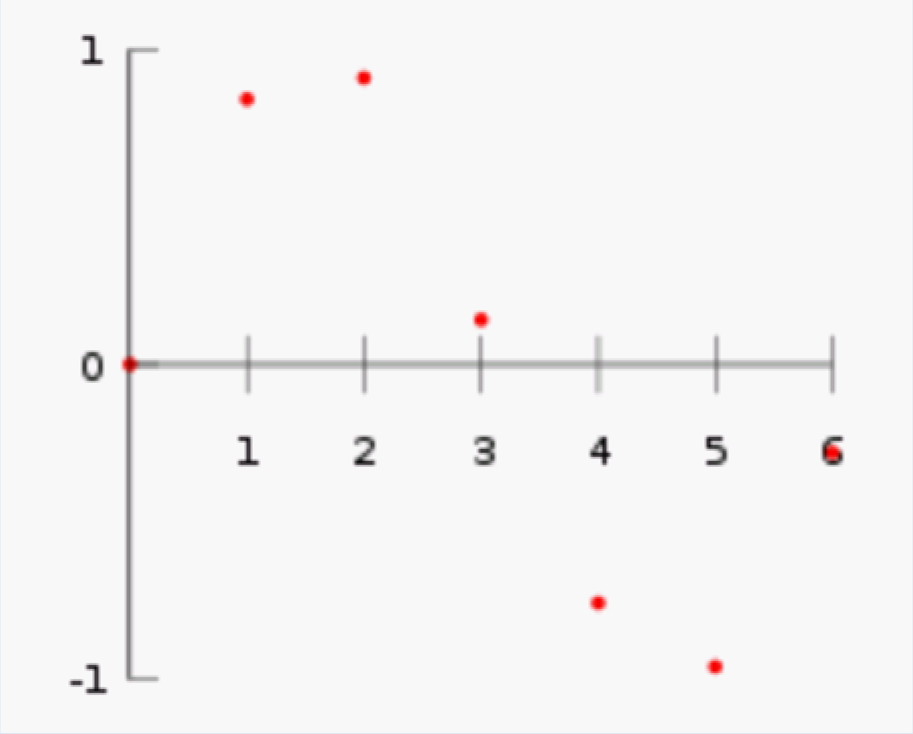
MATEMATIČKE METODE U KEMIJI 2

1. Približni i točni brojevi (pogreške, zaokruživanje, …)
2. Nelinearne jednadžbe (numeričke metode njihova rješavanja)
3. Metode interpolacije funkcija
4. Numeričko diferenciranje
5. Numeričko integriranje
6. Optimizacijske metode
7. Teorija vjerojatnosti
8. Osnove statistike
9. Slučajne varijable
10. Statistički testovi
11. Regresijske metode

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

- imamo skup točaka te želimo naći funkciju koja prolazi kroz zadane točke (*kako bi nam ta funkcija poslužila za računanje novih točaka za koja nemamo vrijednosti*)



INTERPOLACIJA FUNKCIJA

Interpolacija je metoda izračuna vrijednosti funkcije u novim točkama koje se nalaze **unutar intervala** definiranog diskretnim skupom podataka.

Ekstrapolacija je metoda izračuna vrijednosti funkcije u novim točkama koje se nalaze **izvan intervala** definiranog diskretnim skupom podataka.

-**ekstrapolacija** ima veću nesigurnost od interpolacije, jako ovisi o pretpostavci o vrsti funkcije koja opisuje ovisnost promatranih varijabli i koja će odrediti ovisnost izvan intervala za koji imamo mjerenja *(npr. promatrajući vrijednosti funkcije f(x) u točkama ((0, 0), (0,1, 0,0998) (0,5, 0,4794)) samo oko ishodišta mogli bi potpuno pogrešno zaključiti o kojoj je funkciji riječ ta pretpostavka pokazala bi se vrlo lošom čime se maknemo od ishodišta).*

- ekstrapolacija se često koristi u različitim prognozama

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

PREDMET PROUČAVANJA

interpolacija se koristi:

- imamo skup vrijednosti u nekom intervalu, ali nas zanima da izračunamo i **ostale vrijednosti unutar tog intervala**

- imamo mjerenja, ali želimo procijeniti još neka mjerenja koja nismo stigli izmjeriti, a nalaze se unutar tog intervalu

- često za neku funkciju **nemamo analitički izraz**, ali poznajemo njezinu vrijednost u nekoliko točaka (*npr. eksperimentalno ili računalno određen diskretan skup podataka*) pa pokušavamo naći funkciju koja bi tu ovisnost opisala

- primjerice pratimo ovisnost dvije fizikalne veličine, **ne znamo analitički izraz** koji opisuje njihovu zavisnost, ali imamo **mjerenja koja upućuju na tu zavisnost**

- ponekad se interpolacija koristi kako bi **kompliciranu funkciju aproksimirali jednostavnijom**

