Cl}\,A$

Primjer 2.3. *Promatramo metrički prostor* $(\mathbb{R}, d_2)$.

a) $A = \langle 0, 1]$*:* $\qquad \mathrm{Int}\,A = \langle 0, 1\rangle, \quad \mathrm{Cl}\,A = [0, 1], \quad \partial A = \{0, 1\}$

b) $\mathrm{Int}\,\mathbb{Z} = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}, \quad \partial\mathbb{Z} = \mathrm{Cl}\,\mathbb{Z} \cap \mathrm{Cl}\,(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$

c) $\mathrm{Int}\,\mathbb{R} = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Cl}\,\mathbb{R} = \mathbb{R}, \quad \partial\mathbb{R} = \mathbb{R} \cap \mathrm{Cl}\,\emptyset = \emptyset$

Zadatak 2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Dokažite:*

a) $\mathrm{Cl}\,A = \mathrm{Int}\,A \cup \partial A$*,*

b) $\mathrm{Int}\,A \cap \partial A = \emptyset$*,*

c) $\partial A = \mathrm{Cl}\,A \backslash \mathrm{Int}\,A$.

Rješenje:

a) Trebamo pokazati dvije skupovne inkluzije. Uočimo da je jedna inkluzija očita jer je, po definiciji,

$$\partial A = \mathrm{Cl}\,A \cap \mathrm{Cl}(A^C) \subseteq \mathrm{Cl}\,A, \quad \mathrm{Int}\,A \subseteq A \subseteq \mathrm{Cl}\,A$$

pa je $\mathrm{Int}\,A \cup \partial A \subseteq \mathrm{Cl}\,A$.

Dokažimo sada obratnu inkluziju. Pretpostavimo da je $x \in \mathrm{Cl}\,A$. Treba dokazati da je $x \in \mathrm{Int}\,A \cup \partial A$. Ako je $x \in \partial A$, onda je $x \in \mathrm{Int}\,A \cup \partial A$. Pretpostavimo sada da $x \notin \partial A = \mathrm{Cl}\,A \cap \mathrm{Cl}\,(A^C)$. Tada, pošto je $x \in \mathrm{Cl}\,A$, slijedi $x \notin \mathrm{Cl}\,(A^C)$, odnosno $x \in (\mathrm{Cl}\,(A^C))^C$. Uočimo da je $(\mathrm{Cl}\,(A^C))^C$ otvoren skup (jer je $\mathrm{Cl}\,(A^C)$ zatvoren). Osim toga, vrijedi $A^C \subseteq \mathrm{Cl}\,A^C$ pa je $A \supseteq (\mathrm{Cl}\,(A^C))^C$, odnosno $(\mathrm{Cl}\,(A^C))^C$ je otvoren skup sadržan u A pa je $(\mathrm{Cl}\,(A^C))^C \subseteq \mathrm{Int}\,A$, odnosno $x \in \mathrm{Int}\,A$, a onda je $x \in \mathrm{Int}\,A \cup \partial A$. Time je i druga inkluzija dokazana.

b) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $x \in \operatorname{Int} A \cap \partial A$. Pošto je $x \in \partial A = \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl}(A^C)$, slijedi $x \in \operatorname{Cl}(A^C)$. Nadalje, pošto je $\operatorname{Int} A \subseteq A$, iz toga slijedi da je $(\operatorname{Int} A)^C \supseteq A^C$. Kako je $\operatorname{Int} A$ otvoren skup, iz toga slijedi da je $(\operatorname{Int} A)^C$ zatvoren skup koji sadrži A^C, a onda je $\operatorname{Cl} A^C \subseteq (\operatorname{Int} A)^C$. Dakle, $x \in (\operatorname{Int} A)^C$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $x \in \operatorname{Int} A \cap \partial A$.

c) Iz b) imamo da je unija $\operatorname{Int} A \cup \partial A$ disjunktna, pa iz a) slijedi $\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$.

□

Zadatak 2.2. *Odredite interior, zatvarač i rub sljedećih skupova*

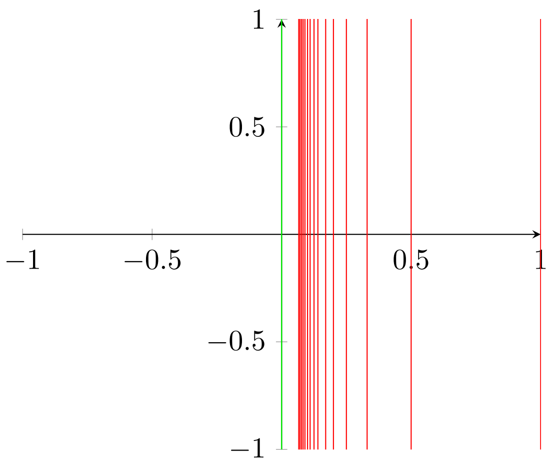
a) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R}$ *u* $\mathbb{R}^2$,

b) $B = \{(x, y) : x \in \langle 1, 2] \cup \{5\}, y \in \mathbb{R}\}$ *u* $\mathbb{R}^2$,

c) $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, 0) = \frac{1}{n}\}$.

Rješenje:

a) Tvrdimo da je $\operatorname{Int} A = \emptyset$. U suprotnom postoji $x = (x_1, x_2) \in \operatorname{Int} A$, a onda, pošto je $\operatorname{Int} A$ otvoren skup, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq \operatorname{Int} A \subset A$. Međutim, unutar $K(x, r)$ sigurno postoji točka koja nije u A, npr. točka $y = (y_1, x_2)$, gdje je y_1 bilo koji iracionalni broj iz intervala $\langle x_1 - r, x_1 + r\rangle$ (takav y_1 postoji jer je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$). Zaista, $d(y, x) = |y_1 - x_1| < r$ pa je $y \in K(x, r)$, a pošto je y_1 iracionalan, $y \notin A$. Stoga je $\operatorname{Int} A = \emptyset$.



Tvrdimo da je $\operatorname{Cl} A = A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$. Najprije uočimo da je $A \subseteq \operatorname{Cl} A$ po definiciji. Nadalje, za $x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(0, x_2) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, x_2\right).$$

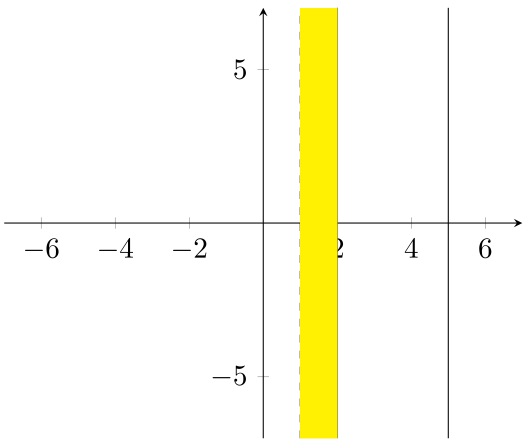
Pošto je niz $(\frac{1}{n}, x_2)_n$ niz u A, po teoremu s predavanja slijedi da je njegov limes $(0, x_2) \in \operatorname{Cl} A$. Sada smo pokazali da je $A \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \subset \operatorname{Cl} A$. Da bismo dokazali obratnu inkluziju, dovoljno je dokazati da je $A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ zatvoren skup (jer je to onda zatvoren skup koji sadrži A, a onda mora sadržavati i $\operatorname{Cl} A$). Uočimo da je

$$(A \cup (\{0\} \times \mathbb{R}))^C = \left(\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right\rangle\right) \times \mathbb{R},$$

a to je otvoren skup u $\mathbb{R}^2$ pa je $A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ zatvoren skup u $\mathbb{R}^2$. Dakle, $\operatorname{Cl} A = A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

