Kolegij *Studentska natjecanja*, ak. god. 2023./2024.
`www.pmf.unizg.hr/math/predmet/snim_a`

Hamelove baze i primjene

Ilja Gogić, 24. 5. 2024.

1 Cauchyjeva funkcionalna jednadžba

Kako bismo motivirali temu današnjeg predavanja promotrimo sljedeći problem:

Problem 1. *Karakterizirati sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju tzv.* ***Cauchyjevu***[1] ***funkcionalnu jednadžbu***

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \text{za sve } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Za takve funkcije također kažemo da su **aditivne**. Skup svih aditivnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ označavamo s $\mathrm{Ad}(\mathbb{R})$.

Primjer 2. Trivijalna rješenja Cauchyjeve funkcionalne jednadžbe čine funkcije oblika $f(x) = cx$ ($c \in \mathbb{R}$). To su točno sve $\mathbb{R}$-linearne funkcije, tj. funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ za sve $\lambda, \mu, x, y \in \mathbb{R}$.

U ovom trenutku je prirodno pitati se je li svaka aditivna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nužno $\mathbb{R}$-linearna. Za početak, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Propozicija 3. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija, tada je f $\mathbb{Q}$-linearna, tj. vrijedi*

$$f(px + qy) = pf(x) + qf(y) \qquad \text{za sve } p, q \in \mathbb{Q} \text{ i } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Dokaz. Najprije primijetimo da je f nužno neparna funkcija. Zaista, iz $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ dobivamo $f(0) = 0$. Zatim, za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$ imamo $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$, pa je $f(-x) = -f(x)$. Također, matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ lako pokažemo da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(nx) = nf(x)$. Tada zbog neparnosti od f imamo i $f(nx) = nf(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{Z}$. Neka je sada $q \in \mathbb{Q}$. Izaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $nq \in \mathbb{Z}$. Tada, prema dokazanom, za sve $x \in \mathbb{R}$ imamo $nf(qx) = f(n(qx)) = f((nq)x) = (nq)f(x)$, iz čega slijedi $f(qx) = qf(x)$. To nam zajedno s aditivnosti od f daje jednakost (2). $\square$

Posebno, ako stavimo $c := f(1)$ imamo $f(q) = cq$ za sve $q \in \mathbb{Q}$. Ako bismo znali da je f neprekidna, onda bi iz gustoće od $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ slijedilo da je $f(x) = cx$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Štoviše, vrijedi sljedeća općenitija tvrdnja čiji dokaz ostavljamo za domaću zadaću (Zadatak 7):

Propozicija 4. *Za aditivnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su sljedeći uvjeti ekvivalentni:*

(a) f je neprekidna u barem jednoj točki $x \in \mathbb{R}$.

(b) Postoji otvoren interval I u $\mathbb{R}$ takav da je f monotona na I.

(c) Postoji otvoren interval I u $\mathbb{R}$ takav da je f ograničena na I.

(d) Graf od f je zatvoren podskup od $\mathbb{R}^2$.

(e) f je $\mathbb{R}$-linearna.

Napomena 5. *Uz malo više truda se može pokazati i da je svaka Lebesgue izmjeriva aditivna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nužno $\mathbb{R}$-linearna.*

Kao što smo primijetili, svaka aditivna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je automatski $\mathbb{Q}$-linearna. Budući da je $\mathbb{Q}$ potpolje od $\mathbb{R}$, na $\mathbb{R}$ možemo gledati kao vektorski prostor nad $\mathbb{Q}$ (tj. za skalare uzmemo racionalne brojeve). Označimo taj vektorski prostor s $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$. Kao što znamo iz linearne algebre, svaku linearnu funkciju između konačnodimenzionalnih vektorskih prostora je dovoljno zadati svojim djelovanjem na bazi. Ukoliko bismo to htjeli primijeniti na našu situaciju, odmah nailazimo na prepreku. Naime:

[1] Augustin-Louis Cauchy (1789.–1857.), francuski matematičar, inženjer i fizičar

