Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2

Pismeni ispit 26.8.2024.

1. (8 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ \frac{x \ln x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, & x > 0. \end{cases}$$

   Je li linearni funkcional T_f dan s $\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ distribucija na $\mathbb{R}$, odnosno je li T_f temperirana distribucija? Sve svoje odgovore detaljno obrazložite.

2. (6 bodova) Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom iduće tvrdnje:

   (a) $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \implies f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

   (b) $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f, g_n \xrightarrow{\mathcal{S}} g \implies f_n * g_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f * g,$

3. (7 bodova) Zadana je funkcija $f(x) = \frac{1}{x^4+3x^2+2}$. Ispitajte pripada li f prostorima $\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Ukoliko je odgovor na barem jedno od pitanja potvrdan, odredite i njenu Fourierovu transformaciju.

4. (5 bodova) Neka je $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) : f' \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})\}$.

   (a) Pokažite da je $\xi \mapsto (1 + |\xi|)\hat{u}(\xi) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

   (b) Pokažite da je $\hat{u} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Skice rješenja

1. Kako je $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}} = 0$, slijedi da je f neprekidna i ograničena na svakom od intervala $(-\infty, 0)$ i $(0,\infty)$, pa je u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Stoga je $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. S druge strane, kako je $\ln x \le x$ za $x \ge 1$, te kako je f konstanta na negativnom dijelu, slijedi

$$|f(x)| \le x^2, \quad |x| \ge 1.$$

   Stoga možemo zaključiti da je $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ kao u 2. zadatku iz 2. zadaće.

2. (a) Tvrdnja ne vrijedi: kontraprimjer $f = \mathbb{1}_{[0,1]} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$.

   (b) Tvrdnja vrijedi: pogledati kolokvij 2021., zadatak 4(a).

3. Kako je $x^4+3x^2+2 \ge 2$, slijedi da je $0 \ge f \ge \frac{1}{2}$, odnosno, f je ograničena funkcija. Stoga imamo $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Nadalje, kako je

$$\left|\frac{1}{x^4+3x^2+4}\right| \le \frac{1}{x^4} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R} \setminus (-1,1)),$$

   te f ograničena na $(-1,1)$, slijedi da je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Analogno vidimo da je i $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Konačno, $f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ jer imamo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^5 f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x^5}{x^4+3x^2+4}\right| = +\infty.$$

4. Kako je Fourierova transformacija izomorfizam na L^2, posebno imamo i $\hat{u}, \xi\hat{u} \in \mathrm{L}^2$, pri čemu smo koristili svojstvo djelovanja Fourierove transformacije na derivaciju funkcije. Iz ovoga odmah slijedi (a) dio kao zbroj dvije L^2 funkcije. Za (b) dio imamo

$$\hat{u}(\xi) = \underbrace{\frac{1}{1+|\xi|}}_{\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{(1+|\xi|)\hat{u}(\xi)}_{\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})},$$

   pa slijedi $\hat{u} \in \mathrm{L}^1$ primjenom Hölderove nejednakosti.