Po prethodnom zadatku je $\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A = A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

b) Tvrdimo da je $\operatorname{Int} B = \langle 1, 2\rangle \times \mathbb{R}$. Skup $\langle 1, 2\rangle \times \mathbb{R}$ je otvoren skup sadržan u B pa je $\langle 1, 2\rangle \times \mathbb{R} \subseteq \operatorname{Int} B$. Nadalje, znamo da je $\operatorname{Int} B \subseteq B$. Dokažimo sada da je $\operatorname{Int} B \subseteq \langle 1, 2\rangle \times \mathbb{R}$. Neka je $x = (x_1, x_2) \in \operatorname{Int} B \subseteq B$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq \operatorname{Int} B \subseteq B$. Ako je $x_1 = 5$, onda je točka $y = (5 + \frac{r}{2}, x_2) \in K(x, r) \subseteq \operatorname{Int} B \subseteq B$, tj. $(5+\frac{r}{2}, x_2) \in B$, a to nije istina. Dakle, $\operatorname{Int} B \subseteq \langle 1, 2] \times \mathbb{R}$ Ako je $x_1 = 2$, onda je točka $y = (2 + \frac{r}{2}, x_2) \in K(x, r) \subseteq \operatorname{Int} B \subset \langle 1, 2] \times \mathbb{R}$, ali to očito nije istina pa je $\operatorname{Int} B \subseteq \langle 1, 2\rangle \times \mathbb{R}$. Time smo dokazali obje inkluzije pa je $\operatorname{Int} B = \langle 1, 2\rangle \times \mathbb{R}$.



Tvrdimo da je $\operatorname{Cl} B = ([1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R}$. Uočimo da je

$$\begin{aligned}(([1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R})^C &= (\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2, 5\rangle \cup \langle 5, +\infty\rangle) \times \mathbb{R} \\ &= (\langle -\infty, 1\rangle \times \mathbb{R}) \cup (\langle 2, 5\rangle \times \mathbb{R}) \cup (\langle 5, +\infty\rangle \times \mathbb{R}),\end{aligned}$$

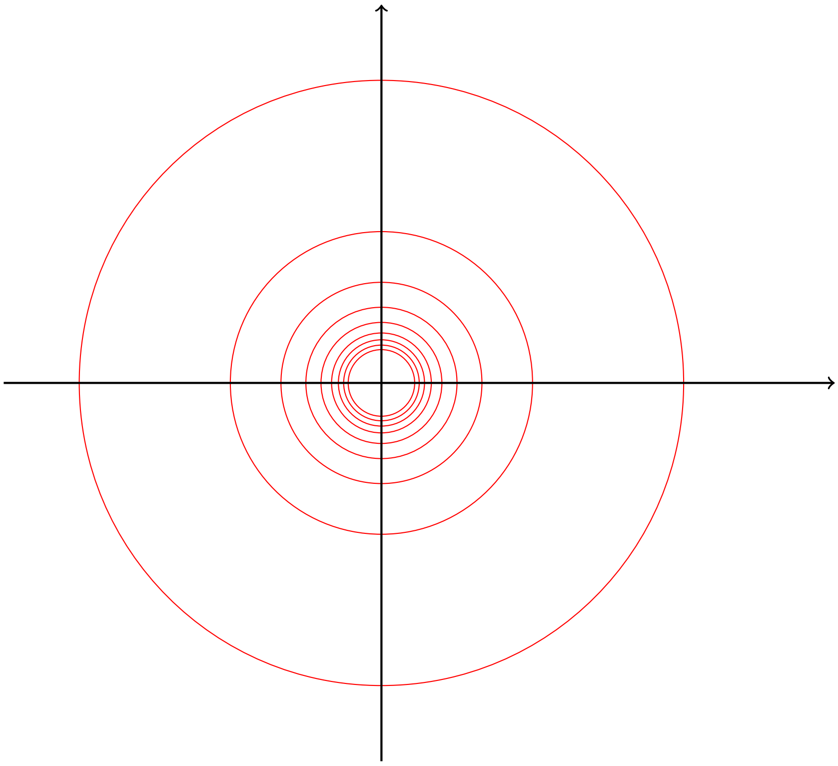
a to je otvoren skup pa je $([1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R}$ zatvoren skup koji sadrži B pa je $\operatorname{Cl} B \subseteq ([1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R}$. Po definiciji vrijedi $(\langle 1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R} = B \subseteq \operatorname{Cl} B$. Preostaje još dokazati da je $\{1\} \times \mathbb{R} \in \operatorname{Cl} B$. Uočimo da je za $x_2 \in \mathbb{R}$

$$(1, x_2) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}, x_2\right).$$

Pošto je $((1 + \frac{1}{n}, x_2))_n$ niz u B, to znači da je $(1, x_2) \in \operatorname{Cl} B$. Dokazali smo $\operatorname{Cl} B = ([1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R}$.

Vrijedi $\partial B = \operatorname{Cl} B \setminus \operatorname{Int} B = \{1, 2, 5\} \times \mathbb{R}$.

c) Tvrdimo da je $\operatorname{Int} C = \emptyset$. U suprotnom postoji $x = (x_1, x_2) \in \operatorname{Int} C$, a onda, pošto je $\operatorname{Int} C$ otvoren skup, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq \operatorname{Int} C \subset C$. Međutim, unutar $K(x, r)$ sigurno postoji točka koja nije u C, npr. točka $y \in K(x, r)$ takva da je $d(y, (0, 0))$ iracionalan broj. Stoga je $\operatorname{Int} C = \emptyset$.



Tvrdimo da je $\operatorname{Cl} C = C \cup \{(0,0)\}$. Uočimo da je $C \subseteq \operatorname{Cl} C$ po definiciji zatvarača. Nadalje, vrijedi

$$(0,0) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, 0\right).$$

Pošto je $((\frac{1}{n}, 0))_n$ niz u C to znači da je $(0,0) \in \operatorname{Cl} C$. Dokazali smo $C \cup \{(0,0)\} \subseteq \operatorname{Cl} C$. Da bismo dokazali obratnu inkluziju, dovoljno je dokazati da je $C \cup \{(0,0)\}$ zatvoren skup (jer će onda, pošto sadrži C, slijediti $\operatorname{Cl} C \subseteq C \cup \{(0,0)\}$). Uočimo da je komplement tog skupa jednak

$$\overline{K}((0,0),1)^C \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(K\left((0,0), \frac{1}{n}\right) \cap \left(\overline{K}\left((0,0), \frac{1}{n+1}\right)^C \right) \right).$$

Uočimo da je $\overline{K}((0,0),1)^C$ otvoren skup (vidi zadatak od prije), a i

$$K\left((0,0), \frac{1}{n}\right) \cap \left(\overline{K}\left((0,0), \frac{1}{n+1}\right)^C \right)$$

je otvoren skup za svaki $n \in \mathbb{N}$ (presjek dvaju otvorenih skupova). Stoga je i $(C \cup \{(0,0)\})^C$ otvoren skup, odnosno $C \cup \{(0,0)\}$ je zatvoren skup.

