

Parcijalne diferencijalne jednačbe 2

Prvi ispitni rok - 15.6.2026.

1. (8 bodova) Provjerite jesu li sljedeći linearni funkcionali distribucije, odnosno temperirane distribucije na \mathbb{R} :

(a) $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n}$

(b) $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x^2)}{x} \varphi(x) dx$

2. (6 bodova) Odredite Fourierovu transformaciju funkcije $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$.

3. (10 bodova) Dan je niz funkcija $f_n(x) = ne^{-n^2 x^2}$.

(a) Odredite kojem od sljedećih prostora niz (f_n) pripada: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(b) Konvergira li niz u nekom od tih prostora? Ako je odgovor da, odredite limes.

4. (6 bodova)

(a) Neka je $x_0 \in (-1, 1)$ proizvoljan. Pokažite da je $\delta_{x_0} \in H^{-1}(-1, 1)$.

(b) Neka je $\Omega = K(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$ te

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pokažite da je bilinearna forma na $H_0^1(\Omega)$ dana s

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla v \rangle$$

neprekidna i koercitivna.

Rješenja

1. (a) Za proizvoljnu $\varphi \in \mathcal{S}$ je

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\varphi(n)|}{n^2} \leq \|\varphi\|_{1,0} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{:=C < \infty},$$

pa vidimo da je $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Posebno je onda i $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

- (a) Kako je funkcija $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, te je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot x = 0$, slijedi $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, pa je $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dodatno je $|f(x)| \leq 1$ za $|x| \geq 1$, pa je prema zadatku s vježbi i $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2. Funkciju f možemo zapisati kao $f = g^2$, gdje je $g(x) = \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$. Prema zadatku 3.19. s vježbi je tada $\hat{f} = \widehat{g^2} = \hat{g} * \hat{g}$. Iz tabličnih transformacija i svojstava Fourierove transformacije očitavamo da je $\hat{g}(\xi) = \pi \chi_{[-1/2\pi, 1/2\pi]}$, pa je

$$\hat{f}(\xi) = \pi^2 (\chi_{[-1/2\pi, 1/2\pi]} * \chi_{[-1/2\pi, 1/2\pi]})(\xi) = \begin{cases} \pi - \pi^2 |\xi|, & |\xi| \leq \frac{1}{\pi}, \\ 0, & |\xi| > \frac{1}{\pi}. \end{cases}$$

3. (a) S obzirom da je za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ funkcija $x^\alpha f^{(\beta)}$ oblika $p_{n,\alpha,\beta}(x)e^{-n^2x^2}$, dobivamo da su sve polunorme konačne, pa je $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Kako je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}', \mathcal{S}'$, posebno je onda i $f_n \in \mathcal{S}', \mathcal{D}'$.

- (a) Primijetimo prvo da vrijedi $f_n(0) = n$, pa niz f_n ne može konvergirati uniformno, odnosno u polunormi $\|\cdot\|_{0,0}$. Stoga niz ne konvergira u \mathcal{S} . S druge strane, za svaku $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} n e^{-n^2 x^2} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \varphi(y/n) dy,$$

pa kako je niz $y \mapsto e^{-y^2} \varphi(y/n)$ dominiran s $e^{-y^2} \|\varphi\|_{\infty} \in L^1(\mathbb{R})$ te konvergira po točkama u $\varphi(0)e^{-y^2}$, primjenom LTDK-a slijedi

$$\langle f_n, \varphi \rangle \longrightarrow \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} \varphi(0) = \langle \sqrt{\pi} \delta_0, \varphi \rangle.$$

Samim time je limes i u \mathcal{S}' i u \mathcal{D}' jednak $\sqrt{\pi} \delta_0$.

4. (a) Primijetimo prvo kako je zbog $H_0^1(-1, 1) \subseteq C([-1, 1])$ linearan funkcional δ_{x_0} dobro definiran. Nadalje, iz zadatka 4.8. s vježbi slijedi da je

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x_0)| \leq \|\varphi\|_{C([-1, 1])} \leq C \|\varphi\|_{H_0^1(-1, 1)},$$

pa je $\delta_{x_0} \in H^{-1}(-1, 1)$.

(b) Kako su minore matrice A redom 4, 19 i 70, prema Sylvesterovom kriteriju slijedi da je A pozitivno definitna. Posebno za sve $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ vrijedi $|\langle A\xi, \eta \rangle| \leq \lambda_{max} \|\xi\| \|\eta\|$ i $\langle A\xi, \xi \rangle \geq \lambda_{min} \|\xi\|^2$, gdje su $\lambda_{min}, \lambda_{max} > 0$ najmanja i najveća svojstvena vrijednost od A . Tada je

$$|b(u, v)| \leq \int_{\Omega} |\langle A\nabla u, \nabla v \rangle| \leq \lambda_{max} \int_{\Omega} \|\nabla u\| \|\nabla v\| \leq \lambda_{max} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1},$$

te

$$b(u, u) = \int_{\Omega} \langle A\nabla u, \nabla u \rangle \geq \lambda_{min} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\lambda_{min}}{1 + C_p^2} \|u\|_{H^1}^2,$$

pa je b neprekidna i koercitivna.