Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2

Pismeni ispit 30. lipnja 2025.

1. (8 bodova) Za $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ definiramo

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x} \varphi'(x) dx.$$

   (a) Pokažite da je T dobro definirano preslikavanje, odnosno da gornji integral zaista konvergira za svaki $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ te da je $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

   (b) Je li preslikavanje T definirano istim izrazom na $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ujedno i temperirana distribucija?

   (c) Odredite red od T.

2. (6 bodova) Dan je niz funkcija $f_n(x) = \frac{x}{x^2+\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Pokažite da je $f_n \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Odredite limes u $\mathscr{S}'$ niza f_n.

3. (6 bodova) Pokažite da je s

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y(1+(x-y)^2)} dy$$

   dobro definirana jedna funkcija iz $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ te odredite $\|f\|_{\mathrm{L}^2}$

4. (6 bodova) Neka je $\Omega = K(0,1) \subseteq \mathbb{R}^3$. Dane su matrica A i funkcija b na Ω s

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad b(x) = |x|^2 - \frac{1}{4}.$$

   Pokažite da je bilinearna forma na $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dana s

$$b(u,v) = \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla v \rangle + buv$$

   neprekidna i koercitivna.

Rješenja

1. Označimo s $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}H(x)$. Kako je $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, imamo da je dana funkcija $C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, te u 0 ima prekid prve vrste i skok $+1$. Nadalje, kako je $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ (npr. L'Hopital), slijedi da je $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, pa je posebno i $T = T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Nadalje, vidimo da je $\langle T, \varphi\rangle = -\langle f', \varphi\rangle = -\langle g, \varphi\rangle + \langle \delta_0, \varphi\rangle$, gdje je $g(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}H(x)$, za što se opet jednostavno provjeri (L'Hopital ili Taylorov razvoj) da je $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\frac{1}{2}$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, pa je T reda 0 kao zbroj δ_0 i regularne distribucije.

2. S obzirom da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija f_n ograničena (neprekidna na $\mathbb{R}$ i teži ka 0 za $|x| \to \infty$), slijedi da je $f_n \in \mathscr{S}'$. Ostatak zadatka je isti kao u Zadatku 2. iz ovog kolokvija.

3. Funkciju f možemo zapisati kao $f = g * h$, gdje su
$$g(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
Kako je $g \in L^2$ (pokazano na vježbama) te $h \in L^1$ (predavanja ili se trivijalno vidi da je $\|h\|_{L^1} = \pi$), prema Youngovoj nejednakosti slijedi da je $f = g * h \in L^2$. Sada korištenjem Plancherelovog teorema te rezultata o Fourierovoj transformaciji konvolucije slijedi
$$\|f\|_{L^2} = \|g * h\|_{L^2} = \|\widehat{g * h}\|_{L^2} = \|\widehat{g}\widehat{h}\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi)^2 \widehat{h}(\xi)^2 d\xi\right)^{1/2},$$
te preostaje očitati
$$\widehat{g}(\xi) = \pi\chi_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}, \qquad \widehat{h}(\xi) = \pi e^{-2\pi i|\xi|}$$
te izračunati dobiveni integral.

4. Kako je A simetrična matrica, te se lako izračuna $\sigma(A) = \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$, imamo da je za sve $\xi \in \mathbb{R}^3$
$$\frac{1}{2}|\xi| \le |A\xi| \le 2|\xi|,$$
dok je očito $-\frac{1}{4} \le b(x) \le \frac{3}{4}$ za sve $x \in K(0,1)$. Sada je za sve $u, v \in H_0^1(\Omega)$
$$\begin{aligned}
|b(u,v)| &\le \int_\Omega |\langle A\nabla u, \nabla v\rangle| + |buv| \\
&\le \int_\Omega |A\nabla u||\nabla v| + |b||u||v| \\
&\le 2\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \frac{3}{4}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\le 2\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}.
\end{aligned}$$

S druge strane je za svaki $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} b(u,u) &= \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle + bu^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\|u\|_{L^2}^2 \\ &\left| \text{Poincare} \implies -\frac{1}{4}\|u\|_{L^2}^2 \geq -\frac{C_p^2}{4}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \right| \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{C_p^2}{4}\right)\|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\geq (C_p^2+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{C_p^2}{4}\right)\|u\|_{H_0^1}^2. \end{aligned}$$

S obzirom da bi u ovom trenutku trebalo znati da je $C_p < \sqrt{2}$ da bi posljednja konstanta bila pozitivna (to zapravo i vrijedi za jediničnu kuglu), to bi ujedno i dovršilo i dokazivanje koercitivnosti; međutim, kako to nije bilo predviđeno, rješenja koja su došla do ovog koraka sam bodovao s maksimalnim brojem bodova za taj dio.