Propozicija 6. *Vektorski prostor* $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$ *je beskonačnodimenzionalan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$ konačnodimenzionalan. Tada postoji konačan podskup $\{x_1, \dots, x_n\}$ od $\mathbb{R}$ takav da za svaki realan broj x postoje racionalni brojevi $q_1, \dots, q_n$ takvi da vrijedi $x = q_1 x_1 + \cdots + q_n x_n$. Tada funkcija

$$\phi : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{R}, \qquad \phi(q_1, \dots, q_n) := q_1 x_1 + \cdots + q_n x_n,$$

definira surjekciju s $\mathbb{Q}^n$ na $\mathbb{R}$, što je u kontradikciji s činjenicama da je $\mathbb{Q}^n$ prebrojiv, a $\mathbb{R}$ neprebrojiv. $\square$

Ipak, osnovni rezultati iz teorije konačnodimenzionalnih vektorskih prostora (npr. egzistenicija baze, ekvipotentnost baza, itd.) vrijede i u beskonačnodimenzionalnom slučaju. S time ćemo se pozabaviti u sljedećem odjeljku.

2 Hamelova baza vektorskog prostora

Definicija 7. ***Vektorski prostor*** *nad poljem* $\mathbb{F}$ *je neprazan skup* V *koji je Abelova grupa s obzirom na operaciju zbrajanja*

$$+ : V \times V \to V, \qquad (v, w) \mapsto v + w$$

i na kojem je definirana operacija množenja elementima polja $\mathbb{F}$

$$\mathbb{F} \times V \to V \qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

koja je distributivna s obzirom na obje operacije zbrajanja

$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \qquad \text{i} \qquad (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \qquad \text{za sve } \alpha, \beta \in \mathbb{F} \text{ i } v, w \in V,$$

ima svojstvo kvaziasocijativnosti

$$(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \qquad \text{za sve } \alpha, \beta \in \mathbb{F} \text{ i } v \in V,$$

te jedinica 1 *polja* $\mathbb{F}$ *je neutralna*

$$1v = v \qquad \text{za sve } v \in V.$$

Ako je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, tada elemente od V obično zovemo **vektori**, a elemente od $\mathbb{F}$ **skalari**.

Definicija 8. *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$*. Za neprazan podskup* M *od* V *kažemo da je* ***potprostor*** *od* V *i pišemo* $M \leq V$*, ako je* M *sam vektorski prostor nad istim poljem s obzirom na iste operacije.*

Napomena 9. *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$*.*

(a) Neprazan podskup M *od* V *je potprostor od* V *ako i samo ako vrijedi*

$$\alpha v + \beta w \in M \qquad \text{za sve } \alpha, \beta \in \mathbb{F} \text{ i } v, w \in M.$$

(b) Presjek proizvoljne familije potprostora od V *je potprostor od* V*.*

Definicija 10. *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *i neka je* S *proizvoljan podskup od* V*.*

(a) ***Linearna ljuska*** *od* S *je najmanji potprostor* $[S]$ *od* V *koji sadrži skup* S*, tj.* $[S]$ *je presjek svih potprostora od* V *koji sadrže* S*. Ako je* $[S] = V$*, tada kažemo da* S ***razapinje*** V*.*

(b) Za vektor $v \in V$ *kažemo da je* ***linearna kombinacija*** *vektora iz skupa* S *ako postoji konačno mnogo vektora* $v_1, \dots, v_n$ *iz* S *te skalari* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ *takvi da je*

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

U tom slučaju za v *kažemo i da je linearna kombinacija vektora* $v_1, \dots, v_n$*.*

(c) Za S *kažemo da je* ***linearno nezavisan*** *ako* $v \notin [S \setminus \{v\}]$ *za sve* $v \in S$*. U protivnom za* S *kažemo da je* ***linearno zavisan****.*