Vrijedi $\partial C = \operatorname{Cl} C \setminus \operatorname{Int} C = C \cup \{(0,0)\}$.

$\square$

Domaća zadaća

1. a) Neka je $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana s
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \frac{|x_1 - y_1|}{2} + \frac{|x_2 - y_2|}{5}$$
Je li d metrika na $\mathbb{R}^2$?

   b) Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s
$$d(x, y) = \sqrt[3]{|y^3 - x^3|}.$$
Je li d metrika na $\mathbb{R}$?

   c) Dokažite da je $(\mathbb{R}^n, d_1)$ metrički prostor, gdje je
$$d_1(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

   d) Neka su $d_1, d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dvije metrike. Je li funkcija $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dana s
$$d(x, y) = \max\{2d_1(x, y), d_2(x, y)\}$$
metrika na $\mathbb{R}^n$?

2. Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq B \subseteq X$. Dokažite da je $A' \subseteq B'$ i $\operatorname{Cl} A \subseteq \operatorname{Cl} B$.

3. Neka je (X, d) metrički prostor i A i B podskupovi od X. Dokažite:
   a) $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$
   b) $\operatorname{Cl}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B$. Vrijedi li obratna inkluzija?

4. Neka je $A = [0, 1] \times [1, 5]$. Dokažite da je A zatvoren skup.

5. Za sljedeće skupove odredite interior, zatvarač i rub:
   a) $A = \{(x, 1) : x > 2\}$ u $\mathbb{R}^2$,
   b) $B = \langle 2, 4] \times [5, +\infty\rangle$ u $\mathbb{R}^2$,
   c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \langle -2, 3], y > 0\}$ u $\mathbb{R}^3$,
   d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z \in [-1, 1\rangle\}$ u $\mathbb{R}^3$,

6. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ zatvoren u $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

7. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ otvoren u $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

8.* Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazni skupovi i stavimo $A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^n \mid a \in A, b \in B\}$. Ako su A i B otvoreni skupovi u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$, onda je i $A + B$ otvoren skup. Dokažite!

Poglavlje 4

Limes i neprekidnost

1. Neprekidnost funkcije

Definicija 1.1. *Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori, i neka je $A \subseteq X, x_0 \in A'$ i $f : A \to Y$ funkcija. Kažemo da je $L \in Y$* ***limes funkcije*** $\mathbf{f}$ ***u točki*** $\mathbf{x_0}$ *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in A, 0 < d(x, x_0) < \delta \implies \rho(f(x), L) < \varepsilon).$$

Pišemo: $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Zadatak 1.1. *Izračunajte limese (ako postoje):*

$$a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Rješenje: a)

$$0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot y^2 \le y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Dakle, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$.

Drugi način: Neka je $\varepsilon > 0$. Treba dokazati da postoji $\delta > 0$ takav da za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takve da je $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ vrijedi $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$.

Za $\delta := \sqrt{\varepsilon} > 0$ i za (x, y) takve da $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ vrijedi

$$\left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| \le y^2 \le x^2 + y^2 < \delta^2 = \varepsilon,$$

iz čega slijedi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$.

b) Računamo:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0,$$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x \cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2},$$

iz čega vidimo da limes ne postoji.

□

Definicija 1.2. *Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori, i neka je $A \subseteq X, x_0 \in A \cap A'$ i $f : A \to Y$ funkcija. Kažemo da je f* ***neprekidna u točki*** $\mathbf{x_0}$ *ako je*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Napomena 1.3. *Kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna.*

Zadatak 1.2. *Ispitajte neprekidnost funkcija:*

$$a)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \ne (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$b)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \ne (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Rješenje: a) Iz prethodnog zadatka znamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$ pa je f neprekidna.

b) Računamo:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{\sqrt{x^2+0^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1,$$
$$\lim_{y\to 0^+} f(0,y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{0-y}{\sqrt{0^2+y^2}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-y}{|y|} = \lim_{y\to 0^+} -1 = -1.$$

Dakle, f nema limes u $(0,0)$ pa nije neprekidna.

□

Teorem 1.4 (Heinelova karakterizacija neprekidnosti). *Neka su X i Y metrički prostori, neka je $f : X \longrightarrow Y$ funkcija i $x_0 \in X$. Tada je f neprekidna u x_0 ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_n \subset X$ takav da $x_n \longrightarrow x_0$ vrijedi $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.*

Zadatak 1.3. *Može li se funkcija $f(x,y) = \frac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}$ dodefinirati do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}^2$?*

Rješenje: Domena funkcije f je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $((x_n,y_n))_n$ niz u $\mathbb{R}^2$ takav da $(x_n,y_n) \to (x_0,x_0)$.Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n^2-y_n^2)}{x_n-y_n} \cdot \frac{x_n+y_n}{x_n+y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n^2-y_n^2)}{x_n^2-y_n^2} \cdot (x_n+y_n) = 2x_0.$$

Ako dodefiniramo funkciju f na sljedeći način:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y} & , \ x \neq y, \\ 2x & , \ x = y, \end{cases}$$

onda iz Heineove karakterizacije neprekidnosti slijedi da je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}^2$.

□

Napomena 1.5. *$f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je neprekidna ako i samo ako su f_1, f_2 neprekidne.*

Zadatak 1.4. *Mogu li se sljedeće funkcije proširiti do neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}^2$?*

$$a)\ f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{\ln(1+x^2y^2)}, \qquad b)\ f(x,y) = \left(\frac{x^2\sin x}{x^2+y^2}, \frac{x\ln(1+y^2)}{x^2+y^2}\right).$$

Rješenje: a) Domena funkcije f je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) : xy = 0\}$. Funkcija je neprekidna na $\mathcal{D}_f$ jer je $f = \frac{1-\cos\circ(p_1p_2)}{\ln(1+p_1^2p_2^2)}$, (gdje je $p_1(x,y) = x$, $p_2(x,y) = y$) jer su $p_1, p_2, \cos, \ln$ neprekidne funkcije na svojim domenama. Neka je (x_0,y_0) t.d. $x_0y_0 = 0$, i neka je $((x_n,y_n))_n$ niz u $\mathbb{R}^2$ takav da $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$. Tada $x_ny_n \to x_0y_0 = 0$ pa je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(x_ny_n)}{\ln(1+x_n^2y_n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-\cos(x_ny_n)}{x_n^2y_n^2}}{\frac{\ln(1+x_n^2y_n^2)}{x_n^2y_n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{\ln(1+x^2y^2)}, & xy\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & xy=0\end{cases}$$

je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^2$.

