Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odsjek

Tin Perkov, Mladen Vuković

SEMANTIKE LOGIKA DOKAZIVOSTI I INTERPRETABILNOSTI

predavanja

Zagreb, 2017.

Sadržaj

Predgovor

Ovaj materijal sadrži predavanja iz kolegija *Semantike logika dokazivosti i interpretabilnosti* koji smo predavali akademske godine 2016./17. na doktorskom studiju matematike u Zagrebu. Materijal je prije svega namijenjen studentima koji su slušali predavanja tog kolegija.

Svaki ispravak, ili pak sugestiju, koji bi mogli doprinijeti poboljšanju ovog teksta, rado ćemo prihvatiti.

U Zagrebu, 2017. autori

Poglavlje 1

Uvod

Glavni cilj kolegija je proučiti teoriju modela logika interpretabilnosti, te posebno detaljno razmotriti Goris, Joostenovu metodu dokaza teorema potpunosti. U ovom Uvodu namjera nam je naglasiti korake dokaze potpunosti za razne sisteme. Prvo dokazujemo teorem potpunosti za klasičnu logiku sudova. Tu posebno želimo istaknuti glavne korake dokaze: Lindenbaumova lema i lema o istinitosti. U drugoj točki ovog poglavlja ističemo glavne dijelove dokaze Gödelovog teorema potpunosti za logiku prvog reda. Zatim u trećoj točki dokazujemo potpunost osnovnog modalnog sistema **K** u odnosu na Kripkeovu semantiku. U zadnjoj točki navodimo neke modalne sisteme koji nisu potpuni u odnosu na relacijsku semantiku. To je onda glavni razlog da dademo definicije nekoliko alternativnih semantika za modalnu logiku.

1.1 Potpunost logike sudova

Tekst koji slijedi manje-više je dio materijala knjige [13], odnosno ispredaje se u kolegiju *Matematička logika*. Mala razlika je što ovdje promatramo maksimalno konzistente skupove, a ne potpune skupove. Razlog tome je što se maksimalno konzistentni skupovi koriste u dokazima potpunosti modalnih sistema. Još više detalja možete vidjeti u Mendelsonovoj knjizi [10].

Smatramo da su poznati pojmovi alfabeta logike sudova, formule, interpretacije, istintitosti formule za interpretaciju, valjana formula, ispunjiva formula i slično. Ovdje ističemo samo definicije i tvrdnje koje su nam važne prilikom razmatranja modalnih logika.

Definicija 1.1. *Sistem RS zadan je svojim shemama aksioma i jednim pravilom izvoda. Sheme aksioma sistema RS su:*

(A1) $A \to (B \to A)$;

(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

Jedino pravilo izvoda je **modus ponens** *ili kratko* **mod pon** *tj.*

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}.$$

Svaku instancu neke od shema $(A1)$–$(A3)$ *nazivamo* **aksiom**.

Definicija 1.2. *Kažemo da je niz formula* $F_1, \ldots, F_n$ **dokaz** *za formulu* F *u sistemu* RS *ako vrijedi:*

a) *formula* F_n *je upravo* F*, tj. vrijedi* $F_n \equiv F$*;*

b) *za sve* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *formula* F_k *je ili aksiom ili je nastala primjenom pravila modus ponens na neke formule* F_i *i* F_j*, gdje su* $i, j < k$*.*

Kažemo da je formula F **teorem** *sistema* RS*, u oznaci* $\vdash_{RS} F$ *(odnosno, kratko* $\vdash F$*), ako u* RS *postoji dokaz za* F*.*

teorem!u sistemu RS

Teorem 1.3 (Teorem adekvatnosti za sistem RS)**.**
Svaki teorem sistema RS *je valjana formula.*

Tvrdnja teorema se lako dokazuje indukcijom po duljini dokaza teorema u RS. Sada nam je glavni cilj skicirati dokaz obrata gornjeg teorema, tj. dokaz teorema potpunosti. U svrhu toga navodimo niz lema i propozicija.

Definicija 1.4. *Neka je* S *proizvoljan skup formula logike sudova i* F *neka formula. Kažemo da je niz formula* $F_1, \ldots, F_n$ **izvod** *iz skupa* S *formule* F *u sistemu* RS*, u oznaci* $S \vdash F$*, ako vrijedi:*

a) *formula* F_n *je upravo formula* F*, tj. imamo* $F_n \equiv F$*;*

b) *za sve* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *vrijedi barem jedno od sljedećeg:*

   b_1) F_k *je aksiom sistema* RS*;*

   b_2) $F_k \in S$ *(tada formulu* F_k *nazivamo* **pretpostavka***);*

   b_3) *formula* F_k *je nastala iz nekih* F_i*,* F_j $(i, j < k)$ *pomoću pravila modus ponens.*

Sljedeću propoziciju je lako dokazati indukcijom do duljini izvoda.

