Nuklearna fizika
- vježbe -

3. Raspršenja i nukleon-nukleon interakcija

Zadatak 16. Pri energiji od 5 MeV u sustavu centra mase, fazni pomaci koji opisuju raspršenje neutrona na nekoj jezgri su $\delta_0=\pi/6$ i $\delta_1=\pi/18$. Pretpostavljajući da su ostali fazni pomaci zanemarivi, nacrtajte diferencijalni udarni presjek u ovisnosti o kutu raspršenja. Koliki je totalni udarni presjek? Što možemo iz navedenog reći o dosegu potencijala?

Rješenje 16. Diferencijalni udarni presjek dan je s:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{k^2}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta)\right|^2$$

Pretpostavljajući doprinose samo članova s l = 0 i 1, imamo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\approx\frac{1}{k^2}\left|e^{i\delta_0}\sin\delta_0+3e^{i\delta_1}\sin\delta_1\cos\theta\right|^2$$

Rješenje 16. Dalje imamo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{k^2}[\sin^2\delta_0 + 9\sin^2\delta_1\cos^2\theta$$

$$+6\sin\delta_0\sin\delta_1\cos(\delta_1-\delta_0)\cos\theta] =$$

$$\approx \frac{1}{k^2}\left[0.25 + 0.27\cos^2\theta + 0.49\cos\theta\right]$$

Parametar *k* je iznos valnog vektora neutrona (projektila) u sustavu centra mase. Ako pretpostavimo da je masa atomske jezgre bitno veća od mase neutrona (m_n), slijedi:

$$k^2 \approx \frac{2m_n E}{\hbar^2} = 2.4\times 10^{25}\ \ \mathbf{cm^{-2}}$$

Rješenje 16. **Totalni udarni presjek računamo prema:**

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} =$$

$$= \frac{2\pi}{k^2} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \left[0.25 + 0.27 \cos^2\theta + 0.49 \cos\theta \right] =$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \left[0.25 + 0.27/3 \right] =$$

$$= 1.8 \times 10^{-25} \ \ \mathbf{cm^2} =$$

$$= 0.18 \quad \text{barn}$$

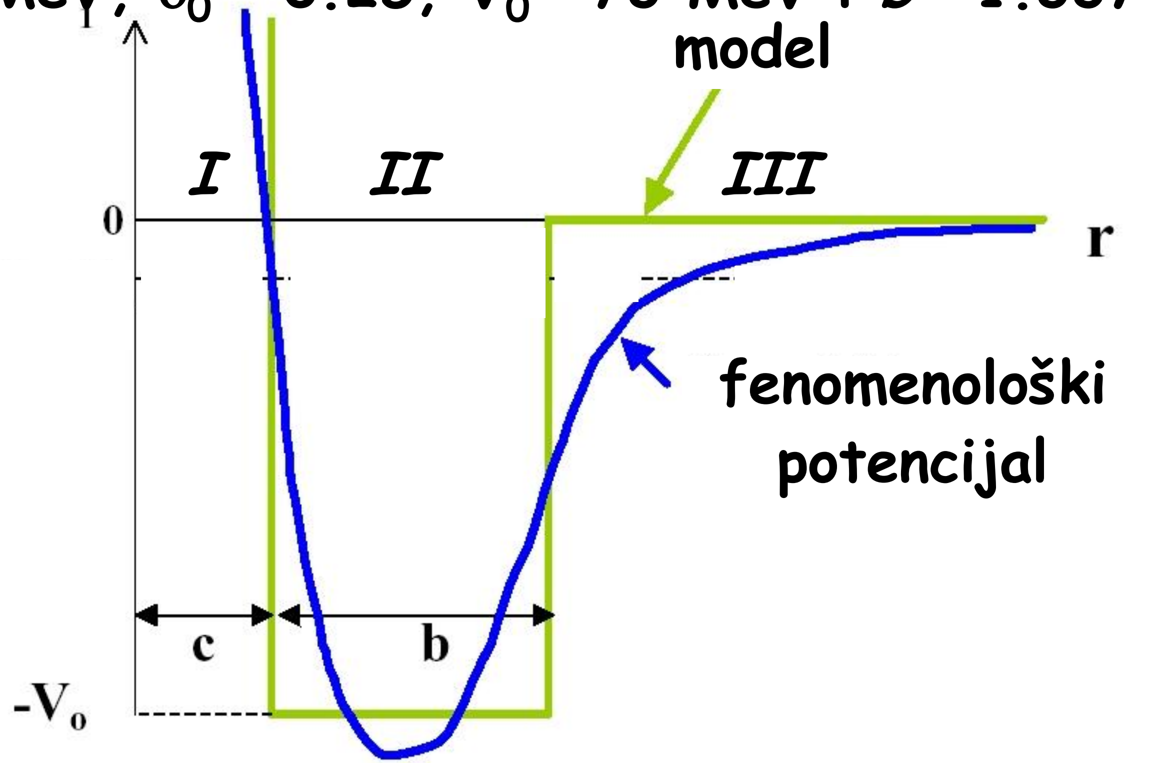
Zadatak 17. Nukleon-nukleon raspršenje može se približno opisati potencijalom prikazanim na slici.

