Sveučilište u Zagrebu

PMF – Matematički odjel

Tin Perkov

SAHLQVISTOVE FORMULE

Diplomski rad

Zagreb, studeni 2006.

SADRŽAJ

UVOD

Modalna logika je u osnovi propozicionalna logika obogaćena operatorima na sudovima. Motivirana je pokušajem da se formaliziraju izrazi poput *možda je*, *znam da*, *može se dokazati*, *bilo je*, *bit će* i sl. Suvremena modalna logika omogućuje bogatu i jednostavnu izražajnost za širok spektar primjena. Ovdje ćemo razmatrati isključivo osnovni modalni jezik koji ima samo jedan operator (unarni *operator mogućnosti*), pomoću kojeg se definira njemu dualni operator (*operator nužnosti*).

Klasičnoj logici sudova, čiji jezik se sastoji od prebrojivo mnogo propozicionalnih varijabli označenih s p, q, r..., koje se povezuju bulovskim veznicima, u osnovnom modalnom jeziku pridodan je operator $\Diamond$ s namjerom da se npr. izraz *moguće je p* formalizira kao $\Diamond p$. *Teorija modela* i *okvira* ovoj intendiranoj interpretaciji daje matematički sadržaj. U ovom primjeru, reći ćemo da je $\Diamond p$ istinito u nekoj točki modela ako je ona u relaciji s barem jednom točkom u kojoj je p istinito. Modalnom operatoru $\Diamond$ u interpretaciji, dakle, pridružujemo binarnu relaciju. Neformalno se može reći da *mogućnost* istinitosti u nekoj točki modela matematički izražavamo kao relacijsku vezu s točkom u kojoj je istinitost osigurana. Primjerice, ako je riječ o relaciji ekvivalencije, nešto je *možda istina* u nekoj točki ako je ona u klasi ekvivalencije u kojoj ima točaka (bar jedna) gdje je to *istina*.

Već iz dosad rečenog možemo jasno naslutiti kvantifikaciju u interpretaciji modalnih izraza, dakle vezu modalne logike s klasičnom logikom s kvantifikatorima. Cilj ovog rada je uspostava korespondencije osnovnog modalnog jezika s jezicima logike prvog i drugog reda. Iz semantike modalnog jezika, konkretno iz definicije *valjanosti* na *okvirima*, uvidjet ćemo neposrednu vezu modalne logike i logike drugog reda. No, neki primjeri će nas motivirati da istražimo mogućnosti prijevoda modalnih izraza na jednostavniji jezik logike prvog reda.

Najprije ćemo definirati osnovne pojmove sintakse i semantike za osnovni modalni jezik i *jezike korespondencije* prvog i drugog reda, uz sažet pregled osnovnih svojstava ovih jezika.

U drugom dijelu rada strogo ćemo definirati *korespondenciju* formula različitih jezika koje određuju isto *svojstvo*. Npr. intendirana interpretacija modalnog izraza $p \to \Diamond p$ je "ako vrijedi p, onda je moguće p", a ta rečenica je u prirodnom jeziku trivijalno istinita. No, kao što ćemo vidjeti, njenu matematičku istinitost dat će nam tek okviri u kojima je relacija pridružena modalnom operatoru refleksivna. Dokazat ćemo, dakle, da $p \to \Diamond p$ *korespondira* s formulom prvog reda $\forall x Rxx$, u smislu da oba izraza definiraju isto svojstvo – refleksivnost.

Važnim primjerom *Löbove formule* pokazat ćemo, međutim, da ima i vrlo jednostavnih modalnih izraza koji se ne daju prevesti na jezik prvog reda.

U završnom, ključnom dijelu rada, dokazat ćemo ipak da se korespondencija modalnog jezika i jezika prvog reda može uspostaviti za široku klasu rečenica (*Sahlqvistove formule*). Iako to nisu sve modalne formule koje korespondiraju s formulama prvog reda, riječ je o važnoj i bogatoj klasi koja osim toga ima jednostavan algoritam prijevoda. Ne postoji algoritam koji bi za proizvoljnu modalnu formulu dao prijevod prvog reda ili pokazao da takvog nema, a *Sahlqvistove formule* predstavljaju operativno najbolju klasu u smislu kompromisa širine i jednostavnosti.

1. OSNOVNI MODALNI JEZIK I JEZICI KORESPONDENCIJE

Najprije definiramo sintaksu i semantiku osnovnog modalnog jezika i jezika korespondencije prvog i drugog reda. Navest ćemo i osnovna svojstva ovih jezika, no bez detaljnih dokaza, jer je prvenstvena svrha ovog rada uspostava korespondencije između jezika modalne i klasične logike. Ovaj sažeti prikaz ilustrirat će motivaciju teorije korespondencije, koju ćemo strogo razviti u sljedećim poglavljima.

1.1. OSNOVNI MODALNI JEZIK

Kao što je već rečeno u Uvodu, osnovni modalni jezik dobiva se dodavanjem jednog unarnog operatora klasičnoj logici sudova.

Definicija 1.1.

> *Abecedu* ***osnovnog modalnog jezika*** čini skup *propozicionalnih varijabli* Φ čije elemente označavamo s p, q, r,..., zatim *bulovski veznici negacije* $\neg$ i *disjunkcije* $\vee$, *logička konstanta za laž* $\perp$, te *unarni modalni operator* $\Diamond$.
>
> *Formule* osnovnog modalnog jezika definiraju se induktivno:
> 1. Svaka propozicionalna varijabla je formula i $\perp$ je formula.
> 2. Ako su φ i ψ formule, onda su i $\neg\varphi$, $\varphi\vee\psi$, $\Diamond\varphi$ formule.

Za operator $\Diamond$ definiramo dualni operator $\Box$ sa $\Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi$.
Koriste se uobičajene pokrate za veznike *konjunkcije* $\wedge$, *implikacije* $\rightarrow$, *ekvivalencije* $\leftrightarrow$ i *logičku konstantu za istinu* $\top$. Obično se uzima prebrojiv skup propozicionalnih varijabli. Ima i primjena koje zahtijevaju drukčije, no za potrebe ovog rada nema ih razloga razmatrati.

Formulu $\Diamond\varphi$ čitamo kao "moguće je φ". U skladu s tim, dual $\Box\varphi$ čita se kao "nije moguće ne-φ", tj. "nužno je φ". Stoga se $\Diamond$ zove *operator mogućnosti*, a $\Box$ *operator nužnosti*. U ovom radu držat ćemo se tog čitanja, no spomenimo i da se u drugim intendiranim interpretacijama $\Box\varphi$ čita kao "subjekt zna φ" (*logika znanja*) ili kao "dokazivo je φ" (*logika dokazivosti*). No, kakvo god čitanje bilo, matematički sadržaj formulama osnovnog modalnog jezika daje se u sljedećim semantičkim definicijama.

Definicija 1.2.

> ***Okvir*** za osnovni modalni jezik je uređeni par $F = (W,R)$, gdje je W neprazan skup koji se zove *domena*, a R binarna relacija na W koju zovemo *relacija dostiživosti*.
>
> ***Model*** za osnovni modalni jezik je uređeni par $M = (F,V)$, gdje je F okvir, a V funkcija koja svakoj propozicionalnoj varijabli p iz Φ pridružuje podskup $V(p)$ skupa W. Tu funkciju zovemo *valuacija*. Pritom kažemo da je M *baziran* na F ili da je F *pripadni okvir* modela M.

Elementi skupa W zovu se naprosto *točke*, ali i *stanja*, *svjetovi*, *čvorovi*, *situacije*, *trenuci* itd, ovisno o intendiranoj interpretaciji. Ovdje ćemo najčešće koristiti naziv *svijet*, koji je u skladu s čitanjem $\Diamond\varphi$ kao "moguće je φ". Modalna logika je pritom motivirana pokušajem da se matematički opiše misao, koja se pripisuje Leibnizu, da "nužnost znači istinu u svim mogućim svjetovima, a mogućnost istinu u nekim mogućim svjetovima."

Ako za w i v iz W vrijedi da je uređeni par (w,v) u R, to ćemo označavati s Rwv. Pritom ćemo reći da je svijet *v R-dostiživ* iz w ili da je *v R-sljedbenik* svijeta w.

Sada smo spremni za strogu definiciju *istinitosti* na modelima i *valjanosti* na okvirima. Upravo je koncept valjanosti ključan za teoriju korespondencije, u kojoj istražujemo formule različitih jezika koje su valjane na istim okvirima.

Definicija 1.3.

> Neka je w element skupa W, $M = (W,R,V)$ model i φ formula osnovnog modalnog jezika. ***Istinitost formule φ u svijetu w iz modela M***, što označavamo s $M, w \Vdash \varphi$, definiramo induktivno:
>
> 1. za propozicionalnu varijablu p: $M, w \Vdash p$ ako i samo ako je w element skupa $V(p)$;
> 2. ne vrijedi $M, w \Vdash \bot$.
>
> Neka su φ i ψ formule.
>
> 3. $M, w \Vdash \neg\varphi$ ako i samo ako nije $M, w \Vdash \varphi$;
> 4. $M, w \Vdash \varphi \vee \psi$ ako i samo ako je $M, w \Vdash \varphi$ ili $M, w \Vdash \psi$;
> 5. $M, w \Vdash \Diamond\varphi$ ako i samo ako postoji v iz W takav da je Rwv i $M, v \Vdash \varphi$.
>
> Formula je ***globalno istinita*** na modelu M ako je istinita u svakom svijetu tog modela. To označavamo s $M \Vdash \varphi$.

Iz definicije slijedi da je M, $w \Vdash \Box\varphi$ ako i samo ako za svaki v iz W takav da je Rwv vrijedi M, $v \Vdash \varphi$.

U definiciji istinitosti formula oblika $\Diamond\varphi$ i $\Box\varphi$ uočavamo egzistencijalnu, odnosno univerzalnu kvantifikaciju po elementima domene. To je kvantifikacija prvog reda. U nastavku rada vidjet ćemo da se iz ove definicije izravno uspostavlja *korespondencija na modelima* između osnovnog modalnog jezika i jezika prvog reda. No, više će nas zanimati *korespondencija na okvirima*, gdje se udaljujemo od efekta valuacije.

Definicija 1.4.

Kažemo da je formula φ osnovnog modalnog jezika ***valjana u svijetu w*** okvira $F=(W,R)$ ako je φ istinita u w na svakom modelu $M=(F,V)$ baziranom na F. To označavamo s F, $w \Vdash \varphi$.

Formula φ je ***valjana na okviru F*** ako je valjana u svakom svijetu tog okvira. To označavamo s $F \Vdash \varphi$.

Formula φ je ***valjana na klasi okvira*** **F** ako je valjana na svakom okviru F iz F. To označavamo s $\mathsf{F} \Vdash \varphi$.

Formula je ***valjana*** ako je valjana na klasi svih okvira. To označavamo s $\Vdash \varphi$.

U definiciji valjanosti formule koristimo univerzalnu kvantifikaciju po valuacijama na danom okviru. Zapravo, za svaku propozicionalnu varijablu p koja se pojavljuje u formuli, kvantificiramo po njoj pridruženim podskupovima $V(p)$ domene okvira. To je kvantifikacija drugog reda kojom se, kako ćemo vidjeti, uspostavlja *korespondencija na okvirima* između osnovnog modalnog jezika i jezika drugog reda.

Iako predmet ovog rada nisu aksiomatski sistemi, nego izražajne mogućnosti modalne logike, ipak spomenimo ukratko ovdje sistem **K**. Aksiomi tog sistema su sve tautologije (ali promatrane u osnovnom modalnom jeziku, što znači da se uz valjane formule klasične logike sudova uzimaju i modalne formule nastale uniformnom supstitucijom propozicionalnih varijabli u tautologijama proizvoljnim formulama, npr. $\Diamond p \vee \neg\Diamond p$ je aksiom) i *aksiom distribucije* $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$. Pravila izvoda su klasični *modus ponens* i pravilo *nužnosti*: iz φ slijedi $\Box\varphi$. *Dokaz* i *teorem* definiraju se kao u klasičnoj logici.

Lako se dokazuje da su aksiomi valjane formule (dakle valjane na klasi svih okvira), kao i da pravila izvoda čuvaju valjanost. Indukcijom po duljini dokaza jednostavno slijedi *teorem adekvatnosti*, koji kaže da su svi teoremi sistema **K** valjane formule. Međutim, može se dokazati i obrat, *teorem potpunosti*, koji kaže da su sve valjane formule teoremi sistema **K**.

Interesantna su i različita proširenja sistema **K**. Primjerice, kako ćemo vidjeti, formula $\Diamond\Diamond p\rightarrow\Diamond p$ je valjana na klasi svih tranzitivnih okvira (reći ćemo da ta formula *definira* tranzitivnost). Dodavanjem te formule aksiomima sistema **K** dobiva se sistem poznat kao **K4**, za koji se pokazuje da generira točno sve formule valjane na tranzitivnim okvirima.

Na kraju ovih uvodnih napomena o modalnoj logici, treba spomenuti i općenitije modalne jezike, s više operatora na sudovima, koji ne moraju nužno biti unarni. Modalni jezik može se definirati na abecedi s proizvoljnim (prirodnim) brojem operatora, od kojih svaki može biti operator u proizvoljnom broju (propozicionalnih) varijabli. U semantici se ovim modalnim operatorima pridružuju odgovarajuće relacije (za unarne operatore binarne relacije, za binarne operatore ternarne relacije itd.) a istinitost modalnih formula se definira kvantificiranjem analogno kao u definiciji 1.3.(5).

Kao primjer spomenimo *osnovni temporalni jezik*, koji ima dva unarna operatora *prošlosti* i *budućnosti*, interpretirana kao "uvijek je bilo..." i "uvijek će biti...", dok su njihovi duali interpretirani s "u nekom trenutku je bilo..." i "u nekom trenutku će biti..." Elementi domene okvira za osnovni temporalni jezik u skladu s tim zovu se *trenuci*. Relacije u semantici pritom odražavaju intendiranu interpretaciju da je određeni trenutak "prije" ili "poslije" drugog trenutka. Jasno je da rad u skladu s intendiranom interpretacijom podrazumijeva postavljanje određenih zahtjeva na relacije, npr. temporalne relacije očito trebaju biti tranzitivne.

Rezultati ovog rada mogu se analogno dokazati za općenito definiran modalni jezik, no radi jednostavnosti promatrat ćemo ipak samo osnovni modalni jezik.

1.2. JEZICI KORESPONDENCIJE PRVOG REDA

Ovdje ćemo se ukratko prisjetiti osnova logike prvog reda. *Abeceda* jezika logike prvog reda sastoji se od varijabli (označenih s x, y i sl.), konstanti (c), bulovskih veznika (u definiciji je dovoljna negacija i disjunkcija), funkcijskih simbola (f, g i sl.) i relacijskih simbola (R). Ovdje nam treba jezik prvog reda *s jednakošću*, koji uključuje i simbol =.

Termi su varijable, konstante i izrazi oblika $f(t_1,t_2,t_3,...,t_n)$, gdje su t_i termi, a f funkcijski simbol.

Atomarne formule su izrazi oblika $t_1=t_2$ i $R(t_1,t_2,t_3,...,t_n)$, gdje su t_i termi, a R relacijski simbol.

Formule prvog reda definiraju se induktivno od atomarnih formula korištenjem bulovskih veznika i *kvantifikatora* (u definiciji je dovoljan jedan, obično se uzima *egzistencijalni* – ako je α formula, onda je i $\exists x\alpha$ formula). *Univerzalni kvantifikator* se definira kao dual egzistencijalnog: $\forall x\alpha := \neg\exists x\neg\alpha$.

Slobodne varijable su one koje nisu pod djelovanjem kvantifikatora (preciznije, takvo je barem jedno njihovo pojavljivanje u formuli), a *rečenica* je formula bez slobodnih varijabli.

Model M jezika prvog reda sastoji se od nepraznog skupa A – *domene*, odgovarajućih relacija (podskupova od A^n) pridruženih relacijskim simbolima, funkcija (s A^n u A) pridruženih odgovarajućim funkcijskim simbolima i elemenata (ne nužno svih) od A pridruženih konstantama iz abecede.

Kako bismo interpretirali slobodne varijable, uz model definiramo *valuaciju* g, koja svakoj varijabli pridružuje element domene modela. Svaki term se interpretira elementom modela koji zovemo *vrijednost* terma u modelu M uz valuaciju g, označavamo s $t^{\mathsf{M}}[g]$, a definiramo induktivno: konstante interpretiramo kao oznake za odgovarajuće elemente, varijable interpretiramo koristeći valuaciju, a kad znamo vrijednosti terma t_1, t_2, t_3, ..., t_n, terme oblika $f(t_1,t_2,t_3,...,t_n)$ interpretiramo kao rezultat odgovarajuće funkcije modela.

S $\alpha(x_1,x_2,...,x_n)$ označavamo formulu sa slobodnim varijablama x_1, x_2, ..., x_n. *Istinitost* formule u danom modelu i valuaciji označavamo s $\mathsf{M}\vDash\alpha[a_1,a_2,...,a_n]$, gdje su a_1, a_2,..., a_n elementi domene modela pridruženi slobodnim varijablama formule. Istinitost definiramo induktivno i intuitivno jasno, npr. $\mathsf{M}\vDash R(t_1,t_2,t_3,...,t_n)[a_1,a_2,...,a_n]$ ako i samo ako je n-torka sastavljena od vrijednosti terma $(t_1,t_2,t_3,...,t_n)$ u odgovarajućoj relaciji R modela M. Analogno, atomarna formula $t_1=t_2$ je istinita ako su vrijednosti terma t_1 i t_2 jednake. Potom se indukcijom na prirodan način definira istinitost proizvoljne formule. Posebno ćemo spomenuti samo da je $M\vDash\exists x\alpha[a_1,a_2,...,a_n]$ ako i samo ako postoji a u A takav da je α istinita uz valuaciju koja varijabli x pridružuje element a.