Napomena 11. *(a) $[S]$ je točno skup svih linearnih kombinacija vektora iz S.*

(b) S je linearno nezavisan ako i samo ako za svaki konačan podskup $\{v_1, \ldots, v_n\}$ vektora iz S iz

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F})$$

slijedi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definicija 12. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Za svaki linearno nezavisan podskup $\mathcal{B}$ od V koji razapinje V kažemo da je* ***Hamelova baza*** *(ili* ***algebarska baza****) za V.*

Napomena 13. *Podskup $\mathcal{B}$ od V je Hamelova baza za V ako i samo ako svaki vektor iz V možemo na jedinstven način prikazati kao linearnu kombinaciju vektora iz $\mathcal{B}$, tj. za svako $v \in V$ postoji jedinstvena funkcija $\varphi_v : \mathcal{B} \to \mathbb{F}$ s konačnim nosačem (tj. φ poprima samo konačno mnogo vrijednosti različitih od 0) takva da je*

$$v = \sum_{b \in \mathcal{B}} \varphi_v(b) b.$$

Definicija 14. *Za vektorski prostor V nad poljem $\mathbb{F}$ kažemo da je* ***konačnodimenzionalan*** *ako je V razapet s nekim svojim konačnim podskupom. U protivnom za V kažemo da je* ***beskonačnodimenzionalan****.*

U konačnodimenzionalnom slučaju se pojam Hamelove baze podudara sa standardnim pojmom baze. Kao što znamo iz elementarne linearne algebre, ako je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, tada:

(a) V ima konačnu bazu.

(b) Svake dvije baze za V imaju jednako mnogo elemenata. Taj broj se zove **dimenzija** od V.

(c) Svaki linearno nezavisan podskup od V je sadržan u nekoj bazi za V.

(d) Svaki podskup od V koji razapinje V sadrži neku bazu za V.

Analogni rezultati vrijede i u beskonačnodimenzionalnom slučaju:

Teorem 15. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada vrijedi:*

(a) Postoji barem jedna Hamelova baza za V.

(b) Svake dvije Hamelova baze za V su ekvipotentne.

(c) Svaki linearno nezavisan podskup od V je sadržan u nekoj Hamelova bazi za V.

(d) Svaki podskup od V koji razapinje V sadrži neku Hamelova bazu za V.

U beskonačnodimenzionalnom slučaju Teorem 15 se ne može dokazati bez korištenja neke varijante Aksioma izbora (obično se dokazuje korištenjem njemu ekvivalentne Zornove leme). Štoviše, može se pokazati da je tvrdnja (i) Teorema 15 zapravo ekvivalentna s Aksiomom izbora. Pristjetimo se, aksiom izbora i Zornova lema se obično izriču u sljedećoj formi:

Aksiom izbora (AC)

Ako je $\{X_i : i \in I\}$ neprazna familija nepraznih u parovima disjunktinih skupova, tada postoji skup X koji sadrži točno jedan element svakog skupa X_i, tj. $X \cap A_i$ je jednočlan skup za sve $i \in I$.

Zornova[2] lema

Neka je X neprazan parcijalno uređen skup sa svojstvom da svaki neprazan lanac u X ima gornju među u X. Tada X ima barem jedan maksimalni element.

Aksiom izbora je dugo vremena bio predmet mnogih kritika, no danas ga većina matematičara koristi bez ikakve zadrške. Njegova glavna kritika je vezana uz njegovu nekonstruktivnost, tj. on nam samo garantira egzisteniciju nekog skupa s nekim odgovarajućim svojstvom, dok nam s druge strane ne daje nikakav algoritam kako takav skup konstruirati. Druga kritika je vezana uz činjenicu da se pomoću njega mogu dokazati mnoge neintuitivne (i naoko kontroverzne) tvrdnje kao npr. slavni **Banach-Tarskijev[3,4] paradoks**, koji ukratko (i malo neformalno) kaže da se jedinična kugla u $\mathbb{R}^3$ može particionirati na konačno mnogo dijelova od kojih se koristeći samo kruta gibanja (rotacije i translacije) mogu sastaviti dvije kugle identične početnoj. Iako se na prvi pogled Banach-Tarskijev paradoks može činiti kontradiktornim (pogotovo ako nemamo iskustva s teorijom mjere), on je "legitiman" teorem teorije ZFC (Zermelo-Fraenkelova[5,6]