(a) Pokažite da je fazni pomak δ_0 za *s* - val dan s uvjetom:

K ctg(Kb)=k ctg[k(c+b)+δ_0], gdje je $K = \sqrt{2m(V_0 + E)} / \hbar$ $\quad k = \sqrt{2mE} / \hbar$

(b) Odredite parametar odboja *c* koristeći sljedeće eksperimentalne podatke: E_{lab}= 350 MeV, δ_0=-0.25, V_0= 73 MeV i *b*= 1.337 fm.

(c) Odredite udarni presjek za n-p stanje raspršenja na E= 1 MeV koristeći sljedeće ekpserimentalno određene parametre: V_0= 73 MeV, *b* = 1.337 fm i *c* = 0.4



Rješenje 17. **(a) Rješavamo Schrödingerovu jednadžbu:**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r\theta\varphi) = (E-V)\Psi(r\theta\varphi)$$

Uz:

$$\Psi(r\theta\varphi) = \frac{u_l}{r}Y_l^m(\theta\varphi)$$

ova se jednadžba svodi na (raspisano po područjima *I*, *II* i *III*):

$$r < c \qquad u_I = 0$$

$$r < c+b \qquad \frac{d^2u_{II}}{dr^2} + K^2u_{II} = 0 \qquad K = \frac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{\hbar}$$

$$r > c+b \qquad \frac{d^2u_{III}}{dr^2} + k^2u_{III} = 0 \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Rješenje 17. Rješenja su:

$$
\begin{array}{ll}
r < c & u_I = 0 \\
r < c + b & u_{II} = A\sin[K(r-c)] \\
r > c + b & u_{III} = B\sin(kr + \delta_0)
\end{array}
$$

Rješenja su namještena da se ispravno ponašaju u granici velikih *r*: $r \to \infty \quad \Rightarrow \quad u_l(r) \to \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)$

Van dosega potencijala valna duljina je veća i radijalna funkcija je sporo-oscilirajući harmonički val. Rubni uvjet koji povezuje dva područja je zahtjev na neprekidnost *u*(*r*) i d*u*(*r*)/d*r* u točki *r=c+b*

$$A\sin(Kb) = B\sin[k(b+c) + \delta_0]$$

$$AK\cos(Kb) = Bk\cos[k(b+c) + \delta_0]$$

$$\Rightarrow \quad K\,\mathrm{ctg}(Kb) = k\,\mathrm{ctg}[k(c+b) + \delta_0]$$

Rješenje 17. (b) Invertiranjem ove jednadžbe dobiva se:

$$c = -b + \frac{1}{k}\left[n\pi - \delta_0 + \text{arc ctg}\left(\frac{K}{k} \text{ctg}(Kb) \right) \right] \quad , \quad n \in N$$

Iz zadanih veličina:

$$E_{cm} = \frac{1}{2} E_{lab} = 175 \ \textbf{MeV}$$

$$k^{-1} = \frac{197.33}{\sqrt{2 \cdot 938 / 2 \cdot 175}} = 0.486 \ \textbf{fm}$$

$$m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} = \frac{1}{2} m_p$$

$$\frac{K}{k} = \sqrt{V_0 / E + 1} = 1.42$$

$$Kb = \sqrt{2 \cdot 938 / 2 \cdot (175 + 73)} \cdot 1.337 / 197.32 = 3.27$$

Uvrštavanjem:

$$c = [-1.337 + 0.486 \cdot (n\pi + 0.25 + 0.091)] \ \textbf{fm} =$$

$$= [-1.172 + 1.527 \cdot n] \ \textbf{fm}$$

Rješenje 17. Prvi n za koji je c >0 je n =1, što daje c = 0.36 fm

(c) Iz zadanih veličina:

$$k(b+c)=\sqrt{2\cdot 938/2\cdot 1}\cdot(0.4+1.337)/197.32=0.27$$

$$\frac{K}{k}=\sqrt{V_0/E+1}=8.61$$

$$Kb=\sqrt{2\cdot 938/2\cdot 74.3}\cdot 1.337/197.32=1.79$$

$$\delta_0=-k(b+c)+\operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{K}{k}\operatorname{ctg}(Kb)\right)=2.391$$

