Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1
Kolokvij 11.2.2022.

1. (6 bodova) Metodom karakteristika riješite zadaću

$$\begin{cases} uu_x + yu_y = x, \\ u(x,1) = 2x. \end{cases}$$

Za koje je sve točke to rješenje dobro definirano?

Rješenje. Očitavamo

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}, \qquad b(x,y,z) = x, \qquad S = \{(s,1) : s \in \mathbb{R}\}, \qquad u_0(s) = 2s.$$

Kako je

$$a(s,1,2s) \cdot n(s) = 1 \neq 0,$$

zaključujemo da karakterističnih točaka nema. Karakteristični sustav je dan s

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z, \\ \frac{dy}{dt} = y, \\ \frac{dz}{dt} = x, \end{cases}$$

uz početne uvjete

$$\begin{cases} x(0) = s, \\ y(0) = 1, \\ z(0) = 2s. \end{cases}$$

Rješenje sustava dano je s

$$x(t;s) = \frac{1}{2}(3se^t - se^{-t}), \qquad y(t;s) = e^t, \qquad z(t;s) = \frac{1}{2}(3se^t + se^{-t}).$$

Tražimo za koje $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ postoje projicirane karakteristike koje ih sadrže. Iz $y(t,s) = e^t$ vidimo da mora biti $y > 0$. Uvrštavanjem u izraz za x slijedi za $y \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$s = \frac{2x}{3y - \frac{1}{y}}.$$

Konačno, vraćanjem u izraz za z i sređivanjem dobivamo

$$u(x,y) = z(t,s) = \frac{1}{2}(3se^t + se^{-t}) = \frac{3xy^2 + x}{3y^2 - 1}.$$

Ovo rješenje nije dobro definirano za $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. ∎

2. (4+4=8 bodova)

a) Odredite rješenje zadaće

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{na } K(0,1), \\ u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, & \text{na } S(0,1). \end{cases}$$

b) Neka je $(u_n)_n$ niz harmoničkih funkcija na omeđenom otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, te neka je u takva da niz u_n konvergira k u uniformno na Ω. Dokažite ili opovrgnite: tada je i u harmonička funkcija na Ω.

Rješenje. a) Primijetimo kako je rubni uvjet zapravo $u|_{S(0,1)} = 1$. Kako je $u \equiv 1$ također i harmonička funkcija, to je ujedno i rješenje ove zadaće.

b) Pokazat ćemo da u zadovoljava svojstvo srednje vrijednosti. Neka je $x \in \Omega$ te $r > 0$ takav da je $K(x,r) \subseteq \Omega$. Tada je

$$u(x) = \lim_n u_n(x) = \lim_n \fint_{K(x,r)} u_n(y)dy = \fint_{K(x,r)} u(y)dy,$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti koristili uniformnu konvergenciju u_n prema u, odnosno

$$\int_{K(x,r)} |u_n(y) - u(y)|dy \leq \varepsilon |K(x,r)|, \qquad \text{za dovoljno veliki } n.$$

■

3. (4+4=8 bodova)

a) Odredite rješenje zadaće

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = te^t, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x_1, x_2, 0) = \sin(x_1 + x_2), & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

b) Izvedite formulu za rješenje zadaće

$$\begin{cases} u_t + u_{x_1} - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = g, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

gdje je $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ zadana.

Rješenje. a) Računamo prvo

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y, t-s) se^s dyds = \int_0^t se^s ds \overset{\text{P.I.}}{=} se^s\Big|_0^t - \int_0^t e^s ds = (t-1)e^t + 1.$$

Za drugi integral prvo zapišemo funkciju $g(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2)$ kao $g(x_1, x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$. Oba pribrojnika su sada ista kao u primjeru s vježbi (do na zamjenu uloge x_1 i x_2), te je pripadni integral jednak

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y, t) g(y) dy = e^{-2t}(\cos x_1 \sin x_2 + \sin x_1 \cos x_2) = e^{-2t} \sin(x_1 + x_2).$$