[2]Max August Zorn (1906.–1993.), njemački matematičar
[3]Stefan Banach (1892.–1945.), poljski matematičar
[4]Alfred Tarski (1901.–1983.), poljsko-američki logičar i matematičar
[5]Ernst Zermelo (1871.–1953.), njemački logičar i matematičar
[6]Abraham Fraenkel (1891–1965.), njemačko-izraelski matematičar

teorija skupova s Aksiomom izbora).

Primjer 16. Neka je $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (realan) vektorski prostor svih nizova realnih brojeva, uz standardne operacije po koordinatama. Iako nam teorem 15 garantira egzistenciju Hamelove baze za $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ona do sada nije eksplicitno konstruirana. Analogno vrijedi i za vektorski prostor $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$.

Tvrdnja (b) teorema 15 nam opravdava sljedeću definiciju:

Definicija 17. *Ako je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$,* ***(algebarska) dimenzija*** *od V je kardinalni broj neke (pa onda i svake) Hamelove baze za V. Kao i u konačnodimenzionalnom slučaju, dimenziju od V označavamo s $\dim V$.*

U idućem odjeljku ćemo koristiti sljedeću činjenicu:

Propozicija 18. *Neka je V beskonačnodimenzionalni vektorski prostor nad prebrojivim poljem $\mathbb{F}$. Tada je $\dim V = \operatorname{card}(V)$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna Hamelova baza za V. Tada je očito

$$\aleph_0 \leq \dim V = \operatorname{card}(\mathcal{B}) \leq \operatorname{card}(V). \tag{3}$$

S druge strane, budući da je preslikavanje

$$\phi : \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{F}^n \times \mathcal{B}^n) \to V, \qquad \phi\left((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (b_1, \ldots, b_n)\right) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$$

surjektivno ($\bigsqcup$ označava disjunktnu uniju), slijedi

$$\operatorname{card}(V) \leq \operatorname{card}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{F}^n \times \mathcal{B}^n)\right). \tag{4}$$

Nadalje, budući da za svaka dva beskonačna kardinalna broja ξ i ζ vrijedi

$$\xi \cdot \zeta = \max\{\xi, \zeta\},$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\operatorname{card}(\mathbb{F}^n \times \mathcal{B}^n) = \operatorname{card}(\mathbb{F}^n) \cdot \operatorname{card}(\mathcal{B}^n) = \aleph_0^n \cdot \operatorname{card}(\mathcal{B})^n = \aleph_0 \cdot \operatorname{card}(\mathcal{B}) = \operatorname{card}(\mathcal{B}).$$

Odave slijedi da je

$$\operatorname{card}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{F}^n \times \mathcal{B}^n)\right) = \aleph_0 \cdot \operatorname{card}(\mathcal{B}) = \operatorname{card}(\mathcal{B}). \tag{5}$$

Iz (4) i (5) dobivamo

$$\operatorname{card}(V) \leq \operatorname{card}(\mathcal{B}). \tag{6}$$

Napokon, prema Cantor-Schröder-Bernsteinovom teoremu iz (3) i (6) slijedi $\dim V = \operatorname{card}(V)$.

□

3 Hamelova baza prostora $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$

U daljenjm ćemo promatrati vektorski prostor $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$. Kao i svaki vektorski prostor, prema teoremu 15 $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$ ima Hamelovu bazu. Dakle, ako je $\mathcal{H}$ proizvoljna Hamelova baza za $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$, onda za svaki realan broj x postoji jedinstvena funkcija $q_x : \mathcal{H} \to \mathbb{Q}$ s konačnim nosačem takva da vrijedi

$$x = \sum_{b\in\mathcal{H}} q_x(b) b. \tag{7}$$

Napomena 19. *Iz propozicije 18 slijedi da je svaka Hamelova za $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$ baza kardinalnosti $\mathfrak{c} = \operatorname{card}(\mathbb{R})$.*

Zadatak 1. Dokažite da postoji $2^{\mathfrak{c}}$ različitih Hamelovih baza za $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$.

