Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1

Druga zadaća

1. (3) Pokažite da za $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ vrijedi
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$
Uputa: Pokažite da funkcija
$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(tbx) dx$$
zadovoljava diferencijalnu jednadžbu
$$I' = -\frac{b^2}{2a} tI.$$

2. (3) Pretpostavimo da je u glatka funkcija koja zadovoljava $u_t - u_{xx} = 0$ na $\mathbb{R} \times \langle 0, \infty\rangle$.
   a) Pokažite da je funkcija $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ također rješenje jednadžbe provođenja za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.
   b) Koristeći a) pokažite da je tada i funkcija
   $$v(x,t) := x u_x(x,t) + 2t u_t(x,t)$$
   također rješenje jednadžbe provođenja.

3. (5) Pokažite da postoji konstanta $C > 0$ za koju rješenje valne jednadžbe
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = g, \\ u_t(\cdot, 0) = h, \end{cases}$$
zadovoljava
$$(\forall t > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^3) \qquad |u(x,t)| \leq \frac{C}{t},$$
pri čemu su $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$.

4. (3) Zadane su funkcije $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ te $f_2, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Pretpostavimo dodatno da su f_2, g i h harmoničke. Izvedite sljedeću formulu
$$u(x,t) = g(x) + th(x) + f_2(x) \int_0^t (t-s) f_1(s) ds$$
za rješenje zadaće
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f_1(t) f_2(x), & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = g(x), & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x,0) = h(x), & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

5. (6) Riješiti sljedeće Cauchyjeve zadaće:

   (a) $d = 2$:

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u &= 2 \\ u(0, x_1, x_2) &= x_1 \\ u_t(0, x_1, x_2) &= x_2 \ . \end{cases}$$

   (b) $d = 3$:

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u &= 2x_1x_2x_3 \\ u(0, x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 \\ u_t(0, x_1, x_2, x_3) &= 1 \end{cases}$$

6. (5) Neka je zadana funkcija $u(t, t_0, \mathbf{x})$, klase C^2 na području gdje je $0 \le t_0 \le t$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$). Tada je funkcija u rješenje Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} u_t - \triangle u &= 0 \\ u(t_0, t_0, \mathbf{x}) &= f(t_0, \mathbf{x}) \ , \end{cases}$$

   za $t_0 \ge 0$ ako i samo ako je za $t_0 \ge 0$ funkcija

$$v(t, t_0, \mathbf{x}) := \int_{t_0}^{t} u(t, \tau, \mathbf{x}) d\tau$$

   rješenje Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} v_t - \triangle v &= f \\ v(t_0, t_0, \cdot) &= 0 \ . \end{cases}$$

7. (5) Pokazati jedinstvenost klasičnog rješenja (klase C^2 po t i C^4 po x) početno-rubne zadaće za jednadžbu titranja štapa na $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} &= 0 \\ u|_{t=0} &= u_0 \\ u_t|_{t=0} &= u_1 \\ u|_{x=0} &= f_0 \\ u|_{x=1} &= f_1 \\ u_x|_{x=0} &= g_0 \\ u_x|_{x=1} &= g_1 \ . \end{cases}$$

   [Naputak: Dokazati i iskoristiti sljedeći identitet: $u_t u_{xxxx} = (u_t u_{xxx})_x - (u_{tx} u_{xx})_x + \frac{1}{2}(u_{xx}^2)_t$.]

8. (+) Neka su $\phi, \psi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+) \cap \mathrm{C}^0(\mathbb{R}_{\ge 0})$, a $\phi(0) = \psi(0)$. Za koje vrijednosti $a \in \mathbb{R}$ sljedeća (Goursatova) zadaća na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} a u_{xx} - u_{yy} &= 0 \\ u(x, 0) &= \phi(x) \\ u(0, y) &= \psi(y) \end{cases}$$

   ima jedinstveno rješenje? Odredite to rješenje!