Napomena: U zadatku smo koristili sljedeće činjenice:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$

b) Domena funkcije f je $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Funkcija je neprekidna na $\mathcal{D}_f$ jer je $f=(\frac{p_1^2\sin\circ p_1}{p_1^2+p_2^2},\frac{p_1\ln\circ(1+p_2^2)}{p_1^2+p_2^2})$, (gdje je $p_1(x,y)=x$, $p_2(x,y)=y$) jer su $p_1,p_2,\sin,\ln$ neprekidne funkcije na svojim domenama. Stoga treba samo provjeriti može li se funkcija dodefinirati u $(0,0)$ tako da bude neprekidna. Sada imamo $0\le\left|\frac{x^2\sin x}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2}{x^2+y^2}|\sin x|\le|\sin x|\overset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, odnosno vrijedi $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin x}{x^2+y^2}=0$. Nadalje,

$$0\le\left|\frac{x\ln(1+y^2)}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x|y^2}{x^2+y^2}\frac{\ln(1+y^2)}{y^2}\le|x|\frac{\ln(1+y^2)}{y^2}\overset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow}0,$$

odnosno $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\ln(1+y^2)}{x^2+y^2}=0$. Vidimo da će funkcija f biti neprekidna ako definiramo $f(0,0):=(0,0)$.

□

Zadatak 1.5. *Dokažite da je $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\|x\|$ neprekidna.*

Rješenje: Neka je $x_0\in\mathbb{R}^n$, i neka je $\varepsilon>0$. Tada za $\delta=\varepsilon$ i $x\in\mathbb{R}^n$ t.d. $\|x-x_0\|<\delta$ vrijedi

$$|f(x)-f(x_0)|=|\|x\|-\|x_0\||\le\|x-x_0\|<\delta=\varepsilon.$$

□

Teorem 1.6. *Neka su X i Y metrički prostori i $f:X\longrightarrow Y$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi:*

a) za svaki $U\subseteq Y$ otvoren je $f^{-1}(U)$ otvoren,

b) za svaki $F\subseteq Y$ zatvoren je $f^{-1}(F)$ zatvoren.

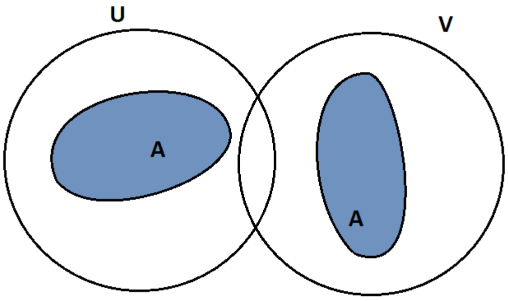
Definicija 1.7. *Podskup A metričkog prostora X je* ***nepovezan*** *ako postoje $U,V\subseteq X$ neprazni i otvoreni takvi da $A\cap U\neq\emptyset$, $A\cap V\neq\emptyset$, $A\subseteq U\cup V$ i $(U\cap V)\cap A=\emptyset$.*

Kažemo da je A ***povezan*** *ako nije nepovezan.*

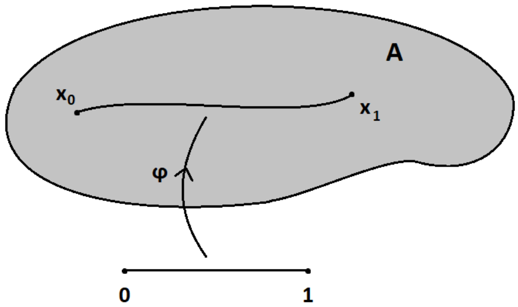
A je ***putevima povezan*** *ako za svake dvije točke $x_0,x_1\in A$ postoji neprekidno preslikavanje $\varphi:[0,1]\to X$ takvo da $\varphi(0)=x_0$, $\varphi(1)=x_1$, $\varphi([0,1])\subseteq A$. φ zovemo* ***staza*** *ili* ***put****.*

Teorem 1.8. *Neka je $A\subseteq X$ putevima povezan. Tada je A povezan.*

Zadatak 1.6. *Jedini skupovi koji su istodobno otvoreni i zatvoreni u $\mathbb{R}^n$ su $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$.*



(a) nepovezan skup



(b) put

Rješenje: Na predavanjima smo dokazali da su $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$ otvoreni i zatvoreni u $\mathbb{R}^n$. Uočimo da je $\mathbb{R}^n$ putevima povezan skup jer je za svake dvije točke $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ funkcija $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dana s

$$\varphi(t) = (1-t)x_0 + tx_1$$

neprekidna funkcija i vrijedi $\varphi(0) = x_0, \varphi(1) = x_1$. Slika te funkcije je segment $[x_0, x_1] \in \mathbb{R}^n$. Stoga je $\mathbb{R}^n$ ujedno i povezan skup po prethodnom teoremu. Pretpostavimo da je skup $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{R}^n$ otvoren i zatvoren u $\mathbb{R}^n$. Tada je i A^C otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i vrijedi $\mathbb{R}^n \cap A = A \neq \emptyset$, $\mathbb{R}^n \cap A^C = A^C \neq \emptyset$, $\mathbb{R}^n \subseteq A \cup A^C$ i $(A \cap A^C) \cap \mathbb{R}^n = \emptyset$. Iz toga slijedi da je $\mathbb{R}^n$ nepovezan skup, što je kontradikcija. Dakle, jedini skupovi koji su istodobno otvoreni i zatvoreni u $\mathbb{R}^n$ su $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$. □

Zadatak 1.7. *Ispitajte otvorenost i zatvorenost skupova:*

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$,

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 2, \sin x + \sin y \leq x^2\}$.

Rješenje: a) Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ je neprekidna ($f = p_1 \cdot p_2$) i vrijedi

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in \langle 1, +\infty \rangle\} = f^{-1}(\langle 1, +\infty \rangle).$$

Sada iz teorema 1.6 slijedi da je A otvoren. Kako je A otvoren skup koji očito nije prazan te $(0,0) \notin A$ pa $A \neq \mathbb{R}^2$, iz zadatka 1.6 slijedi da A nije zatvoren. To smo mogli pokazati i koristeći činjenicu da zatvoreni skupovi sadrže limese svih svojih konvergentnih nizova. Na primjer, $\left(1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ je konvergentan niz u A i konvergira prema $(1,1) \notin A$ pa A nije zatvoren.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y$ i $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = \sin x + \sin y - x^2$ su neprekidne ($f = p_1 + p_2$, $g = \sin \circ p_1 + \sin \circ p_2 - p_1^2$). Vrijedi

$$B = f^{-1}([2, +\infty\rangle) \cap g^{-1}(\langle -\infty, 0]).$$

Kako su f i g neprekidne, $[2, +\infty\rangle$ i $\langle -\infty, 0]$ zatvoreni skupovi te presjek dva zatvorena skupa zatvoren skup, možemo zaključiti da je B zatvoren. Budući da je skup B zatvoren i $B \neq \emptyset$ i $B \neq \mathbb{R}^2$, iz zadatka 1.6 slijedi da skup B nije otvoren.

□

Definicija 1.9. *Skup $A \subseteq X$ je* ***kompaktan*** *ako svaki niz u A ima konvergentan podniz čiji je limes u A.*

Teorem 1.10. *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.*

Zadatak 1.8. *Ispitajte kompaktnost sljedećih skupova:*

a) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, x^2 + y^2 \leq 5\}$,

b) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, x^2 + y^2 < 5\}$,

c) $\mathbb{Z}$.

