Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Grgur Petric Maretić

Fuzzy logika

Diplomski rad

22. siječnja 2010.

Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Grgur Petric Maretić

Fuzzy logika

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mladen Vuković

22. siječnja 2010.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. __________________________________, predsjednik

2. __________________________________, član

3. __________________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod **2**
1.1 Motivacija 2
1.2 Cilj ovog rada 4

2 Viševaljana logika sudova **5**
2.1 Neprekidna t-norma i njen reziduum 5
2.2 Osnovna viševaljana logika 9

3 Teorem potpunosti za sistem BL **21**
3.1 Teorem potpunosti za sistem BL 21

Literatura **31**

1 Uvod

1.1 Motivacija

Započnimo naša razmatranja primjerom tzv. paradoksa solites, odnosno paradoksa hrpe:

- Čini li milijun zrnaca pijeska hrpu?
- Ako iz hrpe pijeska uklonimo jedno zrnce, čini li preostali pijesak i dalje hrpu?

Na prvo pitanje naš bi odgovor gotovo sigurno bio da. Ako smatrate da je milijun zrnaca premalo, možete uzeti neki drugi, po volji velik broj. Ako iz hrpe uklonimo jedno zrnce, teško da bi itko golim okom mogao ustvrditi razliku, a odgovor na pitanje je li nešto hrpa ili nije upravo ovisi o procjeni golim okom. Zato je očekivan odgovor i na drugo pitanje da. No tu se pojavljuje poteškoća. Naime, tako uklanjanjem jednog po jednog zrnca dolazimo u situaciju u kojoj nam ostaje samo jedno zrnce, ili čak nijedno, a upravo smo ustvrdili da bi to i dalje trebala biti hrpa. Koliko god značenje riječi hrpa bilo nejasno, ipak će se većina ljudi složiti da jedno zrnce ne čini hrpu. Mogli bismo taj problem riješiti jednostavno tako da hrpu definiramo kao bilo koji broj zrnaca pijeska, ali takva definicija nam nije korisna jer ne odgovara značenju riječi hrpa u govornom jeziku. Mogli bismo probati izbjeći problem tako da definiramo hrpu kao beskonačan skup zrnaca pijeska ili reći da ne postoji takav pojam kao što je hrpa pijeska, ali to bi nam bilo još manje korisno. Jedino što nam preostaje je da odaberemo neki prirodan broj N, takav da skup od N zrnaca čini hrpu, a skup od $N - 1$ više ne čini hrpu. Postavlja se pitanje koliki je taj N? Sto, tisuću, milijun zrnaca? Čak i da se dogovorimo za neki broj, time smo upravo promijenili smisao riječi hrpa. Za skup od jednog zrnca i za skup od milijardu i dalje ćemo lako moći procijeniti je li hrpa ili ne, ali što kad imamo skupove od $N - 2$ i $N + 2$ zrnaca? Bez brojanja nećemo ni vidjeti razliku između njih.

Problem je u tome što svijet oko nas, naša percepcija, komunkacija i razmišljanje nisu crno-bijeli, rijetko je što apsolutno i "čisto". Navikli smo razmišljati u sivim tonovima, koristiti nejasne izraze poput "hrpa pijeska", "mlad čovjek", "težak zadatak", "puno novaca", te nam činjenica da njihovo značenje možda i nije sasvim točno određeno u većini slučajeva ne predstavlja problem. No ako pokušamo modelirati jedan takav problem, na primjer svrstavanje ljudi u dvije skupine - visoke i niske, zapadamo u poteškoće jer ne možemo to riješiti na elegantan način. Na određenoj visini moramo povući crtu i reći da su svi koji su ispod crte niski, a svi koji su iznad crte visoki, ali ne možemo izraziti nijanse između "visokog" i "niskog", pa ne možemo ni uspješno modelirati ljudski način razmišljanja.

Upravo iz želje da se modeliraju takvi problemi, Lotfi Zadeh je 1965. u [13] razvio fuzzy[1] teoriju skupova. Glavna ideja u fuzzy teoriji skupova je da element fuzzy skupa ima odgovarajući stupanj pripadnosti. Kako karakteristična funkcija klasičnog skupa poprima vrijednosti 0 ili 1, logično je za skup mogućih stupnjeva pripadnosti fuzzy skupu uzeti segment $[0,1]$. Mogli bismo za skup stupnjeva pripadnosti uzeti i samo neki konačan podskup danog segmenta, ali radije ćemo koristiti cijeli segment jer nam to daje veću širinu. Važno je uvidjeti razliku između stupnja pripadnosti nekog elementa i vjerojatnosti. Mogli bismo, pogrešno, pomisliti da je stupanj pripadnosti elementa skupu isto što i vjerojatnost događaja da se element nalazi u skupu, no te su dvije stvari potpuno različite. Da bismo što bolje objasnili razliku između stupnja pripadnosti i vjerojatnosti, poslužit ćemo se još jednim primjerom.

Zamislimo čašu vode, i neka je stupanj pripadnosti te čaše u skup punih čaša jednak 0.5. Čaša može biti potpuno prazna, skoro prazna, napola puna, skoro puna i potpuno puna (naravno, može biti bilo koja nijansa između ovih slučajeva koji ni sami nisu precizno definirani). Uz stupanj pripadnosti čaše skupu punih čaša 0.5 očekujemo da je naša čaša tada napola puna. No, kad bismo rekli da je vjerojatnost događaja da je čaša puna 0.5, imamo samo dvije krajnosti - potpuno punu i potpuno praznu čašu, te vidimo da se opet vraćamo na onaj stari problem koji smo uvođenjem fuzzy skupova riješili. Razlika je upravo u tome da se, kad govorimo o vjerojatnosti, opet vraćamo na upotrebu klasičnih skupova. Isto tako, kad govorimo o stupnju pripadnosti, nemamo nikakvog slučajnog događaja čiju bismo vjerojatnost proučavali - imamo samo čašu koja nije ni potpuno puna ni potpuno prazna. Ako želimo, možemo stupanj pripadnosti povezati s vjerojatnošću da promatrač odgovori potvrdno na pitanje nalazi li se element u skupu ("je li ovaj čovjek visok?"), ali niti ta veza ne mora nužno postojati.

Za primjer obratnog slučaja uzmimo poznati Schrödingerov "paradoks kvantne mačke" - mačka je zatvorena u neprozirnoj kutiji u kojoj se nalazi otrov koji, čim dođe u doticaj s mačkom, mačku trenutno ubija. U kutiji se nalazi i uređaj koji u sebi ima radioaktivni uzorak te kad taj uzorak ispusti alfa-česticu, aktivira se mehanizam koji otpušta otrov. Vjerojatnost događaja da se čestica raspala ovisi o vremenu, pa pretpostavimo da pokus traje toliko dugo da je vjerojatnost jednaka 0.5. Alfa-čestica je u superponiranom stanju - njezina valna funkcija mora opisivati i raspadnutu i neraspadnutu alfa-česticu. Budući da je život mačke direktno povezan sa stanjem alfa-čestice, Schrödinger je ustvrdio da je i mačka u superponiranom stanju, odnosno da je i živa i mrtva u isto vrijeme. Kasnija otkrića na polju kvantne fizike su pokazala da u takvoj konstrukciji alfa-čestica gubi superponirano svojstvo, pa ga ne može ni prenijeti na mačku. Iako se egzistencija kvantne mačke i dalje zasniva na vjerojatnosti, mačka je već živa ili mrtva, a ne oboje istovremeno. Ako bismo

[1]engl. fuzzy - neizrazit, nejasan

iz vjerojatnost dodađaja da je mačka preživjela zaključili da je stupanj pripadnosti mačke skupu živih mačaka jednak 0.5, dobili bismo slučaj u kojem mačka nije ni isključivo živa ni isključivo mrtva. Mogli bismo to protumačiti kao polustanje između života i smrti (nije ni živa ni mrtva), ili kao kvantnu superpoziciju - stanje u kojem je mačka i živa i mrtva. No ni jedno od ta dva tumačenja stupnja pripadnosti ne odgovara našem primjeru - dok ne pogledamo u kutiju mi ne znamo je li mačka živa ili ne, ali znamo da može biti samo u jednom od ta dva stanja.

Sa fuzzy skupovima lako nam je modelirati niz problema kao što je razvrstavanje ljudi na visoke i niske: oni granični slučajevi koji su nam zadavali poteškoće, u fuzzy skupu visokih ljudi imat će stupnjeve pripadnosti blizu 0.5, i time ćemo moći potpuno jasno izraziti činjenicu da se radi o graničnim slučajevima. Po stupnju pripadnosti vidimo i relativan odnos dvaju elemenata, u ovom slučaju koji je od dvoje ljudi viši.

1.2 Cilj ovog rada

Već smo spomenuli da riječ fuzzy na engleskom jeziku znači nejasan, neizrazit. Sintagma "nejasna logika" ili "neizrazita logika" možda zvuči kontradiktorno, jer bismo mogli naslutiti da se ovdje radi o logici u kojoj nisu jasno definirana "pravila igre", no fuzzy se u tom nazivu odnosi na istinitost tvrdnji. Kako u fuzzy skupu elementi imaju stupanj pripadnosti, tako u fuzzy logici tvrdnje imaju stupanj istinitosti.

Fuzzy logika je logički sistem koji formalizira aproksimativno zaključivanje, i u tom je smislu fuzzy logika proširenje viševaljane logike. U ovom ćemo radu proučavati viševaljanu logiku sudova s istinitosnim vrijednostima na segmentu $[0,1]$. Definirat ćemo jezik i semantiku, navesti aksiome i pravilo izvoda te time definirati sistem BL. Pokazat ćemo da za taj sistem vrijedi teorem adekvatnosti, teorem dedukcije (iako općenito u slabijem obliku nego za klasičnu logiku), te na kraju i teorem potpunosti.

2 Viševaljana logika sudova

2.1 Neprekidna t-norma i njen reziduum

U ovom ćemo poglavlju raditi na viševaljanoj logici. Bavit ćemo se logikom sudova, a za skup istinitosnih vrijednosti uzet ćemo segment $[0,1]$ realnih brojeva, gdje 1 označava apsolutnu istinu, a 0 apsolutnu neistinu. Vrlo važnu ulogu imat će relacija $\leq$, uz koju je skup $[0,1]$ linearno uređen, gust i potpun (svaki skup istinitosnih vrijednosti ima supremum i infimum).

Zahtijevat ćemo da svaki (npr. binarni) veznik c ima odgovarajuću interpretaciju $f_c\colon\ [0,1]^2 \to [0,1]$, koja će za svaki par formula φ, ψ određivati stupanj istinitosti od $c(\varphi,\psi)$, odnosno $\varphi c \psi$, iz stupnjeva istinitosti od φ i ψ (analogan uvjet zahtijevamo za veznike drugih mjesnosti).