Propozicija 1.5. *Neka je* S *skup formula i* F *neka formula tako da vrijedi* $S \vdash F$*. Tada vrijedi* $S \models F$*.*

Teorem 1.6 (Teorem dedukcije za logiku sudova)**.**
Neka je S *skup formula, te* A *i* B *formule logike sudova. Ako vrijedi* $S \cup \{A\} \vdash B$*, tada vrijedi i* $S \vdash A \to B$*.*

Dokaz ide indukcijom po duljini izvoda. U dokazu se koristi lema: za sve formule A vrijedi $\vdash A \to A$.

Definicija 1.7. *Za skup formula S kažemo da je* **konzistentan** *u sistemu RS ako ne postoji formula F tako da vrijedi $S \vdash F$ i $S \vdash \neg F$. Ako skup formula nije konzistentan tada kažemo da je* **inkonzistentan**.

Definicija 1.8. *Za skup formula S kažemo da je* **ispunjiv** *ako postoji interpretacija I tako da za sve formule $F \in S$ vrijedi $I(F) = 1$ (to kratko označavamo sa $I(S) = 1$).*

Tvrdnja sljedeće propozicije lako se dokazuje obratom po kontrapoziciji koristeći propoziciju 1.5.

Propozicija 1.9. *Svaki ispunjiv skup formula S je konzistentan. Posebno je konzistentan skup svih teorema sistema RS.*

Sada nam je cilj dokazati obrat prethodne propozicije. O tome govori generalizirani teorem potpunosti. No, prije treba dokazati još neka svojstva konzistentnih skupova formula.

Propozicija 1.10. *Skup formula je konzistentan ako i samo ako je svaki njegov konačan podskup konzistentan.*

Napisat ćemo radi ilustracije dokaze nekih tvrdnji. Glavni razlog zašto to ovdje radimo je ilustracija složenosti tih dokaza, te kako bi se onda u logici prvog reda, odnosno u modalnim logikama, dokazi svojstava konzistentih skupova potpuno preskočili.

Lema 1.11. *Za sve formule F i G logike sudova vrijedi $\vdash \neg F \to (F \to G)$.*

Dokaz. Iz teorema dedukcije, tj. teorema 1.6, slijedi da je dovoljno dokazati da vrijedi $\{\neg F\} \vdash F \to G$. Dajemo jedan izvod za to.

1.	$\neg F$	(pretpostavka)
2.	$\neg F \to (\neg G \to \neg F)$	(aksiom (A1))
3.	$\neg G \to \neg F$	(mod pon: 1. i 2.)
4.	$(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$	(aksiom (A3))
5.	$F \to G$	(mod pon: 3. i 4.)

Q.E.D.

Propozicija 1.12. *Skup formula S je konzistentan ako i samo ako iz S nije izvediva barem jedna formula.*

Propozicija 1.13. *Neka je S skup formula i F proizvoljna formula. Tada imamo:*

a) ako vrijedi $S \nvdash F$ tada je skup $S \cup \{\neg F\}$ konzistentan;

b) ako je S konzistentan skup formula i $S \vdash F$ tada je i skup formula $S \cup \{F\}$ konzistentan.

Dokaz. a) Pretpostavimo da je skup $S \cup \{\neg F\}$ inkonzistentan. Iz prethodne propozicije 1.12 slijedi da je tada iz tog skupa izvediva svaka formula. Posebno imamo:

$$S \cup \{\neg F\} \vdash \neg(\neg F \to F) \qquad \text{i} \qquad S \cup \{\neg F\} \vdash F.$$

Primjenom teorema dedukcije slijedi da vrijedi:

$$\begin{array}{ll} S \vdash \neg F \to \neg(\neg F \to F) & (*) \\ S \vdash \neg F \to F & (**) \end{array}$$

Sada dajemo jedan izvod za formulu F iz skupa S.

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg F \to \neg(\neg F \to F) & (*) \\ 2. & (\neg F \to \neg(\neg F \to F)) \to ((\neg F \to F) \to F) & \text{(aksiom (A3))} \\ 3. & (\neg F \to F) \to F & \text{(mod pon: 1. i 2.)} \\ 4. & \neg F \to F & (**) \\ 5. & F & \text{(mod pon: 3. i 4.)} \end{array}$$

Dokažimo sada tvrdnju b). Pretpostavimo da je skup $S \cup \{F\}$ inkonzistentan. Tada postoji neka formula G tako da vrijedi

$$S \cup \{F\} \vdash G \qquad \text{i} \qquad S \cup \{F\} \vdash \neg G$$

Iz teorema dedukcije slijedi $S \vdash F \to G$ i $S \vdash F \to \neg G$. Sada iz toga, te $S \vdash F$, primjenom pravila modus ponens dobivamo $S \vdash G$ i $S \vdash \neg G$, tj. da je skup S inkonzistentan. Q.E.D.