Rješenje: a) Vrijedi $K = f^{-1}([1,+\infty\rangle) \cap g^{-1}(\langle -\infty, 5])$, gdje su $f(x,y) = xy$ i $g(x,y) = x^2 + y^2$ neprekidne funkcije. Vidimo da je K zatvoren, još ćemo pokazati da je omeđen. Za $(x,y) \in K$ vrijedi $5 \geq x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2$, tj. $\|(x,y)\| \leq \sqrt{5}$. Tada je K kompaktan po teoremu 1.10.

b) K nije zatvoren jer ne sadrži limese svih konvergentnih nizova u K, npr.

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{n}, \sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{n}\right)_{n\geq 2} \to \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \notin K.$$

Tada K nije ni kompaktan.

c) Skup $\mathbb{Z}$ nije omeđen pa nije ni kompaktan. Drugi način je da uočimo da je $x_n = n,\ n \in \mathbb{N}$ niz u $\mathbb{Z}$ koji nema konvergentan podniz pa $\mathbb{Z}$ nije kompaktan.

□

Zadatak 1.9. *Neka je $A \subseteq X$ kompaktan i $B \subseteq A$ zatvoren skup. Dokažite da je B kompaktan.*

Rješenje: Neka je $(x_n)_n$ niz u $B \subseteq A$. Kako je A kompaktan, niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $(x_{p_n})_n$, čiji je limes u A, $x_{p_n} \to x_0 \in A$. Kako je B zatvoren, a $(x_{p_n})_n$ niz u B, vrijedi $x_0 \in B$. Dakle, $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz s limesom u B pa je po definiciji skup B kompaktan. □

Teorem 1.11. *Neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija i $K \subseteq X$ kompaktan. Tada je $f(K)$ kompaktan skup.*

Teorem 1.12. *Neka je $A \subseteq X$ povezan/putevima povezan i $f : X \to Y$ neprekidna. Tada je $f(A)$ povezan/putevima povezan.*

Zadatak 1.10. *Dokažite da neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ne može biti injekcija.*

Rješenje: Prvi način: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neprekidna injekcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Kako je $\mathbb{R}^2$ povezan skup, a f neprekidna funkcija, slijedi da je $I = f(\mathbb{R}^2)$ povezan skup u $\mathbb{R}$, tj. oblika je

$$\mathbb{R}, \langle -\infty, a], [a, +\infty\rangle, \langle -\infty, a\rangle, \langle a, +\infty\rangle, [a,b], \langle a,b\rangle, \langle a,b] \text{ ili } [a,b\rangle.$$

Uzmimo neku točku $y_0 \in I$ koja nije na rubu skupa I. Tada postoji jedinstveni $x_0 \in \mathbb{R}^2$ takav da je $f(x_0) = y_0$ pa je $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\} \to I \setminus \{y_0\}$ neprekidna funkcija koja skup $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ koji je povezan u $\mathbb{R}^2$ preslikava u skup $I \setminus \{y_0\}$, koji je nepovezan skup u $\mathbb{R}$, a to je kontradikcija.

Drugi način: Pretpostavimo da je f injekcija. Neka je B zatvorena kugla u $\mathbb{R}^2$. Tada je $f : B \to f(B)$ neprekidna bijekcija. Kako je B kompaktan povezan skup u $\mathbb{R}^2$ onda je i $f(B)$ kompaktan povezan skup u $\mathbb{R}$, to jest $f(B)$ je segment (ne može biti jednočlan skup jer je f injekcija, a B nije jednočlan skup). Neka je $x \in B$ takav da $f(x)$ nije rub segmenta $f(B)$. Vrijedi da je $B \backslash \{x\}$ povezan putevima pa onda i povezan. S druge strane, jer se $f(x)$ ne nalazi na rubu segmenta $f(B)$ lako se provjeri da je $f(B) \backslash \{f(x)\}$ nepovezan. Ali $f(B) \backslash \{f(x)\} = f(B \backslash \{x\})$ je povezan skup kao slika povezanog skupa neprekidne funkcije, što je kontradikcija. Dakle, f ne može biti injekcija.

$\square$

Zadatak 1.11. *Odredite jesu li sljedeći skupovi povezani:*

a) $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > 1\}$

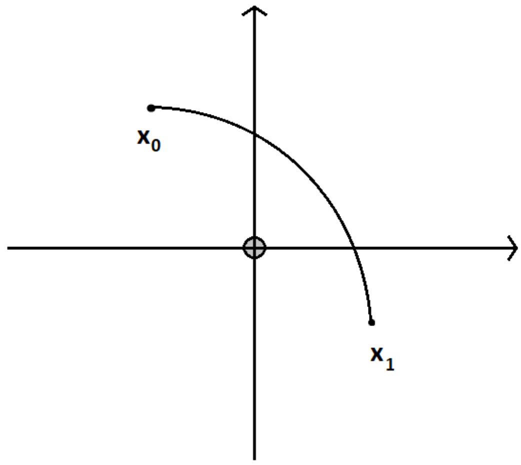
c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

e) $E = \mathbb{Q}$ *(u* $\mathbb{R}$*)*

f) $F = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2$.

Rješenje: a) $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ je povezan putevima pa i povezan.



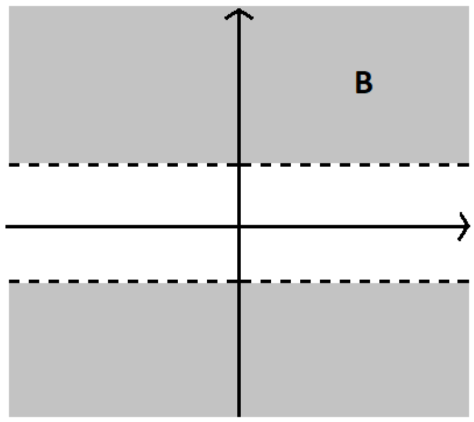
b) Uzmimo na primjer $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$, $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. U i V su otvoreni skupovi i vrijedi:

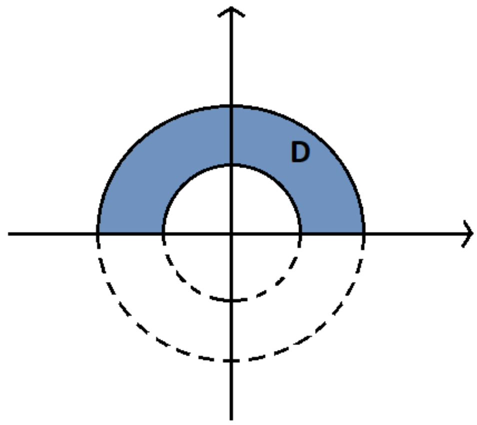
$$B \cap U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -1\} \neq \emptyset,$$
$$B \cap V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\} \neq \emptyset,$$
$$B \subseteq U \cup V, \quad B \cap (U \cap V) = \emptyset.$$

Dakle, B je nepovezan.

c) Neka je $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dana s $f(x) = (\cos x, \sin x)$. Funkcija f je neprekidna, $[0, 2\pi]$ je povezan skup i $f([0, 2\pi]) = C$ pa možemo zaključiti da je C povezan.