Rješenje. Označimo s $\mathfrak{H}$ skup svih Hamelovih baza za $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$. Očito je

$$\operatorname{card}(\mathfrak{H}) \leq \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^{\mathfrak{c}}, \tag{8}$$

gdje $\mathcal{P}(X)$ označava partitivni skup skupa X. S druge stane, ako je $\mathcal{H} \in \mathfrak{H}$, tada za proizvoljan podskup S od $\mathcal{H}$ definirajmo

$$\mathcal{H}_S := \{2b \ : \ b \in S\} \cup \{b \ : \ b \in \mathcal{H} \setminus S\}.$$

Tada je $\mathcal{H}_S$ također Hamelova baza za $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$, pa preslikavanje $S \mapsto \mathcal{H}_S$ definira injekciju s $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ u $\mathfrak{H}$. Budući da je $\operatorname{card}(\mathcal{H}) = \mathfrak{c}$ (napomena 19), zaključujemo

$$\operatorname{card}(\mathfrak{H}) \geq \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathfrak{H})) = 2^{\mathfrak{c}}. \tag{9}$$

Prema Cantor-Schröder-Bernsteinovom teoremu iz (8) i (9) slijedi $\operatorname{card}(\mathfrak{H}) = 2^{\mathfrak{c}}$.

Vratimo se sada Cauchyjevoj funkcionalnoj jednadžbi (1). Kako bismo odredili sva njena rješenja, fiksirajmo neku Hamelovu bazu $\mathcal{H}$ za $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$. Ako je $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija, tada f na jedinstven način možemo proširiti do $\mathbb{Q}$-linearne funkcije $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tako da stavimo

$$\overline{f}(x) := \sum_{b \in \mathcal{H}} q_x(b) f(b),$$

gdje je $x \in \mathbb{R}$ dan s reprezentacijom (7). S druge strane, prema propoziciji 3 svaka aditivna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je $\mathbb{Q}$-linearna, pa je ona jednoznačno određena svojim djelovanjem na Hamelovoj bazi $\mathcal{H}$. Odavde slijedi da preslikavanje $f \mapsto \overline{f}$ definira bijekciju sa skupa $\mathbb{R}^{\mathcal{H}}$ svih funkcija s $\mathcal{H}$ u $\mathbb{R}$ na skup $\operatorname{Ad}(\mathbb{R})$ svih aditivnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$, pa imamo

$$\operatorname{card}(\operatorname{Ad}(\mathbb{R})) = \operatorname{card}(\mathbb{R}^{\mathcal{H}}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})^{\operatorname{card}(\mathcal{H})} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

Budući da je kardinalni broj skupa svih $\mathbb{R}$-linearnih funkcija jednak $\mathfrak{c}$ (primjer 2), zaključujemo:

Teorem 20. *Postoji $2^{\mathfrak{c}}$ netrivijalnih rješenja Cauchyjeve funkcionalne jednadžbe.*

Kao što znamo iz tvrdnje (d) propozicije 4, graf svakog netrivijalnog rješenja Cauchyjeve funkcionalne jednadžbe ne može biti zatvoren podskup od $\mathbb{R}^2$. Štoviše, vijedi i puno više:

Zadatak 2. Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija koja nije $\mathbb{R}$-linearna, dokažite da je njen graf Γ_f gust podskup od $\mathbb{R}^2$, tj. svaki otvoren krug u $\mathbb{R}^2$ siječe Γ_f.