Pretpostavljamo da samo s-val doprinosi, pa je udarni presjek dan s:

$$\sigma_{tot}=\frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0=$$

$$=242.4\,\mathbf{fm}^2$$

Zadatak 18. **Polumjer jezgre može se eksperimentalno odrediti na više načina; jedan od njih je raspršenje elektrona. Diskutirajte proceduru kojom se polumjer dobiva iz eksperimentalnih podataka.**

Rješenje 18.

a) Mjeri se kutna raspodjela elektronskog raspršenja i na taj način određuje form-faktor jezgre:

$$F(q^2) = \frac{(d\sigma / d\Omega)_{\mathbf{exp}}}{(d\sigma / d\Omega)_{\mathbf{point}}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} q \to 0 \;\Rightarrow\; F(q^2) \to 1 \\ q \to \infty \;\Rightarrow\; F(q^2) \to 0 \end{array}}$$

U prvoj Bornovoj aproksimaciji vrijedi:

$$F(q^2) = \int \rho_{ch}(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3\vec{r}$$

gdje je:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho(\vec{r}) = Ze\rho_{ch}(\vec{r}) \\ 1 = \int \rho_{ch}(\vec{r}) d^3\vec{r} \end{array}}$$

Uz $\rho_{ch}(\vec{r}) = \rho_{ch}(r)$ i $\vec{q}\vec{r} << 1$ vrijedi:

$$F(q^2) \approx \int \rho_{ch}(r)\left[1 + i\vec{q}\vec{r} + \frac{1}{2}(i\vec{q}\vec{r})^2 + \ldots\right] d^3\vec{r}$$

Rješenje 18.

$$F(q^2) \approx 1 + i\int \rho_{ch}(r)\vec{q}\vec{r}d^3\vec{r} - \frac{1}{2}\int \rho_{ch}(r)(\vec{q}\vec{r})^2 d^3\vec{r} + \ldots =$$

$$= 1 + i\int \rho_{ch}(r)qr2\pi r^2 dr\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta - \frac{1}{2}\int \rho_{ch}(r)q^2r^2 2\pi r^2 dr\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta + \ldots$$

$$= 1 + i\int \rho_{ch}(r)qr2\pi r^2 dr\cdot 0 - \frac{1}{2}\int \rho_{ch}(r)q^2r^2 2\pi r^2 dr\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{6}q^2\left\langle r^2\right\rangle\right)$$

gdje je $\left\langle r^2\right\rangle = \int \rho_{ch}(r)r^2 d^3\vec{r}$

Mjerenjem kutne raspodjele elastično raspršenih elektrona, određuje se *F* (q²) i iz toga računa <r²>.

Eksperimentalni podaci dobiveni mjerenjem raspršenja elektrona na jezgrama s masama 20<*A*<200:

$$\sqrt{\left\langle r^2\right\rangle}/A^{1/3} = 0.94 \pm 0.04\ \mathbf{fm} \qquad R^2 = \frac{5}{3}\left\langle r^2\right\rangle \quad\Rightarrow\quad R = 1.2\cdot A^{1/3}\ \mathbf{fm}$$

Form-faktori

- **veza između raspodjele naboja i form-faktora za neke sferično simetrične slučajeve (i u Bornovoj aproksimaciji)**

