Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1
Kolokvij 13.2.2023.

1. Dana je zadaća
$$\begin{cases} u_x + xu_y = u, \\ u(1,y) = e^y. \end{cases}$$
   (a) (1) Odredite sve karakteristične točke vektorskog polja a.

   (b) (4) Riješite ovu zadaću te pronađite najveću domenu na kojoj je rješenje definirano.

2. (a) (3) Neka je $x \in \mathbb{R}^2$ takav da je $|x| < 1$. Izračunajte
$$\int_{S(0,1)} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|^2}.$$
   Napomena: za Greenovu funkciju d-dimenzionalne jedinične kugle vrijedi
$$\nabla_n G(x,y) = -\frac{1-|x|^2}{d\omega_d |y-x|^d}.$$
   (b) (3) Neka je $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ harmonička funkcija takva da vrijedi
$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)^2 dx < \infty.$$
   Dokažite da je $u \equiv 0$.

3. (5) Riješite početnu zadaću
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = t \sin x, & \text{na } \mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle \\ u(\cdot, 0) = 1, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

4. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i ograničen. Pretpostavimo da $u \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ zadovoljava
$$u_t - \Delta u + b \cdot \nabla u + cu < 0 \qquad \text{na } \Omega_T,$$
   gdje su $b \in C^\infty(\Omega_T; \mathbb{R}^d)$ i $c \in C^\infty(\Omega_T)$ zadane.

   (a) (4) Ako je $c \equiv 0$ na Ω_T, dokažite da u zadovoljava princip maksimuma, tj. da vrijedi
$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$
   (b) (2) Ako je $c \geq 0$ na Ω_T, dokažite da vrijedi
$$\max_{\overline{\Omega_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+,$$
   gdje je $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$.

5. (4) Riješite početnu zadaću
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = x_1 + x_2, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = x_2 + x_3, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$
   Uputa: Pokušajte uočiti svojstvo zadanih funkcija koje će vam olakšati račun.

Rješenja

1. Imamo

$$a(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}, \quad b(x,y,z) = z, \quad S = \{(1,s) : s \in \mathbb{R}\}, \quad u_0(1,s) = e^s.$$

Kako je $a(1,s,e^s) \cdot n(s) = (1,1) \cdot (1,0) = 1$, zaključujemo da karakteristčnih točaka nema.

Karakteristični sustav je

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dy}{dt} = x, \\ \frac{dz}{dz} = z, \\ x(0,s) = 1, \\ y(0,s) = s, \\ z(0,s) = e^s. \end{cases}$$

Rješenje ovog sustava je dano s

$$x(t,s) = t+1, \qquad y(t,s) = \frac{1}{2}(t+1)^2 + s - \frac{1}{2}, \qquad z(t,s) = e^{t+s}.$$

Sada vidimo da za svaki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ možemo invertirati preslikavanje $(t,s) \mapsto (x,y)$, te imamo

$$t = x+1, \qquad s = y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Stoga je konačno rješenje na cijelom $\mathbb{R}^2$ dano s

$$u(x,y) = e^{t(x,y)+s(x,y)} = e^{y - \frac{1}{2}(x-1)^2}.$$

2. (a) Primijetimo kako je

$$\int_{S(0,1)} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|^2} = \frac{4\pi}{1-|x|^2}\Big(- \int_{S(0,1)} \nabla_n G(x,y) d\sigma(y)\Big).$$

S obzirom da je posljednji integral upravo izraz za rješenje rubne zadaće

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{u } K(0,1), \\ u = 1, & \text{na } S(0,1), \end{cases}$$

te je očito $u \equiv 1$ (jedinstveno) rješenje iste, slijedi da je traženi integral jednak $\frac{4\pi}{1-|x|^2}$.