Kako bi dokazali generalizirani teorem potpunosti, tj. da je svaki konzistentan skup formula ispunjiv, sada uvodimo pojam maksimalno konzistentnog skupa formula.

Definicija 1.14. *Za skup formula S kažemo da je* **maksimalno konzistentan** *u sistemu RS ako je konzistentan i svaki njegov pravi nadskup je inkonzistentan.*

Lako je dokazati sljedeću lemu o svojstvima maksimalno konzistentnih skupova.

Lema 1.15. *Neka je S maksimalno konzistentan skup. Tada za sve formule A i B vrijedi:*

a) ako $S \vdash_{RS} A$ tada $A \in S$;

b) $A \in S$ ako i samo ako $\neg A \notin S$;

c) $A \wedge B \in S$ ako i samo ako $A \in S$ i $B \in S$;

d) $A \vee B \in S$ ako i samo ako $A \in S$ ili $B \in S$;

e) $A \to B \in S$ ako i samo ako $A \notin S$ ili $B \in S$.

Lema 1.16 (Lindenbaumova lema za logiku sudova).
Neka je S konzistentan skup formula. Tada postoji maksimalno konzistentan skup formula S' takav da vrijedi $S \subseteq S'$.

Dokaz. Skup svih formula logike sudova je prebrojiv. Neka je $F_0,\ F_1,\ F_2,\ \ldots$ niz koji sadrži sve formule logike sudova. Rekurzivno definiramo niz skupova formula (S_n) na sljedeći način:

$$
\begin{array}{rcl}
S_0 & = & S \\
S_{n+1} & = & \begin{cases} S_n \cup \{\neg F_n\}, & \text{ako } S_n \nvdash F_n; \\ S_n \cup \{F_n\}, & \text{inače.} \end{cases}
\end{array}
$$

Dokažimo indukcijom da je svaki skup formula S_n konzistentan. Skup S_0 je konzistentan po pretpostavci leme. Pretpostavimo da je S_n konzistentan skup formula. Ako $S_n \nvdash F_n$ tada iz tvrdnje a) u propoziciji 1.13 slijedi da je skup S_{n+1} konzistentan. Ako $S_n \vdash F_n$ tada konzistentnost skupa S_{n+1} slijedi iz tvrdnje b) u propoziciji 1.13.
Neka je $S' = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Očito vrijedi $S \subseteq S'$. Dokažimo da je skup S' konzistentan. Neka je S'' proizvoljan konačan podskup od S'. Pošto za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S_n \subseteq S_{n+1}$ tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $S'' \subseteq S_{n_0}$. Pošto je S_{n_0} konzistentan skup formula tada je i njegov podskup S'' konzistentan. Time smo dokazali da je proizvoljan konačan podskup skupa S' konzistentan, a onda iz propozicije 1.10 slijedi da je i skup S' konzistentan.
Preostalo je dokazati da je skup S' maksimalno konzistentan. Neka je F neka formula logike sudova tako da $F \notin S'$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $F_n \equiv F$. Iz $F \notin S'$ slijedi $F_n \notin S_{n+1}$, a onda i $\neg F \in S_{n+1}$. Tada je očito skup $S' \cup \{F\}$ inkonzistentan.
Q.E.D.

Za dokaz generaliziranog teorema potpunosti treba nam još samo sljedeća lema.

Lema 1.17 (Lema o istinitosti za logiku sudova).
Ako je S maksimalno konzistentan skup tada je S ispunjiv skup formula.

Skica dokaza. Definiramo totalnu interpretaciju I sa:

$$I(P) = 1 \qquad \text{ako i samo ako} \qquad P \in S.$$

Indukcijom po složenosti formule F lako je dokazati da vrijedi:

$$I(F) = 1 \qquad \text{ako i samo ako} \qquad F \in S.$$

Teorem 1.18 (Generalizirani teorem potpunosti za logiku sudova).
Skup formula je konzistentan ako i samo ako je ispunjiv.

Dokaz. Lako je dokazati da je svaki ispunjiv skup konzistentan (obratom po kontrapoziciji). Dokažimo da je svaki konzistentan skup ujedno i ispunjiv. Neka je S neki konzistentan skup. Iz Lindenbaumove leme slijedi da postoji $S' \supseteq S$ koji je maksimalno konzistentan. Iz leme o istinitosti slijedi da je skup S' ispunjiv. Tada postoji interpretacija I tako da vrijedi $I(S') = 1$. Pošto $S \subseteq S'$ tada vrijedi $I(S) = 1$, pa je skup S ispunjiv.
Q.E.D.

