Pete vježbe

Fran Mišković

1. travnja 2026.

1 Bernoullijeva jednadžba

Oblika je:

$$y'(x) = P(x)y(x) + Q(x)y(x)^n, \quad n \neq 0$$

Koristimo supstituciju $u(x) = y(x)^{1-n}$ pa imamo:

$$u' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)(P(x)u(x) + Q(x))$$

što nam daje jednadžbu tipa:

$$(uP(x) + Q(x))dx - du = 0$$

što rješavamo jednom od metoda iz prvog tjedna predavanja.

Zadatak 1. Riješi jednadžbu:

$$y' + xy = xy^3.$$

Rješenje. Zapišimo je u obliku $y' = -xy + xy^3$. Sada je očito da se radi o Bernoullijevoj jednadžbi. Klasična supstitucija $u = y^{1-3} = y^{-2}$ nam daje:

$$(-xu + x)dx - du = 0 \Longleftrightarrow xdx = \frac{du}{1-u} \Longleftrightarrow x^2 + C = -\ln(|1-u|) \implies u(x) = Ce^{-x^2}$$

što u konačnici daje $y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}$.

2 Riccatijeva jednadžba

Oblika je:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + r(x), \quad P \neq 0,\, R \neq 0$$

Ako znamo partikularno rješenje y_0 onda je opće rješenje oblika $y = y_0 + u$, gdje u zadovoljava Bernoullijevu jednadžbu danu s:

$$u' = Pu^2 + (2Py_0 + Q)u.$$

Zadatak 2. Pronađi opće rješenje jednadžbe

$$y' = y^2 - y - 2$$

uz pomoć partikularnog rješenja $y_0(x) = 2$.

Rješenje. Primijetimo da se radi o Riccatijevoj jednadžbi pa je opće rješenje oblika $y = 2 + u$, pri čemu vrijedi:

$$u' = u^2 + (2\cdot 2 - 1)u = u(u+3) \implies \frac{du}{u(u+3)} = dx \implies \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+3}\right)du = 3dx \implies \ln\left|\frac{u}{u+3}\right| = 3x + C$$

što daje $\frac{u}{u+3} = Ce^{3x}$, odnosno $u(1 - Ce^{3x}) = 3Ce^{3x} \implies y = 2 + \frac{3Ce^{3x}}{1-Ce^{3x}}$.

Zadatak 3. Pronađi opće rješenje jednadžbe

$$y' = y^2/x^3 - y/x + 2x$$

uz pomoć partikularnog rješenja $y_0(x) = x^2$.

Rješenje. Primijetimo da se radi o Riccatijevoj jednadžbi pa je opće rješenje oblika $y = x^2 + u$, pri čemu vrijedi:

$$u' = u^2/x^3 + (2/x - 1/x)u = u^2/x^3 + u/x.$$

Ovo je Bernoullijeva jednadžba pa koristimo supstituciju $v = u^{1-2} = 1/u$ koja nam daje jednadžbu:

$$(v/x + 1/x^3)dx - dv = 0 \Longleftrightarrow (vx^2 + 1)dx - x^3 dv = 0.$$

Ova jednadžba je izobarna uz $n = -2$, tj. $v = z/x^2$ pa $dv = dz/x^2 - 2zdx/x^3$ i:

$$(z+1)dx - xdz + 2zdx = 0 \Longleftrightarrow (3z+1)dx = xdz \Longleftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{3z+1} \Longleftrightarrow \ln|x| + C = \frac{1}{3}\ln|3z+1|$$

što daje $3z + 1 = C\sqrt[3]{x}$, tj. $z = C\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}$ i time $v = x^{-2}\left(C\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}\right)$ i $u = \frac{3x^2}{C\sqrt[3]{x}-1}$ te naposlijetku $y(x) = x^2\left(1 + \frac{3}{C\sqrt[3]{x}-1}\right)$.