(b) Neka je $x \in \mathbb{R}^d$ proizvoljan, te $r > 0$. Koristeći teorem srednje vrijednosti i Hölderovu nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned} |u(x)| &\le \frac{1}{|K(x,r)|} \int_{K(x,r)} |u(y)| dy \\ &\le |K(x,r)|^{-1/2} \Big(\int_{K(x,r)} |u(y)|^2 dy \Big)^{1/2} \\ &\le |K(x,r)|^{-1/2} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(y)|^2 dy \Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Kako je integral u posljednjem retku konačan, puštanjem $r \to \infty$ slijedi $u(x) = 0$. S obzirom da je x bio proizvoljan, imamo $u \equiv 0$.

3. Uvedimo pomoćnu funkciju
$$v(x,t) = e^t u(x,t).$$

Tada v zadovoljava

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = te^t \sin x, & \text{na } \mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle, \\ v(\cdot, 0) = 1, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Koristeći formulu za rješenje ove zadaće imamo

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t-s)se^s \sin y dy.$$

Prvi integral je zbog svojstva elementarnog rješenja jednak 1, dok za drugi integral dobijemo kao na vježbama

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t-s)se^s \sin y dy &= \int_0^t se^s \Big(\int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t-s) \sin y dy \Big) ds \\ &= \int_0^t se^s (\sin x \, e^{s-t}) ds \\ &= \frac{1}{4} \sin x (2te^t - e^t + e^{-t}). \end{aligned}$$

Konačno, rješenje polazne zadaće je dano s

$$u(x,t) = e^{-t} v(x,t) = \frac{1}{4} \sin x (2t - 1 + e^{-2t}) + e^{-t}.$$

4. (a) Pretpostavimo suprotno, tj. da se maksimum postiže u točki $(x_0, t_0) \in \Omega_T$. Imamo dva slučaja:

   i. $t_0 < T$: Tada vrijedi $u_t(x_0, t_0) = 0$ te $\nabla u(x_0, t_0) = 0$. Također, kako i funkcija $x \mapsto u(x, t_0)$ poprima maksimum u x_0, tada je i matrica $D_x^2 u(x_0, t_0)$ negativno semidefinitna. Sada kao i u primjeru za harmoničke funkcije dobijemo da je njen trag (odnosno $\Delta u(x_0, t_0)$) nepozitivan broj. Konačno, dobivamo

   $$0 > u_t(x_0, t_0) - \Delta u(x_0, t_0) + b \cdot \nabla u(x_0, t_0) = -\mathrm{tr}(D_x^2 u(x_0, t_0)) \geq 0,$$

   što je kontradikcija.

   ii. Slučaj $t_0 = T$ ide analogno, uz prilagodbu $u_t(x_0, t_0) \geq 0$ umjesto $u_t(x_0, t_0) = 0$.

   (b) Ako je maksimum funkcije u na $\overline{\Omega_T}$ nepozitivan, tj. $u \leq 0$, tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo sada da u postiže pozitivni maksimum u točki $(x_0, t_0) \in \Omega_T$. Tada zbog $c \geq 0$ na isti način kao i u (a) dijelu u točki (x_0, t_0) dobivamo kontradikciju

   $$0 > u_t - \Delta u + b \cdot \nabla u + cu \geq 0.$$

5. Prema Kirchhoffovoj formuli za rješenje valne jednadžbe u tri dimenzije, imamo

$$u(x,t) = \frac{1}{|S(x,t)|} \int_{S(x,t)} g(y) + th(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) d\sigma(y).$$

Kako su g, h harmoničke funkcije, vrijedi teorem srednje vrijednosti, pa prva dva člana pod integralom daju $x_1 + x_2 + t(x_2 + x_3)$, dok za posljednji imamo prema teoremu o divergenciji

$$\frac{1}{|S(x,t)|} \int_{S(x,t)} \nabla g(y) \cdot (y-x) d\sigma(y) = \frac{t}{|S(x,t)|} \int_{K(x,t)} \Delta g(y) dy = 0.$$

Stoga je konačno rješenje jednako

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 + x_2 + t(x_2 + x_3).$$