Teorem 1.19 (Teorem potpunosti za sistem RS)**.**
Formula F je valjana ako i samo ako formula F je teorem sistema RS.

Dokaz. Jedan smjer je već istaknut kao teorem adekvatnosti. Dokažimo drugi smjer. Pretpostavimo da je F formula takva da $\nvdash_{RS} F$. Iz propozicije 1.13 slijedi da je skup $\{\neg F\}$ konzistentan. Iz generaliziranog teorema slijedi da je taj skup ispunjiv. Tada postoji interpretacija I tako da vrijedi $I(\neg F) = 1$, tj. formula F nije valjana. Q.E.D.

Teorem 1.20 (Teorem kompaktnosti za logiku sudova)**.**
Skup formula S je ispunjiv ako i samo ako je svaki konačan podskup od S ispunjiv.

1.2 Potpunost logike prvog reda

U ovoj točki dajemo skicu dokaza teorema potpunosti za logiku prvog reda. Više detalja o tome možete vidjeti u knjizi [13]. Glavni razlog zašto razmatramo dokaz potpunosti za logiku prvog reda je namjera da još jednom naglasimo opću shemu dokaza teorema potpunosti, te istaknemo poteškoće u odnosu na dokaz potpunosti za logiku sudova.

Za svaku teoriju T prvog reda imamo pripadni **jezik**, koji se sastoji od sljedećeg:

1. **Alafabet**.
   To je skup $A_1 \cup \ldots \cup A_6$ pri čemu su redom:

   a) A_1 je prebrojiv skup čije elemente nazivamo individualne varijable, te ih označavamo sa v_i;

   b) $A_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall\}$, tj. skup logičkih simbola;

   c) A_3 je skup relacijskih simbola. Taj skup sadrži barem jedan dvomjesni relacijski simbol (rezerviran za jednakost);

   d) A_4 je skup funkcijskih simbola (može biti i prazan);

   e) A_5 je skup konstatntskih simbola (može biti prazan);

   f) A_6 je skup pomoćnih simbola (lijeva i desna zagrada).

   Skup $A_3 \cup A_4 \cup A_5$ nazivamo **skup nelogičkih simbola** ili **signatura** teorije T, te ga označavamo sa σ_T ili samo sa σ.

2. **Definirani su još sljedeći pomoćni pojmovi**: σ–term, σ–formula, podformula, slobodna i vezana varijabla u formuli, term slobodan za varijablu u formuli, rečenica (ili zatvorena formula), supstitucija terma u formuli, shema formule, ...

Zatim, za svaku teoriju prvog reda mora biti definiran pripadni **račun**. Račun se sastoji redom od sljedećeg:

1. **Skup aksioma**. Po dogovoru smatramo da svaka teorija prvog reda sadrži sljedećih pet shema aksioma:

   (A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;

   (A2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

   (A3) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$;

   (A4) $\forall x A(x) \rightarrow A(t/x)$, gdje je term t slobodan za varijablu x u formuli A;

   (A5) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$, gdje formula A ne sadrži slobodnih nastupa varijable x.

Svaka instanca shema $(A1)$–$(A5)$ je valjana formula. Teorija prvog reda osim navedenih shema $(A1)$–$(A5)$ može imati i druge aksiome. Svaki aksiom teorije koji nije valjana formula nazivamo **nelogički aksiom**.

2. **Pravila izvoda**. Po dogovoru svaki račun proizvoljne teorije prvog reda sadrži kao jedina pravila izvoda modus ponens i generalizaciju, tj.

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad \text{i} \qquad \frac{A}{\forall x A}$$

3. Definirani su i sljedeći pojmovi: **dokaz, teorem teorije, izvod.**

Alfabet logike prvog reda je maksimalno mogući, tj. za svaki $k \in \mathbb{N}$ sadrži prebrojivo mnogo relacijskih i funkcijskih simbola mjesnosti k, te sadrži prebrojivo mnogo konstantskih simbola. Račun logike prvog reda, kratko RP, ne sadrži nelogičke aksiome. Sada ćemo definirati osnovne pojmove vezane uz semanitiku teorija prvog reda.

Definicija 1.21. *Ako je σ signatura tada je σ–**struktura** $\mathfrak{M}$ uređeni par (M, φ), gdje je M neprazan skup, a φ je funkcija sa skupa σ koja svakom n–mjesnom relacijskom simbolu pridružuje n–mjesnu relaciju na skupu M, svakom n–mjesnom funkcijskom simbolu pridružuje n–mjesnu funkciju na M, te svakom konstantskom simbolu pridružuje neki element iz M.*

Definicija 1.22. *Ako je $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ neka σ–struktura tada je **valuacija** na $\mathfrak{M}$ svaka funkcija $v : \{v_0, v_1, \dots\} \to M$. Svaki uređeni par $(\mathfrak{M}, v)$ nazivamo σ–**interpretacija**.*

Rekurzivno se definira pojam istinitosti σ–formule F za zadanu σ–interpretaciju $(\mathfrak{M}, v)$, u oznaci $\mathfrak{M} \models_v F$. Nakon toga su definirani pojmovi ispunjive, valjane, oborive, te lažne formule.