Konačno rješenje je dano s

$$u(x_1, x_2, t) = e^{-2t} \sin(x_1 + x_2) + (t-1)e^t + 1.$$

b) Neka je u rješenje zadaće. Uvodimo pomoćnu funkciju (do koeficijenata uz t i x_1 dolazimo postavljajući prvo $v(x,t) = e^{at+bx_1}$ te određivanjem koeficijenata a i b tako da namjestimo izraz kao u jednadžbi)

$$v(x_1,x_2,t) = e^{\frac{1}{4}(t-2x_1)}u(x_1,x_2,t),$$

koja sada rješava zadaću

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = e^{\frac{1}{4}(t-2x_1)}(u_t + u_{x_1} - \Delta u) = 0, \\ v(x_1,x_2,0) = e^{-\frac{1}{2}x_1}g(x_1,x_2). \end{cases}$$

Formula za rješenje je tada dana s

$$u(x_1,x_2,t) = e^{-\frac{1}{4}(t-2x_1)}v(x_1,x_2,t) = e^{-\frac{1}{4}(t-2x_1)}\int_{\mathbb{R}^2}\Phi(x-y,t)e^{-\frac{1}{2}y_1}g(y)dy.$$

$\blacksquare$

4. (4+4=8 bodova)

a) Odredite rješenje zadaće

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x_1,x_2,0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t=0\}, \\ u_t(x_1,x_2,0) = x_1^2, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t=0\}. \end{cases}$$

b) Pretpostavimo da je u rješenje zadaće

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot,0) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\} \\ u_t(\cdot,0) = h, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\}, \end{cases}$$

gdje je $h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ zadana funkcija. Dokažite da u zadovoljava ocjenu

$$||u(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{t}||\nabla h||_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{t^2}||h||_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Rješenje. a) Koristimo formulu za rješenje:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi t^2}\int_{K(x,t)} \frac{t^2 y_1^2}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi} \frac{(x_1 + r\cos\vartheta)^2}{\sqrt{t^2-r^2}} r\, d\vartheta dr \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(2\pi x_1^2 \int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}dr \\ &\quad + \int_0^t \frac{2r^2}{\sqrt{t^2-r^2}}\int_0^{2\pi}\cos\vartheta d\vartheta \\ &\quad + \int_0^t \frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta d\vartheta\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(2\pi x_1^2 t + 0 + \pi\int_0^t \frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}dr\Big) \\ &= x_1^2 t + \frac{1}{3}t^3, \end{aligned}$$

gdje posljednji integral možemo izračunati npr. na sljedeći način

$$\int_0^t r^2 \cdot \frac{d}{dr}(-\sqrt{t^2-r^2})dr \overset{\text{P.I.}}{=} r^2\sqrt{t^2-r^2}\Big|_t^0 + \int_0^t 2r\sqrt{t^2-r^2}dr$$
$$= \int_0^t \frac{d}{dr}(-\frac{2}{3}\sqrt{t^2-r^2}^3)dr = \frac{2}{3}t^3.$$

b) Rješenje u je dano Kirchhoffovom formulom,

$$u(x,t) = \frac{1}{t^2}\int_{S(x,t)} th(y)d\sigma(y).$$

Imamo

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S(x,t)} th(y)d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{4\pi t}\int_{S(x,t)} h(y)d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{4\pi t}\int_{S(x,t)} \Big[h(y)\frac{y-x}{t}\Big]\cdot\frac{y-x}{t}d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{4\pi t}\int_{K(x,t)} \operatorname{div}\Big(h(y)\frac{y-x}{t}\Big)dy \\
&= \frac{1}{4\pi t}\int_{K(x,t)} \nabla h(y)\cdot\frac{y-x}{t} + h(y)\operatorname{div}\frac{y-x}{t}dy \\
&= \frac{1}{4\pi t}\int_{K(x,t)} \nabla h(y)\cdot\frac{y-x}{t} + \frac{3}{t}h(y)dy,
\end{aligned}$$

Slijedi

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{4\pi t}\int_{K(x,t)} |\nabla h(y)| + \frac{3}{t}|h(y)|dy \leq \frac{1}{t}||\nabla h||_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{t^2}||h||_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

$\blacksquare$