

Parcijalne diferencijalne jednačbe 1

Zadaća

Napomena: Zadaću predajete mailom (može skenirano/slikano, samo da je čitljivo). Rok predaje nije fiksiran, ali zadaću je potrebno predati prije usmenog ispita.

1. Neka je u klase C^1 rješenje jednačbe $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = -u$ u zatvorenom jediničnom krugu te neka je $a(x,y)x + b(x,y)y > 0$ na jediničnoj kružnici. Dokažite da je tada $u \equiv 0$.

Napomena: Pokažite da je $0 \leq \min u \leq \max u \leq 0$.

2. Neka je $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$, te $f = (f_1, \dots, f_d) \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$.

a) Pokažite sljedeći identitet

$$\Delta(u \circ f) = (\nabla f (\nabla f)^T) : (\nabla^2 u \circ f) + (\nabla u \circ f) \cdot \Delta f,$$

pri čemu je $\Delta f = (\Delta f_1, \dots, \Delta f_d)$, $:$ označava standardni skalarni produkt matrica, a $\cdot$ standardni skalarni produkt vektora.

- b) Neka je sada $d = 2$ i u rješenje Laplaceove jednačbe. Pretpostavimo da za svaki $x \in \mathbb{R}^2$ postoje $\lambda(x) > 0$ i ortogonalna matrica s determinantom jednakom 1, $O(x)$, takvi da je $Df(x) = \lambda(x)O(x)$. Pokažite da je tada $\Delta(u \circ f) = 0$.

3. (a) Izvedite formulu za rješenje početne zadaće na $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$

$$\begin{cases} u_t - A : \nabla^2 u + b \cdot \nabla u + cu = 0 \\ u(0) = g, \end{cases}$$

pri čemu su $A \in M_d(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^d$ i $c \in \mathbb{R}$ te $A > 0$.

- (b) Riješite odgovarajuću početnu zadaću ako je $d = 2$, $A = \text{diag}(2, 1)$, $b = (1, 2)$, $c = 3$ te $g(x) = e^{-|x|^2}$.

4. Pokažite da postoji konstanta $C > 0$ za koju rješenje valne jednačbe

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = g, \\ u_t(\cdot, 0) = h, \end{cases}$$

zadovoljava

$$(\forall t > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^3) \quad |u(x, t)| \leq \frac{C}{t},$$

pri čemu su $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$.