d) Definiramo funkciju $f : [1,2] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ s $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Uočimo da je $\tilde{D} := [1,2] \times [0, \pi]$ povezan skup. Naime, proizvoljne dvije točke $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \tilde{D}$ se mogu povezati putem koji se sastoji od dva segmenta: $[(x_1, y_1), (x_1, y_2)]$ i $[(x_1, y_2), (x_2, y_2)]$. Dakle $\tilde{D}$ je povezan putevima pa je onda i povezan skup. Nadalje, vrijedi $f([1,2] \times [0, \pi]) = D$ i f neprekidna pa je D povezan skup.





e) Skup $E = \mathbb{Q}$ promatramo kao podskup od $\mathbb{R}$. Uzmimo na primjer $U := \langle -\infty, \sqrt{2} \rangle$, $V := \langle \sqrt{2}, +\infty \rangle$. U i V su neprazni i otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$ i vrijedi $\mathbb{Q} \cap U \neq \emptyset$, $\mathbb{Q} \cap V \neq \emptyset$, $\mathbb{Q} \subseteq U \cup V$ te $\mathbb{Q} \cap (U \cap V) = \emptyset$. Dakle, $\mathbb{Q}$ je nepovezan po definiciji.

f) F je podskup od $\mathbb{R}^2$, koji se sastoji od točaka čija je barem jedna koordinata iracionalna (element $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$). Pokazat ćemo da je F povezan putevima, iz čega će slijediti da je povezan. Neka su $(a, b), (c, d) \in F$ dvije različite točke. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je prva koordinata točke (a, b) iracionalna, tj. $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Imamo dva slučaja:

1°) d je iracionalan

Tada se put sastoji od dva segmenta: $[(a, b), (a, d)]$ i $[(a, d), (c, d)]$. Oba segmenta se nalaze u F jer im je barem jedna koordinata iracionalna.

2°) d je racionalan

Tada je c nužno iracionalan i put od (a, b) do (c, d) se sastoji od tri segmenta: $[(a, b), (a, c)]$, $[(a, c), (c, c)]$, $[(c, c), (c, d)]$. Sva tri segmenta se nalaze u F jer im je barem jedna koordinata iracionalna.

□

Domaća zadaća

1. Dokažite da su sljedeći skupovi otvoreni:

   a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y + z^3 - 2 < 0\}$

   b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y < 0,\ z > 3\}$.

   c) $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i > 0, |x_i| > i\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$

2. Provjerite povezanost/kompaktnost sljedećih skupova:

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ y \in \langle -\infty, 3] \cup [5, +\infty\rangle\}$ u $\mathbb{R}^2$,

   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|,\ x \in [-1, 1]\}$,

   c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1,\ |y| \leq 2\}$,

   d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\quad x \geq 0,\ y \leq 0\}$

3. Može li se funkcija $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dana s
$$f(x,y) = \frac{x^2y - x^2y\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$
proširiti do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}^2$?

4. Može li se funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dana s
$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+3y^2)}{\ln(1+2x^2+y^2)}$$
proširiti do neprekidne u $(0,0)$?

Poglavlje 5

Diferencijabilnost i derivacija

1. Diferencijabilnost funkcije

Definicija 1.1. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Kažemo da je funkcija $f : U \to \mathbb{R}^m$* ***diferencijabilna u točki $\mathbf{x_0}$*** *$\in U$ ako postoji linearan operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takav da*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Pišemo $Df(x_0) = T$ ili $f'(x_0) = T$ i zovemo ga ***diferencijal*** *ili* ***derivacija*** *funkcije f u točki x_0.*

Napomena 1.2. *Linearni operator T iz gornje definicije je jedinstveno određen funkcijom f. Za funkciju f kažemo da je diferencijabilna na U ako je diferencijabilna u svakoj točki $x_0 \in U$.*

Zadatak 1.1. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearan operator. Odredite $f'(x_0)$, za sve $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Rješenje: Dokažimo da je $f'(x_0) = f$, za sve $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Računamo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0) + f(h) - f(x_0) - f(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Zbog jedinstvenosti derivacije zaključujemo $f'(x_0) = f$. □

Definicija 1.3. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje. Ako postoji limes*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_j(x_0 + te_i) - f_j(x_0)}{t},$$

pri čemu su $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ vektori kanonske baze u $\mathbb{R}^n$, onda ga zovemo ***i-ta parcijalna derivacija*** *funkcije f_j u točki $x_0 \in U$ i označavamo $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$.*

Zadatak 1.2. *Odredite parcijalne derivacije funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2 \sin x$.*

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{y_0^2(\sin(x_0 + t) - \sin(x_0))}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} y_0^2 \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \cos(x_0 + \frac{t}{2}) = y_0^2 \cos x_0. \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin x_0((y_0 + t)^2 - y_0^2)}{t} = 2y_0 \sin x_0.
\end{aligned}$$

□

Teorem 1.4. *Ako je $f : U^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u $x_0 \in U$, onda postoje sve parcijalne derivacije i $f'(x_0)$ ima u paru kanonskih baza matrični prikaz*

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0)
\end{pmatrix}.$$

Zadatak 1.3. *Odredite matrični prikaz derivacije funkcije $f(x, y, z) = (x^4 y, xe^z)$. Odredite $f'(x_0, y_0, z_0)(x, y, z)$.*

Rješenje: Lako se izračuna

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 4x_0^3 y_0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = x_0^4, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = e^{z_0}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = x_0 e^{z_0},$$

pa imamo

$$f'(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 4x_0^3 y_0 & x_0^4 & 0 \\ e^{z_0} & 0 & x_0 e^{z_0} \end{pmatrix}.$$

Računamo djelovanje operatora $f'(x_0, y_0, z_0)$ na $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f'(x_0, y_0, z_0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_0^3 y_0 & x_0^4 & 0 \\ e^{z_0} & 0 & x_0 e^{z_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_0^3 y_0 x + x_0^4 y \\ e^{z_0} x + x_0 e^{z_0} z \end{pmatrix},$$

pa je $f'(x_0, y_0, z_0)(x, y, z) = (4x_0^3 y_0 x + x_0^4 y, e^{z_0} x + x_0 e^{z_0} z)$.

$\square$

Napomena 1.5. *Ako je $f : U^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u $x_0 \in U$, onda je $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearan funkcional i reprezentiramo ga vektorom*

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

*Vektor $\nabla f(x_0)$ zovemo **gradijent** funkcije f u točki x_0. Vrijedi:*

$$f'(x_0)(h) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i.$$

Zadatak 1.4. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$. Dokažite da je $\nabla f(x_0) = 2x_0$.*

Rješenje: Vrijedi

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - 2\langle x_0, h \rangle|}{\|h\|} &= \frac{|\|x_0 + h\|^2 - \|x_0\|^2 - 2\langle x_0, h \rangle|}{\|h\|} \\ &= \frac{|\cancel{\|x_0\|^2} + \cancel{2\langle x_0, h \rangle} + \|h\|^2 - \cancel{\|x_0\|^2} - \cancel{2\langle x_0, h \rangle}|}{\|h\|} = \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \overset{h \to 0}{\to} 0. \end{aligned}$$

pa je

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - 2\langle x_0, h \rangle|}{\|h\|} = 0,$$

odnosno $\nabla f(x_0) = 2x_0$.