Pri odabiru interpretacije inzistirat ćemo na tome da viševaljana logika mora biti generalizacija klasične dvovaljane logike. Na primjer, ako veznik & nazovemo konjunkcijom, njegova interpretacija $*$ mora zadovoljavati jednakosti $1 * 1 = 1$, $1 * 0 = 0$, $0 * 1 = 0$, $0 * 0 = 0$.

Počinjemo s izborom interpretacije za konjunkciju, jer ćemo u 2.9 pokazati da dobar izbor semantike konjunkcije određuje semantiku cijelog jezika. Da bismo dobili što bolje kandidate, postavit ćemo iduće zahtjeve na temelju intuitivnog shvaćanja konjunkcije: veliki stupanj istinitosti od $\varphi \& \psi$ znači da su stupnjevi istinitosti od φ i ψ veliki, pri čemu su oba jednako važna (drugim riječima interpretacija je komutativna). Dakle, prirodno nam je pretpostaviti da je interpretacija konjunkcije nepadajuća funkcija u oba argumenta, da je 1 neutralni element, a da je 0 nulelement (odnosno $x * 1 = x$, i $x * 0 = 0$). Slijedeća funkcija zadovoljava navedene uvjete:

Definicija 2.1. **t-norma** *je binarna operacija* $*\colon\ [0,1]^2 \to [0,1]$ *sa slijedećim svojstvima:*

1. *Funkcija* $*$ *je komutativna i asocijativna:*

$$x * y = y * x,$$
$$(x * y) * z = x * (y * z)\,.$$

2. *Funkcija* $*$ *je nepadajuća:*

$$\text{ako } x_1 \leq x_2 \text{ tada } x_1 * y \leq x_2 * y,$$
$$\text{ako } y_1 \leq y_2 \text{ tada } x * y_1 \leq x * y_2.$$

3. $1 * x = x$ *i* $0 * x = 0$*, za svaki* $x \in [0, 1]$.

Funkcija $*$ *je* **neprekidna t-norma** *ako je t-norma i neprekidna je.*

Primjer 2.1. *Slijedeće su funkcije najvažniji primjeri neprekidnih t-normi::*

1. **Łukasiewiczova t-norma**: $x * y = \max(0, x + y - 1)$.
2. **Gödelova t-norma**: $x * y = \min(x, y)$.
3. **Produktna t-norma**: $x * y = x \cdot y$.

Prodiskutirajmo sada implikaciju. U klasičnoj dvovaljanoj logici je implikacija, $\varphi \to \psi$, istinita ako i samo ako je istinitosna vrijednost od φ manja ili jednaka istinitosnoj vrijednosti od ψ. Označimo li s $\Rightarrow$ interpretaciju veznika $\to$, a sa x i y stupnjeve istinitosti formula φ, odnosno ψ, možemo generalizirati prethodno svojstvo: veliki stupanj istinitosti $x \Rightarrow y$ znači da stupanj istinitosti x ***nije mnogo veći*** od stupnja istinitosti y. Slijedi da interpretacija $x \Rightarrow y$ treba biti nerastuća u x i nepadajuća u y.

Nadalje, zahtijevat ćemo adekvatnost fuzzy modusa ponensa: iz stupnja istinitosti (ili donje međe) x od φ, te stupnja istinitosti (ili donje međe) $x \Rightarrow y$ od $\varphi \to \psi$ trebamo moći odrediti donju među za stupanj istinitosti y od ψ.

Funkcija koja daje donju među za y očito bi trebala biti nepadajuća u oba argumenta (što je istinitiji prethodnik, to je istinitiji sljedbenik). Ako je jedan od argumenata 0, jedini uvjet na (donju među od) y je $0 \leq y$, pa je 0 nul-element operacije o kojoj raspravljamo. Ako je $x \Rightarrow y$ jednako 1, tada tražimo da je $x \leq y$, a ako je $x = 1$, htjeli bismo da bude $(x \Rightarrow y) \leq y$, što znači da je 1 neutralni element naše funkcije.

Unatoč tome što ne možemo lako opravdati komutativnost i asocijativnost, za našu funkciju korisno nam je uzeti t-normu $*$, što daje:

$$\text{ako } a \leq x \text{ i } b \leq (x \Rightarrow y) \text{ tada } a * b \leq y.$$

Posebno, za $a = x$ i uz supstituciju $z = b$ dobivamo

$$\text{ako } z \leq x \Rightarrow y \text{ tada } x * z \leq y.$$

S druge strane, htjeli bismo da $x \Rightarrow y$ bude čim veći (jer nam je tada pravilo jače). Kad je $x * z \leq y$, tada je z kandidat za $x \Rightarrow y$ (u smislu da zadovoljava prije navedene uvjete), pa možemo zahtijevati

$$\text{ako } x * z \leq y \text{ tada } z \leq (x \Rightarrow y),$$

odakle slijedi

$$x * z \leq y \text{ ako i samo ako } z \leq (x \Rightarrow y).$$

Slijedi da je $x \Rightarrow y$ najveći z koji zadovoljava $x * z \leq y$.

Lema 2.2. *Neka je $*$ neprekidna t-norma. Tada postoji jedinstvena funkcija $x \Rightarrow y$ sa svojstvom da je $(x * z) \leq y$ ako i samo ako $z \leq (x \Rightarrow y)$, za sve $x, y, z \in [0, 1]$. Ta je funkcija dana sa $(x \Rightarrow y) = \max\{z|x * z \leq y\}$.*

Dokaz. Neka su $x, y \in [0, 1]$. Iz uvjeta na funkciju koju tražimo vidimo da $z = (x \Rightarrow y)$ povlači $z \leq (x \Rightarrow y)$, odnosno da skup $\{z|x * z \leq y\}$ sadrži sve kandidate za $x \Rightarrow y$. S druge strane vidimo da je $(x \Rightarrow y)$ gornja međa tog skupa. Dakle, ako uopće postoji broj koji bi bio kandidat za $(x \Rightarrow y)$, on mora biti gornja međa koja je sadržana u skupu, odnosno maksimum.

Funkcija $*$ je neprekidna, pa je neprekidna i funkcija f_x, definirana s $f_x(t) = x*t$. Za inverznu sliku od f_x na segmentu $[0, y]$ očito vrijedi

$$f_x^{\leftarrow}([0, y]) = \{z|x * z \leq y\}.$$

Segment $[0, y]$ je zatvoren skup, a f_x je neprekidna funkcija, pa inverzna slika mora biti zatvoren skup, a to znači da postoji $\max\{z|x * z \leq y\}$. Navedeni postupak možemo provesti za sve x, y, te po točkama definiramo $(x \Rightarrow y) = \max\{z|x * z \leq y\}$. Jedinstvenost je očita jer smo za svaki par x, y imali samo jednu mogućnost. □

Definicija 2.3. *Funkciju $x \Rightarrow y$ iz prethodne leme nazivamo* **reziduumom t-norme**.

Sada ćemo pokazati neka svojstva reziduuma, te ćemo navesti reziduume t-normi koje smo ranije naveli:

Lema 2.4. *Za svaku neprekidnu t-normu $*$ i njen reziduum $\Rightarrow$ vrijedi:*

1. *$x \leq y$ ako i samo ako $(x \Rightarrow y) = 1$,*
2. *$(1 \Rightarrow x) = x$.*

Dokaz.
1. Iz $x \leq y$ slijedi $x * z \leq y$, za svaki z, pa po definiciji reziduuma $(x \Rightarrow y) = 1$. Obratno, ako je $(x \Rightarrow y) = 1$, tada vrijedi $x = x * 1 \leq y$.
2. $(1 \Rightarrow x) = \max\{z|1 * z \leq x\} = \max\{z|z \leq x\} = x$.

□

Lema 2.5. *Vrijedi slijedeće:*

1. *Ako je $x \leq y$, tada $x = y * (y \Rightarrow x)$.*
2. *Ako je $x \leq u \leq y$ i u je idempotentan $(u * u = u)$, tada je $x * y = x$.*

Dokaz.
1. Kao u dokazu 2.2 neka je $f_y(z) = y * z$. Znamo da je $f(0) = 0$ i $f(1) = y$, pa zbog neprekidnosti postoji $z \in [0, 1]$ takav da $f_y(z) = x$. Označimo sa z' najveći takav z. Za $t \in \langle z', 1]$ vrijedi $f_y(t) > x$, jer bismo u suprotnom zbog neprekidnosti i $f_y(1) = y$ dobili kontradikciju s činjenicom da je z' najveći z takav da $f_y(z) = x$. Sada vidimo da je $z' = \max\{z|y * z \leq x\}$, pa je $z' = (y \Rightarrow x)$, odakle slijedi tvrdnja.

2. Iz prve tvrdnje imamo $x = u * (u \Rightarrow x)$. Slijedi da je $x * u = u * (u \Rightarrow x) * u = u * (u \Rightarrow x) = x$. Tada vrijedi $x * y \geq x * u = x$. S druge strane, očito vrijedi $x * y \leq x$, pa je time pokazana jednakost.

$\square$

Teorem 2.6. *Slijedeće operacije su reziduumi prije navedenih t-normi:*

1. **Łukasiewiczova implikacija**: $x \Rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{, ako } x \leq y, \\ 1 - x + y & \text{, ako } x > y. \end{cases}$

2. **Gödelova implikacija**: $x \Rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{, ako } x \leq y, \\ y & \text{, ako } x > y. \end{cases}$

3. **Goguenova implikacija**: $x \Rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{, ako } x \leq y, \\ y/x & \text{, ako } x > y. \end{cases}$

Dokaz. Treba dokazati slučaj $x > y$:

1. $x * z = y$ je ekvivalentno sa $x + z - 1 = y$, odnosno $z = 1 - x + y$. Dakle, $1 - x + y = \max\{z | x * z \leq y\}$.

2. $x * z = y$ je ekvivalentno sa $\min(x, z) = y$. Ovo posljednje je ekvivalentno sa $z = y$.

3. $x * z = y$ je ekvivalentno sa $x \cdot z = y$. Ovo posljednje je ekvivalentno sa $z = y/x$.

$\square$

Definicija 2.7. *Odsad ćemo jedinični segment $[0, 1]$ promatrati kao algebru s operacijama minimuma i maksimuma, koje ćemo označavati s $\cap$ odnosno $\cup$, fiksiranom t-normom $*$, odgovarajućim reziduumom $\Rightarrow$, te istaknutim elementima 0 i 1. Tu ćemo algebru označavati s $L(*)$.*

Uređaj $\leq$ možemo definirati preko operacije minimuma: $x \leq y$ ako i samo ako $x \cap y = x$, a operacije minimuma i maksimuma se mogu definirati pomoću $*$ i $\Rightarrow$, što ćemo pokazati u slijedećoj lemi:

Lema 2.8. *Za svaku neprekidnu t-normu $*$ vrijede idući identiteti:*

1. $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$,

2. $x \cup y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$.

Dokaz. 1. Ako je $x \leq y$, tada je $(x \Rightarrow y) = 1$ pa $x * (x \Rightarrow y) = x$. Ako je $x > y$, tada iz 2.5 imamo $x * (x \Rightarrow y) = y$.