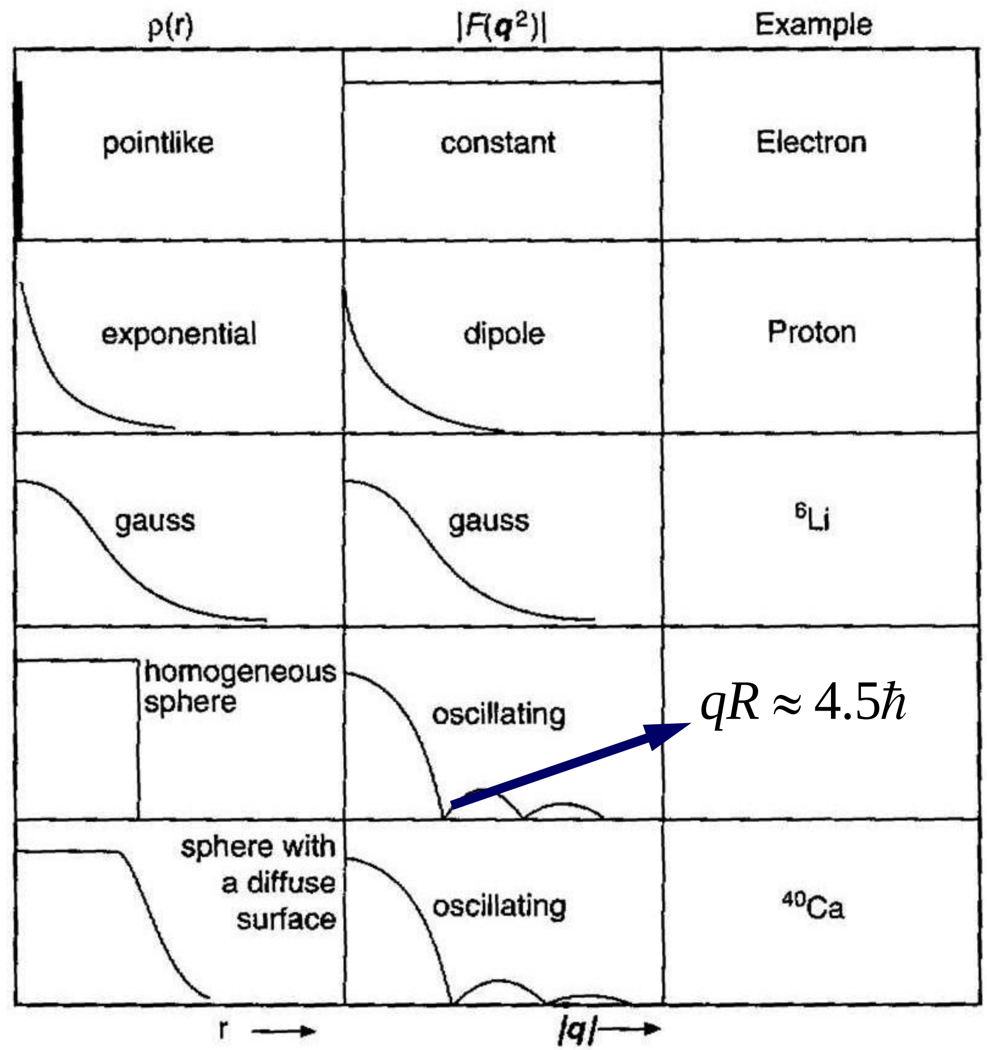
a) <u>točkasti naboj</u>:

$$\rho_{ch}(r) = \frac{\delta(r)}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad F(q^2) = 1$$

a) <u>eksponencijalna raspodjela</u>:

$$\rho_{ch}(r) = \frac{a^3}{8\pi} e^{-ar} \quad \Rightarrow$$

$$F(q^2) = \left(1 + \frac{q^2}{a^2 \hbar^2}\right)^{-2}$$



Form-faktori

- budući da je form-faktor dan s:

$$F(q^2) = \int \rho_{ch}(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3\vec{r}$$

raspodjela naboja može se dobiti iz inverzne Fourierove transformacije:

$$\rho_{ch}(\vec{r}) = (2\pi)^{-3} \int F(q^2) e^{-i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3\vec{q}$$

- u praksi se mjeri samo za neke q ⇨ treba naći položaj prvog minimuma oscilacija
- npr. za ^{12}C, prvi minumum je na q=1.8 fm^{-1} $\hbar$, što vodi na R≈ 2.5 fm

