Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1

Drugi ispitni rok 20.2.2024.

1. (6 bodova) Riješite zadaću
$$\begin{cases} xu_x - yu_y = 2\sqrt{u} \\ u(x,x) = e^{-x} \end{cases}$$
na $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$.

2. Neka je $\Omega = K(0,1) \subseteq \mathbb{R}^d$. Kažemo da je funkcija $u \in C^2(\overline{\Omega})$ subharmonička ako je
$$-\Delta u \leq 0, \qquad \text{na } \Omega.$$
   (a) (5 bodova) Dokažite da subharmoničke funkcije zadovoljavaju princip maksimuma, tj. da je za takve u
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$
   (b) (4 boda) Pretpostavimo da za $v \in C^2(\overline{\Omega})$ vrijedi $\Delta v - v^2 = 0$ na Ω. Dokažite da v ne može postizati svoj maksimum u interioru (tj. unutar Ω) osim ako je $v \equiv 0$.

   Napomena: U (b) dijelu zadatka smijete koristiti rezultat da subharmoničke funkcije na Ω zadovoljavaju i **jaki** princip maksimuma bez dokaza.

3. (a) (4 boda) Odredite rješenje zadaće
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x_1, x_2, 0) = \cos(2x_1 + x_2), & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$
   (b) (4 boda) Neka je $u \in C^2(\underbrace{K[0,1]}_{\overline{K(0,1)}} \times [0,T])$ rješenje početno-rubne zadaće
$$\begin{cases} u_t - \Delta u + 2u_{x_1} + u = 0, & \text{na } K(0,1) \times (0,T), \\ u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), & x \in K(0,1), \\ u(x_1, x_2, t) = 2x_1 x_2\, g(t), & x \in S(0,1),\ t \in [0,T], \end{cases}$$
   gdje su u_0, g takve da postoji $M > 0$ takav da je $u_0 \leq M$ i $0 \leq g \leq M$. Dokažite da u zadovoljava
$$u(x,t) \leq Me^{2(T+1)} \qquad \text{na } K[0,1] \times [0,T].$$

4. (5 bodova) Odredite rješenje zadaće
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 2t & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x_1, x_2, 0) = 0 & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x_1, x_2, 0) = x_2^2 & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Rješenja

1. Stavimo $S = \{(s, s) : s \in (0, \infty)\}$ te

$$a(x, y, z) = (x, -y), \quad b(x, y, z) = 2\sqrt{z}, \quad u_0(s) = e^{-s}.$$

Kako je $a(s, s, u_0(s)) \cdot n(s) = (s, -s) \cdot (1, -1) = 2s > 0$ za $s > 0$, nemamo karakterističnih točaka u Ω. Karakteristični sustav je dan s

$$\begin{cases} x'(t; s) = x, \\ y'(t; s) = -y, \\ z'(t; s) = 2\sqrt{z} \end{cases},$$

uz početne uvjete

$$\begin{cases} x(0; s) = s, \\ y(0; s) = s, \\ z(0; s) = e^{-s} \end{cases}.$$

Rješenje sustava je dano s

$$x(t, s) = se^{t}, \quad y(t, s) = se^{-t}, \quad z(t, s) = \left(t + e^{-\frac{s}{2}}\right)^2.$$

Kako se nalazimo u prvom kvadrantu, možemo invertirati $(t, s) \mapsto (x, y)$ za sve (x, y), te imamo

$$s = \sqrt{xy}, \quad t = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{y}.$$

Konačno rješenje je tada dano na cijelom Ω s

$$u(x, y) = z(t(x, y), s(x, y)) = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{x}{y} + e^{-\frac{\sqrt{xy}}{2}}\right)^2.$$

2. (a) Dokaz ide potpuno isto kao i princip maksimuma za harmoničke funkcije napravljen u materijalima za vježbe.

   (b) Kako je $-\Delta v = -v^2 \leq 0$, slijedi da je v subharmonička. Prema napomeni, za nju tada vrijedi jaki princip maksimuma. Stoga, ako bi maksimum se postizao u interioru, v bi morala biti konstantna funkcija. Međutim, tada je $v^2 = \Delta v = 0$, pa zaključujemo da u tom slučaju mora biti $v \equiv 0$.

3. (a) Konačno rješenje je

$$u(x_1, x_2, t) = e^{-5t} \cos(2x_1 + x_2).$$

   (b) Uvodimo pomoćnu funkciju

$$v(x_1, x_2, t) = e^{2t - x_1} u(x_1, x_2, t),$$

koja je tada rješenje početno-rubne zadaće

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & \text{na } K(0,1) \times (0, T), \\ v(x_1, x_2, 0) = e^{-x_1} u_0(x_1, x_2), & x \in K(0,1), \\ u(x_1, x_2, t) = 2x_1 x_2\, g(t) e^{2t - x_1}, & x \in S(0,1),\ t \in [0, T]. \end{cases}$$

Za v vrijedi princip maksimuma, stoga nam treba ocjena na v na njenom rubu. Imamo

$$\underbrace{e^{-x_1}}_{\leq e}\underbrace{u_0(x_1,x_2)}_{\leq M} \leq Me,$$

$$2\underbrace{x_1x_2}_{-1/2\leq\cdot\leq 1/2}\underbrace{g(t)}_{0\leq\cdot\leq M}\underbrace{e^{2t-x_1}}_{e^{2T+1}} \leq Me^{2T+1}.$$

Stoga je

$$\max_{K[0,1]\times[0,T]} v \leq Me^{2T+1}.$$

Kako je $u(x,t) = e^{x_1-2t}v(x,t)$, slijedi

$$\max_{K[0,1]\times[0,T]} u \leq \left(\max_{K[0,1]\times[0,T]} v\right)\left(\max_{K[0,1]\times[0,T]} e^{x_1-2t}\right) \leq Me^{2T+1}\cdot e = Me^{2(T+1)}.$$

4. Za računski dio rješenja homogenog dijela možete pogledati Kolokvij 21/22; dano je s $x_2^2t+\frac{1}{3}t^3$. Za nehomogeni dio promotrimo prvo pomoćnu zadaću

$$\begin{cases} v(\cdot,\cdot;s) - \Delta v(\cdot,\cdot;s) = 0, \\ v(\cdot,0;s) = 0, \\ v_t(\cdot,0;s) = 2s, \end{cases}$$

čije je rješenje zbog Poissonove formule

$$v(x,t;s) = \frac{1}{|K(x,t)|}\int_{K(x,t)} \frac{2st}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}dy = 2st.$$

Prema Duhamelovom principu rješenje nehomogenog dijela zadaće je dano s

$$\int_0^t v(x,t-s;s)ds = \int_0^t 2s(t-s)ds = \frac{1}{3}t^3.$$

Konačno rješenje zadaće je tada

$$u(x_1,x_2,t) = x_2^2t + \frac{2}{3}t^3.$$