- funkcije čije se vrijednosti teško izračunavaju

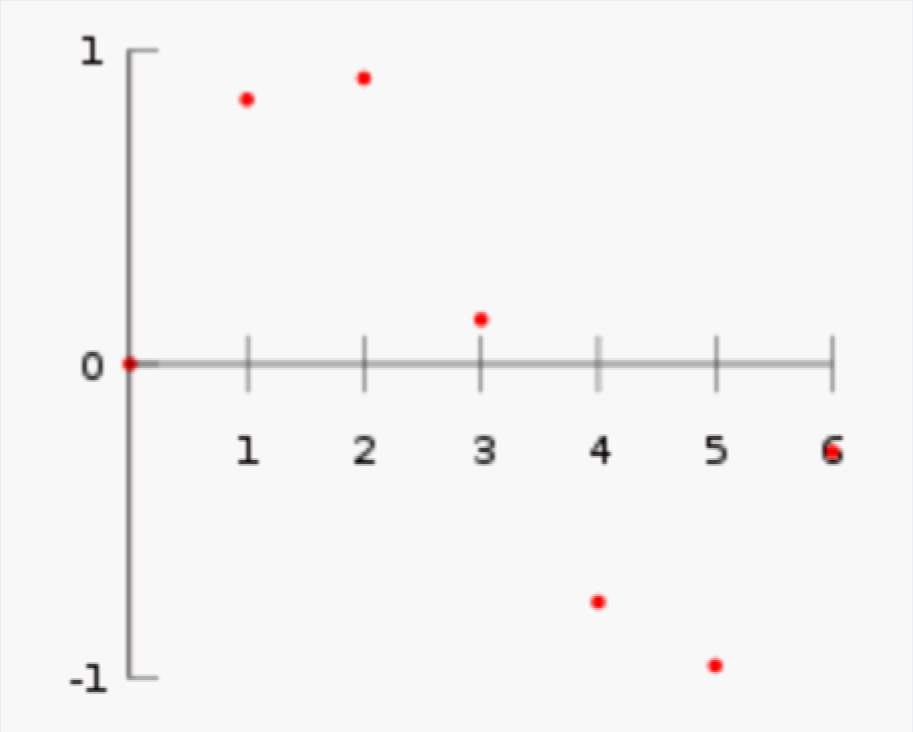
INTERPOLACIJA FUNKCIJA

CILJ PROUČAVANJA

Određivanje **vrijednosti funkcije (ili derivacija funkcija) u točkama koje nisu zadane** (unutar ili izvan zadanog skupa točaka) te **određivanja same funkcije** (i njenih parametara) koja opisuje zavisnost postojećih podataka.

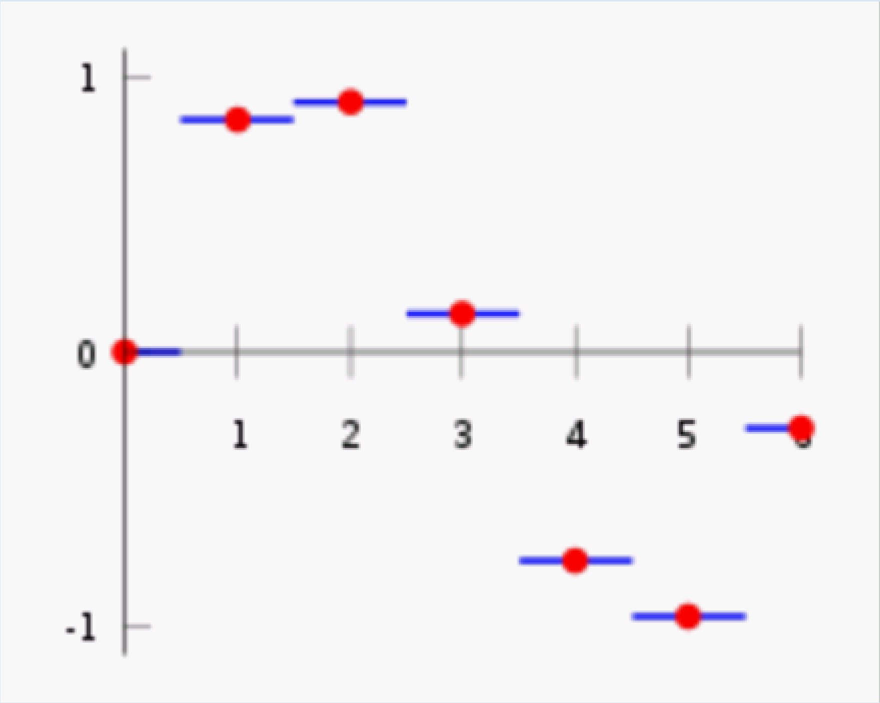
- *...the most common form of interpolation occurs when we seek data from a table which does not have the exact values we want.* (Sir Edmund Whittaker, professor of Numerical Mathematics at the University of Edinburgh from 1913 to 1923)
- Koristila se za predviđanje položaja sunca, mjeseca i planeta (poljoprivreda, navigacija).