Definicija 1.23. *Za σ–strukturu $\mathfrak{M}$ kažemo da je **model za teoriju** T ako je svaki aksiom od T istinit na strukturi $\mathfrak{M}$. Za model $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ kažemo da je prebrojiv ako je skup M prebrojiv.*

Definicija 1.24. *Neka je T teorija prvog reda i σ–pripadna signatura. Kažemo da je teorija T **konzistentna** ako ne postoji σ–formula F takva da vrijedi $\vdash_T F$ i $\vdash_T \neg F$. Za skup σ–formula S kažemo da je **konzistentan u teoriji** T ako ne postoji σ–formula F tako da vrijedi $S \vdash_T F$ i $S \vdash_T \neg F$.*

U sljedećoj propoziciji ističemo osnovna svojstva konzistentnosti.

Propozicija 1.25. *Neka je T teorija prvog reda, σ pripadna signatura, i S neki skup σ–formula. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) *Skup S je konzistentan u teoriji T ako i samo je svaki konačan podskup od S konzistentan u teoriji T;*

b) *Skup formula S je konzistentan u teoriji T ako i samo ako postoji σ–formula F tako da vrijedi $S \nvdash_T F$;*

c) *Ako je F zatvorena σ–formula i vrijedi $S \nvdash_T F$, tada je skup $S \cup \{\neg F\}$ konzistentan u teoriji T;*

d) *Ako je F zatvorena σ–formula i vrijedi $S \nvdash_T \neg F$, tada je skup formula $S \cup \{F\}$ konzistentan u teoriji T;*

e) *Ako postoji model za teoriju T koji je model i za skup formula S tada je skup S konzistentan u teoriji T;*

f) *Ako je S konzistentan skup formula u teoriji T i F zatvorena σ–formula, tada je bar jedan od skupova $S \cup \{F\}$ i $S \cup \{\neg F\}$ konzistentan u teoriji T;*

g) *Ako je S konzistentan skup formula u teoriji T, te je F σ–formula takva da vrijedi $S \vdash F$, tada je i skup $S \cup \{F\}$ konzistentan u teoriji T.*

Sada nam je cilj skicirati dokaz da za svaku konzistentnu teoriju prvog reda postoji potpuno proširenje. U tu svrhu navodimo sljedeći korolar i definicije.

Korolar 1.26. *Skup svih formula proizvoljne teorije prvog reda je prebrojiv. Skup svih zatvorenih formula proizvoljne teorije prvog reda je prebrojiv. Posebno je prebrojiv skup svih zatvorenih formula logike prvog reda.*

Definicija 1.27. *Za teoriju T prvog reda kažemo da je* **potpuna** *ako za svaku zatvorenu formulu F pripadnog jezika vrijedi $\vdash_T F$ ili $\vdash_T \neg F$.*

Svaka inkonzistentna teorija je potpuna.

Definicija 1.28. *Neka je T σ–teorija, a T' σ'–teorija prvog reda. Kažemo da je teorija T'* **proširenje teorije** *T ako je $\sigma \subseteq \sigma'$ i za sve σ–formule F vrijedi da iz pretpostavke $\vdash_T F$ slijedi $\vdash_{T'} F$. Kažemo da je teorija T'* **jednostavno proširenje** *teorije T ako je $\sigma = \sigma'$ i za sve σ–formule F vrijedi da $\vdash_T F$ povlači $\vdash_{T'} F$. Kažemo da su teorije T i T' prvog reda* **ekvivalentne** *ako je T jednostavno proširenje od T', i obratno.*

Ako je T teorija prvog reda i S skup formula pripadnog jezika, tada s $\mathbf{T + S}$ označavamo teoriju nastalu dodavanjem svih formula iz S skupu aksioma od T. Ako je skup S jednočlan, tj. $S = \{F\}$, tada umjesto $T + \{F\}$ ponekad kratko pišemo $T + F$.

Lema 1.29 (Lindenbaumova lema za teorije prvog reda)**.**
Za svaku konzistentnu teoriju T prvog reda postoji konzistentno potpuno proširenje.