2. Ako je $x \leq y$, tada $(x \Rightarrow y) = 1$ i $((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) = (1 \Rightarrow y) = y$. Nadalje, $y \leq ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$ jer je $y * (y \Rightarrow x) \leq x$. Pokazali smo jednakost za $x \leq y$, a dokaz drugog slučaja je analogan.

$\square$

2.2 Osnovna viševaljana logika

Svaka neprekidna t-norma $*$ određuje semantiku logike sudova: $*$ uzimamo za interpretaciju (jake) konjunkcije &, reziduum $\Rightarrow$ od $*$ postaje interpretacija implikacije. Preciznije, imamo slijedeće:

Definicija 2.9. *Neka je $*$ proizvoljna neprekidna t-norma. Jezik logike sudova $PC(*)$ zadane s t-normom $*$ sadrži propozicionalne varijable $p_1, p_2, \ldots$, veznike & i $\rightarrow$, te konstantu $\overline{0}$.*

Formule *definiramo na slijedeći način:*

1. *Svaka propozicionalna varijabla je formula.*

2. *$\overline{0}$ je formula.*

3. *Ako su ψ, φ formule, tada su $\varphi \& \psi$ i $\varphi \rightarrow \psi$ formule.*

Definiramo (slabu) konjunkciju, disjunkciju, negaciju i ekvivalenciju:

$$\begin{array}{rll} \varphi \wedge \psi & \textit{je} & \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi), \\ \varphi \vee \psi & \textit{je} & ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi), \\ \neg\varphi & \textit{je} & \varphi \rightarrow \overline{0}, \\ \varphi \equiv \psi & \textit{je} & (\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi). \end{array}$$

Interpretacija propozicionalnih varijabli *je preslikavanje e koje svakoj propozicionalnoj varijabli p pridružuje njenu istinitosnu vrijednost $e(p) \in [0, 1]$. To se preslikavanje jedinstveno može proširiti na sve formule na slijedeći način:*

$$e(\overline{0}) = 0,$$

$$e(\varphi \rightarrow \psi) = e(\varphi) \Rightarrow e(\psi),$$

$$e(\varphi \& \psi) = e(\varphi) * e(\psi).$$

Lema 2.10. *Za bilo koje formule φ, ψ vrijedi:*

$$e(\varphi \wedge \psi) = \min(e(\varphi), e(\psi)),$$

$$e(\varphi \vee \psi) = \max(e(\varphi), e(\psi)).$$

Dokaz. Tvrdnje direktno slijede iz 2.8. □

Definicija 2.11. *Formula φ je* **1-tautologija** *od $PC(*)$ ako je $e(\varphi) = 1$, za svaku interpretaciju e.*

Dakle, 1-tautologija je formula koja je istinita za svaku interpretaciju. Sada ćemo odabrati neke formule, koje su 1-tautologije svake propozicionalne logike $PC(*)$, za aksiome, i razviti sistem koji će biti zajednička osnova svim logikama $PC(*)$. Sistem je adekvatan, pa će svaka dokaziva formula biti 1-tautologija svake $PC(*)$, a time i tautologija klasične dvovaljane logike.

Definicija 2.12. *Slijedeće formule su* **aksiomi** *osnovne logike BL*[1]*:*

(A1) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(A2) $(\varphi \& \psi) \to \varphi$

(A3) $(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$

(A4) $(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\psi \& (\psi \to \varphi))$

(A5a) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi)$

(A5b) $((\varphi \& \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$

(A6) $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$

(A7) $\overline{0} \to \varphi$

Pravilo dedukcije *sistema BL je modus ponens. Sada na klasičan način možemo definirati* **dokaz** *i* **dokazivu formulu** *u sistemu BL.*

Napomena 2.13. *Navedeni aksiomi izražavaju slijedeća svojstva:*

(A1) *Tranzitivnost implikacije.*

(A2) *&-konjunkcija implicira prvi član.*

(A3) *Komutativnost &-konjunkcije.*

(A4) *Komutativnost* $\wedge$*-konjunkcije.*

(A5) *Definicija reziduuma.*

(A6) *Dokaz po slučajevima.*

(A7) $\overline{0}$ *implicira sve.*

Lema 2.14. *Svi aksiomi BL su 1-tautologije u svakoj* $PC(*)$*. Ako su* φ *i* $\varphi \to \psi$ *1-tautologije od* $PC(*)$*, tada je i* ψ *1-tautologija od* $PC(*)$*.*

Dokaz. (A2) - (A4) i (A7) su očito 1-tautologije. Za proizvoljnu interpretaciju označimo sa x, y, z redom interpretacije formula φ, ψ, χ.

(A1) Interpretacija formule (A1) jednaka je $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$. Ako pokažemo da je vrijednost tog izraza uvijek veća ili jednaka 1, dokazali smo tvrdnju, budući da interpretacija poprima vrijednosti u segmentu $[0, 1]$. Iz definicije reziduuma dobivamo da je $1 \leq ((x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)))$ ekvivaletno sa $(x \Rightarrow y) \leq ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$, te primjenom istog postupka još dvaput dobivamo ekvivalentan izraz $((x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z) * x) \leq z$.

Kako je $x * (x \Rightarrow y) = x \cap y \leq y$, i $y * (y \Rightarrow z) = y \cap z \leq z$, nejednakost vrijedi, čime je tvrdnja dokazana.

[1]engl. Basic Logic - osnovna logika

(A5) Za svaki $t \in [0,1]$ ekvivalentno je:

$$\begin{aligned}
&t \leq (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)),\\
&(t * x) \leq (y \Rightarrow z),\\
&(t * x * y) \leq z,\\
&t \leq ((x * y) \Rightarrow z).
\end{aligned}$$

Kako to vrijedi za svaki t, tada vrijedi $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) = ((x * y) \Rightarrow z)$, a to nam daje istinitost (A5a) i (A5b) za svaku interpretaciju.

(A6) Očito vrijedi $(x \Rightarrow y) = 1$ ili $(y \Rightarrow x) = 1$, i vrijedi $(1 \Rightarrow y) = y$.

Ako je $(y \Rightarrow x) = 1$, tada je $(((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z) = ((1 \Rightarrow z) \Rightarrow z) = //$ $(z \Rightarrow z) = 1$, pa je i zadana formula istinita (zbog istinitosti konkluzije).

Ako je $(x \Rightarrow y) = 1$, tada $((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) = (1 \Rightarrow z) \leq (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z)$, odakle također slijedi da je zadana formula istinita.

Modus ponens čuva istinitost, jer ako je $x = 1$ i $(x \Rightarrow y) = 1$, tada mora biti $y = 1$ (jer $1 \Rightarrow y = y$). □

Pokazali smo da su aksiomi (A1) - (A7) 1- tautologije, te da pravilo izvoda modus ponens čuva istinitost. Iz toga slijedi tvrdnja idućeg teorema:

Teorem adekvatnosti 2.15. *Svaka formula dokaziva u BL je 1-tautologija svake propozicionalne logike $PC(*)$.*

Sada ćemo navesti niz dokazivih svojstava veznika, te ćemo dokazati ona svojstva koja ćemo koristiti da bismo dokazali teorem dedukcije i teorem potpunosti. Dokaze formula ćemo provesti tako da za svaku pojedinu formulu navedemo nizove formula koje su BL-dokazi. Spomenimo još i činjenicu da iz aksioma (A1) dvostrukom primjenom pravila izvoda modus ponens slijedi da je hipotetički silogizam dopustivo pravilo izvoda, što će nam dokaze učiniti preglednijima.

Lema 2.16. *U BL su dokaziva slijedeća svojstva implikacije:*

(1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,

(1') $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$,

(2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$,

(3) $\varphi \to \varphi$.

Dokaz.

(1)

1.	$(\varphi \& \psi) \to \varphi$	(aksiom (A2))
2.	$((\varphi \& \psi) \to \varphi) \to (\varphi \to (\psi \to \varphi))$	(aksiom (A5b))
3.	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$	(mod pon: 1, 2)

(1')

1. $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to (\psi\&(\psi \to \varphi))$ (aksiom (A4))
2. $(\psi\&(\psi \to \varphi)) \to \psi$ (aksiom (A2))
3. $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$ (hip sil: 1, 2)
4. $((\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi) \to (\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi))$ (aksiom (A5b))
5. $(\varphi \to (\varphi \to \psi) \to \psi)$ (mod pon: 3, 4)

(2)

1. $(\varphi \to (\varphi \to \psi) \to \psi)$ (formula (1'))
2. $(\psi \to ((\psi \to \chi) \to \chi)) \to$
   $((((\psi \to \chi) \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)))$ (aksiom (A1))
3. $(((\psi \to \chi) \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$ (mod pon: 1, 2)
4. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (((\psi \to \chi) \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ (aksiom (A1))
5. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$ (hip sil: 4, 3)

(3)

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ (formula (1))
2. $(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to (\psi \to (\varphi \to \varphi))$ (formula (2))
3. $\psi \to (\varphi \to \varphi)$ (mod pon: 1, 2)
4. $(\psi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ (prethodna formula)
5. $\varphi \to \varphi$ (mod pon: 3, 4)

□

Napomena 2.17. *U [1] je pokazano da je aksiom (A3) suvišan jer je dokaziv pomoću ostalih aksioma. Naime, ako sa BL^- označimo sistem dobiven iz BL uklanjanjem aksioma (A3), vrijedi slijedeće:*

Lema 2.18. *Formula $\varphi\&\psi \to \psi\&\varphi$ je dokaziva u BL^-.*

Dokaz. Budući da u dokazu prethodne leme nismo koristili (A3), možemo koristiti njene rezultate:

1. $(\psi\&\varphi) \to (\psi\&\varphi)$ (forumla (3))
2. $((\psi\&\varphi) \to (\psi\&\varphi)) \to (\psi \to (\varphi \to (\psi\&\varphi)))$ (aksiom (A5b))
3. $\psi \to (\varphi \to (\psi\&\varphi))$ (mod pon: 1, 2)
4. $(\psi \to (\varphi \to (\psi\&\varphi))) \to (\varphi \to (\psi \to (\psi\&\varphi)))$ (formula (2)) □
5. $\varphi \to (\psi \to (\psi\&\varphi))$ (mod pon: 3, 4)
6. $(\varphi \to (\psi \to (\psi\&\varphi))) \to ((\varphi\&\psi) \to (\psi\&\varphi))$ (aksiom (A5a))
7. $(\varphi\&\psi) \to (\psi\&\varphi)$ (mod pon 5, 6)

Primijetimo da svaka dokazana formula čiji je "glavni" veznik implikacija određuje jedno dopustivo pravilo izvoda. Zbog preglednosti i kratkoće dokaza, koristit ćemo neka od tih pravila izvoda, koja ćemo označavati s pi(x), gdje je x redni broj odgovarajuće formule (najčešće će to biti formule (2) i (6) koju ćemo tek dokazati). Često ćemo koristiti i pravila izvoda izražena aksiomima (A5a) i (A5b), te ćemo ih nazivati zajedničkim nazivom reziduiranje, i označavati kraticom rez.