Očito, rečenica (formula bez slobodnih varijabli) je istinita za svaku valuaciju ako je istinita za barem jednu. Kažemo da je formula *valjana* ako je istinita u svakom modelu i za svaku valuaciju.

Za logiku prvog reda mogu se definirati različiti sistemi dokazivanja sa svojstvom *adekvatnosti* i *potpunosti* (tj. sistemi koji generiraju točno sve valjane formule). Osim toga, logika prvog reda je *kompaktna*, tj. ako svaki konačan podskup skupa formula prvog reda ima model, onda i cijeli skup ima model. Na kraju, spomenimo i *Löwenheim-Skolemov teorem*, koji kaže da skup formula prvog reda, ako ima proizvoljno velik konačan model, ima prebrojiv model[1] (ovdje "imati model" znači da postoji model u kojem su sve formule danog skupa istinite za svaku valuaciju).

Vratimo se sada osnovnom modalnom jeziku, kako bismo vidjeli kakav konkretan jezik prvog reda trebamo za uspostavu korespondencije. Nameće se potreba za reprezentiranjem propozicionalnih varijabli i modalnog operatora.

Definicija 1.5.

> Za osnovni modalni jezik sa skupom propozicionalnih varijabli $\Phi=\{p_0,p_1,p_2,...\}$ definiramo ***jezik korespondencije (na modelima) prvog reda*** (s jednakošću) $L^1(\Phi)$ s jednim binarnim relacijskim simbolom R pridruženim modalnom operatoru $\Diamond$ i unarnim relacijskim simbolima P_0, P_1, P_2... pridruženima propozicionalnim varijablama p_0, p_1, p_2...

Umjesto $R(x,y)$ i $P(x)$ pisat ćemo jednostavno Rxy, odnosno Px.

Model $M=(W,R,V)$ osnovnog modalnog jezika sada na prirodan način možemo promatrati i kao model jezika korespondencije prvog reda. Naime, W možemo gledati kao domenu i za jezik prvog reda, a R isto tako kao relaciju pridruženu istoimenom relacijskom simbolu. Što se tiče valuacije V, naprosto za svaku propozicionalnu varijablu p gledamo skup $V(p)$ kao unarnu relaciju (tj. skup) pridružen odgovarajućem unarnom relacijskom simbolu P jezika korespondencije prvog reda.

---

[1] Ovo je verzija Löwenheim-Skolemovog teorema za logiku prvog reda s jednakošću. Međutim, ako dopustimo slobodnu interpretaciju u kojoj simbol = može označavati bilo koju binarnu relaciju, onda vrijedi: ako skup formula ima model, onda ima i prebrojiv model.

Međutim, kada se udaljimo od efekta valuacije i promatramo korespondenciju formula na okviru $\mathsf{F} = (W,R)$, gubi se potreba za reprezentiranjem propozicionalnih varijabli. Naime, neformalno možemo reći da modalna formula koja je valjana na okviru F (tj. uvijek istinita bez obzira na valuaciju) izražava neko svojstvo relacije R. Kada za nju nađemo korespondenta prvog reda (što ne možemo uvijek), on će imati samo jedan relacijski simbol – R (neće biti unarnih relacijskih simbola, jer bi njihova prisutnost očito značila da istinitost formule ovisi o valuaciji V). Stoga nam za korespondenciju prvog reda na okvirima ne treba cijeli jezik $\mathsf{L}^1(\Phi)$.

Definicija 1.6.

> Za osnovni modalni jezik definiramo ***jezik korespondencije (na okvirima) prvog reda*** (s jednakošću) L^1 s jednim binarnim relacijskim simbolom R pridruženim modalnom operatoru $\Diamond$.

Okvir $\mathsf{F} = (W,R)$ osnovnog modalnog jezika sada možemo promatrati kao model jezika L^1, no radi izbjegavanja zabune također ćemo govoriti da je F okvir za L^1. Valjanost formule osnovnog modalnog jezika pritom je analogna istinitosti formule jezika L^1 na F. Radi analogije, reći ćemo također da je formula jezika L^1 *valjana na* F ako je istinita na F za svaku valuaciju g.

Moramo, međutim, napomenuti da valuacija u modelu osnovnog modalnog jezika nije analogna valuaciji u jeziku prvog reda. Prva, naime, određuje podskupove modela na kojima je propozicionalna varijabla istinita, a druga određuje svjetove modela koje pridružujemo slobodnim varijablama.

Očito je valjanost formule jezika prvog reda (istinitost u svakom modelu i valuaciji) analogna valjanosti (na klasi svih okvira) formule osnovnog modalnog jezika.

1.3. JEZIK KORESPONDENCIJE DRUGOG REDA

Dok logika prvog reda dopušta kvantifikaciju samo po individualnim ili objektnim varijablama, logika drugog reda kvantificira i po relacijskim i funkcijskim simbolima[2]. To joj daje izuzetnu izražajnost, ali istovremeno oduzima neka dobra svojstva. Važnost kvantifikacije drugog reda uvijek je najbolje ilustrirati činjenicom da se ni aksiom indukcije, možda i najčešće korištena matematička rečenica, ne može izraziti jezikom logike prvog reda:

$$\forall S(0 \in S \wedge \forall n(n \in S \to (n+1) \in S) \to \forall n(n \in S)) \qquad (1.1.)$$

Ovdje je izraz $\forall S$ kvantifikator drugog reda, a S varijabla kojoj se u interpretaciji pridružuju skupovi. Kada želimo zadržati prednosti logike prvog reda, aksiom indukcije prisiljeni smo zamijeniti shemom aksioma bez te kvantifikacije drugog reda. Dakle, za nešto što u logici drugog reda možemo reći jednom rečenicom, u logici prvog reda treba nam beskonačno mnogo njih.[3]

Aksiom matematičke indukcije je zapravo vrlo jednostavan primjer formule drugog reda, no za korespondenciju s modalnom logikom kompliciraniji nam ni neće trebati. Kvantifikator drugog reda uvijek ćemo, kao i ovdje, koristiti samo nad unarnim relacijama (tj. podskupovima). Takve se formule drugog reda zovu *monadske formule*. Osim toga, koristit ćemo samo univerzalni kvantifikator drugog reda i to uvijek samo na početku formule. Takve se formule zovu *univerzalne formule* drugog reda.

Već i taj univerzalni monadski fragment logike drugog reda ima neusporedivo veću izražajnost od logike prvog reda (teorija skupova može se aksiomatizirati jednom jedinom rečenicom tog jezika), ali istovremeno gubi mnoga svojstva, npr. kompaktnost i Löwenheim-Skolemovo svojstvo.[4]

Kako se formule drugog reda interpretiraju na istim modelima kao i formule prvog reda, a kvantifikacija drugog reda ima intuitivno jasno značenje, odmah možemo definirati odgovarajući jezik korespondencije.

---

[2] U ovom radu promatramo samo relacijske abecede (bez funkcijskih simbola) u jezicima prvog i drugog reda za koje istražujemo korespondenciju s modalnim jezikom, pa će nam biti potrebna samo kvantifikacija po relacijskim simbolima.
[3] No, i takva shema aksioma je tek aproksimacija aksioma indukcije. Naime, podskupova skupa prirodnih brojeva ima neprebrojivo mnogo, a formula logike prvog reda prebrojivo mnogo. Tek se kvantifikacijom po podskupovima može precizno izreći aksiom indukcije.
[4] To je dokazano u knjizi [5], str. 134.

Definicija 1.7.

> Za osnovni modalni jezik sa skupom propozicionalnih varijabli $\Phi=\{p_0,p_1,p_2,...\}$ definiramo ***jezik korespondencije drugog reda*** L^2 kao monadski jezik drugog reda dobiven tako da jeziku L^1 dodamo kolekciju monadskih varijabli indeksiranih elementima skupa Φ.

Monadske varijable u jeziku L^2 označavat ćemo isto kao i unarne relacijske simbole u jeziku $L^1(\Phi)$, s P_0, P_1, P_2...

Uočimo da valuacija g, koja kao i u jeziku prvog reda pridružuje elemente modela varijablama x, y,..., ovdje osim toga pridružuje podskupove monadskim varijablama P_0, P_1, P_2 itd. Te se varijable, naime, također u formulama mogu pojavljivati slobodno. Npr. formula Px može biti formula prvog, ali i drugog reda, ali P pritom unatoč istoj oznaci ima različitu prirodu. U prvom slučaju P je unarni relacijski simbol, kojem se pridružuje relacija (tj. podskup) već u definiciji modela. U drugom slučaju P je varijabla drugog reda, kojoj se tek valuacijom pridružuje podskup modela.

Okvir $F=(W,R)$ osnovnog modalnog jezika sada možemo promatrati kao model jezika L^2. Radi analogije, često ćemo reći da je F okvir za L^2. Ovdje je valuacija u modelu osnovnog modalnog jezika analogna valuaciji koja u jeziku L^2 pridružuje podskupove monadskim varijablama. Reći ćemo da je formula jezika L^2 *valjana na* F ako je istinita na F za svaku valuaciju g.

Dakle, uza sve što može jezik L^1, jezik L^2 ima i mogućnost kvantifikacije po podskupovima okvira.

1.4. NAPOMENE O IZRAČUNJIVOSTI

Na kraju ovog uvodnog dijela, u kojem smo opisali jezike među kojima ćemo kasnije uspostaviti korespondenciju, a i dali neke sugestije u kojem smjeru će ići razmišljanje o toj korespondenciji, potrebno je još nekoliko napomena o izračunjivosti. Naime, s tim pojmom srest ćemo se kod prijevoda s osnovnog modalnog jezika na jezike korespondencije, jer ćemo zahtijevati da korespondirajuće formule budu *izračunjive* jedna iz druge. To intuitivno znači da tražimo *program*, tj. *algoritam prijevoda* kojim od proizvoljne modalne formule (ili proizvoljne formule neke klase kao što je Sahlqvistova) dobivamo formulu jezika korespondencije.

Izračunjivima se smatraju (*Churchova teza*) funkcije koje se mogu dobiti kao rezultat rada apstraktnih računala (u konačno mnogo koraka) kao što su *Turingov* ili RAM-*stroj*. Postoji čitav niz takvih strojeva za koje se pokazuje da su ekvivalentni, tj. da izračunavaju točno istu klasu funkcija. Ovdje nećemo ići u detalje s definicijom ovakvih strojeva, jer će naši algoritmi prijevoda biti dovoljno jednostavni da je njihova izračunjivost očita.

I kad smo već kod izračunjivosti, dodajmo (bez dokaza) još jednu zanimljivu komparaciju naših jezika korespondencije. Modalna logika je *odlučiva*[5], što znači da postoji program, npr. za Turingov stroj, koji za proizvoljnu modalnu formulu može nakon konačno mnogo koraka točno reći je li valjana ili ne). Logika prvog reda nije odlučiva[6], ali je *rekurzivno prebrojiva* – postoji program koji sukcesivno generira sve valjane formule. Logika drugog reda gubi, pak, i to svojstvo.[7]

Uspostava korespondencije među ovim jezicima omogućuje i "prebacivanje" svojstava iz jednog u drugi (ili specifični segment drugog).

[5] Rezultati odlučivosti za modalnu logiku detaljno su izloženi u [1], str. 334-366.
[6] To je dokazano u [5], od str. 159.
[7] [5], str. 163.

2. KORESPONDENCIJA

U ovom dijelu definirat ćemo sintaktički prijevod s osnovnog modalnog jezika na jezike korespondencije, kao i semantičku korespondenciju formula osnovnog modalnog jezika s prijevodima prvog i drugog reda. Vidjet ćemo da izravno iz definicija istinitosti i valjanosti slijedi korespondencija modalnih formula s formulama prvog reda na modelima, a s formulama drugog reda na okvirima. No, uočit ćemo i primjere korespondencije na okvirima nekih modalnih formula s formulama prvog reda, ali i protuprimjere koji pokazuju da takve korespondencije nema za sve modalne formule. To će nas motivirati za nastavak rada u kojem istražujemo široku klasu modalnih formula koje korespondiraju na okvirima s formulama prvog reda.

2.1. KORESPONDENCIJA NA MODELIMA

Najprije ćemo definirati prijevod s osnovnog modalnog jezika na jezik korespondencije prvog reda $L^1(\Phi)$.

Definicija 2.1.

> Neka je x varijabla u jeziku $L^1(\Phi)$. Induktivno definiramo ***standardni prijevod*** ST_x kao preslikavanje koje formule osnovnog modalnog jezika preslikava u formule jezika korespondencije prvog reda:
> 1. $ST_x(p) \quad := Px$
> 2. $ST_x(\bot) \quad := x \neq x$
> 3. $ST_x(\neg\varphi) \quad := \neg ST_x(\varphi)$
> 4. $ST_x(\varphi \vee \psi) \quad := ST_x(\varphi) \vee ST_x(\psi)$
> 5. $ST_x(\Diamond\varphi) \quad := \exists y(Rxy \wedge ST_y(\varphi))$,
>
> gdje je y nova varijabla, tj. različita od svih koje smo u prijevodu formule koristili prije primjene (5).

Ako se sjetimo analogije modela osnovnog modalnog jezika i jezika $L^1(\Phi)$, možemo uočiti da definicija standardnog prijevoda zapravo prepisuje definiciju istinitosti (definiciju 1.3) iz metajezika kojim smo je izrekli u jezik prvog reda. U skladu s tim, očekujemo da je $ST_x(\Box\varphi) = \forall y(Rxy \to ST_y(\varphi))$. To ćemo sada i pokazati, što će nam poslužiti i kao primjer kojim ćemo ilustrirati kako funkcionira prijevod prvog reda:

$$
\begin{aligned}
ST_x(\Box\varphi) &= ST_x(\neg\Diamond\neg\varphi) \overset{(3)}{=} \neg ST_x(\Diamond\neg\varphi) \overset{(5)}{=} \neg\exists y(Rxy \wedge ST_y(\neg\varphi)) \\
&\overset{(3)}{=} \neg\exists y(Rxy \wedge \neg ST_y(\varphi)) = \forall y(Rxy \to ST_y(\varphi)).
\end{aligned}
$$

Zadnji korak nije iz definicije standardnog prijevoda, već smo koristili dualnost kvantifikatora i definicije bulovskih veznika kako bismo se riješili negacija. Ovdje ćemo još napomenuti da se pravilo analogno definiciji 2.1.(4) lako dokazuje i za ostale bulovske veznike.

Standardni prijevod svake modalne formule sadrži točno jednu slobodnu varijablu (i to x). Ona će reprezentirati svijet u kojem promatramo istinitost modalnih formula prema definiciji 1.3. Uočimo i da se modalni operatori prevode kao vezani kvantifikatori koji djeluju na dostiživim svjetovima.

Neka je sada $M=(W,R,V)$ model za osnovni modalni jezik, koji, kako smo ranije opisali, možemo promatrati i kao model za jezik $L^1(\Phi)$. Neka je w svijet iz tog modela, a φ formula osnovnog modalnog jezika. Izraz $M \vDash ST_x(\varphi)[w]$ sada nam označava da je formula prvog reda $ST_x(\varphi)$ istinita u modelu M uz valuaciju koja slobodnoj varijabli x pridružuje w.

Propozicija 2.2.

Neka je φ formula osnovnog modalnog jezika. Tada vrijedi:

1. za svaki model M i svijet w je $M, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $M \vDash ST_x(\varphi)[w]$;
2. za svaki model M je $M \Vdash \varphi$ ako i samo ako $M \vDash \forall x ST_x(\varphi)$.

Dokaz. 1. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule. *Složenost* formule φ definiramo kao ukupan broj pojavljivanja znakova $\neg$, $\vee$ i $\Diamond$ i označavamo s $k(\varphi)$.

Baza: neka je $k(\varphi)=0$, tj. φ je propozicionalna varijabla p ili $\bot$.
U prvom slučaju, $M, w \Vdash p$ po definiciji 1.3. vrijedi ako i samo ako je w u $V(p)$, a kako je $ST_x(p)=Px$, to je w u $V(p)$ ako i samo ako $M \vDash ST_x(\varphi)[w]$, po definiciji istinitosti u logici prvog reda.
U drugom slučaju, $\bot$ nije nikad istinita u modalnoj logici, a njen prijevod $x \neq x$ isto tako nikad nije istinit u logici prvog reda, pa tvrdnja slijedi trivijalno.

Pretpostavka: Neka tvrdnja vrijedi za sve formule složenosti manje ili jednake n.
Korak: Neka je $k(\varphi)=n+1$. Tada je φ jednaka $\neg\psi$, $\psi \vee \upsilon$ ili $\Diamond\psi$, pri čemu su formule ψ i υ složenosti manje ili jednake n. Pogledajmo slučaj $\varphi = \Diamond\psi$.

Po definiciji 1.3, $M, w \Vdash \Diamond\psi$ ako i samo ako postoji v iz W takav da je Rwv i $M, v \Vdash \psi$. S druge strane, iz definicije 2.1.(5), $M \vDash ST_x(\Diamond\psi)[w]$ ako i samo ako postoji v iz W takav da je Rwv i $M \vDash ST_x(\psi)[w]$. Tvrdnja slijedi jer je po prepostavci indukcije $M, v \Vdash \psi$ ako i samo ako $M \vDash ST_x(\psi)[w]$. Analogno se dokazuju i ostali slučajevi.