Uočite da zadatak ne ovisi o izboru norme $|| \cdot ||$ na $\mathbb{R}^n$. Ukoliko je riječ o 2–normi, onda se zadatak može riješiti jednostavnije korištenjem parcijalnih derivacija. $\square$

Teorem 1.6. *Ako je $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u $x_0 \in U$, onda je f neprekidna u x_0.*

Napomena 1.7. *Obrat teorema općenito ne vrijedi, npr.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ *je neprekidna u* 0, *ali nije derivabilna u* 0.

Zadatak 1.5. *Zadana je funkcija* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *s*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Odredite točke u kojima je neprekidna.

b) Odredite u kojim točkama postoje parcijalne derivacije.

c) Odredite točke u kojima je diferencijabilna.

Rješenje: a) Vrijedi $f = \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1^2 + p_2^2}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, gdje su $p_1(x,y) = x$, odnosno $p_2(x,y) = y$ projekcije. Kako su p_1 i p_2 diferencijabilne na $\mathbb{R}^2$, funkcija f je derivabilna, a onda i neprekidna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Još treba ispitati neprekidnost u $(0,0)$. Pošto je

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0 \quad \text{a} \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

zaključujemo da f ima prekid u $(0,0)$.

b) Funkcija f ima parcijalne derivacije na $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{y_0 \cdot (x_0^2+y_0^2) - x_0 y_0 \cdot 2x_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{x_0 \cdot (x_0^2+y_0^2) - x_0 y_0 \cdot 2y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} = \frac{x_0^3 - y_0^2 x_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}.$$

Budući da je $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = 0$ zaključujemo da parcijalna derivacija po x u $(0,0)$ postoji i vrijedi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Slično vrijedi i $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, dakle f ima sve parcijalne derivacije na $\mathbb{R}^2$.

c) Već smo pod a) utvrdili da je funkcija f derivabilna na $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ i za $(x,y) \neq (0,0)$ vrijedi

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Ispitajmo još diferencijabilnost u $(0,0)$.

Prvi način: Pod a) smo dokazali da f nije neprekidna u $(0,0)$ pa onda nije niti diferencijabilna u $(0,0)$.

Drugi način: Kako je $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, jedini kandidat za $f'(0,0)$ je nul-operator. Ukoliko je funkcija zaista derivabilna u $(0,0)$, onda mora vrijediti

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \mathbf{0}(h_1,h_2)|}{\|(h_1,h_2)\|} = 0.$$

Međutim,

$$\lim_{(h,h)\to(0,0)} \frac{|f(0+h,0+h) - f(0,0) - \mathbf{0}(h,h)|}{\|(h,h)\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2+h^2}}{\sqrt{2}|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}|h|} = +\infty,$$

dakle f nije diferencijabilna u $(0,0)$. $\square$

Napomena 1.8. *Iz prethodnog primjera vidimo da f može imati sve parcijalne derivacije, a da ne bude diferencijabilna u nekoj točki. Parcijalne derivacije nam samo daju „kandidate" za derivaciju.*

Zadatak 1.6. *Dokažite da je funkcija*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2(x^3-2y^2)}{\sqrt{2x^2+y^4}} & ,(x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

derivabilna na $\mathbb{R}^2$.

Rješenje: Vrijedi $f=\frac{p_2^2\cdot(p_1^3-2p_2^2)}{\sqrt{2p_1^2+p_2^4}}$ na $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, gdje su $p_1(x,y)=x$, odnosno $p_2(x,y)=y$ projekcije. Kako su p_1 i p_2 diferencijabilne na $\mathbb{R}^2$, a funkcija $x\mapsto\sqrt{x}$ derivabilna na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, funkcija f je derivabilna na $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. f je derivabilna na $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Još treba provjeriti derivabilnost u $(0,0)$. Računamo parcijalne derivacije koje će, ukoliko postoje, dati kandidata za diferencijal

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0-0}{t}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{-2t^4}{\sqrt{t^4}}}{t}=0.\end{aligned}$$

Dakle, jedini kandidat za derivaciju je $T(h_1,h_2)=0$. Imamo

$$\begin{aligned}0\le\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)|}{\|(h_1,h_2)\|}&=\frac{\left|\frac{h_2^2(h_1^3-2h_2^2)}{\sqrt{2h_1^2+h_2^4}}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\ &=\left|\frac{\sqrt{h_2^4}}{\sqrt{2h_1^2+h_2^4}}\right|\cdot\left|\frac{h_1^3-2h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|\le\left|\frac{h_1^3-2h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|\\ &\le\left|\frac{h_1^3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|+\left|\frac{2h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|\\ &=h_1^2\frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}+2|h_2|\frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\ &\le h_1^2+2|h_2|\overset{(h_1,h_2)\to0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

pa je

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\mathbf{0}(h_1,h_2)|}{\|(h_1,h_2)\|}=0.$$

Time smo pokazali da je $f'(0,0)=0$. □

Zadatak 1.7. *Zadana je funkcija $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. Može li se f proširiti do diferencijabilne funkcije na $\mathbb{R}^2$?*

Rješenje: Da bi f bila diferencijabilna u $(0,0)$, mora biti i neprekidna u $(0,0)$. Imamo

$$0\le\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot|x|\le|x|\overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0.$$

Dakle, da bi funkcija f bila neprekidna u $(0,0)$, moramo dodefinirati fukciju u $(0,0)$ kao $f(0,0) := 0$. Uočite da to još uvijek ne znači da je f diferencijabilna u $(0,0)$, nego samo da je neprekidna u $(0,0)$, a neprekidnost je nužan uvjet za diferencijabilnost. Sada tražimo „kandidata" za derivaciju preko parcijalnih derivacija:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0.$$

Dakle, kandidat za diferencijal je nul-operator. Sada zbog

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(0+h,0+h)-f(0,0)-\mathbf{0}(h,h)|}{\sqrt{2}|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{|h|^3}{2h^2}}{\sqrt{2}|h|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

zaključujemo da f nije diferencijabilna u $(0,0)$. Dakle, f se ne može proširiti do diferencijabilne funkcije na $\mathbb{R}^2$. □

Teorem 1.9. *Neka je $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funkcija i pretpostavimo da postoje sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ funkcije f na U. Ako su sve parcijalne derivacije neprekidne na U, onda je f diferencijabilna na U.*

Teorem 1.10 (Lančano pravilo)**.** *Neka su $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $O \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoreni skupovi, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : O \to \mathbb{R}^p$ preslikavanja takva da $f(U) \subseteq O$. Ako je f diferencijabilna u $x_0 \in U$ i g diferencijabilna u $y_0 = f(x_0) \in O$, onda je i $g \circ f$ diferencijabilna u x_0 i vrijedi:*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Zadatak 1.8. *Neka su $f(x,y,z) = (xyz, 1)$ i $g(x,y) = (xy, \frac{x}{y}, \frac{\sin x}{\sin y})$. Izračunajte $(g\circ f)'(x,y,z)$.*