Napomena 2.19. *Spomenimo još i činjenicu da je dopustivo pravilo &-introdukcija, koje ćemo koristiti u dokazima nekih tvrdnji, kao i u dokazu teorema dedukcije. Naime, uz pretpostavku da su formule φ i ψ dokazive, imamo slijedeće:*

1.	φ	*(pretpostavka)*
2.	ψ	*(pretpostavka)*
3.	$(\varphi\&\psi) \to (\varphi\&\psi)$	*(formula (3))*
4.	$\varphi \to (\psi \to ((\varphi\&\psi)))$	*(rez: 3)*
5.	$\psi \to (\varphi\&\psi)$	*(mod pon: 1, 4)*
6.	$\varphi\&\psi$	*(mod pon: 2, 5)*

Lema 2.20. *U BL su dokaziva slijedeća svojstva jake konjunkcije:*

(4) $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$,

(5) $\varphi \to (\psi \to (\varphi\&\psi))$,

(6) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi\&\chi) \to (\psi\&\chi))$,

(7) $((\varphi_1 \to \psi_1)\&(\varphi_2 \to \psi_2)) \to ((\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\psi_2))$,

(8) $(\varphi\&\psi)\&\chi \to \varphi\&(\psi\&\chi)$, $(\varphi\&(\psi\&\chi)) \to ((\varphi\&\psi)\&\chi)$. *(asocijativnost)*

Dokaz. **(4)** Već smo dokazali prilikom dokazivanja (1').

(5)

1.	$(\varphi\&\psi) \to (\varphi\&\psi)$	(formula (3))
2.	$\varphi \to (\psi \to (\varphi\&\psi))$	(rez: 1)

(6)

1.	$(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$	(formula (4))
2.	$\psi \to (\chi \to (\psi\&\chi))$	(formula (5))
3.	$(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to (\chi \to (\psi\&\chi))$	(hip sil: 1, 2)
4.	$\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to (\chi \to (\psi\&\chi)))$	(rez: 3)
5.	$((\varphi \to \psi) \to (\chi \to (\psi\&\chi))) \to$ $(\chi \to ((\varphi \to \psi) \to (\psi\&\chi)))$	(formula (2))
6.	$\varphi \to (\chi \to ((\varphi \to \psi) \to (\psi\&\chi)))$	(hip sil: 4, 5)
7.	$(\varphi\&\chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\psi\&\chi))$	(rez: 6)
8.	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi\&\chi) \to (\psi\&\chi))$	(pi(2): 7)

(7)

1.	$(\varphi_1 \to \psi_1) \to [(\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \varphi_2)]$	(formula (6))
2.	$[(\varphi_1 \to \psi_1) \& (\varphi_2 \to \psi_2)] \to$ $[((\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \varphi_2)) \& (\varphi_2 \to \psi_2)]$	(pi(6): 1)
3.	$(\varphi_2 \to \psi_2) \to [(\psi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \psi_2)]$	(formula (6))
4.	$[((\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \varphi_2)) \& (\varphi_2 \to \psi_2)] \to$ $[((\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \varphi_2)) \& ((\psi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \psi_2))]$	(pi(6): 3)
5.	$[(\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \varphi_2)] \to$ $[(((\psi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \psi_2))) \to ((\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \psi_2))]$	(aksiom (A1))
6.	$[((\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \varphi_2)) \& ((\psi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \psi_2))] \to$ $[(\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \psi_2)]$	(rez: 5)
7.	$[(\varphi_1 \to \psi_1) \& (\varphi_2 \to \psi_2)] \to [(\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \psi_2)]$	(hip sil: 2, 4, 6)

(8)

1.	$((\varphi \& \psi) \& \chi) \to ((\varphi \& \psi) \& \chi)$	(formula (3))
2.	$(\varphi \& \psi) \to (\chi \to ((\varphi \& \psi) \& \chi))$	(rez: 1)
3.	$\varphi \to (\psi \to (\chi \to ((\varphi \& \psi) \& \chi)))$	(rez: 2)
4.	$\varphi \to ((\psi \& \chi) \to ((\varphi \& \psi) \& \chi)))$	(rez: 3)
5.	$(\varphi \& (\psi \& \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \& \chi))$	(rez: 4)

Obratna implikacija pokaže se analogno.

□

Lema 2.21. *U BL su dokaziva slijedeća svojstva $\wedge$-konjunkcije:*

(9) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$, $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$, $(\varphi \& \psi) \to (\varphi \wedge \psi)$,

(10) $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi))$,

(11) $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$,

(12) $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$.

Dokaz. **(9)** Prve dvije formule slijede direktno iz definicije veznika $\wedge$ te aksioma (A2), odnosno formule (4). Treću dokazujemo:

1.	$\psi \to (\varphi \to \psi)$	(formula (1))
2.	$(\psi \& \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \& \varphi)$	(pi(6): 1)
3.	$(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$	(aksiom (A3))
4.	$(\varphi \& \psi) \to (\varphi \& (\varphi \to \psi))$	(hip sil: 3, 2)

(10)

1.	$(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \& (\varphi \to \psi))$	(formula (3))
2.	$\varphi \to ((\varphi \to \psi)) \to (\varphi \wedge \psi))$	(rez: 1)
3.	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi))$	(pi(2): 2)

(11) Po definiciji slijedi iz (A4).

(12)

1.	$(\psi \to \chi) \to [\psi \to (\psi \wedge \chi)]$	(formula (10))
2.	$(\varphi \to \psi) \to [((\psi \to (\psi \wedge \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))]$	(aksiom (A1))
3.	$[(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)] \to (\varphi \to \psi)$	(formula (9))
4.	$[(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)] \to$ $[((\psi \to (\psi \wedge \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))]$	(hip sil: 3, 2)
5.	$[\psi \to (\psi \wedge \chi)] \to$ $[((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))]$	(pi(2): 4)
6.	$(\psi \to \chi) \to (12)$	(hip sil: 1, 5)
6′.	$(\chi \to \psi) \to (12)$	(analogno)
7.	$[(\psi \to \chi) \to (12)] \to [((\chi \to \psi) \to (12)] \to (12))$	(aksiom (A6))
8.	$[(\chi \to \psi) \to (12)] \to (12)$	(mod pon: 6, 7)
9.	$[(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)] \to [\varphi \to (\psi \wedge \chi)]$	(mod pon: 6', 8)

□

Lema 2.22. *U BL su dokaziva slijedeća svojstva* $\vee$*-disjunkcije:*

(13) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$, $\psi \to (\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$,

(14) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \psi)$,

(15) $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$,

(16) $((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi)) \to \chi)$.

Dokaz. **(13)** $(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$ očito slijedi iz definicije $\vee$ i formule (11).

1.	$\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$	(formula (1'))
2.	$\varphi \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$	(formula (1))
3.	$\varphi \to (\varphi \vee \psi)$	(pi(12): 1, 2)

(14)

1.	$(\varphi \vee \psi) \to (((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi))$	(definicija)
2.	$(\varphi \vee \psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$	(pi(9): 1)
3.	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \psi))$	(pi(2): 2)

(15)

1.	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))$	(formula (13))
2.	$(\psi \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))$	(formula (13))
3.	$((\varphi \to \psi) \to (15)) \to (((\psi \to \varphi) \to (15)) \to (15))$	(aksiom A6)
4.	$((\psi \to \varphi) \to (15)) \to (15)$	(mod pon: 1, 3)
5.	$(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$	(mod pon: 2, 4)

(16)

1.	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \psi)$	(formula (14))
2.	$((\varphi \vee \psi) \to \psi) \to$ $((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$	(aksiom (A1))
3.	$((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to (\psi \to \chi)$	(formula (9)
4.	$(\psi \to \chi) \to$ $(((\varphi \vee \psi) \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$	(pi(2): 2)
5.	$((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to$ $(((\varphi \vee \psi) \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$	(hip sil: 3, 4)
6.	$((\varphi \vee \psi) \to \psi) \to$ $(((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi)) \to \chi))$	(pi(2): 5)
7.	$(\varphi \to \psi) \to (16)$	(hip sil: 1, 6)
7′.	$(\psi \to \varphi) \to (16)$	(analogno)
8.	$((\varphi \to \psi) \to (16)) \to (((\psi \to \varphi) \to (16)) \to (16))$	(aksiom (A6)
9.	$((\psi \to \varphi) \to (16)) \to (16)$	(mod pon: 7, 8)
10.	$((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi)) \to \chi)$	(mod pon: 7', 9)

□

Slijedeće dvije formule dokazuju se potpuno analogno kao (12) i (16):

Korolar 2.23. *U BL je dokazivo:*

12') $((\varphi \to \psi)\&(\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$,

16') $((\varphi \to \chi)\&(\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi)\chi)$.

Dokaz slijedećih formula nećemo navoditi, a može se naći u [6]:

Lema 2.24. *U BL su dokaziva slijedeća svojstva negacije:*

(17) $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$, *posebno,* $\varphi \to \neg\neg\varphi$ *i* $(\varphi\&\neg\varphi) \to \overline{0}$,

(18) $(\varphi \to (\psi\&\neg\psi)) \to \neg\varphi$,

(18') $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$,

(18") $(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$.

Definicija 2.25. *Označit ćemo* $\overline{0} \to \overline{0}$ *s* $\overline{1}$.

Lema 2.26. *U BL je dokazivo:*

(19) $\overline{1}$,

(20) $\varphi \to (\overline{1}\&\varphi)$,

(20') $(\overline{1} \to \varphi) \to \varphi$.

Dokaz. **(19)** Po definiciji slijedi iz (3).

(20)

1.	$\overline{1} \to (\varphi \to (\overline{1} \& \varphi))$	(formula (5))
2.	$\overline{1}$	(formula (19))
3.	$\varphi \to (\overline{1} \& \varphi)$	(mod pon 2, 1)

(20')

1.	$\overline{1} \to ((\overline{1} \to \varphi) \to \varphi)$	(formula (1'))
2.	$\overline{1}$	(formula (19)
3.	$(\overline{1} \to \varphi) \to \varphi$	(mod pon: 2, 1)

□

Slijedeće formule dokazuju se koristeći formule (12'), (16'), (12) i (13):

Lema 2.27. *U BL su dokaziva iduća svojstva od* $\wedge$ *i* $\vee$*:*

(21) $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$, $((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \to (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$,

(22) $(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$, $((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \to (\varphi \vee (\psi \vee \chi))$,

(23) $\varphi \to \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \to \varphi$.