Rješenje. Stavimo $c := f(1)$ i izaberimo $t \in \mathbb{R}$ takav da $f(t) \neq ct$. Promotrimo skup

$$E := \{(p + qt, pc + qf(t)) \ : \ p, q \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Budući da je f $\mathbb{Q}$-linearna (propozicija 3), za sve $p, q \in \mathbb{Q}$ imamo

$$f(p + qt) = f(p) + f(qt) = pf(1) + qf(t) = pc + qf(t).$$

Odavde slijedi da je $E \subseteq \Gamma_f$. S druge strane imamo $E = A(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, gdje je $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearan operator koji je u kanonskoj bazi za $\mathbb{R}^2$ zadan s matricom

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ c & f(t) \end{bmatrix}.$$

Budući da je A regularan ($\det A = f(t) - ct \neq 0$) i budući da je $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ gust podskup od $\mathbb{R}^2$, zaključujemo i da je $E = A(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ gust podskup od $\mathbb{R}^2$. Kako je $E \subseteq \Gamma_f$, tvrdnja zadatka je dokazana.

Kao što bismo mogli očekivati, Hamelove baze su posebno korisne u situacijama kada trebamo naći primjere podskupova od $\mathbb{R}$ ili funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s neobičnim svojstvima. To ćemo ilustrirati u iduća tri zadatka.

Zadatak 3. Dokažite da se identiteta $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ može napisati kao zbroj dvije periodične funkcije.

Rješenje. Neka su α i β dva nesumjerljiva realna broja (npr. $\alpha = 1$ i $\beta = \sqrt{2}$). Prema (b) dijelu teorema 15, postoji Hamelova baza $\mathcal{H}$ za $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$ koja sadrži brojeve α i β. Definirajmo funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: Ako je $x \in \mathbb{R}$ dan s reprezentacijom (7), stavimo

$$f(x) := q_x(\alpha)\alpha \quad \text{i} \quad g(x) := x - f(x) = \sum_{b \in \mathcal{H} \setminus \{\alpha\}} q_x(b)b.$$

Tada je očito $f(x) + g(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da su f i g periodične funkcije redom s periodima β i α. Mi ćemo dokaz provesti samo za funkciju f, budući da je dokaz za funkciju g analogan. Za svako $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$x + \beta = q_{x+\beta}(\alpha)\alpha + q_{x+\beta}(\beta)\beta + \sum_{b \in \mathcal{H} \setminus \{\alpha, \beta\}} q_{x+\beta}(b).$$

S druge strane je

$$x + \beta = q_x(\alpha)\alpha + (q_x(\beta) + 1)\beta + \sum_{b \in \mathcal{H} \setminus \{\alpha, \beta\}} q_x(b).$$

Zbog jedinstvenosti prikaza mora biti $q_{x+\beta}(\alpha) = q_x(\alpha)$, odakle slijedi $f(x + \beta) = f(x)$.

Zadatak 4. Dokažite da postoji podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da je skup svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji su izometrični s A prebrojiv.

Napomena 21. *Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***izometrija*** *ako čuva udaljenost, tj. vrijedi*

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Nije teško vidjeti da je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrija ako i samo ako postoji ortogonalna matrica $A \in O(n)$ (dakle $A^t A = I$) i vektor $b \in \mathbb{R}^n$ tako da vrijedi $F(x) = Ax + b$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Posebno, svaka izometrija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je oblika $f(x) = \pm x + b$ za neki $b \in \mathbb{R}$ (što smo mogli i direktno dokazati).

Rješenje zadatka 4. Neka je $\mathcal{H}$ Hamelova baza za $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$. Fiksirajmo neki element $\alpha \in \mathcal{H}$ i stavimo

$$A := [\mathcal{H} \setminus \{\alpha\}]_{\mathbb{Q}}.$$

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izometrija. Tada je prema napomeni 21 f oblika $f(x) = \pm x + a$ za neko $a \in \mathbb{R}$. Kako je $-A = A$ (A je potprostor od $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$), imamo $f(A) = A + a$. Neka je $a = \sum_{b \in \mathcal{H}} q_a(b)b$ reprezentacija od a u Hamelovoj bazi $\mathcal{H}$. Kako je $a - q_a(\alpha)\alpha \in A$, imamo $A + a = A + q_a(\alpha)\alpha$. Odatle slijedi da je svaki podskup od $\mathbb{R}$ koji je kongruentan s A oblika $A + q\alpha$ za neko $q \in \mathbb{Q}$. Tvrdnja zadatka sada slijedi iz činjenice da je

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (A + q\alpha)$$

(disjunktna unija) i da je $\mathbb{Q}$ prebrojiv.