INTERPOLACIJA FUNKCIJA



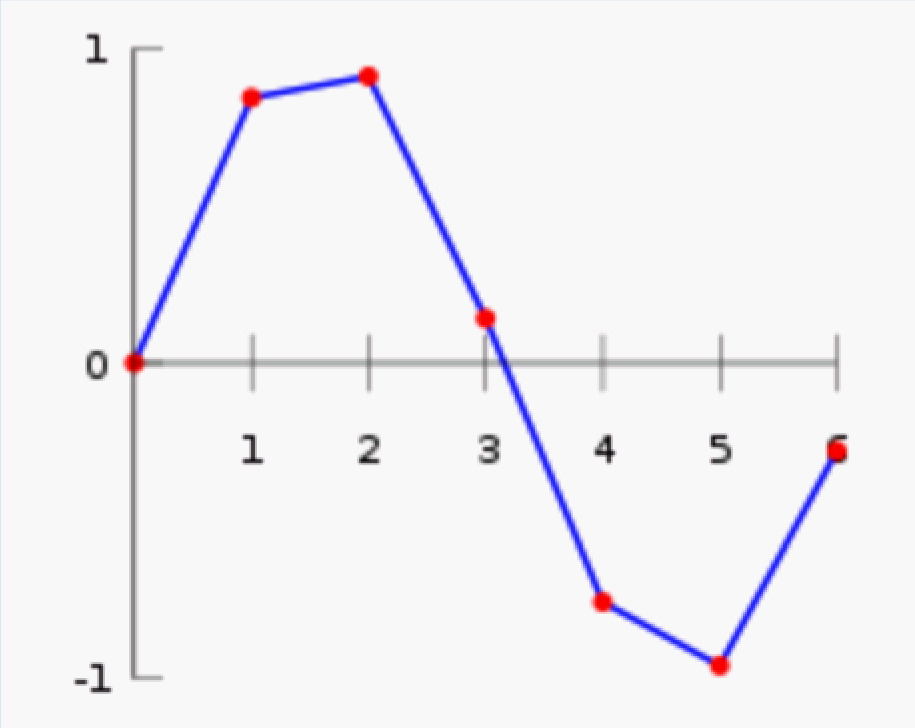
- za prikazani skup točaka treba interpolacijom naći funkciju koja opisuje njihovu zavisnost
- postoji puno metoda koje to omogućuju
- metode se razlikuju u pouzdanosti, točnosti, koliko je gladak (*smooth*) interpolant, količini potrebitih podataka, …

INTERPOLACIJA FUNKCIJA



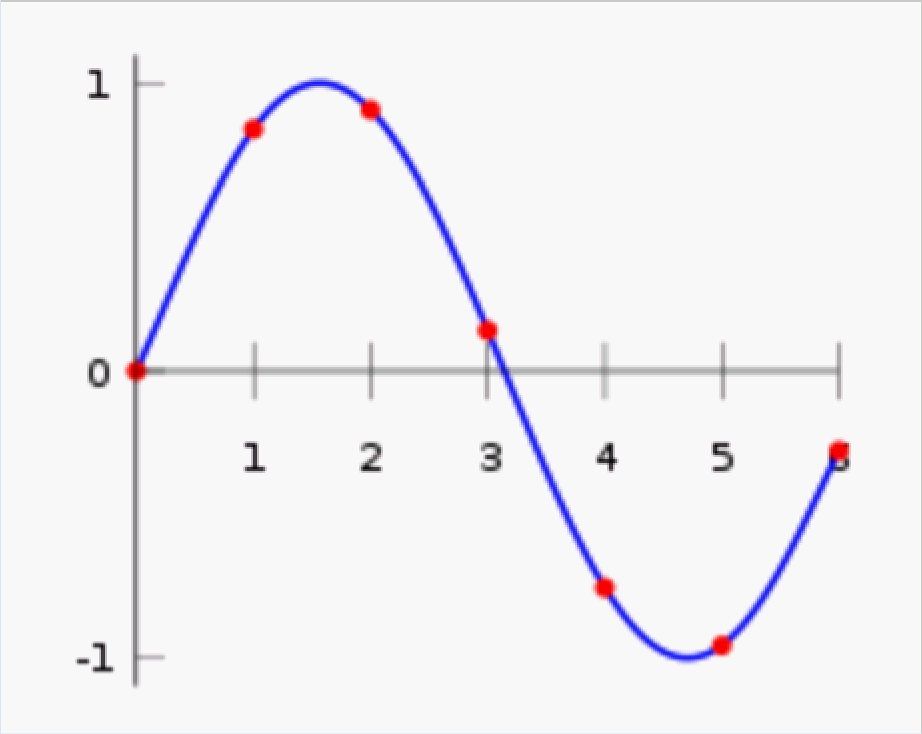
- **proksimalna interpolacija** – vrlo rijetko se koristi, tek u nekim slučajevima multivarijatne interpolacije!
- gotovo je jednako jednostavna (odnosno složena) kao i linearna aproksimacija, a puno netočnija
- temelji se na lociranju najbliže vrijednosti podataka i pridruživanje iste vrijednosti

INTERPOLACIJA FUNKCIJA



- **linearna interpolacija** – temelji se na korištenju jednadžbe pravca kroz dvije točke koju koristimo kako bi povezali susjedne točke skupa podataka
- vrlo je brza i jednostavna, ali ima veliku pogrešku te je nediferencijabilna i ne daje glatku funkciju

INTERPOLACIJA FUNKCIJA



- **polinomna interpolacija** – temelji se na korištenju polinoma višeg stupnja

- puno je preciznija od linerane aproksimacije, daje glatku i (u pravilu) diferencijabilna funkciju

- može biti složena za računanje

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

INTERPOLACIJSKI PROBLEM

- često za neku funkciju **nemamo analitički izraz**, ali poznajemo njezinu vrijednost u nekoliko (**n+1**) točaka:

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$$

- **INTERPOLACIJSKI PROBLEM:** potrebno je konstruirati **interpolacijsku funkciju *g(x)*** koja pripada nekoj poznatoj klasi funkcija, a u **interpolacijskim točkama poprima iste vrijednosti kao i "nepoznata" funkcija *f(x)*:**

$$g(x_i) = f(x_i),\ i= 0, 1, \ldots, n,$$

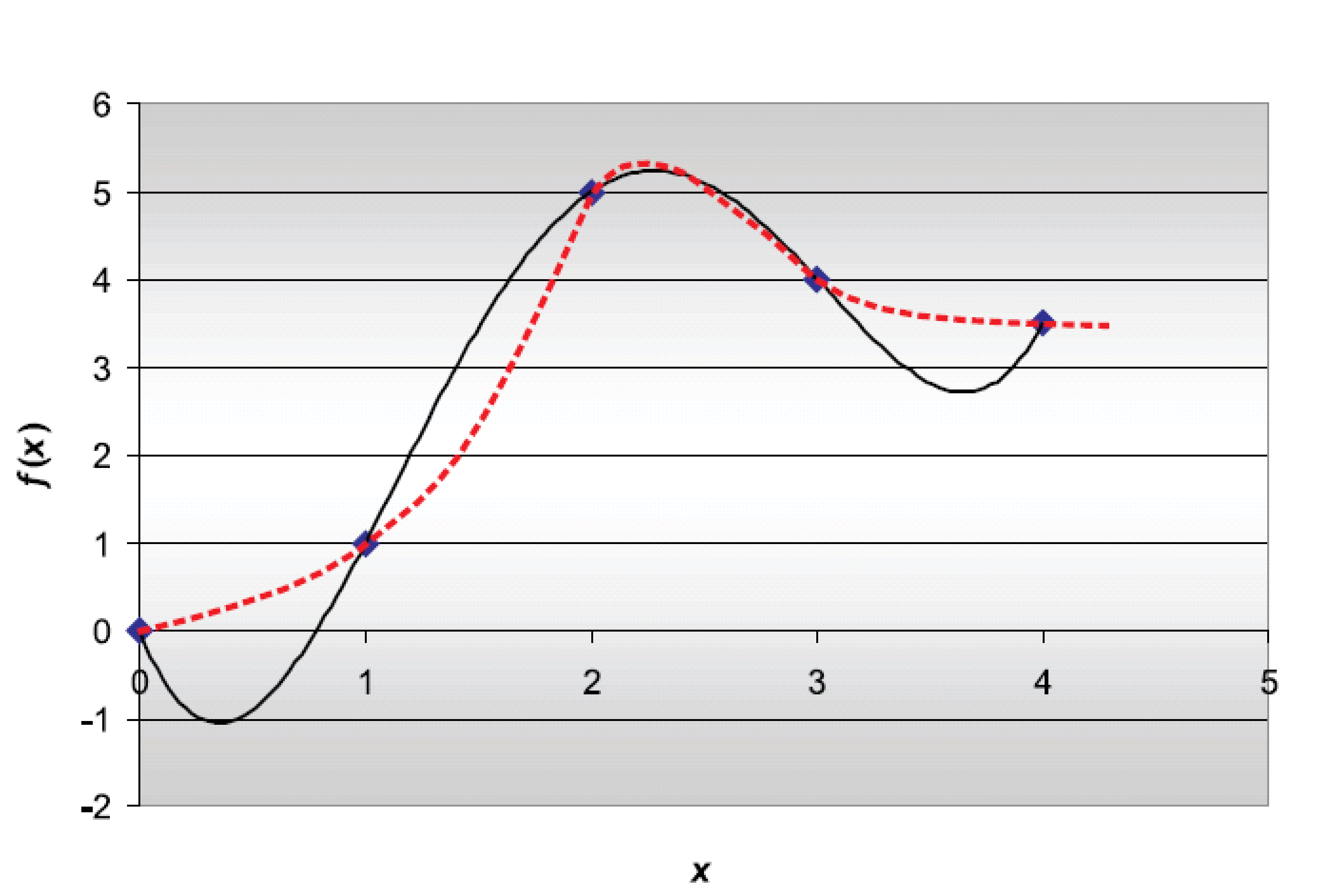
- funkcija *g(x)* obično se bira u klasi polinoma, trigonometrijskih, eksponencijalnih, racionalnih ili nekih drugih funkcija
- **kada odredimo funkciju *g(x)*, onda možemo i procijeniti vrijednosti funkcije *f(x)* u nekoj točki *x* intervala** $[x_0, x_n]$**, $x \neq xi$, tako da stavimo** $f(x) \approx g(x)$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

INTERPOLACIJSKI PROBLEM

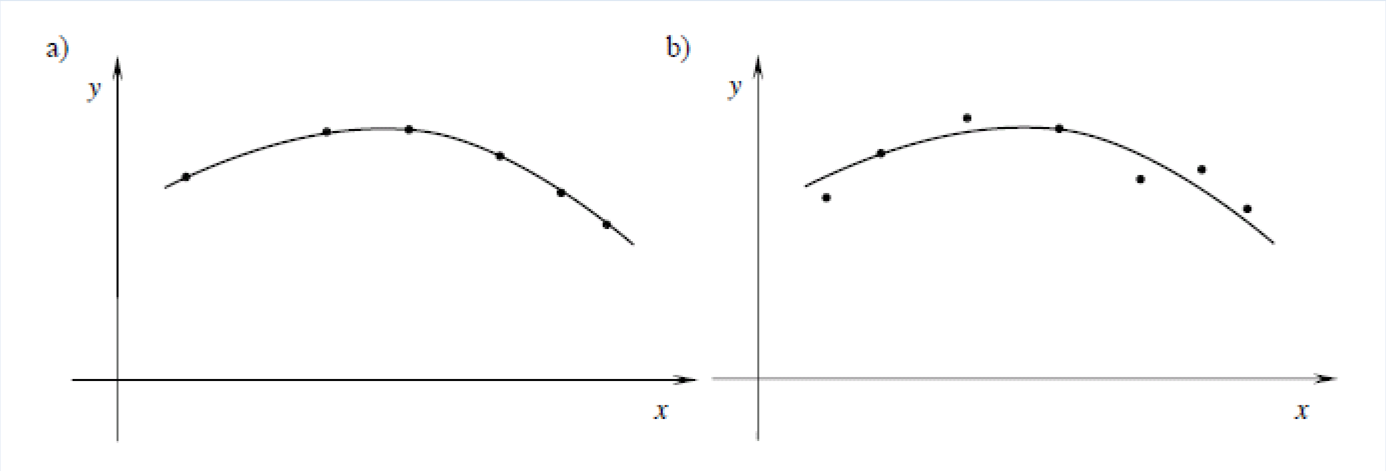
GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA

- potrebno je naći krivulju koja prolazi kroz zadane točke, općenito je moguće naći više takvih krivulja



INTERPOLACIJA FUNKCIJA

INTERPOLACIJA ≠ APROKSIMACIJA



Kod **interpolacije** se zahtijeva da se vrijednosti funkcije *f (x)* i funkcije *g(x)* kojom zamjenjujemo funkciju *f(x)* podudaraju dostupnim točkama odnosno u svim točkama u kojima je poznata funkcija *f(x).*

Nasuprot tome, **aproksimacijom** se dolazi do funkcija koje aproksimiraju grupu podataka na najbolji mogući način, bez obaveze da aproksimacijska funkcija prolazi kroz sve poznate točke.

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

INTERPOLACIJSKI PROBLEM

-**RJEŠENJE INTERPOLACIJSKOG PROBLEMA:** pronaći **polinom P_n** čiji graf **prolazi zadanim točkama (x_i, $f(x_i)$),** odnosno vrijedi:

$$
\begin{aligned}
P_n(x_0) &= y_0 \\
P_n(x_1) &= y_1 \\
&\vdots \\
P_n(x_n) &= y_n
\end{aligned}
$$

Interpolacijski problem postaje **jednoznačan** ako se traži polinom $P_n(x)$ **reda ne većeg od n koji zadovoljava gornje uvjete**.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

INTERPOLACIJSKI PROBLEM

- koeficijente polinoma mogli bismo naći rješavajući sustav od (n+1) jednadžbe s (n+1) nepoznanicom:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_n x_0^n & + & a_{n-1} x_0^{n-1} & + & \cdots & + & a_1 x_0 & + & a_0 & = & y_0 \\
a_n x_1^n & + & a_{n-1} x_1^{n-1} & + & \cdots & + & a_1 x_1 & + & a_0 & = & y_1 \\
\multicolumn{11}{c}{\dotfill} \\
a_n x_n^n & + & a_{n-1} x_n^{n-1} & + & \cdots & + & a_1 x_n & + & a_0 & = & y_n
\end{array}
$$

- determinanta dobivene matrice naziva se ***Vandermondova determinanta***

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\
1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\
1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n
\end{vmatrix}
$$

- može se pokazati da je vrijednost determinante **različita od nule** ako su ***x_i (i = 0,1,…,n)*** **međusobno različiti**

- sustav ima **jedinstveno rješenje**, tj. postoji **točno jedan polinom *P_n* stupnja ne većeg od n** koji prolazi kroz svih (n + 1) točaka

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

INTERPOLACIJSKI PROBLEM

Problemi:

1. ako bi tražili interpolacijski polinom stupnja **<n**, rješenje **ne mora postojati**; a ako bi tražili polinom stupnja **>n**, rješenje nije nužno jedinstveno
2. za **veliki n** i **međusobno bliske čvorove** interpolacije, nastat će ozbiljni **numerički problemi**

- zbog toga se koriste **numeričke metode** za interpolaciju funkcija poput Lagrangeove i Newtonove metode

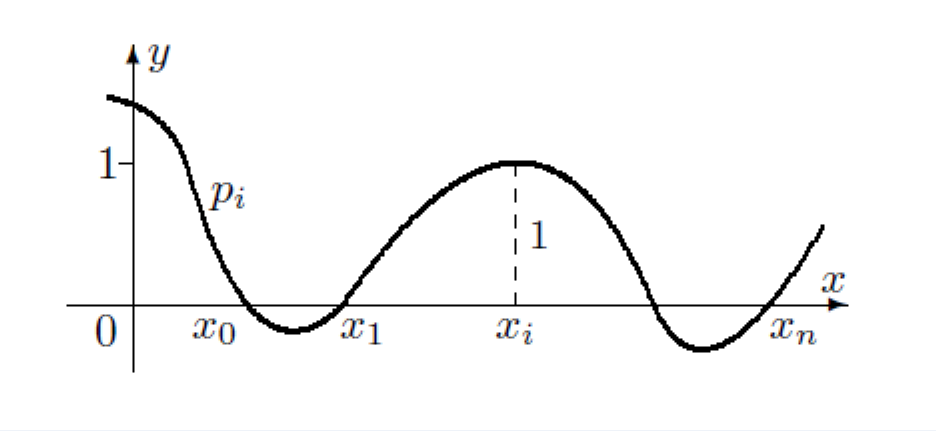
INTERPOLACIJA FUNKCIJA

LAGRANGEOVA METODA

- najprije općeniti slučaj: potrebno je naći polinom stupnja n za koji vrijedi:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}, \quad i,j = 0,1,\ldots,n.$$

- to znači da graf polinoma p_i **sječe x-os u točkama** $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, a u točki x_i **poprima vrijednost 1**



- kako naći polinom p_i navedenih svojstava?