Od slijedećih formula dokazat ćemo tri koje ćemo kasnije koristiti. Preostale se pokazuju na sličan način:

Lema 2.28. *U BL su dokaziva slijedeća svojstva ekvivalencije:*

(24) $\varphi \equiv \varphi$, $(\varphi \equiv \psi) \to (\psi \equiv \varphi)$, $((\varphi \equiv \psi) \& (\psi \equiv \chi)) \to (\varphi \equiv \chi)$,

(25) $(\varphi \equiv \psi) \to (\varphi \to \psi)$, $(\varphi \equiv \psi) \to (\psi \to \varphi)$,

(26) $(\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \& \chi) \equiv (\psi \& \chi))$,

(27) $(\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \to \chi) \equiv (\psi \to \chi))$,

(28) $(\varphi \equiv \psi) \to ((\chi \to \varphi) \equiv (\chi \to \psi))$,

(29) $(\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.

Dokaz.

(26)

1.	$(\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \to \psi) \& (\psi \to \varphi))$	(formula (3))
2.	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \& \chi) \to (\psi \& \chi))$	(formula (6))
3.	$(\psi \to \varphi) \to ((\psi \& \chi) \to (\varphi \& \chi))$	(formula (6))
4.	$[(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \& \chi) \to (\psi \& \chi))] \,\&$ $[(\psi \to \varphi) \to ((\psi \& \chi) \to (\varphi \& \chi))]$	(&-int: 2, 3)
5.	$[(\varphi \to \psi) \& (\psi \to \varphi)] \to$ $[((\varphi \& \chi) \to (\psi \& \chi)) \& ((\psi \& \chi) \to (\varphi \& \chi))]$	(pi(7): 4)
6.	$(\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \& \chi) \equiv (\psi \& \chi))$	(hip sil: 1, 5)

(27)

$$
\begin{array}{rll}
1. & (\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)) & \text{(formula (3))} \\
2. & (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\psi \to \chi)) & \text{(aksiom (A1))} \\
3. & (\psi \to \varphi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) & \text{(aksiom (A1))} \\
4. & [(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\psi \to \chi))]\,\& & \\
 & [(\psi \to \varphi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))] & \text{(\&-int: 2, 3)} \\
5. & [(\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)] \to & \\
 & [((\varphi \to \chi) \to (\psi \to \chi))\&((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))] & \text{(pi(7): 4)} \\
6. & (\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \to \chi) \equiv (\psi \to \chi)) & \text{(hip sil: 1, 5)}
\end{array}
$$

(28)

$$
\begin{array}{rll}
1. & (\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)) & \text{(formula (3))} \\
2. & ((\chi \to \varphi)\&\chi) \to \varphi & \text{(formula (4))} \\
3. & [((\chi \to \varphi) \to \chi) \to \varphi] \to & \\
 & [(\varphi \to \psi) \to (((\chi \to \varphi)\&\chi) \to \psi)] & \text{(aksiom (A1)} \\
4. & (\varphi \to \psi) \to (((\chi \to \varphi)\&\chi) \to \psi) & \text{(mod pon: 2, 3)} \\
5. & (((\chi \to \varphi)\&\chi) \to \psi) \to ((\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi)) & \text{(rez: 4)} \\
6. & (\varphi \to \psi) \to ((\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi)) & \text{(hip sil: 4, 5)} \\
6'. & (\psi \to \varphi) \to ((\chi \to \psi) \to (\chi \to \varphi)) & \text{(analogno)} \\
7. & ((\varphi \to \psi) \to ((\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi)))\& & \\
 & ((\psi \to \varphi) \to ((\chi \to \psi) \to (\chi \to \varphi))) & \text{(\&-int: 6, 6')} \\
8. & ((\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)) \to & \\
 & (((\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi))\&((\chi \to \psi) \to (\chi \to \varphi))) & \text{(pi(7): 7)} \\
9. & (\varphi \equiv \psi) \to ((\chi \to \varphi) \equiv (\chi \to \psi)) & \text{(hip sil: 1, 8)}
\end{array}
$$

□

Definicija 2.29. **Teorija** *nad BL je proizvoljan skup formula.* **Izvod** *u teoriji T je niz $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ formula takvih da je svaka od njih ili aksiom BL ili element iz T (pretpostavka) ili slijedi iz neke od prethodnih formula primjenom pravila izvoda modus ponens. $T \vdash \varphi$ označava da za φ postoji izvod u T, odnosno da je φ zadnja formula izvoda u T.*

Sada ćemo dokazati slabu verziju teorema dedukcije, te ćemo nakon toga pokazati da jaka verzija teorema, koja vrijedi za klasičnu logiku, općenito ne vrijedi za sisteme $PC(*)$. Navesti ćemo sistem $PC(*)$ za koji vrijedi jaka verzija, te dokazati da je navedeni sistem jedini od svih sistema $PC(*)$ sa tim svojstvom.

Teorem dedukcije 2.30. *(slaba verzija) Neka je T teorija i φ, ψ formule. $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ ako i samo ako postoji n takav da $T \vdash \varphi^n \to \psi$, gdje φ^n označava konjunkciju $\varphi\& \ldots \&\varphi$ u kojoj formula φ nastupa n puta.*

Dokaz. Ako je $n > 1$ i $T \vdash \varphi^n \to \psi$, tada $T \vdash (\varphi\&\varphi^{n-1}) \to \psi$, odnosno $T \vdash \varphi \to (\varphi^{n-1} \to \psi)$, odakle slijedi $T \cup \{\varphi\} \vdash \varphi^{n-1} \to \psi$. Korištenjem pravila izvoda modus ponens i reziduiranja (aksiom (A5a)) dobivamo $T \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$, te na kraju $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Obratno, neka $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, i neka su formule $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ neki $T \cup \{\varphi\}$-izvod od ψ. Indukcijom ćemo pokazati da za $j = 1, \ldots k$, postoji n_j takav da $T \vdash \varphi^{n_j} \to \gamma_j$. To očito vrijedi ako je γ_j aksiom BL ili $T \cup \{\varphi\}$. Ako je γ_j rezultat primjene pravila izvoda modus ponens na prethodne formule γ_i i $\gamma_i \to \gamma_j$, tada po pretpostavci indukcije imamo

$$T \vdash \varphi^n \to \gamma_i \text{ i } T \vdash \varphi^m \to (\gamma_i \to \gamma_j),$$

te &-introdukcijom, i pravilom izvoda opisanim formulom (7) dobivamo

$$T \vdash (\varphi^n \& \varphi^m) \to (\gamma_i \& (\gamma_i \to \gamma_j) \text{ odnosno } T \vdash \varphi^{n+m} \to \gamma_j.$$

□

Lema 2.31. *Formula $\varphi \to (\varphi \& \varphi)$ općenito nije 1-tautologija.*

Dokaz. Pretpostavimo da je u $PC(*)$ formula $\varphi \to (\varphi \& \varphi)$ istinita za svaku interpretaciju. Tada mora biti $x \leq x * x$, a po definiciji funkcije $*$ vrijedi $x * x \leq x$. To znači da je funkcija $*$ idempotentna, odnosno $x * x = x$. Neka su $x, y \in [0, 1]$ i BSO $x \leq y$. Tada je $x * y \geq x * x = x$, te $x * y \leq x * 1 = x$, dakle $x * y = x$, pa je funkcija $*$ zapravo funkcija minimuma.

Uzmimo, na primjer, da je funkcija $*$ produktna t-norma. Tada je funkcija $*$ neprekidna t-norma različita od funkcije minimuma, pa u odgovarajućem sistemu $PC(*)$ formula $\varphi \to (\varphi \& \varphi)$ nije 1-tautologija. □

Napomena 2.32. *Iz teorema adekvatnosti slijedi da za svaku formulu φ ne vrijedi $\vdash_{BL} \varphi \to (\varphi \& \varphi)$. Iz tog razloga ima smisla uvesti slijedeće proširenje od BL:*

Definicija 2.33. Gödelova logika *je proširenje sistema BL dodatnim aksiomom:*

$$\varphi \to (\varphi \& \varphi)$$

Napomena 2.34. *Sada ćemo pokazati da općenito ne vrijedi teorem dedukcije u jakom obliku u kojem vrijedi za klasičnu logiku. Od svih sistema $PC(*)$, Gödelova logika će biti jedina za koju vrijedi klasični teorem dedukcije:*

Teorem dedukcije 2.35. *(jaka verzija)*

1. *Za Gödelovu logiku vrijedi klasični teorem dedukcije, tj. za svaku teoriju T i formule φ, ψ vrijedi $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ ako i samo ako $T \vdash \varphi \to \psi$.*

2. *Ako za $PC(*)$ vrijedi klasični teorem dedukcije, tada je funkcija $*$ zapravo funkcija minimuma.*

Dokaz. 1. Nužnost se pokaže na jednak način kao u slabom teoremu dedukcije. Dovoljnost slijedi kao posljedica slabog teorema indukcije i idempotentnosti od &.

2. Pretpostavimo da za $PC(*)$ vrijedi klasični teorem dedukcije. Tada zbog $\{\varphi\} \vdash (\varphi \& \varphi)$ vrijedi $\vdash \varphi \to (\varphi \& \varphi)$, što znači da je $*$ idempotentna. U 2.31 smo pokazali da to povlači činjenicu da je funkcija $*$ funkcija minimuma. $\square$

Glavni cilj u ovom poglavlju nam je bio definirati logike $PC(*)$ i BL, te dokazati teorem potpunosti za logike BL. Unatoč tome, spomenut ćemo još i pojam konzistentne teorije, te nekoliko dokazivih formula, da bismo upotpunili sliku o sistemu BL:

Definicija 2.36. *Teorija T je* **nekonzistentna** *(kontradiktorna) ako $T \vdash \overline{0}$. Inače kažemo da je* **konzistentna**.

Lema 2.37. *Teorija T je nekonzistentna ako i samo ako $T \vdash \varphi$, za svaku formulu φ.*

Dokaz. Ako T dokazuje svaku formulu, tada posebno $T \vdash \overline{0}$, pa je nekonzistentna. Obratno, ako $T \vdash \overline{0}$, tada T dokazuje svaku formulu φ jer $T \vdash \overline{0} \to \varphi$. $\square$

Lema 2.38. *Ako je $T \cup \{\varphi\}$ nekonzistentna, tada za neki n vrijedi $T \vdash \neg(\varphi^n)$.*

Dokaz. Ako $T \cup \{\varphi\} \vdash \overline{0}$, tada po teoremu dedukcije postoji n takav da $T \vdash \varphi^n \to \overline{0}$. $\square$

Dokaz slijedećih formula nećemo provoditi no dokazi se mogu naći u [6]:

Lema 2.39. *U BL su dokazivi slijedeći zakoni distributivnosti:*

(30) $\varphi \& (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \& \psi) \vee (\varphi \& \chi)$, $\varphi \& (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \& \psi) \wedge (\varphi \& \chi)$,

(31) $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$. $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$

Lema 2.40. *U BL je dokazivo:*

(32) $(\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \psi) \to ((\varphi \& \varphi) \vee (\psi \& \psi))$, $(\varphi \wedge \psi) \& (\varphi \wedge \psi) \to ((\varphi \& \varphi) \wedge (\psi \& \psi))$.

(33) $(\varphi \to \psi)^n \vee (\psi \to \varphi)^n$, *za svaki n*

Teorem 2.41. *U BL su dokaziva de Morganova pravila:*

(34) $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \equiv \neg(\varphi \vee \psi)$,

(35) $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv \neg(\varphi \wedge \psi)$.