2. Po definiciji 1.3, $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ ako i samo ako je $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ za svaki w iz W, a to zbog (1) vrijedi ako i samo ako je $\mathcal{M} \vDash ST_x(\varphi)[w]$ za svaki w iz W, što u logici prvog reda vrijedi ako i samo ako je $\mathcal{M} \vDash \forall x ST_x(\varphi)$. ■

Dakle, možemo reći da je lokalna istinitost modalne formule reprezentirana standardnim prijevodom, a globalna istinitost univerzalnim kvantificiranjem po varijabli koja je u standardnom prijevodu slobodna. Korespondencija na modelima polazna je točka u istraživanju korespondencije na okvirima, koja nas posebno zanima jer nadilazi efekt valuacije, pa izražava svojstva relacije pridružene modalnom operatoru. No, prije nego prijeđemo na okvire, napomenut ćemo u kojem smjeru možemo ići u istraživanju modela i koje su posljedice i ograničenja korespondencije na modelima.

Najprije, kao što smo i ranije napomenuli, korespondencija može poslužiti kao most za prebacivanje rezultata, ideja i tehnika dokazivanja iz modalne logike u logiku prvog reda i obratno. Kako svaka modalna formula korespondira s formulom prvog reda, svojstva logike prvog reda, kao što je kompaktnost ili Löwenheim-Skolemovo svojstvo, jednostavno se prenose u modalnu logiku. Razmotrimo npr. kompaktnost: neka je Σ skup modalnih formula čiji svaki konačan podskup ima model (tj. postoji model u kojem je svaka formula podskupa globalno istinita). Tada zbog propozicije 2.2. svaki konačan podskup skupa standardnih prijevoda također ima model, pa zbog kompaktnosti logike prvog reda cijeli skup standardnih prijevoda formula iz Σ ima model. Opet zbog propozicije 2.2. slijedi da Σ ima model.

S druge strane, modalna logika je odlučiva, a logika prvog reda nije. Međutim, standardni prijevod omogućuje određivanje odlučivih fragmenata logike prvog reda. Nadalje, iz definicije standardnog prijevoda naprosto na razini sintakse je očito da on nije surjektivan, no postavlja se pitanje je li svaka formula jezika korespondencije prvog reda ekvivalentna nekom standardnom prijevodu modalne formule (u smislu da je istinita na točno istim modelima i valuacijama). Odgovor je ne. Kako bismo to pokazali, uvodimo pojam *bisimulacije*, specifičnog odnosa među modelima koji igra veliku ulogu u teoriji modela.

Definicija 2.3.

Za modele $\mathcal{M} = (W,R,V)$ i $\mathcal{M}' = (W',R',V')$, relaciju $Z \subseteq W \times W'$ zovemo ***bisimulacija*** između $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ ako ispunjava sljedeće uvjete:

(at) za sve (w,w') iz Z i sve propozicionalne varijable p vrijedi:
w je u $V(p)$ ako i samo ako je w' u $V'(p)$;
(forth) za sve (w,w') iz Z i sve v iz W takve da je Rwv postoji v' iz W'

takav da je (v,v') u Z i $R'w'v'$;

(back) za sve (w,w') iz Z i sve v' iz W' takve da je $R'w'v'$ postoji v iz W takav da je (v,v') u Z i Rwv.

Ako je Z bisimulacija između M i M' takva da je (w,w') u Z, kažemo da su w i w' *bisimilarni*.

Kažemo da su svijet w iz M i svijet w' iz M' *modalno ekvivalentni* ako je skup formula istinitih u w jednak skupu formula istinitih u w'.

Propozicija 2.4.

Neka su M i M' modeli, w svijet iz M i w' iz M'. Tada vrijedi: ako su w i w' bisimilarni, onda su i modalno ekvivalentni.

Dokaz. Dokazuje se indukcijom po složenosti formule.[8] ■

Jednostavnije rečeno, propozicija 2.4. kaže da su modalne formule *invarijantne* na bisimulacije, tj. da bisimulacija čuva njihovu istinitost, i to u oba smjera. Kako je bisimulacija definirana na modelima, očito se o njoj može govoriti i iz perspektive logike prvog reda. Jasno je onda da su i standardni prijevodi modalnih formula uvijek invarijantni na bisimulacije. Međutim, proizvoljna formula prvog reda ne mora biti invarijantna na bisimulacije, što nam omogućuje otkrivanje formula jezika $L^1(\Phi)$ koje nisu ekvivalentne standardnim prijevodima modalnih formula. Kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru, postoje i vrlo jednostavne takve formule.

Primjer 2.5.

Formula Rxx nije ekvivalentna standardnom prijevodu nijedne modalne formule.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je φ modalna formula takva da je $ST_x(\varphi)$ ekvivalentna s Rxx. Neka je M jednočlan refleksivni model i w jedini svijet tog modela, uz valuaciju takvu da je $V(p)=\{w\}$ za svaku propozicionalnu varijablu p. Očito je $M\vDash Rxx[w]$. Neka je sada N model strogo uređenih prirodnih brojeva, uz valuaciju takvu da je $V(p)=\mathbb{N}$ za svaku propozicionalnu varijablu p. Tada za sve v iz N očito vrijedi $N \vDash \neg Rxx[w]$.

[8] Sustavan prikaz svojstava bisimulacije, detaljan dokaz ove propozicije, kao i protuprimjer za obrat (modalno ekvivalentni svjetovi ne moraju biti bisimilarni), mogu se vidjeti u radu [9], str. 36-43.

Definiramo relaciju Z koja povezuje sve svjetove iz N s jedinstvenim svijetom iz M, tj. $Z=\mathbb{N}\times\{w\}$. Iz definicije relacija i valuacija lako se vidi da je Z bisimulacija.

Iz $M\vDash Rxx[w]$ zbog propozicije 2.2. slijedi $M, w\Vdash\varphi$. No, za svaki v iz $\mathbb{N}$, w i v su bisimilarni, pa iz propozicije 2.4. slijedi $N, v\Vdash\varphi$. Opet iz propozicije 2.2. slijedi $N\vDash Rxx[v]$, što je u kontradikciji s $N \vDash\neg Rxx[v]$. ■

Invarijantnost na bisimulacije je, dakle, nužan uvjet da formula prvog reda korespondira na modelima s nekom modalnom formulom. Štoviše, *Van Benthemov teorem karakterizacije* (kojeg ovdje nećemo dokazivati) kaže da je formula jezika korespondencije prvog reda ekvivalentna standardnom prijevodu neke modalne formule ako i samo ako je invarijantna na bisimulacije.

Invarijantnost je važan pravac istraživanja modela. Uz bisimulacije, kao relacije koje u svojoj definiciji uzimaju u obzir modalnost, istražuje se i čitav niz čisto algebarskih operacija i relacija među modelima, kao što su *disjunktne unije*, *generirani podmodeli*, *morfizmi* i sl.[9] Ovdje ćemo dati definiciju i osnovni rezultat samo za generirane podmodele, jer će nam oni kasnije poslužiti u traganju za protuprimjerima.

Definicija 2.6.

> Neka su $M=(W,R,V)$ i $M'=(W',R',V')$ modeli. Kažemo da je M' *podmodel* od M ako je $W'\subseteq W$, R' restrikcija od W na W' (tj. $R'=R\cap(W'\times W')$ i V' restrikcija od V na W' (tj. za svaki p je $V'(p)=V(p)\cap W'$). Kažemo da je M' ***generirani podmodel*** od M ako je M' podmodel od M i za svaki svijet w vrijedi: ako je w u M' i Rwv, onda je i v u M'.

Propozicija 2.7.

> Neka je M' generirani podmodel od M. Tada za svaku modalnu formulu φ i za svaki svijet w iz M' vrijedi:
> $M, w\Vdash\varphi$ ako i samo ako $M', w\Vdash\varphi$.

Dokaz. Definiramo relaciju Z između $M=(W,R,V)$ i $M'=(W',R',V')$ ovako: $Z=\{(w,w)|w\in W'\}$. Lako se vidi da je Z bisimulacija, pa tvrdnja odmah slijedi iz propozicije 2.4. ■

---

[9] Osnovni rezultati invarijantnosti na modelima za osnovni modalni jezik, uključujući i dokaz Van Benthemovog teorema karakterizacije, mogu se vidjeti u radu [2], a rezultati na modelima za općenito definiran modalni jezik detaljno su izloženi u knjizi [1], str. 50-123.

2.2. KORESPONDENCIJA NA OKVIRIMA

Korespondenciju dviju formula različitih jezika definirat ćemo kao podudaranje klasa okvira na kojima su te formule valjane. Vidjet ćemo da na razini okvira svaka modalna formula korespondira s formulom drugog reda, no da često možemo naći i ekvivalent prvog reda. Naći ćemo, međutim, čak i jednostavne primjere modalnih formula koje nemaju korespondenta prvog reda na okvirima, no isto tako i primjere vrlo jednostavnih formula prvog reda koje nemaju modalnog korespondenta na okvirima. Modalni jezik posjeduje, dakle, neobičnu kombinaciju izražajnih mogućnosti jezika prvog i drugog reda.

Definicija 2.8.

Neka je φ formula osnovnog modalnog jezika i F klasa okvira. Kažemo da ***φ definira*** F ako za sve okvire F vrijedi da je F u F ako i samo ako vrijedi $F \Vdash \varphi$. Slično, za skup Γ formula osnovnog modalnog jezika kažemo da *definira* F ako za sve okvire F vrijedi da je F u F ako i samo ako je svaka formula iz Γ valjana na F.

Kažemo da je klasa okvira ***(modalno) definabilna*** ako postoji skup formula koji je definira.

Neka je α formula jezika korespondencije prvog ili drugog reda (L^1 ili L^2). Kažemo da ***α definira*** klasu okvira F ako za sve okvire F vrijedi da je F u F ako i samo ako je α valjana na F (tj. istinita na F za svaku valuaciju). Analogna je definicija za skup formula jezika korespondencije prvog ili drugog reda.

Kažemo da su formula φ osnovnog modalnog jezika i formula α jezika korespondencije (L^1 ili L^2) jedna drugoj ***korespondenti*** *(na okvirima)* ako definiraju istu klasu okvira.

Neformalno kažemo da formula ili skup formula definira neko *svojstvo* ako definira klasu okvira s tim svojstvom. Npr. formula jezika korespondencije prvog reda $\forall xRxx$ definira klasu refleksivnih okvira, pa kratko kažemo da ta formula definira refleksivnost. Kao što je već u Uvodu napomenuto, dokazat ćemo da i modalna formula $p \rightarrow \Diamond p$ definira refleksivnost, pa po definiciji 2.8. ona korespondira s formulom $\forall xRxx$. Koncept definabilnosti na sličan način ćemo koristiti u dokazivanju korespondencije u drugim primjerima.

Sjetimo se kako smo korespondenciju na modelima dokazali naprosto prepisujući definiciju istinitosti jezikom prvog reda. Slično ćemo sada učiniti s korespondencijom na okvirima, prepisujući definiciju valjanosti. Za proizvoljnu modalnu formulu φ, cilj nam je pronaći korespondenta, tj. formulu jezika korespondencije koja je valjana na istim okvirima kao φ. Valjanost na okviru F znači istinitost u svim modelima baziranim na F, tj. da je formula istinita za svaku valuaciju. Kako valuacija svakoj propozicionalnoj varijabli u φ pridružuje podskup okvira, to kvantificiranje po valuacijama u definiciji valjanosti zapravo znači kvantificiranje po svim podskupovima okvira. Tako izravno dolazimo do sljedeće propozicije, koja proizvoljnoj modalnoj formuli nalazi korespondenta u jeziku drugog reda L^2.

Propozicija 2.9.

Neka je φ formula osnovnog modalnog jezika. Tada za svaki okvir F i svijet w iz F vrijedi:

1. $F, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $F \vDash \forall P_1 ... \forall P_n ST_x(\varphi)[w]$;
2. $F \Vdash \varphi$ ako i samo ako $F \vDash \forall P_1 ... \forall P_n \forall x ST_x(\varphi)$,

gdje kvantifikatori drugog reda vežu monadske varijable drugog reda P_i pridružene propozicionalnim varijablama p_i koje se pojavljuju u φ.

Dokaz. Neka je $M = (F, V)$ proizvoljan model baziran na F i w svijet iz F. Tada prema propoziciji 2.2. vrijedi da je $M, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $M \vDash ST_x(\varphi)[w]$. Pritom se u formuli prvog reda $ST_x(\varphi)$ pojavljuju unarni relacijski simboli P_i koji odgovaraju propozicionalnim varijablama iz φ. U formuli drugog reda $\forall P_1 ... \forall P_n ST_x(\varphi)$ ti simboli, iako jednako označeni, mijenjaju prirodu – postaju monadske varijable drugog reda. Prva tvrdnja ove propozicije tada izravno slijedi iz definicije valjanosti u svijetu okvira u definiciji 1.4. i definicije istinitosti u logici drugog reda. Druga tvrdnja analogno slijedi iz definicije valjanosti na okviru u definiciji 1.4. ■

Formulu $\forall P_1 ... \forall P_n \forall x ST_x(\varphi)$ zovemo *prijevod drugog reda* formule φ. Napomenimo još jednom da u prijevodu drugog reda P_i označavaju monadske varijable, a u standardnom prijevodu (prvog reda) označavaju unarne relacijske simbole. U nastavku rada razmatramo samo korepondenciju na okvirima, pa ćemo od sada pojavljivanja od P_i i u samom prijevodu $ST_x(\varphi)$ (bez kvantifikatora) promatrati kao (u tom slučaju slobodne) monadske varijable drugog reda. Korespondencija modalnih formula s formulama drugog reda na okvirima ne iznenađuje, jer gotovo trivijalno slijedi iz definicije valjanosti. Uočimo i da je standardni prijevod iz definicije 2.1. i prijevod drugog reda iz propozicije 2.9. očito izračunjiv, tj. lako je napisati računalni program koji će za proizvoljnu modalnu formulu kao rezultat dati te prijevode. Netrivijalni su, međutim, slučajevi korespondencije s formulama prvog reda na okvirima. Ovdje ćemo razmotriti primjere takve korespondencije i protuprimjere kojima ćemo pokazati da ona nije univerzalna. Tada će se postaviti pitanje može li se na osnovi sintakse modalne formule utvrditi korespondira li ona na okvirima s nekom formulom prvog reda, odnosno je li takva korespondencija izračunjiva. Odgovor na to pitanje tražit ćemo u sljedećem poglavlju.

Primjer 2.10.

> Formula osnovnog modalnog jezika
>
> $$p \to \Diamond p \tag{2.1}$$
>
> korespondira na okvirima s formulom prvog reda $\forall x Rxx$, tj. definira refleksivnost.

Dokaz. Dokazujemo da je refleksivnost okvira nužna i dovoljna za valjanost formule (2.1). Neka je F refleksivan okvir, V proizvoljna valuacija i w svijet iz F takav da je (F,V), $w \Vdash p$. Treba dokazati da je i $\Diamond p$ istinita u w, tj. da je p istinita u nekom svijetu dostiživom iz w. No, kako je R refeksivna, w je dostiživ iz samog sebe, pa zbog proizvoljnosti valuacije slijedi da je (2.1) valjana na F.

Obratno, neka je F okvir takav da je (2.1) valjana na F. Treba dokazati da je R refleksivna. Pretpostavimo suprotno i neka je w svijet koji nije dostiživ iz samog sebe. Za kontradikciju je dovoljno pronaći valuaciju V i svijet u kojem je p istinito, a $\Diamond p$ nije. To će biti upravo irefleksivni svijet w. Treba nam valuacija takva da je w u $V(p)$, no nema svijeta dostiživog iz w koji je u $V(p)$. Poslužit će nam *minimalna* valuacija koja zadovoljava prvi uvjet, tj. valuacija takva da je $V(p)=\{w\}$. Odmah slijedi (F,V), $w \Vdash p$. Neka je sada v R-sljedbenik svijeta w. Iz pretpostavke slijedi da je v različit od w, pa zbog definicije valuacije v nije u $V(p)$, tj. ne vrijedi (F,V), $v \Vdash p$. Zbog proizvoljnosti svijeta v slijedi da $\Diamond p$ nije istinita u w, što je u kontradikciji s pretpostavkom valjanosti formule (2.1) na okviru F. ■

Uzimanje minimalne valuacije ključno je u dokazivanju korespondencije prvog reda na okvirima. Pogledajmo još jedan primjer koji smo već spomenuli.

Primjer 2.11.

> Formula osnovnog modalnog jezika
>
> $$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p \tag{2.2}$$
>
> korespondira s formulom prvog reda $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$, tj. definira tranzitivnost.

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ tranzitivan okvir, V proizvoljna valuacija i w svijet iz $\mathcal{F}$ takav da je $(\mathcal{F},V)$, $w \Vdash \Diamond\Diamond p$. Treba dokazati da je i $\Diamond p$ istinita u w, tj. da je p istinita u nekom svijetu dostiživom iz w. No, iz $(\mathcal{F},V)$, $w \Vdash \Diamond\Diamond p$ po definiciji 1.3.(5) odmah slijedi da postoji v takav da je Rwv i $(\mathcal{F},V)$, $w \Vdash \Diamond p$.

Obratno, neka je $\mathcal{F}$ okvir takav da je (2.2) valjana na $\mathcal{F}$. Pretpostavimo da R nije tranzitivna. Neka je w svijet takav da postoje svjetovi v i u takvi da je Rwv i Rvu, no nije Rwu. Slično kao u primjeru 2.10, za kontradikciju nam treba valuacija i svijet u kojem je $\Diamond\Diamond p$ istina, a $\Diamond p$ laž. Opet ćemo uzeti minimalnu valuaciju za koju je $\Diamond\Diamond p$ istina u w, a lako se vidi da je to valuacija V takva da je $V(p)=\{u\}$. Neka je sada t svijet dostiživ iz w. No, kako u nije R-dostiživ iz w, slijedi da t nije u $V(p)$, pa zbog proizvoljnosti svijeta t slijedi da $\Diamond p$ nije istina u w. ■

Sada ćemo primjerom pokazati da nema svaka modalna formula korespondenta prvog reda na okvirima. *Löbova formula* igra važnu ulogu u logici dokazivosti.[10] Löb je dokazao da je ona teorem logike dokazivosti za Peanovu aritmetiku, a ovdje ćemo dokazati da ona definira klasu okvira koja se ne može definirati jezikom korespondencije prvog reda.

