Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1

Prvi ispitni rok 6.2.2024.

1. (8 bodova) Riješite zadaću
$$\begin{cases} u_x + 2u_y = 2xu, \\ u|_S = u_0, \end{cases}$$
ako je
   (a) $S = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ i $u_0(x,0) = x^2$,
   (b) $S = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ i $u_0(0,y) = y^2$.

2. (a) (3 boda) Pretpostavimo da je $u \in C^2(\mathbb{R})$ harmonička funkcija takva da je i u^2 harmonička te neka je $u(0) = 0$. Dokažite da je $u \equiv 0$.
   (b) (3 boda) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren, ograničen i povezan skup. Neka su $u, v \in C^2(\Omega)$ harmoničke funkcije takve da je $\partial^\alpha u(x_0) = \partial^\alpha v(x_0)$ za neki $x_0 \in \Omega$ i sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Dokažite da je $u \equiv v$.

   Uputa: Promotrite skup
$$F = \{x \in \Omega : \partial^\alpha u(x) = \partial^\alpha v(x) \text{ za sve } \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}$$
   i pokažite da je $F = \Omega$.

3. (a) (5 bodova) Riješite početnu zadaću
$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \mathbf{c} \cdot \nabla u = 0 & \text{na } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = g & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t=0\}, \end{cases}$$
   gdje je $\mathbf{c} = (-1,1)$ i $g(x_1,x_2) = e^{-x_1 + \frac{1}{2}x_2}$.
   (b) (3 boda) Neka je $\Omega = K(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ te $T > 1$. Odredite sve $u \in C^2(\overline{\Omega_T})$ koje zadovoljavaju
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{na } \Omega_T, \\ u \leq 2024 & \text{na } \Gamma_T, \\ u(0,0,1) = 2024, \end{cases}$$
   pri čemu je $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$ i $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$.

4. (a) (5 bodova) Riješite početnu zadaću
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = te^x & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 1 & \text{na } \mathbb{R} \times \{t=0\}, \\ u_t(x,0) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{na } \mathbb{R} \times \{t=0\}. \end{cases}$$
   (b) (3 boda) Dana je zadaća
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & \text{na } \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = g & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t=0\}, \\ u_t(\cdot,0) = h & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t=0\}, \end{cases}$$
   gdje su $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ zadane. Definiramo energiju
$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dx.$$
   Pretpostavimo da je $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$ rješenje dane zadaće te da za svaki $t > 0$ funkcija $x \mapsto u(x,t)$ ima kompaktan nosač. Pokažite da je $E(t)$ nerastuća funkcija.

Rješenja

1. Kako je $a(x,y,z) = (1,2)$, a normale na S su dane s $n(s) = (0,1)$ u (a) dijelu, odnosno $n(s) = (1,0)$ u (b) dijelu, vidimo da karakterističnih točaka nema u oba slučaja. Karakteristični sustav je u oba slučaja dan s
$$\begin{cases} x'(t) = 1, \\ y'(t) = 2, \\ z'(t) = 2xz, \end{cases}$$
uz početne uvjete
$$\begin{cases} x(0;s) = s, \\ y(0;s) = 0, \\ z(0;s) = s^2 \end{cases}$$
u (a) dijelu, odnosno
$$\begin{cases} x(0;s) = 0, \\ y(0;s) = s, \\ z(0;s) = s^2 \end{cases}$$
u (b) dijelu. Rješenje sustava ODJ je dano s
$$x(t,s) = t+s, \quad y(t,s) = 2t, \quad z(t,s) = s^2 e^{(t+s)^2 - s^2},$$
odnosno
$$x(t,s) = t, \quad y(t,s) = 2t+s, \quad z(t,s) = s^2 e^{t^2}.$$
Vidimo da se $(t,s) \mapsto (x,y)$ može invertirati za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pa je rješenje na cijelom $\mathbb{R}^2$ dano s
$$u(x,y) = (x - \frac{1}{2}y)^2 e^{y(x - \frac{1}{4}y)},$$
odnosno
$$u(x,y) = (y-2x)^2 e^{x^2}.$$

2. (a) Iz uvjeta $\Delta u = 0$ imamo
$$0 = \Delta u = 2(u \underbrace{\Delta u}_{=0} + |\nabla u|^2) \implies \nabla u = 0 \implies u \equiv \text{const},$$
pa kako je $u(0) = 0$ slijedi $u \equiv 0$.

(b) Pokažimo da je F i relativno otvoren i zatvoren u Ω. Za početak, F možemo zapisati kao
$$F = \cap_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} (\partial^\alpha (u - v))^{-1}(0),$$
pa je zbog neprekidnosti derivacija od u i v F presjek zatvorenih skupova, pa je i sam zatvoren. S druge strane, ako je $x \in F$, tada zbog analitičnosti harmoničkih funkcija slijedi da postoji kugla $K(x,r)$ takva da se u i v mogu razviti u Taylorov red oko x na toj kugli. No tada je $K(x,r) \cap \Omega \subseteq F$, pa zaključujemo da je F i relativno otvoren u Ω. Kako je F neprazan zbog $x_0 \in F$, a Ω povezan, slijedi da mora biti $F = \Omega$, pa je posebno i $u \equiv v$.

3. (a) (a) Uvodimo pomoćnu funkciju oblika $v(x,t) = e^{\alpha\cdot x+\beta t}u(x,t)$, gdje ćemo $\alpha \in \mathbb{R}^2$ i $\beta \in \mathbb{R}$ odrediti tako da vrijedi

$$0 = v_t - \Delta v = e^{\alpha\cdot x+\beta t}(u_t - \Delta u - 2\alpha\cdot\nabla u - (|\alpha^2| - \beta)u).$$

Odavde vidimo da možemo staviti $\alpha = \frac{1}{2}(1,-1)$, $\beta = \frac{1}{2}$, pa je v rješenje

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, \\ v(x_1,x_2,0) = e^{\alpha\cdot x}g(x) = e^{-\frac{1}{2}x_1}. \end{cases}$$

Ostatak ide standardnim uvrštavanjem u formulu i konačno vraćanjem

$$u(x,t) = e^{-\alpha\cdot x-\beta t}v(x,t).$$

(b) Iz uvjeta na u slijedi da je u rješenje jednadžbe provođenja koje svoj maksimum postiže u interioru Ω_T. Prema jakom principu maksimuma je tada $u \equiv 2024$ jedino rješenje.

4.

(b) Deriviranjem energije $E(t)$ (smijemo derivirati pod znakom integrala zbog uvjeta zadatka) slijedi

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} u_t u_{tt} + \underbrace{\nabla u \cdot \nabla u_t}_{\text{Schwartzov tm.+ P.I.}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u_t u_{tt} - u_t \Delta u \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u_t \underbrace{(u_{tt} - \Delta u)}_{\text{jednadžba}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} -u_t^2 \leq 0. \end{aligned}$$