3 Teorem potpunosti za sistem BL

3.1 Teorem potpunosti za sistem BL

Dosad smo proučavali neprekidne t-norme kao kandidate za interpretaciju konjunkcije, odgovarajuće reziduume kao intepretaciju implikacije i pomoću njih defininirali semantiku negacije, minimuma i maksimuma. Za svaku fiksiranu neprekidnu t-normu $*$, definirali smo odgovarajuću logiku sudova $PC(*)$. Izrekli smo aksiome koji su 1-tautologije u svakoj $PC(*)$, definirali dokazivost, te dokazivali formule u BL. Sistem je adekvatan - svaka dokaziva formula je 1-tautologija svake $PC(*)$.

Sada ćemo izvršiti algebraizaciju BL. Uvest ćemo algebarsku mnogostrukost koja će sadržavati algebre koje ćemo nazivati BL-algebrama i pokazati slijedeće:

1. Segment $[0, 1]$ s pridruženim interpretacijama veznika je linearno uređena BL-algebra, za svaku t-normu $*$.

2. BL je adekvatna za svaku linearno uređenu BL-algebru, odnosno svaka dokaziva formula je **L**-tautologija u svakoj takvoj rešetci.

3. Skup klasa ekvivalencije svih formula po ekvivalentnosti dokazivosti, zajedno s interpretacijama veznika, je BL-algebra (ne linearno uređena).

4. Formula koja je tautologija u svim linearno uređenim BL-algebrama je tautologija u svim BL-algebrama.

Kada to pokažemo, moći ćemo dokazati teorem potpunosti. Prvo ćemo uvesti pojmove mnogostrukosti algebra, (pseudo)rešetke, reziduirane rešetke, te konačno BL-algebre:

Definicija 3.1. *Algebra $\mathcal{B}$ je* **homomorfna slika** *algebre $\mathcal{A}$ ako postoji surjektivni homomorfizam s $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$.* **Produkt** *familije algebri $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je algebra čiji je nosač Kartezijev produkt nosača algebri $(\mathcal{A}_i)$, s operacijama definiranim po komponentama.*

Definicija 3.2. *Klasa algebri iste signature je* **algebarska mnogostrukost** *ako je zatvorena na podalgebre, homomorfne slike i produkte.*

Napomena 3.3. *(Birkhoffov teorem; vidi [8]) Neka je $\mathcal{I}$ jezik $(=, F_1, \ldots, F_n)$, i neka je $\mathcal{K}$ klasa struktura za $\mathcal{I}$ (interpretirajući $=$ kao identitet). $\mathcal{K}$ je* **mnogostrukost** *ako i samo ako postoji skup T identiteta takav da je $\mathcal{K}$ klasa svih struktura M za $\mathcal{I}$ takvih da su svi identiteti iz T istiniti u M.*

Drugim riječima, klasa algebri iste signature je mnogostrukost ako i samo ako ju je moguće definirati skupom identiteta.

Definicija 3.4. *Algebra* $\mathbf{L} = (L, \cap, \cup)$ *je* **pseudorešetka** *ako su u* $\mathbf{L}$ *zadovoljeni slijedeći identiteti:*

$$\begin{array}{rcl} x \cap x = x & x \cup x = x & \textit{(idempotentnost)} \\ x \cap y = y \cap x & x \cup y = y \cup x & \textit{(komutativnost)} \\ x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z & x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z & \textit{(asocijativnost)} \\ x \cap (x \cup y) = x & x \cup (x \cap y) = x & \textit{(apsorpcija)} \end{array}$$

Pseudorešetka je **rešetka** *ako ima najveći i najmanji element.*

Napomena 3.5. *Očito je da pseudorešetke čine mnogostrukost.*

Definicija 3.6. **Reziduirana rešetka** *je algebra*

$$(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$$

sa četiri binarne operacije i dvjema konstantama takva da vrijedi:

1. $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ *je rešetka s najvećim elementom* 1*, i najmanjim elementom* 0 *(definiramo* $x \leq y$ *ako* $x \cap y = x$ *odnosno* $x \cup y = y$*).*

2. $(L, *, 1)$ *je komutativna polugrupa s neutralnim elementom* 1*, odnosno,* $*$ *je komutativna, asocijativna i vrijedi* $1 * x = x$ *za svaki* x*.*

3. $*$ *i* $\Rightarrow$ *čine adjunktni par, odnosno*

   $z \leq (x \Rightarrow y)$ *ako i samo ako* $x * z \leq y$ *za sve* x, y, z*.*

Definicija 3.7. *Reziduirana rešetka* $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ *je* **BL-algebra** *ako i samo ako za sve* $x, y \in L$ *vrijede identiteti:*

1. $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$,

2. $(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x) = 1$.

Lema 3.8. *U svakoj BL-algebri za sve* x, y, z *vrijedi:*

(a) $x * (x \Rightarrow y) \leq y$ *i* $x \leq (y \Rightarrow (x * y))$,

(b) $x \leq y$ *implicira* $x * z \leq y * z$, $(z \Rightarrow x) \leq (z \Rightarrow y)$, $(y \Rightarrow z) \leq (x \Rightarrow z)$,

(c) $x \leq y$ *ako i samo ako* $x \Rightarrow y = 1$,

(d) $(x \cup y) * z = (x * z) \cup (y * z)$,

(e) $x \cup y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$.

Dokaz.

(a) Tvrdnja $x * (x \Rightarrow y) \leq y$ slijedi po adjunktnosti iz $(x \Rightarrow y) \leq (x \Rightarrow y)$. Nejednakost $x \leq (y \Rightarrow (x * y))$ slijedi po adjunktnosti iz $(x * y) \leq (x * y)$.

(b) Pretpostavimo da je $x \leq y$. Iz (a) imamo $y \leq (z \Rightarrow y*z)$. Dakle $x \leq (z \Rightarrow y*z)$, pa po adjunktnosti vrijedi $(x*z) \leq (y*z)$. Iz (a) slijedi $z*(z \Rightarrow x) \leq x \leq y$, te po adjunktnosti vrijedi $(z \Rightarrow x) \leq (z \Rightarrow y)$. Konačno, iz (a) i prve tvrdnje koju smo dokazali u (b) slijedi $x * (y \Rightarrow z) \leq y * (y \Rightarrow z) \leq z$, pa po adjunktnosti slijedi $(y \Rightarrow z) \leq (x \Rightarrow z)$.

(c) Budući da je 1 neutralan element, $x \leq y$ je ekvivalentno sa $1 * x \leq y$. Po adjunktnosti vrijedi $1 \leq (x \Rightarrow y)$, a budući da je 1 najveći element, slijedi $1 = (x \Rightarrow y)$.

(d) Iz asocijativnosti i idempotentnosti od $\cup$ slijedi da je $x \leq (x \cup y)$. Tada iz (b) slijedi $x * z \leq (x \cup y) * z$. Analogno, vrijedi $y * z \leq (x \cup y) * z$, odakle zbog asocijativnosti $\cup$ slijedi $(x * z) \cup (y * z) \leq (x \cup y) * z$.

Obratno, $x * z \leq (x * z) \cup (y * z)$ odakle po adjunktnosti slijedi $x \leq (z \Rightarrow ((x*z) \cup (y*z)))$. Analogno, vrijedi $y \leq (z \Rightarrow ((x*z) \cup (y*z)))$. Iz prethodne dvije nejednakosti slijedi $(x \cup y) \leq (z \Rightarrow ((x * z) \cup (y * z)))$, te konačno po adjunktnosti vrijedi $(x \cup y) * z \leq (x * z) \cup (y * z)$.

(e) Iz svojstava BL-algebri slijedi $((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) =$

$((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) * ((x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x))$. Iz (d) slijedi da je prethodni izraz jednak $(((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) * (x \Rightarrow y)) \cup$

$(((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) * (y \Rightarrow x))$. Iz (a) slijedi da je to manje ili jednako $(((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) * (x \Rightarrow y)) \cup (((y \Rightarrow x) \Rightarrow x) * (y \Rightarrow x))$, što je po (a) manje ili jednako od $y \cup x = x \cup y$.

Obratno, iz (d) i (a) slijedi $(x \Rightarrow y) * (x \cup y) =$

$(x * (x \Rightarrow y)) \cup (y * (x \Rightarrow y))) \leq y \cup y = y$, pa po adjunktnosti slijedi $x \cup y \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$. Analogno pokažemo da vrijedi $x \cup y \leq (y \Rightarrow x) \Rightarrow x$, te konačno $x \cup y \leq ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$.

$\square$

Definicija 3.9. *Reziduirana rešetka* $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ *je* **linearno uređena** *ako joj je uređaj linearan, odnosno za svaki par* x, y *vrijedi* $x \cap y = x$ *ili* $x \cap y = y$.

Očito vrijedi slijedeće:

Lema 3.10. *Linearno uređena rešetka je BL-algebra ako i samo ako je identitet* $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$ *u njoj istinit.*

Napomena 3.11.

1. *Uvjet* $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$ *je zadovoljen ako je linearno uređena reziduirana rešetka* **djeljiva**, *odnosno ako za sve* x, y *takve da* $x > y$ *postoji* z *sa svojstvom da* $y = x * z$.

2. *Svaka* **neprekidna** *t-norma određuje BL-algebru na jediničnom segmentu* $[0, 1]$ *uz standardni (linearni) uređaj.*

Definicija 3.12. *Neka je* $\mathbf{L} = (L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ *BL-algebra.* **L-interpretacija** *propozicionalnih varijabli je bilo koje preslikavanje e koje svakoj propozicionalnoj varijabli p pridružuje element* $e(p) \in \mathbf{L}$*. Interpretaciju svih formula dobit ćemo proširenjem interpretacije propozicionalnih varijabli koristeći operacije od* $\mathbf{L}$ *kao interpretacije:*

$$e(\overline{0}) = 0,$$

$$e(\varphi \to \psi) = e(\varphi) \Rightarrow e(\psi),$$

$$e(\varphi \& \psi) = e(\varphi) * e(\psi).$$

(odavde slijedi $e(\varphi \wedge \psi) = e(\varphi) \cap e(\psi)$*,* $e(\varphi \vee \psi) = e(\varphi) \cup e(\psi)$*,* $e(\neg\varphi) = e(\varphi) \Rightarrow 0$*)*
Formula φ *je* **L-tautologija** *ako je* $e(\varphi) = 1$*, za svaku* $\mathbf{L}$*-interpretaciju e.*

Teorem adekvatnosti 3.13. *Sistem BL je adekvatan s obzirom na* $\mathbf{L}$*-tautologije, odnosno ako je* φ *dokaziva u BL, tada je* φ $\mathbf{L}$*-tautologija za svaku BL-algebru* $\mathbf{L}$*. Općenitije, ako je T teorija u BL i T dokazuje* φ*, tada za svaku BL-algebru* $\mathbf{L}$ *i svaku* $\mathbf{L}$*-interpretaciju e propozicionalnih varijabli koja svim aksiomima od T pridružuje vrijednost 1 vrijedi* $e(\varphi) = 1$*.*

