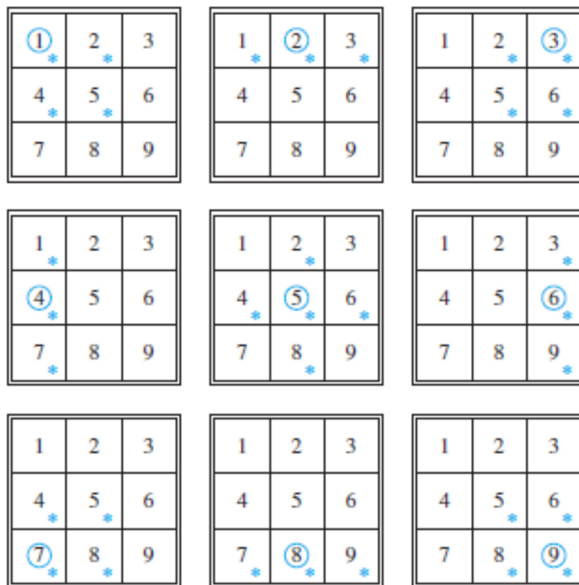


Odabrane primjene linearne algebre (2025./2026.) – 2. zadaća

1. Kvadrat je podijeljen na 9 manjih kvadrata, od kojih svaki može biti crne ili bijele boje. Kada se dotakne neki od manjih kvadrata, mijenja se njegova boja i boja još nekih od susjednih kvadrata (crno \leftrightarrow bijelo) kao što je prikazano na sljedećim slikama: zaokruženi broj predstavlja dotaknuti kvadrat, a boje se mijenjaju na svim kvadratima označenim sa *.



- (a) Pretpostavimo da su na početku svi kvadrati bili bijeli. Dokažite da možemo postići da su svi kvadrati crni, te navedite kako.
- (b) Dokažite da možemo postići da su svi kvadrati crni bez obzira na početni raspored boja.
2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n+1$ uređeni parovi brojeva takvi da su x_1, x_2, \dots, x_{n+1} međusobno različiti. Neka je $p \in \mathcal{P}_n$ interpolacijski polinom određen zadanim točkama.
- (a) Navedite bazu za \mathcal{P}_n koju koristimo za prikaz interpolacijskog polinoma u Newtonovom obliku.
- (b) Dokažite da je skup iz (a) zaista baza za \mathcal{P}_n i navedite neke njene prednosti u odnosu na kanonsku bazu za \mathcal{P}_n .
3. Neka je zadana homogena linearna diferencijalna jednačba drugog reda s konstantnim koeficijentima $ay'' + by' + cy = 0$ te neka je \mathcal{R} skup svih njenih rješenja.
- (a) Dokažite da je \mathcal{R} vektorski prostor.
- (b) Pretpostavimo da je $b^2 - 4ac < 0$. Neka su $\alpha \pm i\beta$ rješenja pripadne karakteristične jednačbe. Dokažite da je skup $\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)\}$ baza prostora \mathcal{R} .
4. Ovisno o vremenu, dane dijelimo u sunčane, oblačne i kišne. Promatranjem promjena vremena iz dana u dan došli smo do sljedećih pretpostavki: vjerojatnosti da će nakon sunčanog dana sljedeći dan biti sunčan, oblačan ili kišan su redom 0.6, 0.3 i 0.1, vjerojatnosti da će nakon oblačnog dana sljedeći dan biti sunčan, oblačan ili kišan su redom 0.2, 0.5 i 0.3, a vjerojatnosti da će nakon kišnog dana sljedeći dan biti sunčan, oblačan ili kišan su redom 0.1, 0.4 i 0.5. Neka su s_n, o_n, k_n redom vjerojatnosti da će n -ti dan (od početka promatranja) biti sunčan, oblačan, kišan.
- (a) Postavite rekurzivne relacije za opisanu situaciju te ih zapišite u matričnom obliku.
- (b) Kolike su vjerojatnosti da će n -ti dan biti sunčan, oblačan i kišan, ako je n veliki broj? Navedite tvrdnje koje koristite u računu.