- s obzirom da su $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ **nul točke** polinomna p_i mora vrijediti:

$$p_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

LAGRANGEOVA METODA

- konstantu C_i ćemo odrediti iz uvjeta $\boldsymbol{p_i(x_i)=1}$:

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}.$$

- uvrštavajući konstantu C_i u prethodni izraz za polinom p_i dobijemo izraz:

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}.$$

- vratimo se interpolacijskom problemu i traženju interpolacijskog polinoma P_n

- za polinom P_n čiji graf prolazi točkama $(x_i, f(x_i))$, odnosno vrijedi:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

- taj polinom možemo prikazati kao **linearnu kombinaciju** polinoma p_i:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x)$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

LAGRANGEOVA METODA

- ako imamo polinom P_n čiji graf prolazi točkama (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n),odnosno vrijedi:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

- onda za svaku točku možemo naći polinom $\boldsymbol{p_i(x)}$ koji će u točki x_i imati vrijednost 1, a ostale točke će mu biti nul-točke.

- traženi polinom možemo prikazati kao **linearnu kombinaciju** polinoma $\boldsymbol{p_i(x)}$:

$$P_n(x) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x)$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

LAGRANGEOVA METODA

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

- za svaki x_j vrijedi:

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x_j) y_i = p_j(x_j) y_j = y_j.$$

- **Lagrangeova formula interpolacije jedna je od rijetkih koja eksplicitno sadrži vrijednosti y_i**

IZVOD:
Pokažite da je Lagrangeov polinom prvog stupnja koji prolazi točkama x_1, $f(x_1)$ i x_2, $f(x_2)$ zapravo jednadžba pravca kroz dvije točke.

- GRAFIČKA INTERPRETACIJA !

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

LAGRANGEOVA METODA

Lagrangeove polinome:

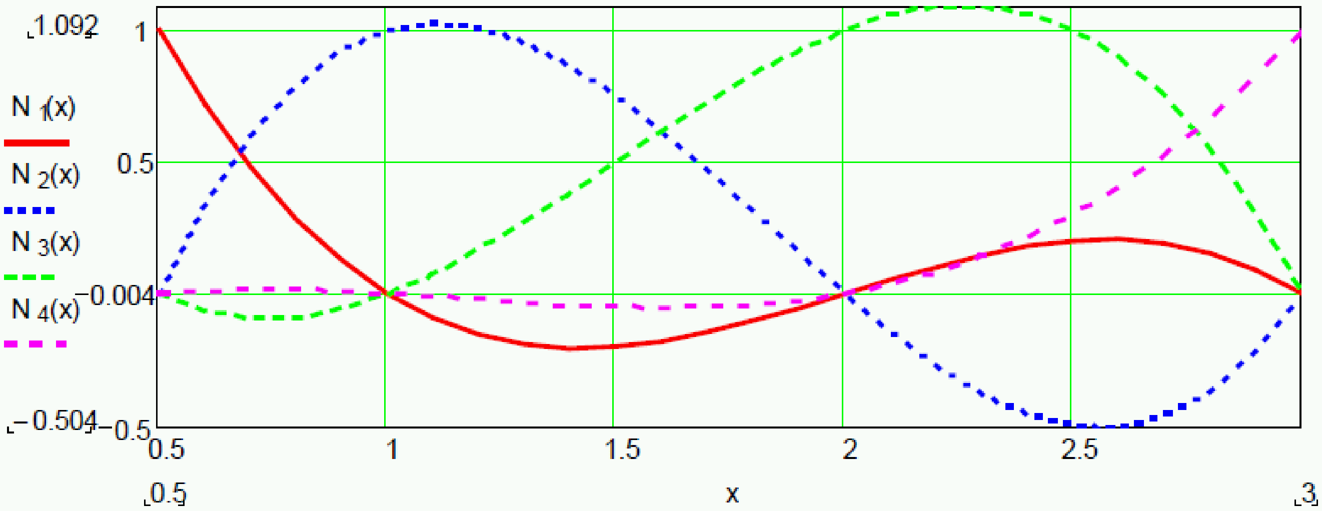
$$N_1(x) := \frac{(x-\xi_2)\cdot(x-\xi_3)\cdot(x-\xi_4)}{(\xi_1-\xi_2)\cdot(\xi_1-\xi_3)\cdot(\xi_1-\xi_4)}$$

