Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1
Kolokvij 3.2.2021.

1. (6) Metodom karakteristika riješite zadaću

$$\begin{cases} xu_x + u_y = 3x - u, \\ u(x,0) = 1. \end{cases}$$

Rješenje. Iz zadatka čitamo $a(x,y,z) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$, $b(x,y,z) = 3x - z$, $S = \{(s,0) : s \in \mathbb{R}\}$. Kako je $a(s,0,1) \cdot n(s) = (s,1) \cdot (0,1) \neq 0$, karakterističnih točaka nema. Karakteristični sustav je dan s

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 1 \\ \frac{dz}{dt} = 3x - z \\ x(0,s) = s \\ y(0,s) = 0 \\ z(0,s) = 1 \end{cases}$$

Iz prve dvije jednadžbe i odgovarajućih početnih uvjeta slijedi

$$x(t,s) = se^t, \qquad y(t,s) = t.$$

Uvrštavanjem $x(t,s)$ u treću dobivamo

$$z' + z = 3se^t.$$

Ovo je linearna jednadžba prvog reda s konstantnim koeficijentima, te je rješenje dano s

$$z(t,s) = \frac{3}{2}se^t + (1 - \frac{3}{2}s)e^{-t}.$$

Neka je $(x.y) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljna. Lako vidimo da je tada inverz dan s

$$t(x,y) = y, \qquad s(x,y) = xe^{-y}.$$

Uvrštavanjem u izraz za z konačno dobivamo

$$u(x,y) = z(t,s) = \frac{3}{2}x(1 - e^{-2y}) + e^{-y}$$

∎

2. (3+4)

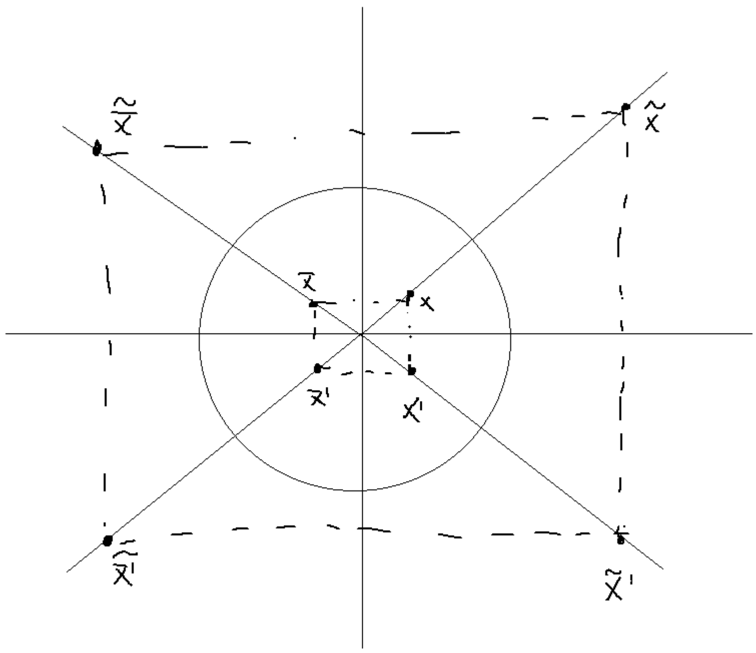
(a) Konstruirajte Greenovu funkciju za područje $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, gdje je Ω_1 prvi kvadrant te $\Omega_2 = K(0,1)$.

(b) Pretpostavimo da je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ rješenje rubne zadaće

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{u } \Omega, \\ u = g, & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

pri čemu je $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Dokažite da je $0 \leq u(x_1, x_2) \leq \frac{1}{2}$ za sve $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$.

Rješenje. (a)



Gruba skica točaka koje će činiti zatvoren sustav refleksija je gore. Pritom je x' oznaka za refleksiju s obzirom na x-os, $\overline{x}$ za refleksiju obzirom na y-os, te $\tilde{x}$ za sfernu inverziju. Greenova funkcija je dana s

$$\begin{aligned} G(x,y) = {} & \Phi(y-x) - \Phi(y-x') - \Phi(y-\overline{x}) + \Phi(y-\overline{x}') \\ & - \Phi(|x|(y-\tilde{x})) + \Phi(|x|(y-\tilde{x}') + \Phi(|x|(y-\tilde{\overline{x}})) - \Phi(|x|(y-\tilde{\overline{x}}')). \end{aligned}$$

(b) Kako je u harmonijska funkcija na ograničenom području, vrijede principi minimuma i maksimuma, te je dovoljno pokazati ograde na rubu, odnosno na funkciju g. Kako je na dijelovima koordinatnih osi $g = 0$, te na luku kružnice u prvom kvadrantu je $g \geq 0$, zaključujemo $0 \leq u$. S druge strane, za $(x_1, x_2) \in \partial\Omega \cap S(0,1)$ je

$$x_1 x_2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{1}{2},$$

pa slijedi i druga tvrdnja.