Primjer 2.12.

1. *Löbova formula*
$$\Box(\Box p \to p) \to \Box p \tag{2.3}$$
definira klasu okvira (W,R) takvih da je R tranzitivna, a njen inverz dobro utemeljena relacija, tj. svaki neprazan podskup od W ima R-maksimum.
2. Ta klasa okvira ne može se definirati formulom prvog reda.

Dokaz. 1. Neka je $\mathcal{F}=(W,R)$ okvir s tranzitivnom i inverzno dobro utemeljenom relacijom R. Pretpostavimo suprotno, tj. da (2.3) nije valjana na $\mathcal{F}$. Tada postoji valuacija V i svijet w u kojem je $\Box(\Box p \to p)$ istinita, a $\Box p$ nije. Zbog toga postoji svijet w_1 dostiživ iz w takav da p nije istina u w_1. No, kako je $\Box p \to p$ istina za sve R-sljedbenike svijeta w, to je $\Box p$ laž u w_1 (jer bi inače p bilo istina u w_1). Stoga i w_1 ima sljedbenika w_2 u kojem je p laž. Zbog tranzitivnosti je w_2 ujedno i sljedbenik svijeta w. Ponavljanjem istog argumenta dobivamo beskonačan rastući lanac w_1, w_2, w_3, ..., što je u kontradikciji s dobrom utemeljenošću inverza relacije R.

Obratno, neka je $\mathcal{F}$ okvir takav da je (2.3) valjana na $\mathcal{F}$. Pretpostavimo da R nije tranzitivna ili da joj inverz nije dobro utemeljen. Za kontradikciju, u oba slučaja trebamo naći valuaciju i svijet u kojem (2.3) nije istinita. Najprije pretpostavimo

[10] Logika dokazivosti sustavno je izložena u knjizi [3].

da R nije tranzitivna. Neka je w svijet takav da postoje svjetovi v i u takvi da je Rwv i Rvu, no nije Rwu. Neka je valuacija V takva da je $V(p)=W\setminus\{u,v\}$.

Tada je $\Box(\Box p\rightarrow p)$ istinita u w, tj. $\Box p\rightarrow p$ je istinita u svakom svijetu dostiživom iz w. Naime, zbog definicije valuacije, p je istina u svakom svijetu dostiživom iz w, osim u v, no niti $\Box p$ nije istinita u v, jer p nije istinita u svijetu u, koji je dostiživ iz v.

Međutim, $\Box p$ nije istinita u w, jer p nije istina u svijetu v, koji je dostiživ iz w. Dakle, Löbova formula nije istinita u w, što je u kontradikciji s pretpostavkom valjanosti, pa slijedi da je R tranzitivna. Sada pretpostavimo da inverz relacije R nije dobro utemeljen, tj. da postoji beskonačan rastući lanac w_0, w_1, w_2,... Neka je V valuacija takva da je
$V(p)=W\setminus\{v\in W \mid$ postoji beskonačan rastući lanac s početkom u $v\}$.

Tada je $\Box(\Box p\rightarrow p)$ istinita u w_0, jer je, lako je provjeriti, $\Box p\rightarrow p$ istinita u svakom svijetu modela $(\mathcal{F},V)$, pa tako i u svakom svijetu dostiživom iz w_0. No, $\Box p$ nije istinita u w_0, jer p nije istina u svjetovima w_i, koji su dostiživi iz w_0. Dakle, (2.3) nije istinita u w_0, što je u kontradikciji s pretpostavkom valjanosti, pa slijedi tvrdnja.

2. Pretpostavimo da postoji formula prvog reda λ koja korespondira s Löbovom formulom, tj. definira istu klasu okvira. Za svaki prirodan broj n definiramo formulu prvog reda $\sigma_n(x_0,...,x_n)=Rx_0x_1\wedge Rx_1x_2\wedge...\wedge Rx_{n-1}x_n$. Promotrimo skup formula $\Sigma=\{\lambda\}\cup\{\forall x\forall y\forall z((Rxy\wedge Ryz)\rightarrow Rxz)\}\cup\{\sigma_n|n\in\mathbb{N}\}$. Očito je da svaki konačan podskup od Σ ima model (i to konačan linearno uređen skup). Zbog kompaktnosti logike prvog reda, tada i cijeli skup Σ ima model. No, nije moguće da su sve formule iz $\{\sigma_n|n\in\mathbb{N}\}$ istinite na modelu u kojem je inverz relacije R dobro utemeljen, a λ uz tranzitivnost definira upravo to svojstvo. ■

U potrazi za formulama prvog reda koje nemaju modalnog korespondenta na okvirima, poslužit ćemo se, slično kao i na razini modela, invarijantama. Definirat ćemo analogon generiranog podmodela.

Definicija 2.13.

> Neka su $\mathcal{F}=(W,R)$ i $\mathcal{F}'=(W',R')$ okviri. Kažemo da je $\mathcal{F}'$ ***generirani podokvir*** od $\mathcal{F}$ ako je W' podskup od W, R' restrikcija od R na W' i za sve svjetove w vrijedi: ako je w u W' i Rwv, onda je i v u W'.

Uočimo da je definicija 2.13. dobivena naprosto izbacivanjem uvjeta na valuaciju iz definicije generiranog podmodela (definicije 2.6). Vrijedi i analogon propozicije 2.7, tj. u generiranom podokviru sačuvana je valjanost modalnih formula.

Propozicija 2.14.

Neka je F' generirani podokvir od F. Tada za svaku modalnu formulu φ vrijedi: ako je $F \Vdash \varphi$, onda je $F' \Vdash \varphi$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi izravno iz propozicije 2.7. ■

Međutim, valjanost formula prvog reda ne mora biti sačuvana u generiranom podokviru. To nam omogućuje nalaženje formula jezika L^1 koje nemaju modalnog korespondenta. Slijedi jedan takav primjer.

Primjer 2.15.

Klasa okvira u kojima postoji refleksivna točka (tj. klasa definirana formulom prvog reda $\exists xRxx$) nije modalno definabilna.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da skup modalnih formula Γ definira klasu okvira u kojima postoji refleksivna točka. Pogledajmo okvir $F=(W,R)$ takav da je $W=\{w,v,u\}$ i $R=\{(w,w),(v,u),(u,v)\}$. Zbog Rww očito je svaka formula iz Γ valjana na F. Pogledajmo sada okvir $F'=(W',R')$ u kojem je $W'=\{v,u\}$ i $R'=\{(v,u),(u,v)\}$. Tada je F' generirani podokvir od F. Iz propozicije 2.14. slijedi da je svaka formula iz Γ valjana na F', što je u kontradikciji s činjenicom da F' nema refleksivnu točku. ■

Istraživanje korespondencije na okvirima sada može ići u dva pravca: odrediti klasu formula prvog reda koje korespondiraju s modalnim formulama, odnosno odrediti klasu modalnih formula koje korespondiraju s formulama prvog reda. Prvi zadatak se rješava strategijom pokazanom u primjeru 2.15. Uz generirane podokvire, definiraju se i druge algebarske relacije i operacije među okvirima analogne onima za modele, kao što su *disjunktne unije*, *morfizmi* i sl, za koje se pokazuje da čuvaju valjanost modalnih formula. Kada želimo dokazati da neka formula prvog reda nema modalnog korespondenta, dovoljno je na primjeru vidjeti da njena valjanost nije očuvana primjenom neke od tih invarijanti.

Goldblatt-Thomasonov teorem, jedan od najvažnijih rezultata modalne logike, daje nužne i dovoljne uvjete modalne definabilnosti: klasa okvira (definirana formulama prvog reda) je modalno definabilna ako i samo ako je zatvorena na disjunktne unije, generirane podokvire i slike ograničenih morfizama, te reflektira ultrafilterska proširenja.[11]

No, ovaj rad bavi se drugim zadatkom – određivanjem klase modalnih formula koje imaju korespondenta prvog reda, uz dodatni zahtjev da ta klasa bude izračunjiva, tj. da se može napisati program koji će za modalnu formulu reći ima li ona takvog korespondenta i ispisati ga ako postoji. Kao što je već napomenuto, takvog programa nema za proizvoljnu modalnu formulu, no u nastavku rada ćemo odrediti široku klasu formula osnovnog modalnog jezika koje imaju izračunjiv prijevod prvog reda na okvirima.

[11] Definicije svih ovih pojmova, dokaz Goldblatt-Thomasonovog teorema, kao i drugi rezultati teorije okvira, sustavno su izloženi u knjizi [1], str. 124-189.

3. SAHLQVISTOVE FORMULE

U primjerima 2.10. i 2.11. vidjeli smo da neke modalne formule definiraju iste klase okvira kao formule prvog reda. Tvrdnje da te formule korespondiraju s formulama prvog reda postavili smo kao hipoteze i dokazali ih semantički. Sada nas zanima možemo li iz sintakse modalne formule (koja ima korespondenta prvog reda) izračunati takvog korespondenta. Propozicija 2.9. rezultirala je lako izračunjivim prijevodom drugog reda. U ovom poglavlju vidjet ćemo kako se, polazeći od prijevoda drugog reda *Sahlqvistovih formula*, dolazi do njihovog korespondenta prvog reda.

Pogledajmo npr. formulu (2.1) koja, kako smo dokazali, definira refleksivne okvire, tj. korespondira s formulom $\forall xRxx$. Prevedimo je sada na jezik korespondencije drugog reda, tj. izračunajmo formulu $\forall P\forall xST_x(p\rightarrow\Diamond p)$. Najprije primjenjujemo definiciju 2.1. da bismo dobili standardni prijevod $ST_x(p\rightarrow\Diamond p)$.

$$ST_x(p\rightarrow\Diamond p) = ST_x(p)\rightarrow ST_x(\Diamond p) = Px\rightarrow\exists y(Rxy\wedge ST_y(p)) = Px\rightarrow\exists y(Rxy\wedge Py)$$

Sada iz propozicije 2.9. slijedi da formula (2.1) ima prijevod drugog reda

$$\forall P\forall x(Px \rightarrow \exists y(Rxy \wedge Py)) \qquad (3.1)$$

Kako (2.1) definira refleksivnost, slijedi da je (3.1) također (neobično komplicirani) izraz za refleksivnost, no u jeziku drugog reda. To nije teško i direktno provjeriti. Slično, kompleksnu formulu drugog reda za tranzitivnost dobili bismo prevodeći formulu (2.2). Sada ćemo postupno razviti postupak (koji se može jednostavno isprogramirati) koji na osnovi sintakse prevodi komplicirane prijevode drugog reda poput (3.1) na jednostavne korespondente prvog reda kao što je $\forall xRxx$. Tako ćemo dobiti djelomičan odgovor na pitanje kakva treba biti modalna formula da bi imala korespondenta prvog reda na okvirima, tj. pronaći ćemo sistem u toj zasad pomalo neobičnoj i iznenađujućoj korespondenciji.

3.1. LOKALNA KORESPONDENCIJA

Najprije ćemo definirati lokalnu korespondenciju na okvirima. Riječ je o zahtjevu da se valjanost korespondenata podudara i lokalno.

Definicija 3.1.

> Neka je φ formula osnovnog modalnog jezika i $\alpha(x)$ formula jezika korespondencije prvog ili drugog reda (x je jedina slobodna varijabla formule α). Kažemo da su φ i $\alpha(x)$ međusobno ***lokalni korespondenti*** ako za svaki okvir i za svaki svijet vrijedi:
> $\mathcal{F}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathcal{F} \vDash \alpha[w]$.

Sada je jasno da propozicija 2.9.(1) kaže da modalna formula φ ima lokalnog korespondenta drugog reda $\forall P_1 ... \forall P_n ST_x(\varphi)$, dok druga tvrdnja te propozicije govori o (globalnim) korespondentima opisanim u definiciji 2.8. No, to nije jedino mjesto gdje smo već (implicitno) koristili lokalnu korespondenciju. U primjeru 2.10. smo dokazali da $p \rightarrow \Diamond p$ korespondira sa $\forall x Rxx$, no čitajući dokaz vidimo da smo to učinili pokazujući da $p \rightarrow \Diamond p$ lokalno korespondira s Rxx. Slično, u primjeru 2.11. smo pokazali da $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ lokalno korespondira sa $\forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$. Iz ovih primjera je očito na koji način se iz lokalnog korespondenta modalne formule dobiva globalni korespondent, a sada ćemo to i precizno iskazati.

Propozicija 3.2.

> Ako je $\alpha(x)$ lokalni korespondent modalne formule φ, onda je $\forall x \alpha(x)$ njen globalni korespondent. Posebno, ako φ ima lokalnog korespondenta prvog reda, onda ima i globalnog korespondenta prvog reda.

Dokaz. Izravno iz definicija valjanosti u svijetu okvira i valjanosti na okviru u definiciji 1.4, definicije istinitosti u logici prvog i drugog reda, te definicije lokalne i globalne korespondencije. ■

Međutim, što je možda manje očekivano, obrat ne vrijedi: postoje modalne formule koje imaju korespondenta prvog reda na okvirima, a nemaju lokalnog korespondenta. No, ovdje nećemo trebati takve formule, jer sve *Sahlqvistove formule* (do čije pune definicije ćemo doći postupno) imaju lokalnog korespondenta. Stoga ćemo u nastavku sve rezultate dokazivati u terminima lokalne korespondencije, imajući na umu propoziciju 3.2. koja onda osigurava i globalnu korespondenciju.

3.2. ZATVORENE FORMULE

U korespondenciji prvog reda na okvirima malo toga je očito na prvi pogled, no ipak postoji klasa modalnih formula kod kojih je ta korespondencija trivijalna. To su formule bez propozicionalnih varijabli.

Definicija 3.3.

> Kažemo da je formula osnovnog modalnog jezika φ ***zatvorena*** ako se u njoj ne pojavljuje nijedna propozicionalna varijabla.

Riječ je, dakle, o formulama koje su izgrađene samo od logičkih konstanti (za laž i istinu) uz upotrebu bulovskih veznika i modalnih operatora. Kako smo već napomenuli, u potrazi za korespondentom prvog reda uvijek ćemo polaziti od prijevoda drugog reda iz propozicije 2.9. (i to iz prve tvrdnje te propozicije, jer tražimo lokalnog korespondenta). No, ovdje nam to neće biti nikakav problem, jer se zbog izostanka propozicionalnih varijabli u tom prijevodu neće pojaviti kvantifikacija drugog reda.

Propozicija 3.4.

> Neka je φ zatvorena formula. Tada φ lokalno korespondira s formulom prvog reda $\alpha_\varphi(x)$ koja je efektivno izračunjiva iz φ.

Dokaz. Kako φ ne sadrži nijednu propozicionalnu varijablu, iz propozicije 2.9. odmah slijedi da je F, $w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $F \vDash ST_x(\varphi)[w]$. Lako je napisati program koji iz φ izračunava $ST_x(\varphi)$, pa tvrdnja odmah slijedi. ■

Koliko god bile trivijalne, zatvorene formule su vrlo korisne u primjenama (npr. u logici dokazivosti). Naime, čak i bez ijedne propozicionalne varijable mogu se izraziti matematički relevantna svojstva okvira. Vidjet ćemo to na sljedećem primjeru.

Primjer 3.5.

> Zatvorena formula $\Diamond\top$ definira klasu okvira u kojoj svaki svijet ima sljedbenika, tj. korespondira s formulom $\forall x \exists y Rxy$.

Dokaz. Ovu formulu u intendiranoj interpretaciji čitamo kao "moguća je istina". Sad ćemo vidjeti kakvi su matematički uvjeti na okvir da bi "istina" bila "moguća". Prema propoziciji 3.4, formula $\Diamond\top$ lokalno korespondira sa $ST_x(\Diamond\top)$. Izračunajmo $ST_x(\Diamond\top)$ prema definiciji 2.1.

$ST_x(\Diamond\top) = ST_x(\Diamond\neg\bot) = \exists y(Rxy \wedge ST_y(\neg\bot)) = \exists y(Rxy \wedge \neg ST_y(\bot)) = \exists y(Rxy \wedge y{=}y)$

Iz propozicije 3.2. sada slijedi da naša formula (globalno) korespondira na okvirima s formulom prvog reda $\forall x \exists y(Rxy \wedge y{=}y)$, koja se očito može pojednostaviti na ekvivalentnu $\forall x \exists y Rxy$. ■

3.3. UNIFORMNE FORMULE

U svim modalnim formulama koje ćemo razmatrati u nastavku pojavljuju se propozicionalne varijable, pa prijevod iz propozicije 2.9. sadrži univerzalne monadske kvantifikatore drugog reda. Postavljanje određenih restrikcija na sintaksu modalnih formula omogućit će nam da se tih kvantifikatora riješimo u postupku koji će onda rezultirati korespondentom prvog reda. Univerzalni monadski kvantifikatori pred formulom znače da formula vrijedi za sve podskupove okvira. No, za mnoge formule je moguće odabrati jednostavnu *instancu* formule drugog reda (tj. konkretne podskupove okvira) takvu da se valjanost na toj instanci širi na valjanost na svim podskupovima.

Definicija 3.6.