Rješenje: Vrijedi

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ \frac{\cos x}{\sin y} & -\frac{\sin x\cos y}{\sin^2 y}\end{pmatrix}, \quad f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

pa imamo

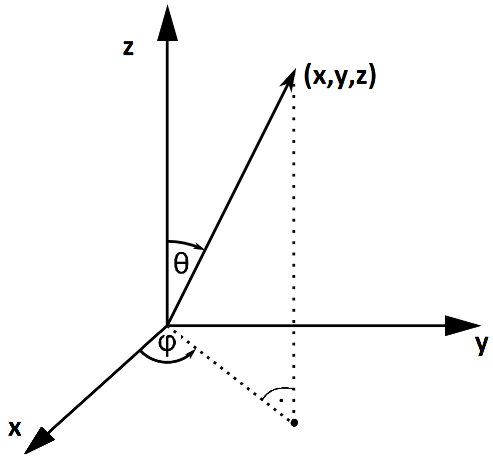
$$(g\circ f)'(x,y,z) = g'(f(x,y,z))f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & xyz \\ 1 & -xyz \\ \frac{\cos(xyz)}{\sin 1} & -\frac{\sin(xyz)\cos 1}{\sin^2 1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ yz & xz & xy \\ \frac{yz\cos(xyz)}{\sin 1} & \frac{xz\cos(xyz)}{\sin 1} & \frac{xy\cos(xyz)}{\sin 1}\end{pmatrix}.$$

□

Zadatak 1.9. *Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Sferne koordinate su dane s*

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Neka je $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana s $u(r,\theta,\varphi) = f(x,y,z)$. Odredite $\partial_r u, \partial_\theta u, \partial_\varphi u$.



Rješenje:

Definiramo $\Phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$. Tada je $u = f\circ\Phi$. Odredimo $\Phi'(r,\theta,\varphi)$:

$$\Phi'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$u'(r,\theta,\varphi) = f'(\Phi(r,\theta,\varphi))\Phi'(r,\theta,\varphi),$$

to jest

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\theta, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} r\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial f}{\partial z} r\sin\theta, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial f}{\partial x} r\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r\sin\theta\cos\varphi. \end{aligned}$$

□

Definicija 1.11. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : U \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1,\dots,n$. Ukoliko postoje parcijalne derivacije tih funkcija $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$, $i,j = 1,\dots,n$, zovemo ih **parcijalne derivacije 2. reda** i označavamo s*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\ i,j = 1,\dots,n.$$

Parcijalne derivacije p-tog reda definiramo na sličan način. Matricu drugih parcijalnih derivacija

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

*zovemo **Hesseova matrica** funkcije f.*

Teorem 1.12 (Schwartz)**.** *Neka je $f : U^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija takva da postoje sve parcijalne derivacije drugog reda te neka su one neprekidne. Tada je Hesseova matrica simetrična, tj. vrijedi*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \ i,j = 1,\ldots,n.$$

Definicija 1.13. *Kažemo da je $f : U^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ klase C^r, i pišemo $f \in C^r(U)$, ako komponentne funkcije f imaju neprekidne parcijalne derivacije r-tog reda.*

Zadatak 1.10. *Može li se funkcija $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ dodefinirati u točki $(0,0)$ tako da bude:*

a) klase C^1? *b) klase C^2?*

Rješenje: Prvo provjeravamo može li se funkcija dodefinirati tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}^2$. Imamo

$$0 \le \left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3 y}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| \le |xy| + |xy| = 2|xy| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Definiramo li $f(0,0) := 0$, tada iz gornjeg računa vidimo da je f neprekidna. Parcijalne derivacije u $(0,0)$ su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Za $(x,y) \neq (0,0)$ imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - xy(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - xy(x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Parcijalne derivacije postoje i neprekidne su na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Provjerimo neprekidnost parcijalnih derivacija u točki $(0,0)$. Iz

$$0 \le \left|\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}\right| \le |y| + 4|y|\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2} + |y| \le 6|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$$

te zbog $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ zaključujemo da je $\frac{\partial f}{\partial x}$ neprekidna. Na sličan način se dolazi do istog zaključka za $\frac{\partial f}{\partial y}$ pa je $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ i vrijedi

$$f'(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0).$$

Dakle, funkcija se može dodefinirati u $(0,0)$ tako da bude klase C^1. Dalje imamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^5}{t^5} = 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} -\frac{t^5}{t^5} = -1.$$

Iz gornjeg računa slijedi da $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$ jer bi u suprotnom, po Schwartovom teoremu vrijedilo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

□

Teorem 1.14 (O inverznom preslikavanju)**.** *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : U \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje takvo da je $f \in C^1(U)$. Ako je $x_0 \in U$ točka takva da je $f'(x_0)$ regularan operator, onda postoje okoline $U \subseteq \mathbb{R}^n$ od x_0 i $V \subseteq \mathbb{R}^n$ od $y_0 = f(x_0)$ takve da $f : U \to V$ ima inverz $f^{-1} : V \to U$ i vrijedi*

$$(f^{-1})'(y_0) = [f'(x_0)]^{-1}.$$

Zadatak 1.11. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiran s $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Odredite sve točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ u kojima f ima lokalni inverz i izračunajte $(f^{-1})'(f(x,y))$.*

Rješenje: Vrijedi

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix},$$

pa je tada Jacobijan

$$Jf(x,y) = \det(f'(x,y)) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} > 0.$$

Dakle, $f'(x,y)$ je regularan operator na $\mathbb{R}^2$, pa po teoremu o inverznom preslikavanju f ima lokalni inverz u okolini svake točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tada je $(f^{-1})'(f(x,y)) = [f'(x,y)]^{-1}$. Koristeći formulu za inverz 2×2 matrice dobivamo

$$(f')^{-1}(f(x,y)) = \begin{pmatrix} e^{-x} \cos y & e^{-x} \sin y \\ -e^{-x} \sin y & e^{-x} \cos y \end{pmatrix}.$$

□

Napomena 1.15. *U prethodnom zadatku f nije globalno invertibilna jer je periodična, tj. $f(x, y + 2\pi) = f(x,y)$.*

Zadatak 1.12. *Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dana s $f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Odredite sve točke $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ u kojima f ima lokalni inverz i izračunajte $(f^{-1})'(f(x,y,z))$.*

Rješenje: Vrijedi

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix},$$

pa je Jacobijan jednak

$$(Jf)(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} z & x \\ y & 0 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = 2xyz.$$

Dakle, f ima lokalni inverz u točkama (x, y, z) takvima da je $xyz \neq 0$, što vrijedi ako i samo ako je $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vrijedi

$$(f')^{-1}(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{2yz} & \dfrac{1}{2z} & \dfrac{1}{2y} \\ \dfrac{1}{2z} & -\dfrac{y}{2xz} & \dfrac{1}{2x} \\ \dfrac{1}{2y} & \dfrac{1}{2x} & -\dfrac{z}{2xy} \end{pmatrix}.$$

□

Domaća zadaća

1. Je li funkcija $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana s

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   neprekidna? Je li derivabilna? Je li klase C^1?

2. Je li funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$?

3. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definirano s $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1)$ i neka je $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferencijabilno preslikavanje. Napišite parcijalne derivacije funkcija $f \circ g$ i $g \circ f$.

4. Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |xy|$ diferencijabilna u $(0,0)$, ali nije diferencijabilna niti na jednom otvorenom krugu s centrom u $(0,0)$.

5. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dana s $f(x,y) = (xy, 1 - xy^2)$. Odredite sve točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ u kojima f ima lokalni inverz te izračunajte $(f^{-1})'(f(x,y))$.

Bibliografija