Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2

Pismeni ispit 1.7.2024.

1. (6 bodova) Dan je linearni funkcional $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ s
$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty e^{x^2} \varphi'(x) dx.$$
Odredite je li $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, odnosno $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ te u slučaju potvrdnog odgovora na prvo pitanje odredite njen red.

2. (8 bodova) Dokažite sljedeće tvrdnje ili ih opovrgnite kontraprimjerom (podrazumijeva se da su f, g funkcije):
   (a) $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies fg \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$
   (b) $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} f,\ g_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} g \implies f_n g_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} fg$
   (c) $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} f \implies f_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} f$

3. (4 boda) Izračunajte integral
$$\int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx.$$

4. (6 bodova)
   (a) Pokažite da je $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, gdje je
$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2 x^2 + 6\pi i x - 2}$$
   te odredite njenu Fourierovu transformaciju.
   (b) Odredite jedno rješenje
$$u'' - 3u' + 2u = \delta_0.$$

5. (4 boda) Neka je $f \in H^{-1}(\Omega)$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ograničen otvoren skup. Dokažite da postoje $f_0, f_1, \ldots, f_d \in L^2(\Omega)$ takve da je
$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega f_0 v + \sum_{j=1}^d f_j \partial_j v, \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$

Skice rješenja

1. Nakon parcijalne integracije vidimo da T možemo zapisati kao
$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0) - \int_0^\infty 2xe^{x^2}\varphi(x)dx,$$
odnosno imamo
$$T = \delta_0 - 2xe^{x^2}H(x).$$
Kako je $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ te funkcija $x \mapsto 2xe^{x^2}H(x)$ neprekidna, to je $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. S druge strane, kao u primjeru s vježbi vidimo da $T \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ testiranjem na $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Konačno, T je reda nula kao zbroj δ_0 (koja je reda 0) te regularne distribucije.

2. (a) Tvrdnja ne vrijedi. Kontraprimjer $f(x) = e^{x^2}, g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
   (b) Tvrdnja vrijedi: zbog toga što je $\operatorname{supp} g_n$ sadržano u fiksnom kompaktu K će i $\operatorname{supp} f_n g_n$ biti sadržano u istom tom K. Uniformna konvergencija derivacija se lako raspiše koristeći rastav $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f)$, Newton-Leibnizovo pravilo i uniformnu konvergenciju svih derivacija iz pretpostavki.
   (c) Tvrdnja ne vrijedi. Kontraprimjer $f_n(x) = \sin nx, f(x) = 0$.

3. Integral možemo zapisati prvo u obliku
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}H(x) \cdot \frac{\sin x}{x} dx,$$
odakle primjenom Plancherelovog teorema na funkcije $x \mapsto e^{-x}H(x), \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$ slijedi
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + 2\pi i\xi)^2} \cdot \chi_{[-1/2\pi, 1/2\pi]}(\xi)d\xi = \frac{1}{2}.$$

4. (a) Nazivnik možemo faktorizirati kao $(2\pi x + i)(2\pi x + 2i)$, odakle slijedi da je f ograničena funkcija, pa samim time u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
   FT se tada može izračunati rastavom na parcijalne razlomke i korištenjem tablične transformacije oblika $\frac{1}{a+2\pi i\xi}$.
   (b) Primjenom FT na jednadžbu dobijemo upravo izraz iz (a) dijela.

5. Na Hilbertovom prostoru $H_0^1(\Omega)$ zajedno sa (standardnim) skalarnim produktom $\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v$, Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala nam daje da postoji $w \in H_0^1(\Omega)$ takav da je
$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega wv + \nabla w \cdot \nabla v, \quad \text{za sve } v \in H_0^1(\Omega).$$
Stavljanjem $f_0 = w$ i $f_j = \partial_j w$ slijedi tvrdnja.