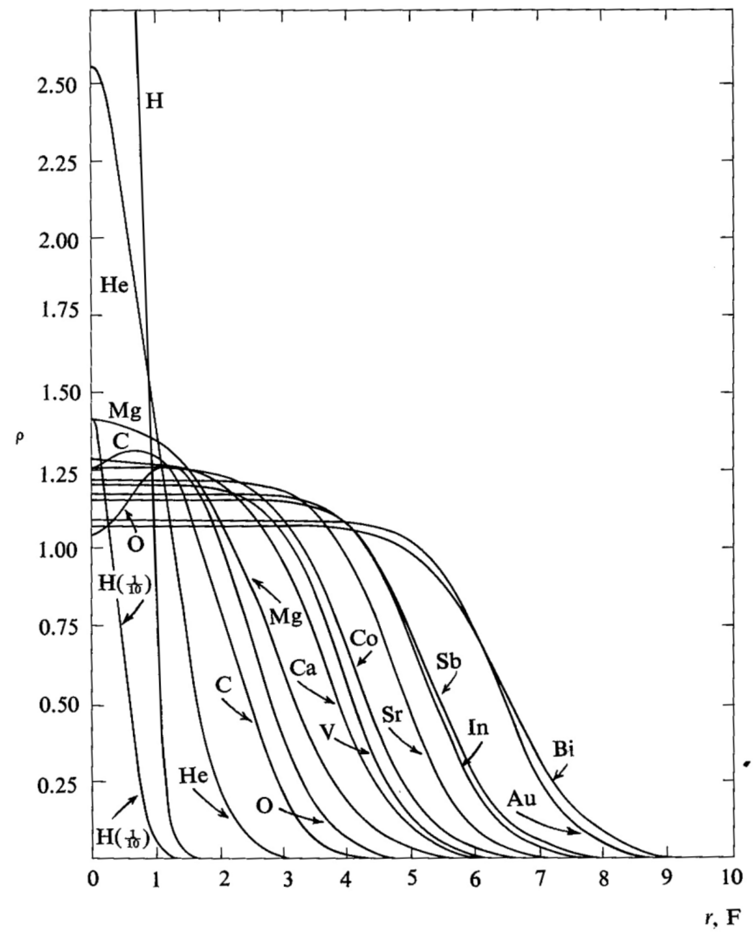
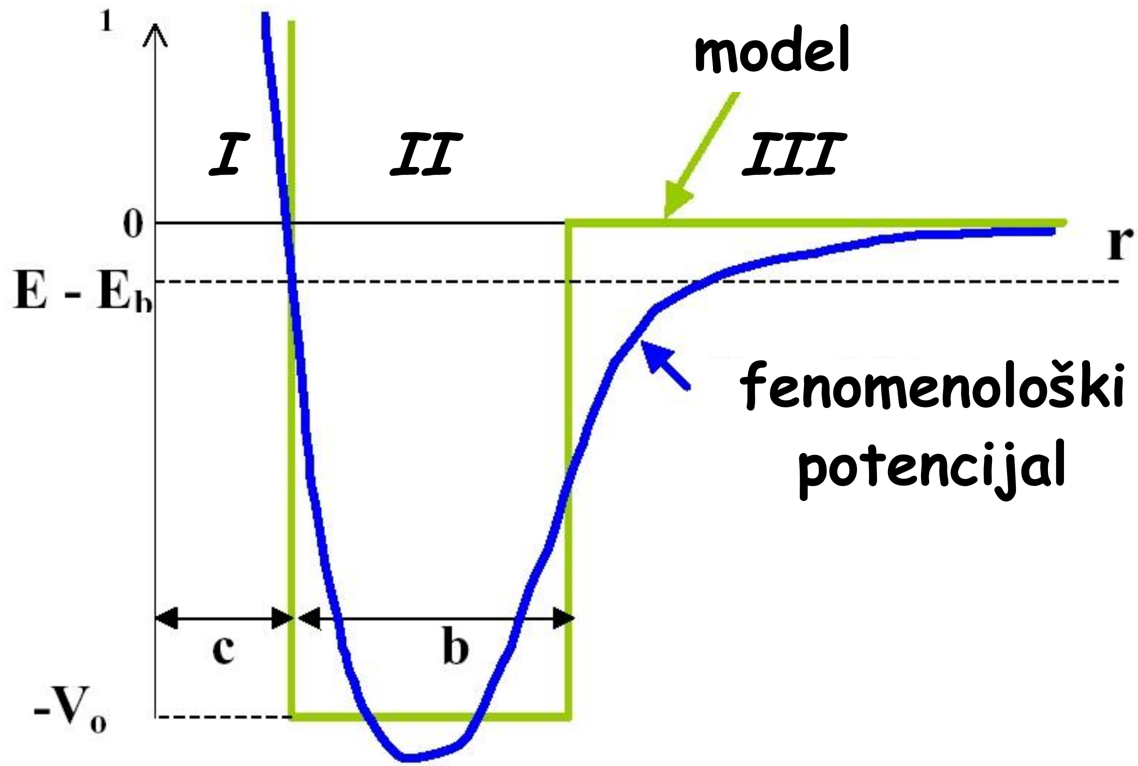


Figure 6-9 Nuclear charge density as a function of distance from the center of the nucleus foun[d] by electron scattering methods. Ordinates unit: 10^{19} coulomb cm^{-3}. [R. Hofstadter, *Ann. Rev. Nuc[l]. Sci.*, **7**, 231 (1957).]