Zadatak 5. Dokažite da postoji particija skupa $\mathbb{R}_+$ pozitivnih realnih brojeva u dva skupa, takav da je svaki skup zatvoren s obzirom na zbrajanje.

Rješenje. Neka je $\mathcal{H}$ Hamelova baza za $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$ koja sadrži barem dva realna broja suprotnog predznaka. Definirajmo funkciju $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$\beta(x) := q(\min\{b \in \mathcal{H} \ : \ q_x(b) \neq 0\})$$

(minimum je uzet s obzirom na standardni uređaj na $\mathbb{R}$), te stavimo

$$A := \{x \in \mathbb{R}_+ \ : \ \beta(x) > 0\} \qquad \text{i} \qquad B := \mathbb{R}_+ \setminus A.$$

Tada je $\{A, B\}$ tražena particija od $\mathbb{R}_+$. Zaista, kako je

$$\beta(x + y) \in \{\beta(x), \beta(y), \beta(x) + \beta(y)\},$$

zaključujemo da su A i B zatvoreni s obzirom na zbrajanje. Naime, ako su $x, y \in A$, tada je $\beta(x), \beta(y) > 0$, pa je onda i $\beta(x + y) > 0$, tj. $x + y \in A$. Analogno ako su $x, y \in B$. Nadalje, A i B su neprazni skupovi, jer $\mathcal{H}$ sadrži i pozitivne i negativne brojeve. Naime, ako je $b \in \mathcal{H}$ pozitivan, tada je $b \in A$, a ako je $b \in \mathcal{H}$ negativan, tada je $-b \in B$.

Na kraju ovog predavanja dajemo jednu zgodnu primjenu Hamelovih baza (pokušajte naći alternativno rješenje - Zadatak 17):

Zadatak 6. Dano nam je 17 realnih brojeva sa sljedećim svojstvom: Ako uklonimo bilo koji od tih brojeva, tada preostalih 16 brojeva možemo podijeliti u dvije grupe po 8 elemenata s jednakim zbrojem elemenata. Dokažite da su svi ti brojevi jednaki.

Rješenje. Najprije primijetimo da ako realni brojevi $a_1, \ldots, a_{17}$ zadovoljavaju uvjet zadatka, tada ga zadovoljavaju i svi realni brojevi oblika $a_1 + b, \ldots, a_{17} + b$ te $ca_1, \ldots, ca_{17}$, gdje su $b, c \in \mathbb{R}$. Dokaz provodimo u koracima:

1. korak. Pretpostavimo da su svi $a_1, \ldots, a_{17}$ cijeli brojevi. Prema početnoj napomeni možemo pretpostaviti da su $a_1, \ldots, a_{17}$ nenegativni cijeli brojevi te da je neki od njih jednak 0. Primijetimo da iz uvjeta zadatka slijedi da kada uklonimo bilo koji od tih brojeva, preostalih 16 brojeva ima paran zbroj. Odavde slijedi da je svaka razlika $x_i - x_j$ paran broj. Budući da je neki x_i jednak 0, zaključujemo da su svi $x_1, \ldots, x_{17}$ parni brojevi. Sada svaki od tih brojeva podijelimo s 2. Na taj način dobivamo novu familiju od 17 brojeva koja ima ista svojstva kao i početna familija, tj. dobivamo nenegativne cijele brojeve takve da je neki od njih jednak 0 i koji zadoljavaju uvjet zadatka. Ponovno zaključujemo da je svaki od tih brojeva paran. Odavde slijedi da je $a_1 = \ldots = a_{17} = 0$, jer bi u protivnom svaki a_i koji nije 0 bio djeljiv s 2^n za sve $n \in \mathbb{N}$, što je nemoguće.