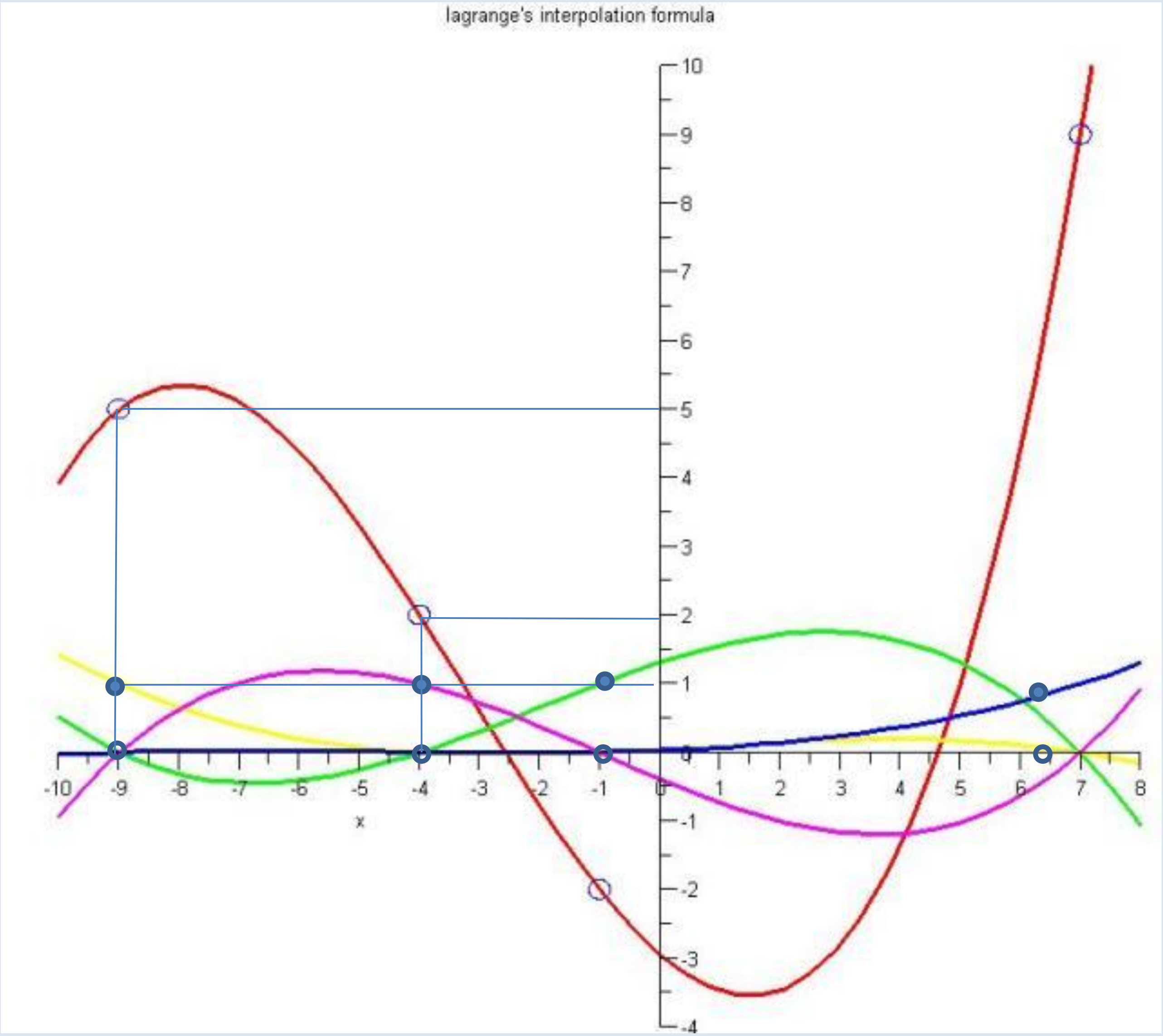
$$N_2(x) := \frac{(x-\xi_1)\cdot(x-\xi_3)\cdot(x-\xi_4)}{(\xi_2-\xi_1)\cdot(\xi_2-\xi_3)\cdot(\xi_2-\xi_4)}$$

$$N_3(x) := \frac{(x-\xi_1)\cdot(x-\xi_2)\cdot(x-\xi_4)}{(\xi_3-\xi_1)\cdot(\xi_3-\xi_2)\cdot(\xi_3-\xi_4)}$$

$$N_4(x) := \frac{(x-\xi_1)\cdot(x-\xi_2)\cdot(x-\xi_3)}{(\xi_4-\xi_1)\cdot(\xi_4-\xi_2)\cdot(\xi_4-\xi_3)}$$

Grafički prikaz pojedinih polinoma pokazuje isto svojstvo kao i prije (vrijednost 1 u 'svojoj' točki, a vrijednost 0 u svim ostalim točkama)




lagrange's interpolation formula
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

LAGRANGEOVA METODA

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

- **Lagrangeova formula interpolacije jedna je od rijetkih koja eksplicitno sadrži vrijednosti y_i**

<u>PREDNOSTI I NEDOSTACI</u>

- u nekim situacijama može biti računski zahtjevna

- ako želimo dodati ili izbaciti neku točku, cijeli postupak se mora **ponoviti iz početka**!

- izvrsna metoda u situaciji kada su nam zadane točke **ekvidistantne** ($x_{i+1}-x_i=h$), u takvim slučajevima izraz postaje vrlo jednostavan

$$L_n(x) = L_n(x_0+th) = (-1)^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{f(x_i)}{t-i}.$$

$$t = \frac{x-x_0}{h},$$

- vidimo da u ovom slučaju koeficijenti uz $f(x_i)$ ne ovise, niti o koraku, niti o funkciji, te se mogu i tabelirati (tablice Lagrangeovih koeficjenata)

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

NEWTONOVA METODA
metoda konačnih razlika

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

NEWTONOVA METODA

- interpolacijski polinom tražimo u obliku:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

- koeficijenti se računaju koristeći **metodu konačnih razlika**

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

METODA KONAČNE RAZLIKE RAZLIČITOG REDA

- konačne razlike (još se koristi i naziv podijeljene razlike; eng. *finite differences*)

koriste se kao aproksimacije derivacija

- odnos konačne razlike i derivacije:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\Delta_h[f](x)}{h}.$$

