Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2
Popravni kolokvij 2.9.2022.

1. (8 bodova) Za sljedeća preslikavanja odredite jesu li distribucije, odnosno temperirane distribucije na $\mathbb{R}$.

   (a) $\langle T_a, \varphi \rangle = \int_0^\infty \ln(x^{x^{2022}})\varphi(x)dx$,

   (b) $\langle T_b, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x^2)dx$.

   Rješenje:

   (a) Označimo s $f(x) = \ln(x^{x^{2022}}) \cdot H(x) = x^{2022} \ln x \cdot H(x)$. Ova se funkcija nalazi u L^1_{loc} (neprekidna na $\mathbb{R}$ zbog $\lim_{x\to 0} x^{2022} \ln x = 0$), pa je stoga dano preslikavanje (regularna) distribucija. Također, na vježbama je pokazano da je $\ln x \cdot H(x) \in \mathcal{S}'$, pa kako je $x^{2022} \in \mathcal{O}$, slijedi da je i $f \in \mathcal{S}'$.

   (b) Imamo
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x^2)dx = 2\int_0^\infty \varphi(x^2)dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{\sqrt{y}}dy,$$
   pa vidimo da je dano preslikavanje regularna distribucija pridružena funkciji $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}H(x) \in L^1_{\text{loc}}$. Također, imamo da za $|x| \geq 1$ vrijedi $|g(x)| \leq 1$, pa, npr. kao u zadatku iz zadaće, slijedi da je $g \in \mathcal{S}'$.

2. (4 boda)

   Odredite limes u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
   $$\lim_n \operatorname{sgn}(x) \cdot n \cdot \mathbb{1}_{[-1/n,1/n]}(x).$$

   Rješenje: Označimo s $\vartheta(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Potrebno je odrediti limes u $\mathcal{D}'$ niza $\vartheta_n(x) := n \cdot \vartheta(nx)$. Za $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ imamo
   $$\begin{aligned}\langle \vartheta_n, \varphi \rangle &= \int_{[-1/n,1/n]} n\vartheta(nx)\varphi(x)dx \\ &= \int_{[-1,1]} \vartheta(y)\varphi(y/n)dy \\ &\xrightarrow{\text{LTDK}} \varphi(0)\int_{[-1,1]} \vartheta(y)dy \\ &= 0\end{aligned}$$

3. (4 boda) Izračunajte
   $$\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi x)}{1+4\pi^2x^2}dx.$$

Rješenje: Zbog parnosti podintegralne funkcije, imamo

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi x)}{1+4\pi^2x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2\pi x)}{1+4\pi^2x^2}dx.$$

Također, zbog neparnosti funkcije $x \mapsto \frac{\sin(2\pi x)}{1+4\pi^2x^2}$ te integrabilnosti iste, imamo

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(2\pi x)}{1+4\pi^2x^2}dx = 0,$$

pa zajedno s prethodnim dobivamo

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2\pi x)}{1+4\pi^2x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\pi i x}}{1+4\pi^2x^2}dx = \frac{1}{2}\Big(\widehat{\frac{1}{1+4\pi^2x^2}}\Big)(1) = \frac{1}{4e}.$$

4. (8 bodova)

   Neka je $(\varphi_n)_n$ niz u $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ te $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ takva da vrijedi $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \varphi$. Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom:

   (a) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \varphi$,

   (b) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$,

   (c) $\varphi_n \xrightarrow{L^p} \varphi, \quad 1 \le p \le \infty$.

   Rješenje:

   (a) Tvrdnja vrijedi jer $\langle \varphi_n, \psi\rangle \to \langle \varphi, \psi\rangle$ za svaki $\psi \in \mathcal{S}$, pa onda posebno i za svaki $\psi \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$.

   (b) Tvrdnja ne vrijedi. Neka je $0 \neq \vartheta \in C_c^\infty$ takva da je $\operatorname{supp}\vartheta \subseteq [-1,1]$ i $0 \le \vartheta \le 1$, te stavimo $\varphi_n = \tau_n\vartheta$. Tada za $\psi \in \mathcal{S}$ imamo

   $$|\langle \varphi_n, \psi\rangle| = |\langle \vartheta, \tau_{-n}\psi\rangle| \le \int_{\mathbb{R}} |\vartheta(x)||\psi(x+n)|dx \le \int_{[-1,1]} |\psi(x+n)|dx \to 0.$$

   S druge strane, kako je $\|\varphi_n\|_{L^\infty} = 1$ za sve n, ovaj niz ne može konvergirati k 0 u $\mathcal{S}$.

   (c) Tvrdnja ne vrijedi. Kontraprimjer je isti kao i u b).

5. (6 bodova) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i ograničen. Na $H_0^1(\Omega)$ zadana je bilinearna forma

   $$B[u,v] = \int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x) + c(x)u(x)v(x)dx,$$

   gdje je $A \in L^\infty(\Omega; M_d(\mathbb{R}))$ te $0 \neq c \in L^\infty(\Omega)$. Dodatno, pretpostavimo da postoji $\alpha > 0$ takav da vrijedi

   $$A(x)\xi\cdot\xi \ge \alpha|\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ s.s. } x \in \Omega.$$

Dokažite da je B neprekidna te da postoje $\beta, \gamma > 0$ takvi da je

$$B[u,u] \geq \beta \|u\|_{H^1}^2 - \gamma \|u\|_{L^2}^2, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

Rješenje:

Neprekidnost slijedi iz

$$\begin{aligned}
\Big|B[u,v]\Big| &\leq \int_\Omega \big|A\nabla u \cdot \nabla v\big| + \big|cuv\big| \\
&\overset{CSB}{\leq} \int_\Omega \big|A\nabla u\big|\big|\nabla v\big| + \big|c\big|\big|u\big|\big|v\big| \\
&\leq \|A\|_{L^\infty} \int_\Omega \big|\nabla u\big|\big|\nabla v\big| + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega \big|u\big|\big|v\big| \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|A\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
&\leq (\|A\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Za drugi dio imamo sljedeći niz nejednakosti

$$\begin{aligned}
B[u,u] &= \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u + cu^2 \\
&\overset{\text{uvjet na } A}{\geq} \int_\Omega \alpha \big|\nabla u\big|^2 + cu^2 \\
&\geq \alpha \int_\Omega \big|\nabla u\big|^2 - \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega u^2 \\
&\overset{\text{Poinc.}}{\geq} \alpha C_P \|u\|_{H^1}^2 - \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Stavljanjem $\beta = \alpha C_P > 0$ i $\gamma = \|c\|_{L^\infty} > 0$ slijedi tvrdnja.