Zadatak 19. **Iskoristite potencijal upotrebljen u zadatku 17 za opis raspršenja nukleona na nukleonu (dan na slici), za opis vezanog stanja neutrona i protona (tj. deuterona), izračunajte dubinu potencijalne jame (V_0).**

Upotrijebiti sljedeće eksperimentalne rezultate za deuteron: energija vezanja E_B= 2.225 MeV; polumjer dobiven elektronskim raspršenjem R_d= 2.1 fm.



Rješenje 19. (a) Opet rješavamo Schrödingerovu jednadžbu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r\theta\varphi) = (E-V)\Psi(r\theta\varphi)$$

Uz:

$$\Psi(r\theta\varphi) = \frac{u_l(r)}{r}Y_l^m(\theta\varphi)$$

pretpostavka: neutron i proton imaju *l* = *0*: $Y_l^m(\theta\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

ova se jednadžba opet svodi na (raspisano po područjima *I*, *II* i *III*):

$$r < c \qquad u_I = 0$$

$$r < c+b \qquad \frac{d^2u_{II}}{dr^2} + K^2u_{II} = 0 \qquad K = \frac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{\hbar}$$

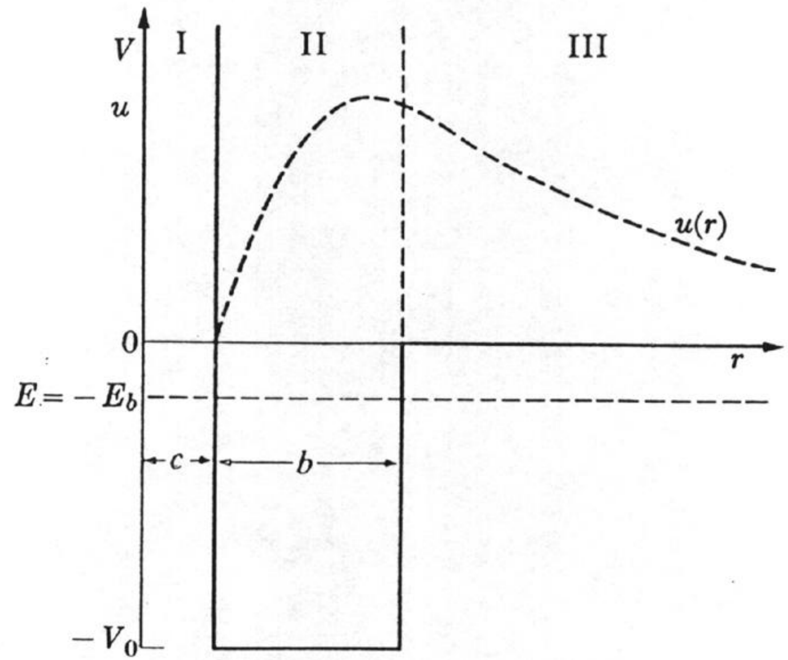
$$r > c+b \qquad \frac{d^2u_{III}}{dr^2} + k^2u_{III} = 0 \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Rješenje 19. **Rješenja su:**

$$r < c \qquad u_I = 0$$

$$r < c + b \qquad u_{II} = A\sin[K(r-c)]$$

$$r > c + b \qquad u_{III} = Be^{-kr}$$



Rubni uvjet koji povezuje dva područja je zahtjev na neprekidnost *u*(*r*) i d*u*(*r*)/d*r* u točki *r=c+b*