> Propozicionalna varijabla p se pojavljuje ***pozitivno*** ako je u dosegu parnog broja negacija, a ***negativno*** ako je u dosegu neparnog broja negacija.
>
> Modalna formula φ je ***pozitivna u p*** (***negativna u p***) ako se p u φ pojavljuje samo pozitivno (negativno). Formula je ***pozitivna*** (***negativna***) ako je pozitivna (negativna) u svakoj varijabli koja se u njoj pojavljuje.
>
> Kažemo da se p pojavljuje ***uniformno*** u φ ako se pojavljuje samo pozitivno ili samo negativno (tj. ako je φ pozitivna ili negativna u p). Formula je ***uniformna*** ako se sve propozicionalne varijable koje sadrži pojavljuju uniformno.

Svi ovi pojmovi potpuno analogno se definiraju za jezik korespondencije drugog reda, s tim da se umjesto o pojavljivanju propozicionalnih varijabli govori o pojavljivanju monadskih varijabli drugog reda. Očito je modalna formula pozitivna u p ako i samo ako je njen prijevod drugog reda pozitivan u odgovarajućoj monadskoj varijabli P. Jasno, ako je φ pozitivna (negativna) u p, onda je $\neg\varphi$ negativna (pozitivna) u p.

Pojmovi iz definicije 3.6. odnose se na sintaksu formula. Sada ćemo definirati semantička svojstva koja im, kako ćemo potom dokazati, odgovaraju.

Definicija 3.7.

> Neka je p propozicionalna varijabla. Kažemo da je modalna formula φ ***monotono rastuća*** u p ako se proširenjem valuacije od p čuva njena istinitost, tj. preciznije, ako za svaki model (W,R,V), svaki svijet w i svaku valuaciju V' takvu da je $V(p)\subseteq V'(p)$ i $V(q)=V'(q)$ za sve $q\neq p$, vrijedi:

ako je $(W,R,V), w \Vdash \varphi$, onda je $(W,R,V'), w \Vdash \varphi$.

Analogno, φ je ***monotono padajuća*** u p ako se suženjem valuacije od p čuva njena istinitost, tj. ako za svaki model (W,R,V), svaki svijet w i svaku valuaciju V' takvu da je $V'(p) \subseteq V(p)$ i $V(q)=V'(q)$ za sve $q \neq p$, vrijedi:
ako je $(W,R,V), w \Vdash \varphi$, onda je $(W,R,V'), w \Vdash \varphi$.

Slično se definira rastuća i padajuća monotonost formule jezika korespondencije drugog reda u monadskoj varijabli P.

Sada ćemo dokazati vezu sintaktičkih pojmova pozitivnosti i negativnosti sa semantičkim pojmovima monotonosti.

Lema 3.8.

Neka je φ formula osnovnog modalnog jezika. Tada vrijedi:
1. Ako je φ pozitivna u p, onda je monotono rastuća u p.
2. Ako je φ negativna u p, onda je monotono padajuća u p.

Dokaz. Obje tvrdnje dokazuju se simultano indukcijom po složenosti formule φ. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se p pojavljuje u φ (inače je φ očito i pozitivna i negativna u p, a isto tako je očito i rastuća i padajuća u p, pa tvrdnje vrijede trivijalno). Dakle, za bazu indukcije dovoljan je slučaj kad je φ jednaka propozicionalnoj varijabli p. Tada je φ pozitivna u p. Za proizvoljni model (W,R,V) i svijet w je $(W,R,V), w \Vdash p$ po definiciji ako i samo ako je w u $V(p)$. No, za proširenje V' odmah slijedi da je w u $V'(p)$, dakle $(W,R,V'), w \Vdash p$. Time smo dokazali prvu tvrdnju za bazu indukcije, a druga tvrdnja vrijedi trivijalno.

Pretpostavimo da obje tvrdnje vrijede za sve formule složenosti manje ili jednake n i neka je φ formula složenosti n+1. Tada je φ jednaka $\neg\psi$, $\psi \vee \upsilon$ ili $\Diamond\psi$, pri čemu su formule ψ i υ složenosti manje ili jednake n.

1. $\varphi = \neg\psi$. Najprije, neka je φ pozitivna u p. Tada je očito ψ negativna u p, pa je po pretpostavci indukcije ψ padajuća u p. Treba dokazati da je φ rastuća u p. Neka je (W,R,V) proizvoljni model, w svijet iz W i V' proširenje, tj. $V(p) \subseteq V'(p)$. Neka je $(W,R,V), w \Vdash \varphi$. Odmah slijedi da nije $(W,R,V), w \Vdash \psi$. Tada ne vrijedi ni $(W,R,V'), w \Vdash \psi$, jer bi to bilo u kontradikciji s padajućom monotonošću od ψ. Sada odmah slijedi $(W,R,V'), w \Vdash \neg\psi$, tj. $(W,R,V'), w \Vdash \varphi$, što smo i trebali dokazati. U slučaju kad je φ negativna u p, ψ je pozitivna u p i dokaz ide analogno.

2. $\varphi = \psi \vee \upsilon$. Neka je φ pozitivna u p. To znači da se p pojavljuje u φ samo pozitivno, pa se p pojavljuje samo pozitivno i u podformulama ψ i υ. Dakle, ψ i υ su po pretpostavci indukcije rastuće u p. Treba dokazati da je i φ rastuća u p. Neka je (W,R,V) proizvoljni model, w svijet iz W i V' valuacija takva da je $V(p) \subseteq V'(p)$. Neka je $(W,R,V), w \Vdash \varphi$, tj. $(W,R,V), w \Vdash \psi \vee \upsilon$. Po definiciji 1.3, tada je $(W,R,V), w \Vdash \psi$ ili $(W,R,V), w \Vdash \upsilon$. Kako su ψ i υ rastuće u p, slijedi da je $(W,R,V'), w \Vdash \psi$ ili $(W,R,V'), w \Vdash \upsilon$, dakle $(W,R,V'), w \Vdash \psi \vee \upsilon$, tj. $(W,R,V'), w \Vdash \varphi$. U slučaju kad je φ negativna u p, takve su i ψ i υ i dokaz je analogan.

3. $\varphi = \Diamond \psi$. Neka je φ pozitivna u p. Tada je i ψ pozitivna u p, pa je po pretpostavci indukcije rastuća u p. Neka je (W,R,V) proizvoljni model, w svijet iz W i V' takva da je $V(p) \subseteq V'(p)$. Neka je $(W,R,V), w \Vdash \varphi$, tj. $(W,R,V), w \Vdash \Diamond \psi$. Tada postoji svijet v takav da je Rwv i $(W,R,V), v \Vdash \psi$. Kako je ψ rastuća u p, slijedi $(W,R,V'), v \Vdash \psi$, pa je $(W,R,V'), w \Vdash \Diamond \psi$, tj. $(W,R,V'), w \Vdash \varphi$. Analogno se dokazuje slučaj kad je φ negativna u p. ■

Isti rezultat slično se dokazuje i za formule jezika korespondencije drugog reda. Prije nego što pokažemo na koji način se monotonost primjenjuje u dokazivanju korespondencije prvog reda na okvirima, treba napomenuti da se na ovom mjestu potrebno držati sintakse formula po definiciji, tj. imati na umu kada koristimo pokrate. Npr. formula $p \rightarrow \Diamond p$ samo je prividno pozitivna u p. Naime, riječ je o pokrati za $\neg p \vee \Diamond p$, pa ta formula nije ni pozitivna ni negativna u p, jer se p u njoj na prvom mjestu pojavljuje negativno, a na drugom pozitivno.

Pogledajmo sada na primjeru kako monotonost formule osigurava korespondenciju prvog reda na okvirima.

Primjer 3.9.

> Formula $\Diamond \Box p$ korespondira na okvirima s formulom $\forall x \exists y (Rxy \wedge \neg \exists z Ryz)$, tj. definira klasu okvira čiji svaki svijet ima sljedbenika koji nema sljedbenika (za svijet koji nema sljedbenika kažemo da je *R-terminalan*).

Dokaz. Dokazujemo da $\Diamond \Box p$ lokalno korespondira s $\exists y (Rxy \wedge \neg \exists z Ryz)$. Neka je F okvir i w svijet takav da je $F, w \Vdash \Diamond \Box p$, tj. $\Diamond \Box p$ je istinita u w bez obzira na valuaciju. Za p, promotrimo minimalnu valuaciju V_m, tj. takvu da je $V_m(p) = \emptyset$. Kako je i za nju $\Diamond \Box p$ istinita, to postoji v takav da je Rwv i $\Box p$ istinita u v. To znači da za sve sljedbenike od v vrijedi p, no kako je valuacija od p prazna, to je moguće samo ako v nema sljedbenike. Time smo dokazali da iz $F, w \Vdash \Diamond \Box p$ slijedi $F \vDash \exists y (Rxy \wedge \neg \exists z Ryz)[w]$.

Obratno, pretpostavimo $F \vDash \exists y(Rxy \wedge \neg \exists z Ryz)[w]$, tj. neka svijet w okvira F ima R-terminalnog sljedbenika. Odmah slijedi da je $\Diamond\Box p$ istinita na modelima baziranim na F takvima da je valuacija minimalna za p, tj. $V_m(p)=\emptyset$. No, mi tvrdimo da je $\Diamond\Box p$ valjana u svijetu w, tj. istinita za svaku valuaciju. Neka je V proizvoljna valuacija. Kako je $\Diamond\Box p$ pozitivna u p, to je i rastuća u p. Očito je $V_m(p) \subseteq V(p)$, pa tvrdnja slijedi. ■

Ključna točka ovog dokaza je uzimanje minimalne valuacije s koje se pozivom na monotonost rezultat širi na sve valuacije. Sad ćemo vidjeti kako ovakav argument omogućuje izračunjiv prijevod uniformne modalne formule na korespondenta prvog reda preko prijevoda drugog reda.

U prijevodima drugog reda P uvijek sudjeluje u obliku $\forall P\alpha$. Valuacijom g se varijabli P pridružuje konkretan podskup $g(P)$ okvira (što odgovara pridruživanju poskupa $V(p)$ propozicionalnoj varijabli p u modalnoj formuli valuacijom V). Pritom se $g(P)$ često može reprezentirati formulom prvog reda koju ćemo označiti sa $\sigma(P)$. Npr. prazan skup može se izraziti formulom $x \neq x$. Zatim promatramo formulu prvog reda $[\sigma(P)/P]\alpha$ koja nastaje uklanjanjem univerzalnog kvantifikatora drugog reda iz $\forall P\alpha$ i supstitucijom kojom monadsku varijablu P u α zamjenjujemo sa $\sigma(P)$. Kažemo da je $[\sigma(P)/P]\alpha$ *instanca* formule $\forall P\alpha$. Jasno je da istinitost formule drugog reda povlači istinitnost njene instance. Nas će zanimati slučajevi u kojima možemo dokazati i obrat – da istinitost instance povlači istinitost formule drugog reda. Već možemo naslutiti da će to biti slučajevi u kojima se možemo pozvati na monotonost.

Prije nego što iskažemo i dokažemo teorem za sve uniformne formule, pogledajmo primjer 3.9. iz perspektive prijevoda drugog reda.

Prvi korak je izračunavanje $ST_x(\Diamond\Box p)$ po definiciji 2.1:

$$ST_x(\Diamond\Box p) = \exists y(Rxy \wedge ST_y(\Box p)) = \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \rightarrow Pz))$$

U drugom koraku, iz propozicije 2.9. slijedi da $\Diamond\Box p$ lokalno korespondira na okvirima s formulom drugog reda $\forall P \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \rightarrow Pz))$, koja kaže da $ST_x(\Diamond\Box p)$ vrijedi za sve podskupove okvira.

Treći korak je uzimanje minimalne instance $[\sigma(P)/P]\exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \rightarrow Pz))$, gdje $\sigma(P)$ izražava minimalnu valuaciju, tj. prazan skup. Konkretno, poslužit će nam $\sigma(P)=z \neq z$, pa dobivamo formulu prvog reda $\exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \rightarrow z \neq z))$, koja je očito ekvavalentna s jednostavnijom $\exists y(Rxy \wedge \neg \exists z Ryz)$. Jasno, iz istinitosti prijevoda drugog reda slijedi istinitost njegove instance.

I na kraju, dokazujemo obrat pozivajući se na monotonost. Kako je $\Diamond\Box p$ pozitivna u p, njen prijevod drugog reda je pozitivan u P, pa istinitost na minimalnoj instanci povlači istinitost za sve podskupove. Dakle, formula prvog reda $\exists y(Rxy\wedge\neg\exists zRyz)$ je ekvivalentna prijevodu drugog reda formule $\Diamond\Box p$, pa je $\exists y(Rxy\wedge\neg\exists zRyz)$ njen lokalni korespondent prvog reda na okvirima. Na kraju još samo iz propozicije 3.2. zaključujemo da je $\forall x\exists y(Rxy\wedge\neg\exists zRyz)$ globalni korespondent.

Ovdje smo koristili sve argumente koji će nam sada poslužiti u dokazu (izračunjive) korespondencije prvog reda na okvirima za proizvoljnu uniformnu formulu. Napomenimo još samo da, kad imamo formulu negativnu u p, uzimamo maksimalnu instancu (cijelu domenu okvira) čija valjanost zbog padajuće monotonosti povlači valjanost za sve podskupove.

Teorem 3.10.

> Neka je φ uniformna modalna formula. Tada φ lokalno korespondira s formulom prvog reda $\alpha_\varphi(x)$ koja je efektivno izračunjiva iz φ.

Dokaz. Prema propoziciji 2.9, φ lokalno korespondira na okvirima s formulom drugog reda:

$$\forall P_1 ... \forall P_n ST_x(\varphi) \tag{3.2}$$

Ovdje su P_1, ..., P_n monadske varijable drugog reda koje odgovaraju propozicionalnim varijablama iz φ. Dokazat ćemo da je (3.2) ekvivalentna formuli prvog reda, uzimanjem odgovarajućih instanci za univerzalno kvantificirane varijable P_1, ..., P_n.

Kako je φ uniformna, očito je takav i njen standardni prijevod $ST_x(\varphi)$. Dakle, svaka se varijabla drugog reda u formuli pojavljuje samo pozitivno ili samo negativno. Za varijable koje se pojavljuju samo pozitivno, uzimamo minimalnu instancu (prazan skup), a za varijable koje se pojavljuju samo negativno maksimalnu instancu (cijelu domenu okvira). Preciznije, za svaku varijablu drugog reda P koja se pojavljuje u $ST_x(\varphi)$ definiramo supstituciju $\sigma(P)$ ovako:

$$\sigma(P)(y) := \begin{cases} y \neq y, \text{ ako je } ST_x(\varphi) \text{ pozitivna u } P, \\ y = y, \text{ ako je } ST_x(\varphi) \text{ negativna u } P. \end{cases}$$

Pritom su s y označene varijable koja se u $ST_x(\varphi)$ pojavljuju u atomarnim podformulama oblika Py. Sada se u (3.2) supstituira ovako:

1. uklanjaju se kvantifikatori drugog reda,
2. svaka podformula oblika Py supstituira se sa $\sigma(P)(y)$.

Tako se iz (3.2) dobiva instanca:

$$[\sigma(P_1)/P_1,..., \sigma(P_n)/P_n]ST_x(\varphi) \tag{3.3}$$

Dokazat ćemo da je (3.3) ekvivalentna s (3.2). Jasno je da (3.2) povlači (3.3), jer je (3.3) njena instanca, tj. istinitost formule (3.3) ekvivalentna je istinitosti formule $ST_x(\varphi)$ za valuaciju koja monadskoj varijabli P_i pridružuje prazan skup ako je formula pozitivna u P_i, a cijelu domenu okvira ako je formula negativna u P_i. Kako istinitost formule (3.2) znači istinitost za sve valuacije, iz nje slijedi istinitost za tu konkretnu valuaciju. Za obrat, uočimo da (3.3) ima jednu slobodnu varijablu (i to x). Neka je $\mathcal{F}$ okvir i w svijet takav da je

$$\mathcal{F}\vDash[\sigma(P_1)/P_1,...,\sigma(P_n)/P_n]ST_x(\varphi)[w]. \tag{3.4}$$

Pogledajmo formulu $[\sigma(P_2)/P_2,...,\sigma(P_n)/P_n]ST_x(\varphi)[w]$, u kojoj su supstituirane sve monadske varijable osim P_1, koja se u njoj pojavljuje slobodno. Ta formula je pozitivna ili negativna u P_1. Pretpostavimo najprije da je pozitivna u P_1. Tada očito (3.4) vrijedi ako i samo ako je $[\sigma(P_2)/P_2,...,\sigma(P_n)/P_n]ST_x(\varphi)[w]$ istinita za valuaciju koja varijabli P_1 pridružuje prazan skup. No, kako za proizvoljnu valuaciju g vrijedi da je $g(P_1)$ nadskup praznog skupa, iz leme 3.8.(1) slijedi

$$\mathcal{F}\vDash\forall P_1[\sigma(P_2)/P_2,...,\sigma(P_n)/P_n]ST_x(\varphi)[w]. \tag{3.5}$$

U drugom slučaju, tj. ako je formula negativna u P_1, (3.4) vrijedi ako i samo ako je $[\sigma(P_2)/P_2,...,\sigma(P_n)/P_n]ST_x(\varphi)[w]$ istinita za valuaciju koja varijabli P_1 pridružuje cijelu domenu od $\mathcal{F}$. Za proizvoljnu valuaciju g tada je $g(P_1)$ podskup domene okvira, pa iz leme 3.8.(2) također slijedi (3.5).

