Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2

Pismeni ispit 16.6.2025.

1. (8 bodova)

   (a) Pokažite da je $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, gdje je $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}H(x)$.

   (b) Pokažite da $g \notin \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, gdje je $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}H(x)$.

   (c) Pokažite da je s

   $$\langle T, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}} dx - \frac{2\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} \right)$$

   dana distribucija na $\mathbb{R}$ te da je $f' = -\frac{1}{2}T$.

2. (7 bodova) Neka je $f(x) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(x)$.

   (a) Odredite $f * f$.

   (b) Izračunajte

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 dx.$$

3. (8 bodova) Neka je $(u_n) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom:

   (a) $u_n \xrightarrow{\mathscr{S}'} 0 \implies u_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} 0$,

   (b) $u_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 \implies \widehat{u_n} \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$,

   (c) $u_n \xrightarrow{\mathrm{H}^1} 0 \implies u_n \xrightarrow{\mathscr{S}'} 0$.

4. (7 bodova) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i ograničen te $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Na $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dana je bilinearna forma

   $$b(u,v) = \int_\Omega \langle A\nabla u(x), \nabla u(x) \rangle dx,$$

   gdje je s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označen standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$.

   (a) Pokažite da je b neprekidna i koercitivna.

   (b) Navedite kako bi glasila slaba formulacija zadaće na Ω

   $$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

   gdje je $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, te pokažite da postoji jedinstveno slabo rješenje.

1. (a) Kako su funkcije oblika $x \mapsto x^{\alpha}$ integrabilne na $(0,1)$ ako i samo ako je $\alpha > -1$, vidimo da je $f \in \mathrm{L}^1(0,1)$, pa je za $\varphi \in \mathscr{S}$

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq \int_0^1 f(x)|\varphi(x)|dx + \int_1^{\infty} \underbrace{f(x)}_{\leq 1}|\varphi(x)|dx \leq (\|f\|_{\mathrm{L}^1(0,1)} + 1)(\|\varphi\|_{0,0} + \|\varphi\|_{2,0}).$$

(b) Kako $g \notin \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, možemo vidjeti testiranjem na funkciji $0 \leq \psi \leq 1$ takvoj da je $\psi \equiv 1$ na $[0,1]$ da ovo nije distribucija.

(c) Dovoljno je pokazati da vrijedi $f' = -\frac{1}{2}T$; tada posebno slijedi i da je $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Neka je $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Tada je

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int_0^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x^{1/2}}dx &= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x^{1/2}}dx \\ &\overset{P.I.}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}}dx + \frac{\varphi(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\right).\end{aligned}$$

Preostaje zapisati

$$\frac{\varphi(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}},$$

te primijetiti da drugi član ide u 0 zbog $|\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)| \leq \varepsilon \|\varphi'\|_{\mathrm{L}^{\infty}(0,\infty)}$

2. (a) Dobije se

$$(f * f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} - |x|, & |x| \leq \frac{1}{\pi} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

(b) Označimo s $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. Tada je $g = \pi \hat{f}$, pa je traženi integral jednak

$$\|g^2\|_{L^2}^2 = \pi^4 \|\hat{f}^2\|_{L^2}^2 = \pi^4 \|\widehat{f * f}\|_{L^2}^2 = \pi^4 \|f * f\|_{L^2}^2 = \frac{2}{3}\pi.$$

3. (a) Tvrdnja ne vrijedi: ako uzmemo $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ i definiramo $u_n(x) = \rho(x - ne_1)$, tada imamo da $u_n \xrightarrow{\mathscr{S}'} 0$, ali je $\|u_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = 1$ za sve n.

(b) Konvergencija u $\mathscr{D}$ povlači konvergenciju u $\mathscr{S}$, pa kako je Fourierova transformacija izomorfizam na $\mathscr{S}$ slijedi tvrdnja.

(c) Kako $u_n \xrightarrow{\mathrm{H}^1} 0$ posebno povlači $u_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} 0$, iz ovoga slijedi $u_n \xrightarrow{\mathscr{S}'} 0$.

4. (a) Kako je A pozitivno definitna, to je $\sigma(A) = \{\lambda_{min}, \lambda_{max}\} \subseteq (0,\infty)$, te je $|A\xi| \leq \lambda_{max}|\xi|$ i $\langle A\xi, \xi\rangle \geq \lambda_{min}|\xi|^2$ za svaki $\xi \in \mathbb{R}^2$. Sada je

$$\begin{aligned}|b(u,v)| &\leq \int_{\Omega} |\langle A\nabla u, \nabla v\rangle| \overset{C-S \text{ na } \mathbb{R}^2}{\leq} \int_{\Omega} |A\nabla u||\nabla v| \\ &\leq \lambda_{max} \int_{\Omega} |\nabla u||\nabla v| \overset{C-S \text{ na } \mathrm{L}^2}{\leq} \lambda_{max}\|u\|_{\mathrm{H}^1}\|v\|_{\mathrm{H}^1}.\end{aligned}$$

$$b(u,u) = \int_{\Omega} \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \geq \underbrace{\lambda_{min}}_{>0} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \overset{\text{Poincare}}{\geq} C\lambda_{min}\|u\|_{\mathrm{H}^1}^2.$$

(a) Množenjem jednadžbe s $v \in C_c^\infty(\Omega)$ te parcijalnom integracijom dolazimo do integralne jednadžbe

$$\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla v\rangle = \int_\Omega fv, \tag{1}$$

pa je slaba formulacija: "pronaći $u \in \mathrm{H}_0^1$ takav da vrijedi (1) za sve $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$". Kako je $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, desna strana je neprekidan funkcional na $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, pa iz (a) dijela primjenom Lax-Milgramove leme slijedi tvrdnja.