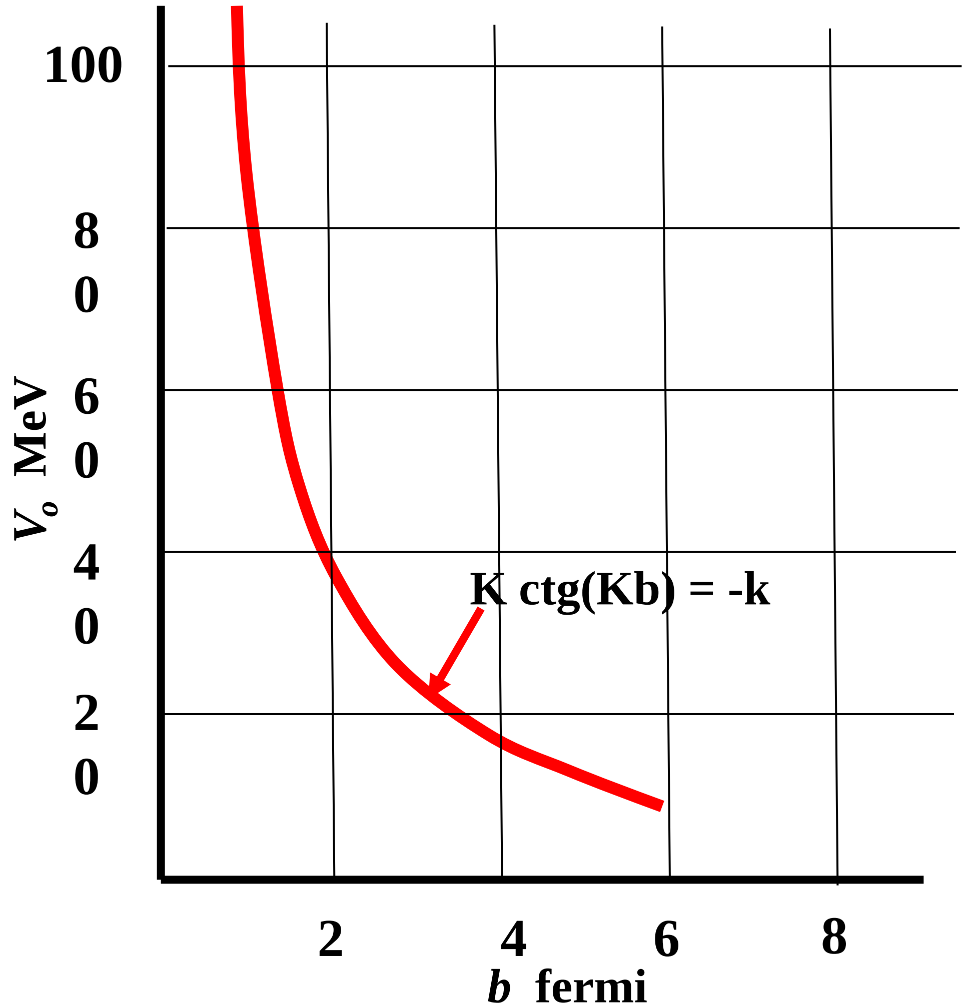
$$A\sin(Kb) = Be^{-k(b+c)}$$

$$AK\cos(Kb) = -Bke^{-k(b+c)}$$

$$\Rightarrow \quad K\,\mathrm{ctg}(Kb) = -k$$

Dakle, postoje mnoge kombinacije V_0 i b koje su rješenja ovog izraza.

Rješenje 19. Ovisnost V_0 o b:



Da bi jednoznačno odredili dubinu i doseg potencijala koji veže neutron i proton u deuteron, trebamo dodatne eksperimentalne informacije...

Rješenje 19. **Normaliziramo valnu funkciju:** $\int \Psi^2 dV = 1$

$$\int \Psi^2 dV = \int \left[\frac{u(r)}{r} Y_l^m(\theta\varphi) \right]^2 4\pi r^2 dr =$$

$$= \int_0^c u_I^2(r)dr + \int_c^{c+b} u_{II}^2(r)dr + \int_{c+b}^{\infty} u_{III}^2(r)dr =$$

$$= 0 + A^2 \int_c^{c+b} \sin^2[K(r-c)]dr + B^2 \int_{c+b}^{\infty} e^{-2kr} dr =$$

$$= A^2 \left[\frac{1}{2}(r-c) - \frac{1}{4K}\sin[2K(r-c)] \right]_c^{c+b} + B^2 \left[\frac{-1}{2k} e^{-2kr} \right]_{c+b}^{\infty} =$$

$$= A^2 \left(\frac{b}{2} - \frac{\sin(2Kb)}{4K} \right) + B^2 \left(\frac{e^{-2k(b+c)}}{2k} \right)$$

Rješenje 19. Uz: $A\sin(Kb) = Be^{-k(b+c)}$

možemo riješiti sistem dvije jednadžbe s dvije nepoznanice (A i B):

$$A^2 = \frac{2}{b - \frac{\sin(2Kb)}{K} + \frac{\sin^2(Kb)}{k}}$$

$$B^2 = \frac{2k\sin^2(Kb)e^{2k(c+b)}}{1+kb}$$

Time su valne funkcije u_{II} i u_{III} posve određene. U slijedećem koraku možemo ih iskoristiti za računanje polumjera deuterona:

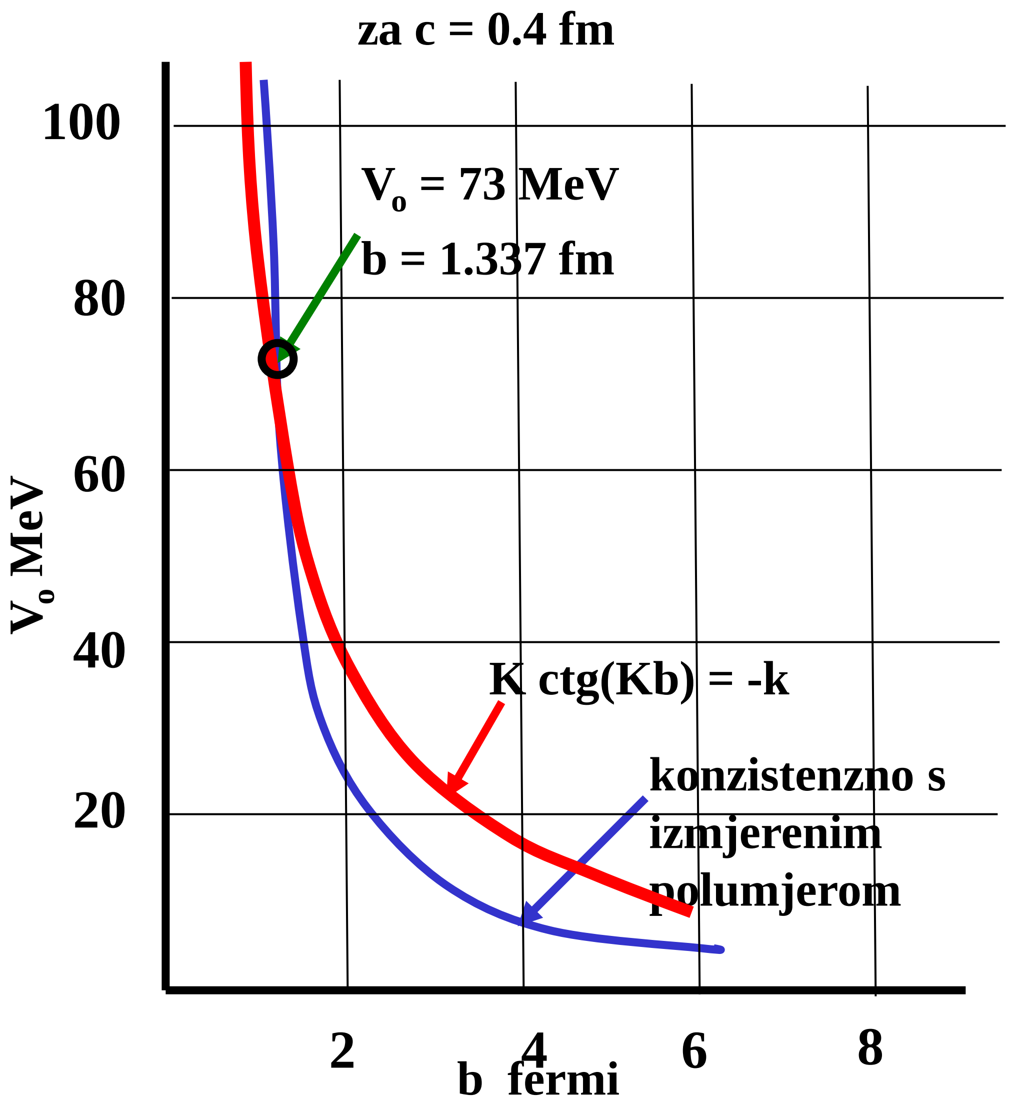
$$R_d^2 \equiv \left\langle r_d^2 \right\rangle \equiv \int r^2 \Psi^2 dV = \int r^2 u^2(r) dr$$

Rješenje 19. Sličnim postupkom (s malo kompliciranijim integralima) dobiva se:

$$\left\langle {r_d}^2 \right\rangle = \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8K^2} + \frac{(2c+b)(1+kb)}{k} + \frac{c^2}{4} - \frac{kb^2}{24(1+kb)}$$

Polumjer deuterona eksperimentalno se mjeri, pa nam gornja relacija daje još jednu vezu između parametara b i V_0; potrebno je samo pretpostaviti razumnu vrijednost parametra c. Standardno se uzima (što potvrđuju drugi eksperimenti): c= 0.4 fermi.

Rješenje 19.



c = 0.4 fm
V_o = 73 MeV
b = 1.337 fm