U nastavku s T označavamo proizvoljnu konzistentnu teoriju prvog reda. Sada dajemo skicu dokaza generaliziranog teorema potpunosti za teorije prvog reda, tj. da za svaku konzistentnu teoriju prvog reda postoji model. Odmah se postavlja pitanje što bi mogao biti nosač takvog modela. Jasno je da nam za to ne mogu poslužiti na primjer skupovi brojeva $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ili $\mathbb{R}$. Prisjetimo se da je po definiciji model uređeni par $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$, pri čemu je posebno za sve zatvorene terme t teorije T ispunjeno $\varphi(t) \in M$. Najjednostavnije je definirati $\varphi(t) = t$, tj. za nosač modela M uzeti **skup svih zatvorenih terma**. Tada bismo interpretaciju konstantskih i funkcijskih simbola redom definirali sa:

$$\varphi(c) = c$$

$$\varphi(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n).$$

Tada bi očito za sve zatvorene terme vrijedilo $\varphi(t) = t$. No, definicija interpretacija relacijskih simbola konzistentne teorije T nije tako jednostavna. Po definiciji strukture za svaki relacijski simbol R moramo definirati $\varphi(R)$ kao relaciju na skupu svih zatvorenih terma teorije T. Ako je za neke terme $t_1, \ldots, t_n$ atomarna formula $R(t_1, \ldots, t_n)$ teorem teorije T tada, naravno, definiramo da vrijedi $(t_1, \ldots, t_n) \in \varphi(R)$. Ako je pak formula $\neg R(t_1, \ldots, t_n)$ teorem teorije T tada definiramo $(t_1, \ldots, t_n) \notin \varphi(R)$. No, to nije dobra definicija za funkciju φ na skupu svih relacijskih simbola teorije T. Moguće postoji atomarna formula $R(t_1, \ldots, t_n)$ tako da vrijedi:

$$\not\vdash_T R(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{i} \quad \not\vdash_T \neg R(t_1, \ldots, t_n).$$

To znači da svojstvo "biti teorem od T" ne može biti definicijsko svojstvo za istinitost proizvoljne atomarne formule. Time smo naveli prvi problem prilikom definicije interpretacije. Sada navodimo drugi problem prilikom definicije interpretacije φ za proizvoljnu konzistentnu teoriju T. Skup svih zatvorenih terma proizvoljne konzistentne teorije T općenito neće moći biti nosač interpetacije. Prethodnu tvrdnju ćemo potkrijepiti sljedećim primjerom.

Primjer 1.30. *Neka je $\sigma = \{c, =, R\}$ gdje je c konstantski simbol, a R je jednomjesni relacijski simbol.*

Zatim, neka su nelogički aksiomi teorije T formule $\neg R(c)$ i $\exists x R(x)$. Lako je konstruirati neki model za T. Iz tvrdnje e) u propoziciji 1.25 *slijedi da je teorija T konzistentna. Neka je M skup svih zatvorenih σ–terma, tj. $M = \{c\}$. Definirajmo da je $\varphi(c) = c$. Iz aksioma $\neg R(c)$ slijedi da je $\varphi(R) = \emptyset$. No, tada za $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ imamo da $\mathfrak{M} \not\models \exists x R(x)$, a to znači da $\mathfrak{M}$ nije model za teoriju T.*

Definicija 1.31. *Za σ–teoriju T prvog reda kažemo da je* **Henkinova teorija** *ako za svaku zatvorenu σ–formulu koja je oblika $\exists x A(x)$, postoji konstantski simbol $c \in \sigma$ tako da vrijedi: $\vdash_T \exists x A(x) \to A(c/x)$.*

Uočite da alfabet svake Henkinove teorije sadrži beskonačno konstantskih simbola. Važnost pojma Henkinove teorije jasno je istaknuta u sljedećoj lemi.

Lema 1.32. *Neka je T konzistentna i potpuna Henkinova σ–teorija. Označimo sa $|\mathfrak{M}|$ skup svih zatvorenih terma teorije T. Zatim definirajmo interpretaciju nelogičkih simbola iz σ na sljedeći način:*

$$c^{\mathfrak{M}} = c;$$

$$f^{\mathfrak{M}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n),$$

gdje je c konstantski, a f funkcijski simbol. Za proizvoljan relacijski simbol $R \in \sigma$ definirajmo relaciju $R^{\mathfrak{M}}$ ovako:

$$(t_1, \ldots, t_n) \in R^{\mathfrak{M}} \quad \text{ako i samo ako} \quad \vdash_T R(t_1, \ldots, t_n).$$

Obično se tako definirana struktura $\mathfrak{M}$ naziva **kanonski model** *za T.*
Tada za sve zatvorene σ–formule F vrijedi:

$$\vdash_T F \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \models F.$$

Važno je primijetiti da model $\mathfrak{M}$ iz prethodne leme općenito ne može biti efektivno konstruiran jer interpretacija relacijskih simbola ovisi o dokazivosti u teoriji T, a to je općenito neodlučivo po Churchovom teoremu. Očito je skup svih zatvorenih terma svake Henkinove teorije prebrojiv. Iz te činjenice, i prethodne leme, jednostavno dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 1.33. *Za svaku konzistentnu i potpunu Henkinovu teoriju postoji prebrojiv model.*

Zadnja tvrdnja koja nam treba za dokaz generaliziranog teorema potpunosti za teorije prvog reda je sljedeća lema.