Dokaz. Da bismo dokazali tvrdnju, trebamo pokazati da su svi aksiomi od BL **L**-tautologije, te da je definicija funkcije $\cup$ pomoću $\Rightarrow$ **L**-tautologija (pokazali smo u (e)). Za sve aksiome osim (A6) pokazujemo na identičan način kao u prethodnom poglavlju, te još trebamo pokazati za (A6):
$1 = (((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z))$ je ekvivalentno sa
$1 \leq (((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z))$, što je ekvivalentno sa
$((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \leq (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z)$ te konačno
$(((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z)) \leq z$. Pokazat ćemo da vrijedi posljednja nejednakost te će iz toga slijediti tvrdnja.
$(((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z)) =$
$(((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z)) * ((x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x)) \leq$
$(((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) * (x \Rightarrow y)) \cup (((y \Rightarrow x) \Rightarrow z) * (y \Rightarrow x)) \leq z \cup z = z.$

□

Lema 3.14. *Klasa svih BL-algebri je algebarska mnogostrukost.*

Dokaz. Prije smo spomenuli da je klasa svih pseudorešetki mnogostrukost. Uvjeti na 0 i 1 mogu se izraziti identitetima $x \cap 1 = x$ i $x \cup 0 = x$. Komutativnost i asocijativnost od $*$ te uvjet da je 1 neutralan element za $*$ također izražavamo identitetima: $x * y = y * x$, $x * (y * z) = (x * y) * z$, odnosno $x * 1 = x$.

Sad ćemo dokazati da adjunktnost možemo izraziti slijedećim nizom identiteta:

(1) $x \cap (y \Rightarrow (x * y)) = x$,

(2) $((x \Rightarrow y) * x) \cup y = y$,

(3) $(x \Rightarrow (x \cup y)) = 1$,

(4) $((z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow (x \cup y))) = 1$,

(5) $(x \cap y) * z = (x * z) \cap (y * z)$.

Pokažimo prvo da su svi identiteti istiniti u svakoj BL-algebri: (1) je ekvivalentno sa $x \leq y \Rightarrow (x * y)$, a (2) sa $(x \Rightarrow y) * x \leq y$, što smo pokazali da vrijedi u lemi 3.8, tvrdnja (a). Zbog $x \leq x \cup y$ iz (c) slijedi (3). Identitet (4) vrijedi zbog svojstva operacije $\Rightarrow$ da je nepadajuća funkcija u drugoj varijabli ($y \leq z$ povlači $(x \Rightarrow y) \leq (x \Rightarrow z)$). Identitet (5) je jedan od zakona distributivnosti koji smo dokazali u prethodnom poglavlju, pa je (5) istinito zbog adekvatnosti.

Pokažimo sada da ako zamijenimo adjunktnost u definiciji BL algebre identitetima (1) - (5), možemo dokazati da vrijedi adjunktnost:

(a) $x \leq y$ implicira $x * z \leq y * z$.

Ako je $x \leq y$, tada $x = x \cap y$, pa $x * z = (x \cap y) * z$. Iz (5) slijedi $x * z = (x * z) \cap (y * z)$, pa je $x * z \leq y * z$.

(b) $x \leq y$ ako i samo ako $(x \Rightarrow y) = 1$.

Ako je $x \leq y$, tada $(x \cup y) = y$, pa za $z = 1$ iz (4) imamo $x \Rightarrow y = 1$. Obratno, ako je $x \Rightarrow y = 1$, tada $x \cap y = x * (x \Rightarrow y) = x * 1 = x$, pa je $x \leq y$.

(c) $x \leq y$ implicira $(z \Rightarrow x) \leq (z \Rightarrow y)$.

Tvrdnja slijedi direktno iz (4).

(d) $z \leq (x \Rightarrow y)$ ako i samo ako $x * z \leq y$.

Iz (1) imamo $z \leq x \Rightarrow (x * z)$, dakle ako je $x * z \leq y$, tada $z \leq x \Rightarrow y$. Ako je $z \leq x \Rightarrow y$, tada $x * z \leq x * (x \Rightarrow y) \leq y$, čime smo pokazali adjunktnost.

□

Sada ćemo pokazati da klase dokazivo ekvivalentnih formula čine BL-algebru.

Definicija 3.15. *Fiksirajmo teoriju T u BL. Za svaku formulu φ, neka je $[\varphi]_T$ skup svih formula ψ takvih da $T \vdash \varphi \equiv \psi$ (formule koje su T-dokazivo ekvivalentne φ). L_T je skup svih klasa $[\varphi]_T$. Definiramo:*

$$0 = [\overline{0}]_T$$
$$1 = [\overline{1}]_T$$
$$[\varphi]_T * [\psi]_T = [\varphi \& \psi]_T$$
$$[\varphi]_T \Rightarrow [\psi]_T = [\varphi \to \psi]_T$$
$$[\varphi]_T \cap [\psi]_T = [\varphi \wedge \psi]_T$$
$$[\varphi]_T \cup [\psi]_T = [\varphi \vee \psi]_T$$

(Definicija ima smisla zbog (26)-(28)) Ovu algebru označit ćemo s $\mathbf{L}_T$.

Lema 3.16. $\mathbf{L}_T$ *je BL-algebra.*

Dokaz. Idempotentnost, komutativnost, asocijativnost i apsorpcija operacija $\cup$ i $\cap$ slijede iz (9), (13), (16), (21), (22), (23) iz prethodnog poglavlja.

Operacija $*$ zadovoljava svojstva komutativne polugrupe s neutralnim elementom po (A3), (8) i (20).

Da bismo dokazali adjunktnost, prvo ćemo pokazati slijedeće:

$$[\varphi]_T \leq [\psi]_T \text{ ako i samo ako } T \vdash \varphi \to \psi$$

. Ako $T \vdash \varphi \to \psi$, tada $T \vdash \varphi \equiv (\varphi \wedge \psi)$, stoga $[\varphi]_T = [\varphi]_T \cap [\psi]_T$ i $[\varphi]_T \leq [\psi]_T$.

Obratno, ako $[\varphi]_T \leq [\psi]_T$, tada $T \vdash \varphi \equiv (\varphi \wedge \psi)$ odakle slijedi $T \vdash \varphi \to \psi$.

Sada pokazujemo adjunktnost:

$[\chi]_T \leq ([\varphi]_T \Rightarrow [\psi]_T)$ ako i samo ako $T \vdash \chi \to (\varphi \to \psi)$ što je ekvivalentno sa $T \vdash (\chi \& \varphi) \to \psi$. Ovo posljednje je ekvivalentno sa $[\chi \& \varphi]_T \leq [\psi]_T$, odnosno $[\chi]_T * [\varphi]_T \leq [\psi]_T$. Dakle, $\mathbf{L}_T$ je reziduirana rešetka.

Svojstva (1) i (2) iz definicije BL-algebre su zadovoljena po definiciji $\wedge$ i (15). Time je tvrdnja dokazana. □

Sada ćemo pokazati kako filtri na reziduiranim rešetkama određuju homomorfizme i karakterizirati ih.

Definicija 3.17. *Neka je* $\mathbf{L} = (L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ *reziduirana rešetka.* **Filtar** *u* $\mathbf{L}$ *je neprazan skup* $F \subseteq L$ *takav da za sve* $x, y \in L$ *vrijedi:*

1. *Ako* $a \in F$ *i* $b \in F$ *tada* $a * b \in F$,
2. *ako* $a \in F$ *i* $a \leq b$ *tada* $b \in F$.

Za filtar F *kažemo da je* **prosti filtar** *ako i samo ako za sve* $x, y \in L$ *vrijedi:*

$$(x \Rightarrow y) \in F \text{ ili } (y \Rightarrow x) \in F$$

Lema 3.18. *Neka je* $\mathbf{L}$ *BL-algebra i neka je* F *filtar. Označimo*

$$x \sim_F y \text{ ako i samo ako } (x \Rightarrow y) \in F \text{ i } (y \Rightarrow x) \in F$$

Tada vrijedi:

1. $\sim_F$ *je kongruencija i odgovarajuća kvocijentna algebra* $\mathbf{L}/_{\sim_F}$ *je BL-algebra*
2. $\mathbf{L}/_{\sim_F}$ *je linearno uređena ako i samo ako je* F *prosti filtar.*

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost relacije $\sim_F$ relacija su očite, pa da bismo dokazali da se radi o relaciji ekvivalencije, trebamo pokazati da je tranzitivna: to slijedi iz činjenice da je formula $((\varphi \to \psi)\&(\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi)$ 1-tautologija u $\mathbf{L}$, pa za sve x, y, z vrijedi $((x \Rightarrow y) * (y \Rightarrow z)) \leq (x \Rightarrow z)$, te iz definicije filtra slijedi da $(x \Rightarrow y), (y \Rightarrow z) \in F$ povlači $(x \Rightarrow z) \in F$. Zato možemo definirati klase ekvivalencije $[x]_F = \{y | x \sim_F y\}$.

Da bismo pokazali da se radi o kongruenciji (tj. da čuva operacije), slično kao u dokazu prethodne leme pokažemo da je $[x]_F \leq [y]_F$ ekvivalentno sa $(x \Rightarrow y) \in F$, i provjerimo da $[x]_F = [y]_F$ implicira $[x * z]_F = [y * z]_F$, $[x \Rightarrow z]_F = [y \Rightarrow z]_F$ i $[z \Rightarrow x]_F = [z \Rightarrow y]_F$. Zato možemo definirati operacije $*$, $\Rightarrow$ (i $\cup$, $\cap$) na skupu $\mathbf{L}/_{\sim_F}$ klasa ekvivalencije tako da $[x]_F * [y]_F = [x * y]_F$ itd.

Preslikavanje koje svakom x pridružuje klasu $[x]_F$ je homomorfizam i $\mathbf{L}/_{\sim_F}$ je s induciranim operacijama BL-algebra (jer BL-algebre tvore algebarsku mnogostrukost, pa su zatvorene na homomorfizme budući da homomorfizam čuva identitete).

Pretpostavimo sad da je F prosti filtar, i neka su $x, y \in L$. Tada ili $(x \Rightarrow y) \in F$, te $[x]_F \leq [y]_F$ ili $(y \Rightarrow x) \in F$, pa $[y]_F \leq [x]_F$. Pokazali smo da je $\leq$ linearan. Obratno, neka je $\mathbf{L}/_{\sim_F}$ linearno uređen i $x, y \in L$. Tada je ili $[x]_F \leq [y]_F$ i $(x \Rightarrow y) \in F$, ili $[y]_F \leq [x]_F$ i $(y \Rightarrow x) \in F$, pa je F prosti filtar. $\square$

Lema 3.19. *Neka je* $\mathbf{L}$ *BL-algebra i* $a \in L$, $a \neq 1$. *Tada postoji prosti filtar* F *na* $\mathbf{L}$ *koji ne sadrži* a.