Postupak nastavljamo induktivno. Za P_2 gledamo formulu dobivenu iz (3.5) ispuštanjem supstitucije od P_2, tj. $\forall P_1[\sigma(P_3)/P_3,...,\sigma(P_n)/P_n]ST_x(\varphi)[w]$. U toj formuli je P_2 slobodna i njena istinitost u odgovarajućoj valuaciji je ekvivalentna istinitosti od (3.5). Istim argumentiranjem kao za P_1, slijedi $\mathcal{F}\vDash\forall P_1\forall P_2[\sigma(P_3)/P_3,...,\sigma(P_n)/P_n]ST_x(\varphi)[w]$ itd. Tako na kraju dobivamo $\mathcal{F}\vDash\forall P_1...\forall P_n ST_x(\varphi)[w]$, što smo i trebali dokazati.

Slijedi da je (3.3) lokalni korespondent prvog reda modalne formule φ. Kako se (3.3) dobiva od φ jednostavnim manipulacijama na sintaksi, očito je lako napisati program koji za proizvoljnu uniformnu formulu kao rezultat daje njenog korespondenta prvog reda. ■

Iako se može reći da je (3.3) očita instanca iz čije istinitosti slijedi valjanost (tj. istinitost za sve podskupove) uniformne formule, ipak je bio potreban ovakav podulji dokaz indukcijom, jer definicija monotonosti prirodno zahtijeva da valuacija bude fiksirana u svim varijablama osim u jednoj.

3.4. VRLO JEDNOSTAVNE SAHLQVISTOVE FORMULE

Kako smo već napomenuli, formula $p \to \Diamond p$ nije uniformna (jer je pokrata za $\neg p \vee \Diamond p$), ali u primjeru 2.10. smo dokazali da ima korespondenta prvog reda, koristeći pritom sličan argument kao kod uniformnih formula – uzimanje minimalne valuacije. No, ako promotrimo dokaz u primjeru 2.10, vidimo da se u njemu koristi minimalna valuacija za konzekventu $\Diamond$p (koja je pozitivna u p) implikacije $p \to \Diamond p$. *Sahlqvistove formule* su široka klasa implikacija kod kojih se može slično argumentirati. Radi jednostavnosti izlaganja, definirat ćemo ih u nekoliko koraka.

Definicija 3.11.

Vrlo jednostavna Sahlqvistova antecedenta je formula izgrađena od logičkih konstanti i propozicionalnih varijabli, samo uz upotrebu veznika konjunkcije $\wedge$ i modalnog operatora mogućnosti $\Diamond$.

Vrlo jednostavna Sahlqvistova formula je implikacija $\varphi \to \psi$ takva da je φ vrlo jednostavna Sahlqvistova antecedenta, a ψ pozitivna formula.

Primijetimo da je $p \to \Diamond p$ vrlo jednostavna Sahlqvistova formula. Nešto složeniji primjer je, recimo, $(p \wedge \Diamond\Diamond q) \to \Box\Diamond(p \wedge q)$. Pritom treba pripaziti jer su $\Box$ i $\wedge$ pokrate, pa je konzekventa ovog primjera po definiciji zapravo $\neg\Diamond\neg\Diamond\neg(\neg p \vee \neg q)$, pa su u njoj i p i q u dosegu po četiri negacije, dakle formula je pozitivna u svim svojim propozicionalnim varijablama.

U sljedećem teoremu opisat ćemo algoritam koji izračunava korespondenta prvog reda proizvoljne vrlo jednostavne Sahlqvistove formule. Njegov dokaz ključan je za razumijevanje Sahlqvistove korespondencije i sva daljnja proširenja bit će samo elaboriranje ideja koje ćemo ovdje predstaviti. Kao i kod uniformnih formula, polazimo od prijevoda drugog reda. No, prije preciznog iskaza i dokaza teorema, ideju ćemo predstaviti na primjerima.

Počnimo s formulom $p \to \Diamond p$. U primjeru 2.10. dokazali smo da ona definira refleksivnost, no sad ćemo pokazati da se ta korespondencija može izvesti iz sintakse te formule, odnosno njenog prijevoda drugog reda. Njega smo već izračunali – to je formula (3.1). No, ovdje polazimo od lokalnog korespondenta

$$\forall P(Px \to \exists y(Rxy \wedge Py)). \tag{3.6}$$

Kod uniformnih formula ovdje se uzimao prazan skup ili cijela domena kao minimalna, odnosno maksimalna instanca koja formulu čini istinitom, što se potom širilo zbog monotonosti na sve podskupove. Kod Sahlqvistovih formula uzima se minimalna instanca koja antecedentu čini istinitom. U našem primjeru je za (3.6) potrebna minimalna instanca za koju je Px istina. Potrebna supstitucija je $\sigma(P)(z) := z{=}x$, gdje je z bilo koja varijabla koja se u prijevodu drugog reda pojavljuje u podformulama oblika Pz. Uklanjanjem kvantifikatora drugog reda i supstitucijom dobivamo formulu $x{=}x\rightarrow\exists y(Rxy\wedge y{=}x)$, koja se očito može još pojednostaviti na ekvivalentnu Rxx.

Treba dokazati da su formule (3.6) i Rxx ekvivalentne. Iako to odmah slijedi iz primjera 2.10. i propozicije 2.9. (jer su obje lokalni korespondenti formule $p\rightarrow\Diamond p$), ovdje ćemo dati direktan dokaz, kako bismo ilustrirali strategiju dokazivanja za proizvoljnu vrlo jednostavnu Sahlqvistovu formulu. Neka je F okvir i w svijet takav da je $F\vDash\forall P(Px\rightarrow\exists y(Rxy\wedge Py))[w]$. To znači da za svaki podskup okvira kojem je w element (pa tako i za minimalni takav podskup $\{w\}$) mora postojati svijet v takav da je Rwv i v je element tog podskupa. No, u minimalnom slučaju to onda znači da je v jednak w i da vrijedi Rww, tj. $F\vDash Rxx[w]$. To je lakši smjer (raspisali smo ga radi ilustracije; zapravo je dovoljno konstatirati da je Rxx instanca formule (3.6)), koji pokazuje da je naša supstitucija na pravi način reprezentirala minimalnu valuaciju – jednočlan skup.

Obratno, pretpostavimo $F\vDash Rxx[w]$ i dokažimo $F\vDash\forall P(Px\rightarrow\exists y(Rxy\wedge Py))[w]$, tj. dokažimo $F\vDash Px\rightarrow\exists y(Rxy\wedge Py)[w]$ za proizvoljnu valuaciju g koja varijabli x pridružuje svijet w. Treba dokazati da iz $F\vDash Px[w]$ slijedi $F\vDash\exists y(Rxy\wedge Py)[w]$, tj. da postoji svijet v takav da je $F\vDash(Rxy\wedge Py)[w,v]$. No, $F\vDash Px[w]$ znači da je w u podskupu $g(P)$, pa iz $F\vDash Rxx[w]$ slijedi da za v možemo uzeti baš w, tj. $F\vDash(Rxy\wedge Py)[w,w]$.

Dakle, iz minimalnosti instance za koju je antecedenta istinita slijedi tvrdnja, jer je konzekventa pozitivna, pa se istinitost na minimalnoj instanci širi po monotonosti na sve podskupove. Pogledajmo sada jedan malo složeniji primjer.

Primjer 3.12.

> Vrlo jednostavna Sahlqvistova formula
> $$\Diamond p\rightarrow\Diamond\Diamond p \tag{3.7}$$
> korespondira s formulom prvog reda $\forall x\forall y(Rxy\rightarrow\exists z(Rxz\wedge Rzy))$, tj. definira gustoću.

Dokaz. Dokazat ćemo da (3.7) lokalno korespondira sa $\forall y(Rxy\rightarrow\exists z(Rxz\wedge Rzy))$. Najprije izračunajmo (lokalni) prijevod drugog reda $\forall PST_x(\Diamond p\rightarrow\Diamond\Diamond p)$.

$$\begin{aligned}\forall PST_x(\Diamond p\rightarrow\Diamond\Diamond p) &= \forall P(ST_x(\Diamond p)\rightarrow ST_x(\Diamond\Diamond p))\\ &= \forall P(\exists y(Rxy\wedge Py)\rightarrow\exists z(Rxz\wedge ST_z(\Diamond p)))\end{aligned}$$

$$= \forall P(\exists y(Rxy \wedge Py) \to \exists z(Rxz \wedge \exists z_1(Rzz_1 \wedge Pz_1))$$

Ovdje se prije instancijacije formula sređuje kako bi se izbjegla kvantifikacija unutar antecedente. Primjenom ekvivalencije $(\exists x\alpha(x)\to\beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha(x)\to\beta)$, dobivamo formulu

$$\forall P\forall y(Rxy \wedge Py \to \exists z(Rxz \wedge \exists z_1(Rzz_1 \wedge Pz_1))). \tag{3.8}$$

Sada koristimo supstituciju $\sigma(P)(u) := u{=}y$, gdje je u bilo koja varijabla koja se pojavljuje u podformulama oblika Pu. Dobivamo

$\forall y(Rxy \wedge y = y \to \exists z(Rxz \wedge \exists z_1(Rzz_1 \wedge z_1 = y)))$, što se može pojednostaviti na

$\forall y(Rxy \to \exists z(Rxz \wedge Rzy))$.

Time smo pokazali da je formula gustoće instanca prijevoda drugog reda formule (3.7). Preostaje dokazati obrat, tj. da istinitost te instance povlači istinitost za sve podskupove. No, opet je supstitucija odabrana tako da je instanca minimalna za koju je antecedenta istinita, pa iz pozitivnosti konzekvente slijedi tvrdnja.

Preciznije, dokažimo da $\mathcal{F}\models\forall y(Rxy\to\exists z(Rxz\wedge Rzy))[w]$ povlači da je (3.8) istinita na $\mathcal{F}$ za valuaciju koja varijabli x pridružuje svijet w. Kako su obje formule kvantifikacirane sa $\forall y$, trebamo dokazati da za proizvoljni svijet v iz $\mathcal{F}\models Rxy\to\exists z(Rxz\wedge Rzy)[w,v]$ slijedi
$\mathcal{F}\models\forall P(Rxy\wedge Py\to\exists z(Rxz\wedge\exists z_1(Rzz_1\wedge Pz_1))[w,v]$, tj.
$\mathcal{F}\models(Rxy\wedge Py\to\exists z(Rxz\wedge\exists z_1(Rzz_1\wedge Pz_1)))[w,v]$ za svaku valuaciju g takvu da je $g(x)=w$ i $g(y)=v$.

Neka je $\mathcal{F}\models(Rxy\wedge Py)[w,v]$. To znači da je v u $g(P)$ i vrijedi Rwv. Iz pretpostavke $\mathcal{F}\models Rxy\to\exists z(Rxz\wedge Rzy)[w,v]$ slijedi $\mathcal{F}\models\exists z(Rxz\wedge Rzy)[w,v]$, tj. postoji svijet u takav da je Rwu i Ruv. No, kako je v u $g(P)$, odmah slijedi $\mathcal{F}\models(Rzz_1\wedge Pz_1))[u,v]$, dakle $\mathcal{F}\models\exists z_1(Rzz_1\wedge Pz_1))[u]$, pa iz Rwu slijedi $\mathcal{F}\models(Rxz\wedge\exists z_1(Rzz_1\wedge Pz_1))[w,u]$, dakle $\mathcal{F}\models\exists z(Rxz\wedge\exists z_1(Rzz_1\wedge Pz_1))[w]$, što smo i trebali dokazati. ■

U ovom primjeru koriste se gotovo sve ideje iz dokaza sljedećeg teorema, u kojem dokazujemo korespondenciju prvog reda za sve vrlo jednostavne Sahlqvistove formule.

Teorem 3.13.

Neka je $\chi = \varphi\to\psi$ vrlo jednostavna Sahlqvistova formula. Tada χ lokalno korespondira s formulom prvog reda $\alpha_\chi(x)$ koja je izračunjiva iz χ.

Dokaz. Prema propoziciji 2.9, χ lokalno korespondira s $\forall P_1 ... \forall P_n ST_x(\chi)$, tj. $\forall P_1 ... \forall P_n (ST_x(\varphi) \to ST_x(\psi))$. Prema pretpostavci, $ST_x(\psi)$ je pozitivna, pa ćemo je radi lakšeg razumijevanja označiti s POS. Dakle, imamo prijevod oblika

$$\forall P_1 ... \forall P_n (ST_x(\varphi) \to \mathrm{POS}) \tag{3.9}$$

1. korak. $ST_x(\varphi)$ je prijevod vrlo jednostavne Sahlqvistove antecedente, u kojoj su pojavljivanja modalnog operatora mogućnosti reprezentirana egzistencijalnim kvantifikatorima. Kako bismo mogli uzimati odgovarajuće instance, kvantifikatore iz antecedente trebamo izvući ispred glavne implikacije. To činimo koristeći ekvivalencije

$(\exists x \alpha(x) \wedge \beta) \leftrightarrow \exists x(\alpha(x) \wedge \beta)$ i $(\exists x \alpha(x) \to \beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha(x) \to \beta)$,

koje su, lako se vidi, valjane za sve formule α i β i za svaku varijablu x, pod uvjetom da se x ne pojavljuje slobodno u β. Standardni prijevod je definiran tako da se kod svake primjene kvantifikacije uzima nova varijabla, pa se ove ekvivalencije mogu koristiti za preformuliranje (3.9). Za to su nam dovoljne ove dvije formule, jer se u vrlo jednostavnoj Sahlqvistovoj antecedenti pojavljuje samo veznik $\wedge$. Za njega koristimo prvu ekvivalenciju, dok nam je druga potrebna za izvlačenje kvantifikatora ispred glavne implikacije (primijetimo da nam prva ekvivalencija nije bila potrebna u primjeru 3.12, jer se u antecedenti formule (3.7) ne pojavljuju konjunkcije). Prvi korak rezultira formulom oblika

$$\forall P_1 ... \forall P_n \forall x_1 ... \forall x_m (\mathrm{REL} \wedge \mathrm{AT} \to \mathrm{POS}), \tag{3.10}$$

gdje je REL konjunkcija podformula oblika Rx_ix_j, a AT konjunkcija podformula oblika Px_i (u primjeru 3.12. je REL = Rxy, a AT = Py).

2. korak. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se svaka varijabla drugog reda P koja se pojavljuje u konzekventi POS, također pojavljuje i u antecedenti REL$\wedge$AT (u suprotnom je (3.10) pozitivna u P, pa je primjenom supstitucije $\sigma(P)(y) := y \neq y$ prema dokazu teorema 3.10. možemo svesti na ekvivalentnu formulu u kojoj se P ne pojavljuje).

Neka je P_i varijabla drugog reda koja se pojavljuje u (3.10) i neka su $P_i x_{i_1}, ..., P_i x_{i_k}$ sva pojavljivanja od P_i u antecedenti od (3.10), dakle u AT. Definiramo supstituciju:

$\sigma(P_i)(y) := (y = x_{i_1} \vee ... \vee y = x_{i_k})$,

gdje je y bilo koja varijabla koja se u (3.10) pojavljuje u podformulama oblika $P_i y$.

Primijetimo da je $\sigma(P_i)$ minimalna instanca za koju je antecedenta istinita. Preciznije, u antecedenti REL$\wedge$AT se kao slobodne varijable pojavljuju $x, x_1 ..., x_m$. Za svaki okvir F i za sve svjetove $w, w_1 ..., w_m$ tada vrijedi:

ako je $F \vDash \mathrm{AT}[w, w_1 ..., w_m]$, onda $F \vDash \forall y(\sigma(P_i)(y) \rightarrow P_i y)[w, w_1 ..., w_m]$ (3.11)

U kombinaciji s pozitivnošću konzekvente Sahlqvistovih formula, (3.11) daje ključ za razumijevanje zašto Sahlqvistove formule imaju korespondente prvog reda.

3. korak. Sada supstituiramo $\sigma(P_i)$ za svako pojavljivanje od P_i u (3.10) i brišemo univerzalne kvantifikatore drugog reda. Dobivamo formulu oblika

$[\sigma(P_1)/P_1, ..., \sigma(P_n)/P_n] \forall x_1 ... \forall x_m(\mathrm{REL} \wedge \mathrm{AT} \rightarrow \mathrm{POS})$.

Primijetimo da se u REL ne pojavljuju monadske varijable drugog reda. Osim toga, zbog izbora supstitucije, $[\sigma(P_1)/P_1, ..., \sigma(P_n)/P_n]$AT je trivijalno istinita. Zbog toga dobivamo ekvivalentnu formulu oblika

$$\forall x_1 ... \forall x_m(\mathrm{REL} \rightarrow [\sigma(P_1)/P_1, ..., \sigma(P_n)/P_n]\mathrm{POS}) \tag{3.12}$$

Zbog pretpostavke da se sve varijable drugog reda P iz konzekvente pojavljuju i u antecedenti, (3.12) je formula prvog reda. Preostaje dokazati da je ona ekvivalentna s (3.10). Prva implikacija je očita jer je (3.12) instanca od (3.10). Za obrat, pretpostavimo da su (3.12) i antecedenta od (3.10) istinite i dokažimo da je konzekventa od (3.10) istinita. Preciznije, pretpostavimo $F \vDash \forall x_1 ... \forall x_m(\mathrm{REL} \rightarrow [\sigma(P_1)/P_1, ..., \sigma(P_n)/P_n]\mathrm{POS})$ i

$F \vDash \mathrm{REL} \wedge \mathrm{AT}[w, w_1 ..., w_m]$.

Odmah slijedi $F \vDash [\sigma(P_1)/P_1, ..., \sigma(P_n)/P_n]\mathrm{POS}[w, w_1 ..., w_m]$. Kako je POS pozitivna, ona je i rastuća u svakoj varijabli P_i, pa iz (3.11) slijedi

$F \vDash \mathrm{POS}[w, w_1 ..., w_m]$, što smo i trebali dokazati.

Jasno je da se svi koraci na sintaksi polazne formule mogu jednostavno isprogramirati. ■

Pogledajmo sada još neke klasične primjere modalno definabilnih svojstava relacija.