■

3. (5) Izvedite formulu za rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \langle 0, \infty \rangle \\ u(\cdot, 0) = g, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

gdje je $f(x_1, x_2, t) = 1$ i $g(x_1, x_2) = \sin^2 x_1 \cos^2 x_1$.

Rješenje. Imamo $g(x_1, x_2) = \sin^2 x_1 \cos^2 x_1 = \frac{1}{4} \sin^2 2x_1 = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x_1)$. Dalje ide koristeći se istim postupkom kao u zadacima s vježbi. Rješenje je

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{8}(1 - e^{-16t} \cos 4x_1) + t.$$

■

4. (3+3) Pretpostavimo da $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ rješava jednadžbu provođenja topline.

   (a) Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija klase C^∞. Dokažite da za funkciju $v := \varphi \circ u$ vrijedi
   $$v_t - \Delta v \leq 0, \qquad \text{na } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+.$$

   (b) Dokažite da funkcija $w := u_t^2 + |\nabla u|^2$ zadovoljava
   $$w_t - \Delta w \leq 0, \qquad \text{na } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+.$$

Rješenje. (a) Imamo

$$v_t = \varphi' \cdot u_t, \quad v_{x_i} = \varphi' \cdot u_{x_i}, \quad v_{x_i x_i} = \varphi'' \cdot u_{x_i}^2 + \varphi' u_{x_i x_i},$$

pa je

$$v_t - \Delta v = \varphi' \cdot u_t - \sum_{i=1}^d \varphi'' u_{x_i}^2 - \varphi' \Delta u = \varphi'(u_t - \Delta u) - \varphi'' \sum_{i=1}^d u_{x_i}^2 \leq 0,$$

gdje smo koristili činjenicu da je u rješenje jednadžbe provođenja i konveksnost funkcije φ (odnosno $\varphi'' \geq 0$).

(b) Kako je funkcija u klase C^∞, ona zadovoljava uvjete Schwarzovog teorema, te su tada i njene parcijalne derivacije također rješenja jednadžbe provođenja. Funkcija $\varphi(x) = x^2$ je konveksna funkcija, pa iz (a) dijela slijedi da je

$$(u_t^2)_t - \Delta(u_t^2) \leq 0, \quad (u_{x_i}^2)_t - \Delta(u_{x_i}^2) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, d,$$

odakle sumiranjem slijedi tvrdnja.

■

5. (6) Izvedite formulu za rješenje početno-rubne zadaće

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ u(0, \cdot) = 1, & \text{na } \{x = 0\} \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = \cos(\pi x), & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u_t(\cdot, 0) = 1, & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Je li dobiveno rješenje klase C^2 na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$?

Rješenje. Prvo prilagodimo uvjet na t-osi, a zatim proširimo funkciju po neparnosti na cijeli $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Stavimo

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t) - 1, & x > 0 \\ -u(-x,t) + 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

Funkciju w tada tražimo kao rješenje zadaće

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(\cdot, 0) = \begin{cases} \cos(\pi x) - 1, & x > 0 \\ 1 - \cos(\pi x), & x \leq 0 \end{cases} \\ w_t(\cdot, 0) = 1 \end{cases}$$

Rješenje je dano D'Alembertovom formulom, pa očitavamo onaj slučaj koji nas zanima, za $x, t > 0$:

$$w(x,t) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi(x-t)) - 1 + \cos(\pi(x+t)) + 1}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} dy, & x > t > 0 \\ \frac{1 - \cos(\pi(x-t)) + \cos(\pi(x+t)) - 1}{2} + \frac{1}{2} \int_{t-1x}^{t+x} dy, & 0 < x \leq t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cos \pi x \cos \pi t + t - 1, & x > t > 0 \\ -\sin \pi x \sin \pi t + x, & 0 < x < t \end{cases}$$

Vraćanjem $u(x,t) = w(x,t) + 1$ za $x > 0$ dobivamo formulu za rješenje. Dobiveno rješenje nije klase C^2 zbog ponašanja na pravcu $x = t$; primjerice, $u_{tt} = -\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi t)$ za $x > t$, dok je $u_{tt} = \pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi t)$ za $x < t$. ∎