Dokaz. Očito je $F_0 = \{1\}$ filtar koji ne sadrži a. Pokazat ćemo da ako je F filtar koji ne sadrži a, i $x, y \in L$ takvi da $(x \Rightarrow y) \notin F$ i $(y \Rightarrow x) \notin F$, tada postoji filtar $F' \supseteq F$ koji ne sadrži a, ali sadrži $(x \Rightarrow y)$ ili $(y \Rightarrow x)$. Najmanji filtar F' čiji je F podskup, i koji sadrži z je $F' = \{u | (\exists v \in F)(\exists n \in \mathbb{N})(v * z^n \leq u)\}$.

Pretpostavimo $(x \Rightarrow y) \notin F$, $(y \Rightarrow x) \notin F$, i neka su F_1, F_2 najmanji filtri koji sadrže F kao podskup i $(x \Rightarrow y)$ odnosno $(y \Rightarrow x)$ kao element. Tvrdimo da $a \notin F_1$ ili $a \notin F_2$. Pretpostavimo suprotno. Tada za neki $v \in F$ i prirodan broj n vrijedi $v * (x \Rightarrow y)^n \leq a$ i $v * (y \Rightarrow x)^n \leq a$, dakle $a \geq v * (x \Rightarrow y)^n \cup v * (y \Rightarrow x)^n = v * ((x \Rightarrow y)^n \cup (y \Rightarrow x)^n) = v * 1 = v$, pa je $a \in F$, što je kontradikcija (Koristili smo (33) iz prethodnog poglavlja). Dobili smo da mora biti $a \notin F_1$ ili $a \notin F_2$.

Neka je sada $\mathbf{L}$ prebrojiva BL-algebra (što će biti slučaj u našem dokazu potpunosti), tada možemo sve parove $(x, y) \in L^2$ poredati u niz $\{(x_n, y_n) | n \in \mathbb{N}\}$, uzmimo $F_0 = \{1\}$. Sada ćemo induktivno konstruirati niz filtara F_n sa svojstvom da $a \notin F_n$. Pokazali smo da za filtar F_n takav da $a \notin F_n$, postoji filtar $F'_n \supseteq F_n$ takav da $a \notin F'_n$, i da vrijedi $(x_n \Rightarrow y_n) \in F'_n$ ili $(y \Rightarrow x) \in F'_n$. Za konstruirani F_n definiramo $F_{n+1} = F'_n$. Naš traženi prosti filtar je unija

$$\bigcup_n F_n$$

U slučaju da $\mathbf{L}$ nije prebrojiv, morali bismo koristiti aksiom izbora i provesti sličan postupak s transfinitnim nizovima filtara. $\square$

Lema 3.20. *Svaka BL-algebra je podalgebra direktnog produkta sustava linearno uređenih BL-algebri.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ skup svih prostih filtara na BL-algebri $\mathbf{L}$. Za svaki $F \in \mathcal{U}$ neka je $\mathbf{L}_F = \mathbf{L}/_{\sim_F}$ i neka je

$$\mathbf{L}^* = \prod_{F \in \mathcal{U}} \mathbf{L}_F$$

$\mathbf{L}^*$ je direktan produkt linearno uređenih reziduiranih rešetki $\{\mathbf{L}_F | F \in \mathcal{U}\}$. Za $x \in \mathbf{L}$, neka je $i(x)$ element $\{[x]_F | F \in \mathcal{U}\}$ od $\mathbf{L}^*$. Ovo preslikavanje očito čuva operacije, treba pokazati da je injekcija. Ako su $x, y \in F$ i $x \neq y$, tada $x \nleq y$ ili $y \nleq x$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $x \nleq y$; tada $(x \Rightarrow y) \neq 1$ u $\mathbf{L}$, pa postoji prosti filtar F na $\mathbf{L}$ koji ne sadrži $(x \Rightarrow y)$. Tada u $\mathbf{L}_F = \mathbf{L}/_{\sim_F}$ vrijedi $[x]_F \nleq [y]_F$, dakle $i(x) \neq i(y)$. □

Definicija 3.21. *Svakoj formuli φ iz BL pridružujemo term $\varphi^\bullet$ jezika reziduiranih rešetki tako da redom zamijenimo veznike $\to$, &, $\wedge$, $\vee$, $\overline{0}$, $\overline{1}$ funkcijskim simbolima i konstantama $\Rightarrow$, $*$, $\cap$, $\cup$, 0 odnosno 1, i zamjenom svake propozicionalne varijable p_i odgovarajućom objektnom varijablom x_i.*

Lema 3.22.

1. *Svaka formula koja je $\mathbf{L}$-tautologija za sve linearno uređene BL-algebre je $\mathbf{L}$-tautologija za* **sve** *BL-algebre.*

2. *φ je $\mathbf{L}$-tautologija ako i samo ako je identitet $\varphi^\bullet = 1$ istinit u $\mathbf{L}$.*

Dokaz. Lema slijedi kao posljedica prethodne leme. □

Teorem 3.23. *(Teorem potpunosti) BL je potpun sistem, odnosno za svaku formulu φ slijedeće je ekvivalentno:*

1. *φ je dokaziva u BL*

2. *za svaku linearno uređenu BL-algebru $\mathbf{L}$, φ je $\mathbf{L}$-tautologija*

3. *za svaku BL-algebru $\mathbf{L}$, φ je $\mathbf{L}$-tautologija*

Dokaz. Iz teorema adekvatnosti 3.13 slijedi da (1) povlači (2), a iz leme 3.22 slijedi da (2) povlači (3). Pretpostavimo sad da vrijedi (3), odnosno da je φ $\mathbf{L}$-tautologija, za svaku BL-algebru $\mathbf{L}$. Pokazali smo da je algebra $\mathbf{L}_{BL}$, klasa ekvivalentnih formula od BL, BL-algebra. Dakle, φ je $\mathbf{L}_{BL}$-tautologija. Posebno, neka je $e(p_i) = [p_i]_{BL}$ za sve propozicionalne varijable. Tada $e(\varphi) = [\varphi]_{BL} = [1]_{BL}$, pa slijedi $BL \vdash \varphi \equiv 1$, stoga $BL \vdash \varphi$. □

Sada ćemo poopćiti teorem potpunosti. U tu svrhu prvo dajemo slijedeću definiciju:

Definicija 3.24. *1.* **Shema aksioma** *dana formulom* $\Phi(p_1, \ldots p_n)$ *je skup svih formula* $\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *dobivenih supstitucijom* p_i *sa* φ_i *u* $\Phi(p_1, \ldots p_n)$, *za* $i = 1, \ldots, n$.

2. Sistem C je **shematska ekstenzija** *od BL ako je dobiven iz BL dodavanjem (konačno ili beskonačno mnogo) shema aksioma aksiomima BL. (Pravilo dedukcije ostaje modus ponens.)*

3. Neka je C shematska ekstenzija od BL i neka je **L** *BL-algebra.* **L** *je C-algebra ako su svi aksiomi od C* **L***-tautologije.*

Teorem 3.25. *(Generalizirani teorem potpunosti) Neka je C shematska ekstenzija od BL i neka je* φ *formula. Slijedeće je ekvivalentno:*

1. φ *je dokaziva u C*

2. φ *je* **L***-tautologija za svaku linearno uređenu C-algebru* **L**

3. φ *je* **L***-tautologija za svaku C-algebru* **L**

Dokaz. Implikacija (1) $\Rightarrow$ (2) je adekvatnost i dokazuje se kao i inače. Implikacija (2) $\Rightarrow$ (3) slijedi iz leme 3.20 i njenog dokaza: proizvoljna C-algebra je podalgebra direktnog produkta svojih linearno uređenih faktora, koji su također C-algebre. Da bismo pokazali (3) $\Rightarrow$ (1), primijetimo da je i algebra $\mathbf{L}_C$ klasa međusobno C-ekvivalentnih formula jedna C-algebra: ako je $\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ instanca sheme aksioma $\Phi(p_1, \ldots, p_n)$ i $e(p_i) = [\psi_i]_C$, tada $e(\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = [\Phi(\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n)]_C$, gdje je φ'_i iz φ zamjenom p_i sa ψ_i. Stoga je i $\Phi(\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n)$ instanca sheme, pa vrijedi $[\Phi(\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n)]_C = [1]_C$. □

Smjernice za daljnje proučavanje

U ovom smo se radu bavili samo fuzzy logikom sudova, no fuzzy logika je daleko veće područje s puno prostora za daljnjim proučavanjem. U [6] se, uz temu kojom smo se ovdje bavili, obrađuje fuzzy predikatna logika, složenost i odlučivost, te fuzzy kvantifikatori i modalnost. O modalnosti možemo čitati i u [15] te [10]. U [2] se opisuje metoda za dobivanje konjuntivne normalne forme za formule fuzzy logike. U [5] se uvodi pojam uninormi, koje su poopćenje t-normi i t-konormi (koje nismo spomenuli u ovom radu, ali se mogu naći u [6]) te se promatra osnovna uninormna logika BUL. U [3], [9], [4] i [14] možemo proučiti "praktičnu" primjenu fuzzy logike i fuzzy skupova u računalstvu i teoriji odlučivanja.

Bibliografija

[1] P. Cintula, *Short note: on the redundancy of axiom (A3) in BL and MTL*, *Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, Volume 9, Number 12 / December, Springer-Verlag, 2005.

[2] P. Cintula, G. Metcalfe, *Normal forms for fuzzy logics: a proof-theoretic approach* Archive for Mathematical Logic, 46:347-363, Springer-Verlag, 2007.

[3] E. Cox, *The Fuzzy Systems Handbook*, Academic Press, 1994.

[4] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, 1980.

[5] D. Gabbay, G. Metcalfe, *Fuzzy logics based on [0,1]-continuous uninorms*, Archive for Mathematical Logic, 46:425-449, Springer-Verlag, 2007.

[6] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[7] P. Hájek, *What is mathematical fuzzy logic*, Fuzzy Sets and Systems, 157:597-603, Elsevier, 2005.

[8] W. Hodges, *Model theory*, Cambridge University Press, 1993.

[9] F. M. McNeill, E. Thro, *Fuzzy Logic, A practical approach*, Academic Press, 1994.

[10] A. M. Radzikowska, E. E. Kerre, *Characterisation of main classes of fuzzy relations using fuzzy modal operators*, Fuzzy Sets and Systems, 152:223-247, Elsevier, 2004.

[11] A. Rosenfeld, *How many are a few?* The Mathematical Intelligencer, Volume 4, Number 3 / September: 139-143, 1982.

[12] M. Vuković, *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2009.

[13] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Information and Control, 8:338-353, 1965.

[14] L. A. Zadeh, King-Sun Fu, K. Tanaka, M. Shimura, *Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes*, Academic Press, 1975.

[15] O. V. Zeevald, *Fuzzy logics with modalities*, Algebra and Logic, Vol. 45, No. 6, 2006.