- ukoliko *h* teži nuli:

$$\frac{\Delta_h[f](x)}{h}-f'(x)=O(h) \quad (h\to 0).$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

METODA KONAČNE RAZLIKE RAZLIČITOG REDA

- najprije ćemo definirati konačne razlike:

1. za jednu točku (x_0, y_0), vrijedi da je (središnja) konačna razlika **nultog reda** jednaka vrijednosti funkcije u toj točki: $f[x_0] = f(x_0)$

2. za dvije točke (x_0, y_0) i (x_1, y_1) imamo **konačnu razliku prvog reda** koja je dana izrazom:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

3. za tri točke (**konačna razlika drugog reda**)

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

METODA KONAČNE RAZLIKE RAZLIČITOG REDA

- za n+1 točku:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} (x_i - x_j)}.$$

NEWTONOVA METODA

- interpolacijski polinom tražimo u obliku:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

NEWTONOVA METODA

- interpolacijski polinom tražimo u obliku:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

- koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se računaju koristeći **metodu konačnih razlika**

- koeficijenti se računaju koristeći **metodu konačnih razlika** izraz:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

postaje izraz:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}),$$

gdje su:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_i] = \frac{f[x_1, \ldots, x_i] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

NEWTONOVA METODA

IZVOD: Newtonowom metodom interpolacije izračunajte polinom prvog stupnja koji prolazi točkama (x_0, y_0) i (x_1, y_1)

1. polinom prvog stupnja (n=1, pravac) prolazi točkama (x_0, y_0) i (x_1, y_1)

$P_1(x)=a_0 + a_1(x-x_0)$

- prema prvoj konačnoj razlici proizlazi da je:

$a_0=f(x_0)$

$a_1=(f(x_1)-f(x_0))/(x_1-x_0)$

$f(x_1)= y_1; f(x_0)=y_0$

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

NEWTONOVA METODA U SLUČAJU EKVIDISTANTNIH TOČAKA

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

NEWTONOVA METODA U SLUČAJU EKVIDISTANTNIH TOČAKA

KONAČNE RAZLIKE UNAPRIJED

- u slučaju kada su točke ekvidistantne, možemo definirati konačne razlike unaprijed (ili središnje, ili unatrag)

- ako su točke ekvidistantne, vrijedi: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$

-prva **konačna razlika unaprijed** jest:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

- r-ta konačna razlika $$\Delta^r f(x) = \Delta^{r-1} f(x+h) - \Delta^{r-1} f(x).$$

- **izvod**: veza između **konačne razlike unaprijed** i (središnje) **konačne razlike**

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

NEWTONOVA METODA U SLUČAJU EKVIDISTANTNIH TOČAKA

KONAČNE RAZLIKE UNAPRIJED

$$\Delta f(x_0) = 1!hf[x_0, x_1].$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}$$

PRVA KONAČNA RAZLIKA UNAPRIJED

PRVA (središnja) KONAČNA RAZLIKA

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_r] = \frac{\Delta^r f(x_0)}{r!h^r}, \quad x_{k+1} - x_k = h, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1,$$

ili

$$\Delta^r f(x_0) = r!h^r f[x_0, x_1, \ldots, x_r], \quad x_{k+1} - x_k = h, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1.$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

NEWTONOVA METODA U SLUČAJU EKVIDISTANTNIH TOČAKA

- uvrštavanjem u :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- odnosno uvrštavanjem u :

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}),$$

- dobijemo **Newtonov interpolacijski polinom s diferencijacijama (konačnim razlikama) unaprijed:**

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

NEWTONOVA METODA U SLUČAJU EKVIDISTANTNIH TOČAKA

- uvođenjem $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, ili $x = x_0 + th$

- dobijemo oblik koji je vrlo sličan s Lagrangeovim interpolacijskim polinomom za slučaj s ekvidistantnim točkama

NEWTONOW INTERPOLACIJSKI POLINOM U SLUČAJU EKVIDISTANTNIH TOČAKA

$$P_n(x) = f(x_0) + \Delta f(x_0)t + \Delta^2 f(x_0)\frac{t(t-1)}{2}! + \ldots + \Delta^n f(x_0)\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}$$

LAGRANGEOV INTERPOLACIJSKI POLINOM U SLUČAJU EKVIDISTANTNIH TOČAKA

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = (-1)^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{f(x_i)}{t-i}.$$

$$t = \frac{x - x_0}{h},$$

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

ZAKLJUČAK

Interpolacija na temelju **Lagrangeovih polinoma** je najprikladnija u slučajevima kada je potrebno **jednostavno i brzo** provesti interpolaciju ili odrediti neku točku intervala **bez mogućnosti kontrole pogreške interpolacije**.

U slučajevima kada je potrebno **varirati stupanj interpolacijskog polinoma** kako bi se ostvarila **kontrola pogreške interpolacije** preporučljivo je koristiti postupak **interpolacije na temelju podijeljenih razlika**.

Nedostatak Lagrange-ove interpolacije je veliki broj aritmetičkih operacija. Ako se želi dodati, promijeniti ili izbaciti točka potrebno je cjelokupni proračun započeti iz početka.
Metoda podijeljenih razlika (Newtonova metoda), zapravo rezultira istim polinomom kao i Lagrange-ova interpolacija (može se pokazati da je polinom reda n koji prolazi kroz n+1 točaka jedinstven) samo se do njega drugačijim postupkom.