2. korak. Sada pretpostavimo da su svi brojevi $a_1, \ldots, a_{17}$ racionalni. Ukoliko ih pomnožimo s odgovarajućim prirodnim brojem, dobivamo novi sistem od 17 cijelih brojeva koji također zadovoljavaju uvjet zadatka. Iz 1. koraka slijedi da su svi brojevi iz tog novog sistema jednaki, pa je onda i $a_1 = \ldots = a_{17}$.

3. korak. Napokon, pretpostavimo da su $a_1, \ldots, a_{17}$ proizvoljni realni brojevi i neka je $\mathcal{H}$ Hamelova baza za $\mathbb{R}_{/\mathbb{Q}}$. Tada postoji konačan podskup $\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}\}$ od $\mathcal{H}$ i racionalni brojevi $q_{j,k}$ $(1 \leq j \leq 17, 1 \leq k \leq n)$ takvi da vrijedi

$$a_j = \sum_{k=1}^{n} q_{j,k} b_{i_k}$$

za sve $1 \leq j \leq 17$. Iz jedinstvenosti prikaza u Hamelovoj bazi slijedi da svaki od tih n sistema brojeva oblika $q_{1,k}, \ldots, q_{17,k}$ zadovoljava originalni uvjet zadatka. Budući da su to racionalni brojevi, iz 3. koraka slijedi $q_{1,k} = \ldots = q_{17,k}$ za sve $1 \leq k \leq n$. Onda je i $a_1 = \ldots = a_{17}$.

4 Domaća zadaća

Napomena: Za domaću zadaću potrebno je riješiti barem 5 od navedenih 11 zadataka. Zadaću predajete kao **jedan pdf file** preko Merlina do **14. 6. 2024. u 23:59**.

Zadatak 7. Dokažite propoziciju 4.

Zadatak 8. Opišite sva rješenja sljedećih funkcionalnih jednadžbi:

(a) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ $(x, y \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x + y) = af(x) + bf(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$, gdje su a i b fiksirani realni brojevi.

Zadatak 9. Dokažite da postoji Hamelova baza koja je gusta u $\mathbb{R}$.

Zadatak 10. Dokažite ili opovrgnite: Abelove grupe $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$ su izomorfne.

Zadatak 11. Odredite najmanji prirodan broj n takav da se funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = x^{2014}$ može napisati kao zbroj od n periodičnih funkcija.

Zadatak 12. Dokažite da postoji podskup $A \subseteq \mathbb{R}$, različit od $\emptyset$ i $\mathbb{R}$, takav da je za sve $x \in \mathbb{R}$ samo konačno mnogo skupova oblika $A, A + x, A + 2x, A + 3x, \ldots$ različito.

Zadatak 13. Može li se skup iracionalnih brojeva $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ particionirati u dva skupa, tako da su oba ta skupa zatvorena s obzirom na zbrajanje?

Zadatak 14. Dokažite da se $\mathbb{R}$ može napisati kao prebrojiva unija skupova S_n $(n \in \mathbb{N})$, tako da niti jedan S_n ne sadrži netrivijalnu aritmetičku sredinu elemenata iz S_n.

Zadatak 15. Dokažite da na $\mathbb{R}$ postoji relacija strogog linearnog uređaja $\prec$ takva da za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ iz $x \prec y \prec z$ slijedi da y nije aritmetička sredina od x i z.

Zadatak 16. Ako pravokutnik možemo podijeliti na konačno mnogo pravokutnika tako da svaki ima sumjerljive stranice, dokažite da i početni pravokutnik ima sumjerljive stranice.

Zadatak 17. Nađite alternativno rješenje zadatka 6.