Primjer 3.14.

Formula

$$p \rightarrow \Box \Diamond p \tag{3.13}$$

definira simetričnost, tj. korespondira s formulom $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$.

Dokaz. Očito je (3.13) vrlo jednostavna Sahlqvistova formula. Izračunajmo najprije njen (lokalni) prijevod drugog reda.

$$\begin{aligned}\forall P(ST_x(p)\to ST_x(\Box\Diamond p)) &= \forall P(Px \to \forall y(Rxy \to ST_y(\Diamond p)) \\ &= \forall P(Px \to \forall y(Rxy \to \exists z(Ryz \wedge Pz))\end{aligned}$$

Nema kvantifikatora u antecedenti, pa odmah možemo primijeniti supstituciju $\sigma(P)(u) := u{=}x$. Dobivamo

$$x = x \to \forall y(Rxy \to \exists z(Ryz \wedge z = x))$$

Antecedenta je trivijalno istinita, a konzekventu još možemo pojednostaviti i dobivamo $\forall y(Rxy \to Ryx)$. Prema teoremu 3.13, to je lokalni korespondent formule (3.13). Sada iz propozicije 3.2. slijedi da je formula simetričnosti $\forall x\forall y(Rxy \to Ryx)$ njen globalni korespondent. ■

Primijetimo da iz primjera 2.10, 2.11. i 3.14. sada slijedi da možemo napisati alternativnu definiciju relacije ekvivalencije:

Neka je W neprazan skup i R binarna relacija na W. Kažemo da je R *relacija ekvivalencije* ako su na okviru (W,R) sljedeće formule valjane:

1. $p \to \Diamond p$
2. $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$
3. $p \to \Box\Diamond p$.

Sličnu definiciju za parcijalni uređaj ne možemo napisati, jer antisimetričnost nije modalno definabilna. Naime, slično kao u primjeru 2.15, dokazuje se da antisimetričnost općenito nije sačuvana u slici surjektivnog ograničenog morfizma, koja čuva valjanost modalnih formula.[12]

Za sljedeći primjer, kažemo da je relacija *euklidska* ako za svaki svijet w vrijedi da su svaka dva svijeta dostiživa iz w ujedno i međusobno dostiživa.

Primjer 3.15.

Formula

$$\Diamond p \to \Box\Diamond p \qquad (3.14)$$

korespondira s formulom $\forall x\forall y\forall z(Rxy\wedge Rxz\to Ryz)$, tj. definira klasu okvira čija je relacija dostiživosti euklidska.

Dokaz. Jasno, (3.14) je vrlo jednostavna Sahlqvistova formula. Izračunajmo njenog lokalnog korespondenta drugog reda.

[12] Kako smo već napomenuli, definicija ograničenog morfizma, kao i drugih invarijanti, može se vidjeti u knjizi [1]. Teorija modela i okvira sustavno je izložena i u [7], gdje se može vidjeti i dokaz da antisimetričnost nije modalno definabilna (str.15).

$\forall P(ST_x(\Diamond p) \to ST_x(\Box\Diamond p)) = \forall P(\exists y(Rxy \land Py) \to \forall z(Rxz \to ST_z(\Diamond p))$
$= \forall P(\exists y(Rxy \land Py) \to \forall z(Rxz \to \exists z_1(Rzz_1 \land Pz_1)))$
Najprije kvantifikator iz antecedente izvlačimo ispred glavne implikacije:
$\forall P \forall y((Rxy \land Py) \to \forall z(Rxz \to \exists z_1(Rzz_1 \land Pz_1)))$.
Supstituiramo $\sigma(P)(u) := u{=}y$. Dobivamo
$\forall y((Rxy \land y = y) \to \forall z(Rxz \to \exists z_1(Rzz_1 \land z_1 = y)))$, što pojednostavljujemo na $\forall y((Rxy \to \forall z(Rxz \to Rzy)$. Ova formula je očito ekvivalentna s
$\forall y \forall z(Rxy \land Rxz \to Rzy)$. Iz teorema 3.13. i propozicije 3.2. slijedi da (3.14) korespondira na okvirima sa $\forall x \forall y \forall z(Rxy \land Rxz \to Rzy)$. Konjunkcija je komutativna, pa nije bitno što smo u konzekventi dobili Rzy, a ne Ryz. ■

Kažemo da relacija ima svojstvo *jedinstvenosti* ako za svaki svijet w vrijedi da su svaka dva svijeta dostiživa iz w međusobno jednaka.

Primjer 3.16.

> Formula
> $$\Diamond p \to \Box p \qquad (3.15)$$
> korespondira s formulom $\forall x \forall y \forall z(Rxy \land Rxz \to y{=}z)$, tj. definira klasu okvira čija relacija dostiživosti ima svojstvo jedinstvenosti.

Dokaz. Lokalni prijevod drugog reda formule (3.15) je
$\forall P(ST_x(\Diamond p) \to ST_x(\Box p)) = \forall P(\exists y(Rxy \land Py \to \forall z(Rxz \to Pz))$.
Izvlačenjem kvantifikatora dobivamo
$\forall P \forall y((Rxy \land Py) \to \forall z(Rxz \to Pz))$. Supstitucijom $\sigma(P)(u) := u{=}y$ dobivamo
$\forall y((Rxy \land y{=}y) \to \forall z(Rxz \to z{=}y))$. To se lako pojednostavljuje na
$\forall y \forall z(Rxy \land Rxz \to y{=}z)$, pa iz teorema 3.13. i propozicije 3.2. slijedi tvrdnja. ■

3.5. JEDNOSTAVNE SAHLQVISTOVE FORMULE

Kao što smo vidjeli iz niza primjera, već i vrlo jednostavni fragment Sahlqvistovih formula izražava brojna važna svojstva relacija. U nastavku ćemo vidjeti koliko se još može proširiti klasa formula na koje se može primijeniti slično argumentiranje – uzimanje minimalne instance antecedente.

Definicija 3.17.

> Formula osnovnog modalnog jezika zove se **$\Box$-*atom*** ako je oblika $\Box\Box...\Box\Box p$, gdje je p propozicionalna varijabla. Takvu formulu, u kojoj se operator nužnosti pojavljuje $k\geq 0$ puta, skraćeno označavamo s $\Box_k p$. Za k=0, $\Box$-atom je formula p.

Dogovorno se ponašamo kao da je $\Box_k$ modalni operator, pa se u skladu s tim uvodi i oznaka R_k za, uvjetno rečeno, odgovarajući binarni relacijski simbol jezika korespondencije. Zapravo je $R_k xy$ samo pokrata formule
$\exists y_1(Rxy_1\wedge\exists y_2(Ry_1y_2\wedge\exists y_3(Ry_2y_3\wedge...\wedge\exists y_{k-1}(Ry_{k-2}y_{k-1}\wedge Ry_{k-1}y)...)))$.

Uočimo da se uz ovu pokratu prijevod $\Box$-atoma $\Box_k p$ može napisati analogno standardnom prijevodu formule $\Box p$, tj. kao $\forall y(R_k xy\to Py)$.

Za k=0, $R_0 xy$ označava formulu $x=y$, kako bi se zadržala analogija prijevoda. Naime, standardni prijevod formule p je Px, no to je očito ekvivalentno nešto kompliciranijem $\forall y(x=y\to Py)$.

Definicija 3.18.

> *Jednostavna Sahlqvistova antecedenta* je formula izgrađena od logičkih konstanti i $\Box$-atoma, samo uz upotrebu veznika konjunkcije $\wedge$ i modalnog operatora mogućnosti $\Diamond$.
>
> ***Jednostavna Sahlqvistova formula*** je implikacija $\varphi\to\psi$ takva da je φ jednostavna Sahlqvistova antecedenta, a ψ pozitivna formula.

Uočimo da je jedina izmjena u odnosu na definiciju vrlo jednostavnih Sahlqvistovih formula (definiciju 3.11) korištenje svih $\Box$-atoma, a ne samo propozicionalnih varijabli, u izgradnji antecedente. U dokazu da svaka jednostavna Sahlqvistova formula ima izračunjivog korespondenta prvog reda na okvirima treba, dakle, samo pokazati da nam $\Box$-atom u antecedenti neće onemogućiti uzimanje minimalne instance, a u tu svrhu treba definirati odgovarajuću supstituciju.

Teorem 3.19.

Neka je $\chi = \varphi \to \psi$ jednostavna Sahlqvistova formula. Tada χ lokalno korespondira s formulom prvog reda $\alpha_\chi(x)$ koja je izračunjiva iz χ.

Dokaz. Kao u dokazu teorema 3.13, polazimo od prijevoda drugog reda
$\forall P_1 ... \forall P_n(ST_x(\varphi) \to \text{POS})$ (3.16)

1. korak. Izvlačimo egzistencijalne kvantifikatore (koji predstavljaju prijevod operatora mogućnosti) iz antecedente jednako kao u dokazu teorema 3.13, što rezultira formulom oblika
$\forall P_1 ... \forall P_n \forall x_1 ... \forall x_m(\text{REL} \land \text{BOX-AT} \to \text{POS})$, (3.17)
gdje je REL, kao i prije, konjunkcija podformula oblika Rx_ix_j, a BOX-AT je konjunkcija prijevoda □-atoma, tj. podformula oblika $\forall y(R_kx_iy \to Py)$.

2. korak. Neka je P_i varijabla drugog reda koja se pojavljuje u (3.17) i neka su $\pi_1(x_{i_1}), ..., \pi_k(x_{i_k})$ prijevodi svih □-atoma u antecedenti formule (3.17) u kojima se pojavljuje P_i, tj. π_j su podformule oblika $\forall y(R_{l_j} x_{i_j} y \to Py)$.
Sada definiramo supstituciju
$\sigma(P_i)(y) := (R_{l_1} x_{i_1} y \lor ... \lor R_{l_k} x_{i_k} y)$, gdje je y bilo koja varijabla koja se u (3.17) pojavljuje u podformulama oblika P_iy. Primijetimo da su u slučaju l_j=0 podformule $R_{l_j} x_{i_j} y$ jednake $x_{i_j} = y$, tj. ova supstitucija se podudara s onom iz teorema 3.13. u slučaju trivijalnog □-atoma.

Lako se vidi da se ovom supstitucijom dobiva minimalna instanca za koju je antecedenta istinita, pa je ostatak dokaza jednak dokazu teorema 3.13, osim što svako pojavljivanje AT treba zamijeniti s BOX-AT. ■

Primjer 3.20.

Formula osnovnog modalnog jezika
$\Box p \to \Box\Box p$ (3.18)
korespondira s formulom prvog reda $\forall x \forall y \forall z((Rxy \land Ryz) \to Rxz)$.[13]

Dokaz. Lokalni prijevod drugog reda formule (3.18) je
$\forall P(ST_x(\Box p) \to ST_x(\Box\Box p)) = \forall P(\forall y(Rxy \to Py) \to \forall z(Rxz \to \forall z_1(Rzz_1 \to Pz_1)))$.

[13] Formula (3.18), dakle, također definira tranzitivnost, kao i formula (2.2) iz primjera 2.11. Stoga je ovo ujedno i primjer da različite modalne formule mogu definirati istu klasu okvira. Formula (3.18) predstavlja uobičajen modalni izraz za tranzitivnost u literaturi, npr. u [6], kad se u definiciji abecede modalnog jezika navodi operator nužnosti, dok se operator mogućnosti definira kao pokrata.

U antecedenti nema operatora mogućnosti, pa odmah možemo primijeniti supstituciju iz dokaza teorema 3.19. U ovom slučaju imamo samo jednu propozicionalnu varijablu i samo jedan □-atom □p, odnosno njegov prijevod $\forall y(Rxy \to Py)$. Supstitucija je, dakle, $\sigma(P)(u) := Rxu$. Dobivamo $\forall y(Rxy \to Rxy) \to \forall z(Rxz \to \forall z_1(Rzz_1 \to Rxz_1))$. Očito je ovdje antecedenta trivijalno istinita, pa se formula pojednostavljuje na $\forall z(Rxz \to \forall z_1(Rzz_1 \to Rxz_1)$, što je očito ekvivalentno s $\forall z \forall z_1((Rxz \wedge Rzz_1) \to Rxz_1)$, pa primjenom propozicije 3.2. slijedi tvrdnja. ■

Za sljedeći primjer, kažemo da je relacija *konvergentna* ako za svaki svijet w vrijedi da svaka dva svijeta dostiživa iz w imaju zajedničkog sljedbenika.

Primjer 3.21.

> Formula osnovnog modalnog jezika
> $$\Diamond \Box p \to \Box \Diamond p \tag{3.19}$$
> korespondira s formulom prvog reda $\forall x \forall y \forall z(Rxy \wedge Rxz \to \exists z_1(Ryz_1 \wedge Rzz_1)$, tj. definira konvergentnost.

Dokaz. Polazimo od prijevoda drugog reda
$\forall P(ST_x(\Diamond \Box p) \to ST_x(\Box \Diamond p)) = \forall P(\exists y(Rxy \wedge ST_y(\Box p)) \to \forall z(Rxz \to ST_z(\Diamond p))) =$
$\forall P(\exists y(Rxy \wedge \forall z_1(Ryz_1 \to Pz_1)) \to \forall z(Rxz \to \exists z_2(Rzz_2 \wedge Pz_2)))$.
U prvom koraku izvlačimo egzistencijalni kvantifikator i dobivamo
$\forall P \forall y((Rxy \wedge \forall z_1(Ryz_1 \to Pz_1)) \to \forall z(Rxz \to \exists z_2(Rzz_2 \wedge Pz_2)))$.
Jedini prijevod □-atoma u antecedenti je $\forall z_1(Ryz_1 \to Pz_1)$, pa supstituiramo $\sigma(P)(u) := Ryu$ i dobivamo
$\forall y((Rxy \wedge \forall z_1(Ryz_1 \to Ryz_1)) \to \forall z(Rxz \to \exists z_2(Rzz_2 \wedge Ryz_2)))$ i pojednostavljujemo na $\forall y(Rxy \to \forall z(Rxz \to \exists z_2(Rzz_2 \wedge Ryz_2)))$, što je ekvivalentno s
$\forall y \forall z((Rxy \wedge Rxz) \to \exists z_2(Rzz_2 \wedge Ryz_2))$ i tvrdnja slijedi. ■

3.6. SAHLQVISTOVE FORMULE

U definiciji vrlo jednostavnih i jednostavnih Sahlqvistovih formula, antecedente se formiraju na način da omogućuju nalaženje minimalne instance za koju su istinite, a konzekvente su pozitivne, što omogućuje širenje istinitosti s minimalne na sve instance. Ista ideja stoji i iza definicije cijele Sahlqvistove klase. Vidjet ćemo da se uz □-atome u izgradnji antecedente mogu koristiti i negativne formule, a uz konjunkciju i disjunkcija. Od tako dobivenih implikacija sve Sahlqvistove formule slažu se primjenom operatora nužnosti i veznika konjunkcije i disjunkcije. Evo i precizne definicije.

Definicija 3.22.

> *Sahlqvistova antecedenta* je formula osnovnog modalnog jezika izgrađena od logičkih konstanti, □-atoma i negativnih formula, uz upotrebu veznika konjunkcije $\wedge$, disjuncije $\vee$ i modalnog operatora mogućnosti $\Diamond$.
>
> *Sahlqvistova implikacija* je formula $\varphi\rightarrow\psi$ takva da je φ Sahlqvistova antecedenta, a ψ pozitivna formula.
>
> ***Sahlqvistova formula*** je formula sastavljena od Sahlqvistovih implikacija slobodnom primjenom operatora nužnosti $\Box$ i veznika konjunkcije $\wedge$, te primjenom disjunkcije samo među formulama koje nemaju zajedničkih propozicionalnih varijabli.

Prije nego dokažemo da svaka Sahlqvistova formula ima izračunjivog korespondenta prvog reda, razmotrimo ograničenja te klase formula. Naime, kako su $\Box$, $\wedge$ i $\rightarrow$ pokrate, može ostati pomalo nejasno koje formule osnovnog modalnog jezika nisu Sahlqvistove. Pogledajmo npr. Löbovu formulu $\Box(\Box p\rightarrow p)\rightarrow\Box p$ (primjer 2.12). Njena konzekventa jest pozitivna formula, ali antecedenta $\Box(\Box p\rightarrow p)$, kada raspišemo implikaciju jednaka $\Box(\neg\Box p\vee p)$, ne zadovoljava definiciju Sahlqvistove antecedente, jer iako je negativna formula $\neg\Box p$ povezana s □-atomom p veznikom $\vee$, na tako formiranu $\neg\Box p\vee p$ djeluje operator nužnosti, što je tipična zabranjena kombinacija u antecedenti (disjunkcija u dosegu operatora nužnosti).

Druga tipična zabrana je operator mogućnosti u dosegu operatora nužnosti.[14] Formula $\Diamond\Box p\rightarrow\Box\Diamond p$ iz primjera 3.21. je Sahlqvistova jer je konzekventa $\Box\Diamond p$ pozitivna, a antecedenta je dobivena djelovanjem operatora $\Diamond$ na □-atom $\Box p$.

[14] Pozitivno (konstruktivno) intonirana definicija Sahlqvistovih formula u ovom radu analogna je definiciji iz [1], koja se odnosi na općenito definiran modalni jezik. U literaturi postoje ekvivalentne definicije u kojima se Sahlqvistove formule definiraju negativno, preko spomenutih tipičnih zabrana. Takva je i definicija u originalnom Sahlqvistovom radu [10].

Međutim, obratna implikacija $\Box\Diamond p\to\Diamond\Box p$ nije Sahlqvistova, jer u antecedenti operator $\Box$ djeluje na $\Diamond p$, što znači da $\Box$ nije ni u $\Box$-atomu, niti u negativnoj formuli, što su dozvoljene mogućnosti iz definicije 3.22.