Lema 1.34. *Za svaku konzistentnu teoriju T prvog reda postoji konzistentno i potpuno proširenje koje je Henkinova teorija.*

Teorem 1.35 (Generalizirani teorem potpunosti za teorije prvog reda)**.**
Za svaku konzistentnu teoriju T prvog reda postoji prebrojiv model.

Najvažnije posljedice generaliziranog teorema potpunosti za teorije prvog reda su sljedeći teoremi.

Teorem 1.36 (Gödelov teorem potpunosti)**.**
Neka je T teorija prvog reda i F formula pripadnog jezika. Tada vrijedi:

$$\vdash_T F \quad \text{ako i samo ako} \quad \text{je } F \text{ istinita u svim modelima za } T.$$

Posebno vrijedi: $\vdash_{RP} F$ ako i samo ako je F valjana formula.

Teorem 1.37 (Teorem kompaktnosti za logiku prvog reda)**.**
Neka je S neki skup σ–formula. Tada za skup S postoji model ako i samo ako za svaki konačan podskup od S postoji model.

Teorem 1.38 (Löwenheim–Skolemov teorem "na dolje")**.**
Svaka teorija prvog reda koja ima model ima i prebrojiv model.

1.3 Potpunost modalnog sistema K

U ovoj točki promatramo osnovni modalni sistem koji se označava s **K**. Alfabet tog sistema sadrži alfabet klasične logike sudova, te jedan unarni modalni operator koji se označava s $\Box$. U razmatranjima koristimo i unarni modalni operator $\Diamond$ koji je pokrata za $\neg\Box\neg$.

Pojam formule se definira sasvim analogno kao u logici sudova. Jedini dodatak je sljedeće: ako je A formula tada je i $\Box A$ formula.

Skup aksioma sistema **K** sadrži sve tautologije (u novom jeziku!) te sljedeći aksiom:

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

Navedeni aksiom se naziva aksiom distributivnosti.
Pravila izvoda sistema **K** su sljedeća:

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \text{ (modus ponens)} \qquad\qquad \frac{A}{\Box A} \text{ (nužnost)}$$

Pojam dokaz i teorema sistema **K** se definira sasvim na isti način kao u logici sudova. Svaki modalni sistem koji sadrži sistem **K** naziva se **normalna modalna logika**. Sada želimo definirati pojam istinitosti formule. U tu svrhu prvo definiramo pojmove Kripkeovog okvira i modela.

Definicija 1.39. Kripkeov okvir *je svaki uređeni par* (W, R) *gdje je* W *proizvoljan neprazan skup, a* $R \subseteq W \times W$ *je proizvoljna binarna relacija na skupu* W*. Elemente skupa* W *obično nazivamo* **svjetovi***, a relaciju* R *nazivamo* **relacija dostiživosti***.*

Kripkeov model *je svaka uređena trojka* $(W, R, \Vdash)$ *gdje je* (W, R) *Kripkeov okvir, a* $\Vdash$ *je binarna relacija između svjetova i formula tako da za svaki svijet* $w \in W$ *i sve formule* A *i* B *vrijedi:*

$w \nVdash \bot$;

$w \Vdash \neg A$ *ako i samo ako* $w \nVdash A$;

$w \Vdash A \wedge B$ *ako i samo ako* $w \Vdash A$ *i* $w \Vdash B$;

$w \Vdash A \vee B$ *ako i samo ako* $w \Vdash A$ *ili* $w \Vdash B$;

$w \Vdash A \to B$ *ako i samo ako* $w \nVdash A$ *ili* $w \Vdash B$;

$w \Vdash A \leftrightarrow B$ *ako i samo ako* $w \Vdash A$ *je ekvivalentno s* $w \Vdash B$;

$w \Vdash \Box A$ *ako i samo ako* $(\forall v \in W)(wRv \Rightarrow v \Vdash A)$.