Sljedeća lema svodi problem korespondencije s proizvoljne Sahlqvistove formule na Sahlqvistovu implikaciju.

Lema 3.23.

Neka su φ i ψ formule osnovnog modalnog jezika, a α i β formule jezika korespondencije prvog reda. Tada vrijedi:

1. Ako su φ i α(x) lokalni korespondenti, onda su $\Box_k\varphi$ i $\forall y(R_kxy\to[y/x]\alpha)$ lokalni korespondenti.
2. Ako φ lokalno korespondira s α i ψ lokalno korespondira s β, onda $\varphi\wedge\psi$ lokalno korespondira s $\alpha\wedge\beta$.
3. Ako φ lokalno korespondira s α i ψ lokalno korespondira s β, pri čemu φ i ψ nemaju zajedničkih propozicionalnih varijabli, onda $\varphi\vee\psi$ lokalno korespondira s $\alpha\vee\beta$.

Dokaz. 1. Neka su φ i $\alpha(x)$ lokalni korespondenti, tj. za svaki okvir i za svaki svijet vrijedi: F, $w\Vdash\varphi$ ako i samo ako $F\vDash\alpha[w]$. Treba dokazati da je F, $w\Vdash\Box_k\varphi$ ako i samo ako $F\vDash\forall y(R_kxy\to[y/x]\alpha)[w]$.

Po definiciji 1.4, F, $w\Vdash\Box_k\varphi$ ako i samo ako M, $w\Vdash\Box_k\varphi$ za svaki model M baziran na F, no to prema propoziciji 2.2. vrijedi ako i samo ako $M\Vdash ST_x(\Box_k\varphi)[w]$ za svaki model M baziran na F. Kako je $ST_x(\Box_k\varphi)=\forall y(R_kxy\to ST_y(\varphi))$, slijedi da je F, $w\Vdash\Box_k\varphi$ ako i samo ako $M\Vdash\forall y(R_kxy\to ST_y(\varphi))[w]$ za svaki model M baziran na F.

Po definiciji istinitosti u logici prvog reda, $M\Vdash\forall y(R_kxy\to ST_y(\varphi))[w]$ znači da za svaki svijet v vrijedi: ako vrijedi R_kwv, onda je $M\Vdash ST_y(\varphi)[v]$, što je zbog propozicije 2.2. ekvivalentno s M, $v\Vdash\varphi$.

No, kako R_kwv ne ovisi o izboru modela M, slijedi da je F, $w\Vdash\Box_k\varphi$ ako i samo ako za svaki svijet v iz R_kwv slijedi F, $v\Vdash\varphi$. Kako je F, $v\Vdash\varphi$ ako i samo ako $F\vDash\alpha[v]$, slijedi tvrdnja.

2. Neka φ lokalno korespondira s α i ψ lokalno korespondira s β. Tada su sljedeće tvrdnje očito međusobno ekvivalentne:

$F, w \Vdash \varphi \wedge \psi$
$M, w \Vdash \varphi \wedge \psi$ za svaki model M baziran na F
$M, w \Vdash \varphi$ i $M, w \Vdash \psi$ za svaki model M baziran na F
$F, w \Vdash \varphi$ i $F, w \Vdash \psi$
$F \vDash \alpha[w]$ i $F \vDash \beta[w]$
$F \vDash \alpha \wedge \beta[w]$.

3. Imamo analogni niz ekvivalentnih tvrdnji:
$F, w \Vdash \varphi \vee \psi$
$M, w \Vdash \varphi \vee \psi$ za svaki model M baziran na F
$M, w \Vdash \varphi$ ili $M, w \Vdash \psi$ za svaki model M baziran na F
$F, w \Vdash \varphi$ ili $F, w \Vdash \psi$
$F \vDash \alpha[w]$ ili $F \vDash \beta[w]$
$F \vDash \alpha \vee \beta[w]$.

Treba, međutim, napomenuti da u ovom slučaju nije tako očita ekvivalentnost treće i četvrte tvrdnje. Treća jasno slijedi iz četvrte, no obrat ne mora vrijediti ako nije zadovoljena pretpostavka da formule φ i ψ nemaju zajedničkih propozicionalnih varijabli. Naime, u svakom modelu baziranom na F mogla bi biti istinita jedna od tih formula, a da nijedna od njih nije valjana.[15] Dokažimo stoga detaljnije da treća tvrdnja povlači četvrtu.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje modeli $M=(F,V)$ i $M'=(F,V')$ bazirani na F takvi da φ nije istinita u w na M, a ψ nije istinita u w na M'. Neka je $M''=(F,V'')$ model takav da je $V''(p)=V(p)$ za svaku propozicionalnu varijablu p koja se pojavljuje u φ i $V''(q)=V'(q)$ za svaku propozicionalnu varijablu q koja se pojavljuje u ψ. Kako φ i ψ nemaju zajedničkih propozicionalnih varijabli, M'' je dobro definiran model na kojem ni φ ni ψ nisu istinite u w. No, tada ni $\varphi \vee \psi$ nije istinita u w na M'', što je u kontradikciji s pretpostavkom. ■

Teorem 3.24.

Neka je χ Sahlqvistova formula. Tada χ lokalno korespondira s formulom prvog reda $\alpha_\chi(x)$ koja je izračunjiva iz χ.

Dokaz. Prema lemi 3.23, dovoljno je dokazati tvrdnju za Sahlqvistove implikacije. Neka je stoga $\chi = \varphi \rightarrow \psi$, pri čemu je φ Sahlqvistova antecedenta, a ψ pozitivna. Polazimo od prijevoda drugog reda $\forall P_1 ... \forall P_n(ST_x(\varphi) \rightarrow ST_x(\psi))$.

[15] Jednostavan primjer takve situacije je valjana formula $p \vee \neg p$. U svakom svijetu svakog modela istinito je p ili $\neg p$, no nijedna od te dvije formule nije valjana.

1. korak. Kao i u dokazima teorema 3.13. i 3.19, izvlačimo egzistencijalne kvantifikatore (koji su prijevod operatora mogućnosti) ispred glavne implikacije. No, kako se u Sahlqvistovoj antecedenti uz $\wedge$ koristi i $\vee$, uz dosad korištene ekvivalencije (iste kao u dokazu teorema 3.13), trebat ćemo i ove:
$((\alpha\vee\beta)\to\gamma) \leftrightarrow ((\alpha\to\gamma)\wedge(\beta\to\gamma))$ i
$\forall\ldots(\alpha\wedge\beta) \leftrightarrow (\forall\ldots\alpha\wedge\forall\ldots\beta)$,
kako bismo se riješili disjunkcija.

Iz ovih (očito valjanih) ekvivalencija slijedi da prijevod drugog reda možemo preoblikovati u konjunkciju formula oblika
$$\forall P_1\ldots\forall P_n\forall x_1\ldots\forall x_m(\text{REL}\wedge\text{BOX-AT}\wedge\text{NEG}\to ST_x(\psi)), \tag{3.20}$$
gdje su REL i BOX-AT, kao i prije, konjunkcije podformula oblika Rx_ix_j, odnosno prijevoda $\Box$-atoma, a NEG je konjunkcija prijevoda negativnih formula, pa je stoga i sama negativna.

Zbog leme 3.23.(2), dovoljno je dokazati da svaka formula oblika (3.20) ima ekvivalentnu formulu prvog reda. Pritom koristimo (očito valjanu) ekvivalenciju
$((\alpha\wedge\text{NEG})\to\beta) \leftrightarrow (\alpha\to(\beta\vee\neg\text{NEG}))$,
gdje je $\neg$NEG pozitivna formula (jer je negacija negativne). Pomoću te ekvivalencije (3.20) postaje
$\forall P_1\ldots\forall P_n\forall x_1\ldots\forall x_m(\text{REL}\wedge\text{BOX-AT}\to\text{POS})$,
pri čemu je POS pozitivna formula (jer je disjunkcija dviju pozitivnih), pa dolazimo u istu situaciju kao pred 2. korak u dokazu teorema 3.19. Tvrdnja stoga slijedi primjenom ostatka tog dokaza. ■

Razmotrimo sada još par primjera.

Primjer 3.25.

Formula osnovnog modalnog jezika
$$\Box(p \to \Diamond p) \tag{3.21}$$
korespondira s formulom prvog reda $\forall x\forall y(Rxy\to Ryy)$.

Dokaz. Prema primjeru 2.10, formula $p\to\Diamond p$ lokalno korespondira s formulom Rxx. Iz leme 3.23.(1) slijedi da formula (3.21) lokalno korespondira sa $\forall y(Rxy\to Ryy)$, pa tvrdnja slijedi iz propozicije 3.2. ■

Primjenom operatora nužnosti na formulu refleksivnosti tako smo dobili svojevrsnu pomaknutu refleksivnost – svojstvo da je svaki svijet refleksivan ako je nečiji sljedbenik. Za ovaj primjer trebala nam je samo lema 3.23, pa evo i jedan nešto složeniji, koji zahtijeva primjenu teorema 3.24.

Primjer 3.26

Formula

$$(p \wedge \Diamond\neg p) \to \Diamond p \tag{3.22}$$

korespondira s formulom prvog reda $\forall x\forall y(Rxy\wedge x\neq y\to Rxx)$.

Dokaz. Prijevod drugog reda formule (3.22) je
$\forall P(Px\wedge\exists y(Rxy\wedge\neg Py)\to\exists z(Rxz\wedge Pz))$.
Ovdje je Px prijevod □-atoma p, a $\exists y(Rxy\wedge\neg Py)$ je prijevod formule $\Diamond\neg p$, u kojoj operator mogućnosti djeluje na negativnu formulu $\neg p$. Prvi korak je izvlačenje egzistencijalnog kvantifikatora (prijevoda operatora mogućnosti) ispred glavne implikacije. Dobivamo
$\forall P\forall y(Px\wedge Rxy\wedge\neg Py\to\exists z(Rxz\wedge Pz))$. To je formula oblika (3.20), pri čemu je BOX-AT = Px, REL = Rxy i NEG = $\neg Py$. Sada prebacujemo NEG u konzekventu i dobivamo
$\forall P\forall y(Px\wedge Rxy\to Py\vee\exists z(Rxz\wedge Pz))$. Sada je POS = $Py\vee\exists z(Rxz\wedge Pz)$.
Kako imamo samo jedan i to trivijalni □-atom, potrebna supstitucija je
$\sigma(P)(u) := u=x$. Dobivamo
$\forall y(x=x\wedge Rxy\to y=x\vee\exists z(Rxz\wedge z=x))$, što se pojednostavljuje na
$\forall y(Rxy\to y=x\vee Rxx)$ ili, ekvivalentno, $\forall y(Rxy\wedge x\neq y\to Rxx)$. ■

Iza dokaza teorema 3.13, 3.19. i 3.24, kao i svih razmotrenih primjera, koji pokazuju kako funkcionira algoritam prevođenja Sahlqvistovih formula na korespondente prvog reda, stoji jedna ideja – u minimalnoj instanci koja antecedentu čini istinitom, prikladnom supstitucijom prevesti monadske varijable drugog reda na izraze prvog reda. Korespondenciju potom osigurava pozitivnost konzekvente.

4. UMJESTO ZAKLJUČKA – OBRAT, PROŠIRENJA, POTPUNOST

Ovdje ćemo navesti rezultate koji određuju mjesto Sahlqvistovih formula u teoriji korespondencije, odnosno, pokušat ćemo dati odgovore na pitanja može li se odrediti klasa formula prvog reda koje korespondiraju sa Sahlqvistovim formulama, zatim može li se Sahlqvistova klasa proširiti uz zadržavanje dobrih svojstava, te kakvi se aksiomatski sistemi dobivaju dodavanjem Sahlqvistovih formula sistemu **K**. Dokazi ovih rezultata nadilaze okvire ovog rada, pa ćemo ih samo ukratko navesti kako bismo zaokružili priču.

Teorem 4.1. (Chagrova)

> Nije odlučivo ima li proizvoljna formula osnovnog modalnog jezika korespondenta prvog reda.[16]

Ovaj smo rezultat već naveli. Opći algoritam korespondencije, dakle, ne postoji. Odavde, dakako, odmah slijedi da Sahlqvistova klasa ne sadrži sve modalne formule koje imaju korespondenta prvog reda. Naime, lako je napisati program koji će odlučiti je li proizvoljna modalna formula Sahlqvistova i izračunati njenog korespondenta prvog reda ako jest.[17]

Sve Sahlqvistove formule imaju lokalnog korespondenta prvog reda. Već smo napomenuli da neke modalne formule imaju globalnog, ali ne i lokalnog korespondenta. No, postoje i formule koje imaju lokalnog korespondenta, a nisu Sahlqvistove.[18]

Naveli smo ograničenja Sahlqvistovih formula, pa se nameće pitanje može li se ta klasa proširiti. U [1] autori konstatiraju da se može, no da se time narušava jednostavnost, kao i da je upitno može li se dobiti proširenje dovoljno interesantno da bi bilo vrijedno tog žrtvovanja jednostavnosti. U svakom slučaju, proširenje se ne može ostvariti naprosto ukidanjem nekog od ograničenja iz definicije Sahlqvistovih formula. No, autori članka [8] razvijaju, kako navode u sažetku, izmijenjen sintaktički pristup modalnim jezicima i generaliziraju Sahlqvistovu metodu minimalnih valuacija koristeći topološki pristup. Proširenje Sahlqvistovih formula je, dakle, aktualno područje istraživanja u kojem još nije sve rečeno.

[16] Ovo je dokazano u članku [4].
[17] U ovom radu izračunjivost samo konstatiramo kao intuitivno jasnu. Algoritam korespondencije detaljno je izložen u [12].
[18] Otkrivanje ovakvih primjera nije trivijalno i zahtijeva šire izlaganje teorije okvira. To je učinjeno i primjeri su navedeni u [1].

U kratkom izlaganju o sistemu **K** (str. 5-6) napomenuli smo da se dodavanjem formule tranzitivnosti $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ aksiomima tog sistema dobiva sistem **K4**, koji generira točno sve formule valjane na tranzitivnim okvirima.

Štoviše, vrijedi sljedeći rezultat, poznat kao *Sahlqvistov teorem potpunosti*.

Teorem 4.2. (Sahlqvist)

> Ako je Σ skup Sahlqvistovih formula, onda je sistem $\mathbf{K}\Sigma$, dobiven dodavanjem formula iz Σ aksiomima sistema **K**, potpun u odnosu na klasu okvira definiranu skupom Σ.[19]

Tako možemo npr. dodavanjem modalnih formula koje izražavaju refleksivnost, simetičnost i tranzitivnost sistemu **K** dobiti sistem koji generira točno sve valjane formule na klasi okvira čija je relacija dostiživosti relacija ekvivalencije. Već smo napomenuli da antisimetričnost nije modalno definabilna, pa ne postoji sličan sistem za relacije parcijalnog uređaja. No, iako Goldblatt-Thomasonov teorem daje algebarsku karakterizaciju modalno definabilnih okvira, bilo bi pogodnije da se već iz sintakse formule prvog reda može zaključiti ima li ona modalnog korespondenta. Tu ne postoji rezultat koji daje nužne i dovoljne uvjete, ali postoji vrlo značajno djelomično rješenje – uvjetima na sintaksi može se odrediti je li proizvoljna formula prvog reda korespondent Sahlqvistove formule. U knjizi [1], od str. 171, precizno su definirane *Krachtove formule* prvog reda i dokazan sljedeći teorem, svojevrsni obrat Sahlqvistovog teorema korespondencije.

Teorem 4.3. (Kracht)

> Svaka Sahlqvistova formula lokalno korespondira s Krachtovom formulom. Obratno, svaka Krachtova formula je lokalni korespondent prvog reda neke Sahlqvistove formule, koja je izračunjiva iz Krachtove formule.

Problem korespondencije na okvirima Sahlqvistovim je formulama samo djelomično riješen. Međutim, dvosmjerna izračunjivost, širina, jednostavnost i rezultat potpunosti ocrtavaju izrazitu važnost ove klase modalnih formula.

[19] To je dokazao Sahlqvist u radu [10]. Još jedan dokaz izložen je u članku [11].

LITERATURA

[1] J. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Springer-Verlag, 2003.

[2] S. Balenović, *Teorija korespondencije* (diplomski rad), PMF-Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu, 2005.

[3] G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, 1996.

[4] L. A. Chagrova, An undecidable problem in correspondence theory, *Journal of Symbolic Logic*, 56: 1261-1272, 1991.

[5] H. D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1984.

[6] J. Garson, Modal logic, E. N. Zalta (ur.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2005 Edition)*, Stanford University, 2005.

[7] V. Goranko, M. Otto, Model theory of modal logic, P. Blackburn, J. van Benthem, F. Wolter (ur.), *Handbook of Modal Logic (Studies in Logic & Practical Reasoning)*, Elsevier, 2006.

[8] V. Goranko, D. Vakarelov, Elementary canonical formulae: extending Sahlqvist's theorem, *Annals of Pure and Applied Logic*, 141:180-217, 2006.

[9] D. Kiraly, *Modalna logika* (diplomski rad), PMF-Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu, 2004.

[10] H. Sahlqvist, Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic, S. Kanger (ur.), *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium, Uppsala 1973* (str. 110-143), Amsterdam: North-Holland, 1975.

[11] G. Sambin, A simpler proof of Sahlqvist's theorem on completeness of modal logics, *Bulletin of the Section of Logic*, 9:50-56, University of Lodz, 1980.

[12] A. Szalas, On the correspondence between modal and classical logic: an automated approach, *Journal of Logic and Computation*, 3:605-620, 1993.