Relacija $\Vdash$ *se naziva* **relacija forsiranja***.*

Lako je vidjeti da za svaki Kripekov model $(W, R \Vdash)$, svaki svijet $w \in W$ i svaku formulu A vrijedi:

$$w \Vdash \Diamond A \text{ ako i samo ako } (\exists v \in W)(wRv \ \& \ v \Vdash A)$$

Definicija 1.40. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ Kripkeov model, te $w \in W$. Ako vrijedi $w \Vdash A$ tada kažemo da je* **formula A istinita na svijetu** *w.*

Ako je A formula i $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ Kripkeov model tako da za svaki $w \in W$ vrijedi $w \Vdash A$ tada kažemo da je **formula A istinita na modelu $\mathfrak{M}$**, *te to označavamo s $\mathfrak{M} \Vdash A$.*

Ako je A formula i $\mathfrak{F} = (W, R)$ Kripkeov okvir tako da za svaku relaciju forsiranja $\Vdash$ vrijedi da je formula A istinita na modelu $(W, R, \Vdash)$ tada kažemo da je **formula A valjana na okviru $\mathfrak{F}$**, *te to označavamo sa $\mathfrak{F} \Vdash A$.*

Za neku modalnu formulu kažemo da je **valjana formula** *ako je valjana na svakom Kripkeovom okviru.*

Teorem 1.41 (Teorem adekvatnosti za sistem **K**).
Ako $\vdash_K A$ tada je A valjana formula.

Prethodni teorem je lako dokazati indukcijom po duljini dokaza formule A.

Sada nam je cilj dokazati obrat prethodnog teorema, tj. dokazati teorem potpunosti za sistem **K**. Željeli bi primijeniti slično zaključivanje kao kod dokaza teorema potpunosti za logiku sudova: svojstva konzistentnih skupova, Lindenbaumova lema i lema o istinitosti, te kao jednostavnu posljedicu dobiti teorem potpunosti. Važan alat prilikom dokaza navedenih tvrdnji je teorem dedukcije. U sljedećoj napomeni želimo istaknuti probleme u vezi toga.

Napomena 1.42. *Neka je S skup formula i F neka formula. U ovoj napomeni (i samo ovdje!) definirajmo da je formula F izvediva iz skupa S u sistemu* **K** *na sasvim isti način kako u logici sudova, tj. zahtjevamo da postoji konačan niz formula $F_1, \ldots, F_n$ tako da vrijedi:*

a) $F_n \equiv F$;

b) za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi barem jedno od:

- *b_1) formula F_i je aksiom sistema K;*
- *b_2) formula F_i je element skupa S;*
- *b_3) formula F_i je nastala primjenom pravila izvoda modus ponens ili generalizacije iz nekih formula F_j i F_k, pri čemu vrijedi $j, k < i$.*

Ako je formula F izvediva iz skupa S u sistemu **K** *tada to označavamo s $S \vdash_K F$. No, uz ovakvu "standardnu" definiciju izvoda u sistemu* **K** *ne vrijedi teorem dedukcije, jer očito tada vrijedi $\{P\} \vdash_K \Box P$, ali pošto $P \to \Box P$ nije valjana formula tada iz teorema adekvatnosti slijedi $\nvdash_K P \to \Box P$.*

Pošto nam je teorem dedukcije iznimno važan dajemo nešto izmjenjenu definiciju izvoda.

Definicija 1.43. *Neka je S skup formula i F neka formula. Kažemo da je* **formula** F **izvediva iz skupa** S **u sistemu K** *ako vrijedi* $\vdash_K F$ *ili postoje formule* $A_1, \ldots, A_n \in S$ *tako da* $\vdash_K (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to F$*. Ako je formula F izvediva iz skupa S u sistemu* **K** *tada to označavamo sa* $S \vdash_K F$*.*

Teorem 1.44 (Teorem dedukcije za sistem **K**)**.**
Ako $S \cup \{A\} \vdash_K B$ *tada* $S \vdash_K A \to B$*.*

Teorem je jednostavno dokazati razmatranjem sljedeća dva slučaja: $\vdash_K B$ ili postoje $A_1, \ldots, A_n \in S \cup \{A\}$ tako da $\vdash_K (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$.

Definicija 1.45. *Za skup formula S kažemo da je* **konzistentan** *ako vrijedi* $S \nvdash_K \perp$*. Inače kažemo da je skup S inkonzistentan.*

Lema 1.46 (Svojstva konzistentnih skupova u sistemu **K**)**.**
Vrijede sljedeće tvrdnje:

a) Svaki podskup konzistentnog skupa je konzistentan. Svaki nadskup inkonzistentnog skupa je inkonzistentan;

b) Skup S je konzistentan ako i samo ako ne postoji formula F tako da vrijedi $S \vdash_K F$ *i* $S \vdash_K \neg F$*;*

c) Skup S je konzistentan ako i samo ako svaki konačan podskup skupa S je konzistentan;

d) Skup S je konzistentan ako i samo ako postoji formula F tako da vrijedi $S \nvdash_K F$*;*

e) Ako $S \nvdash_K F$ *tada je skup* $S \cup \{\neg F\}$ *konzistentan;*

f) Ako $S \nvdash_K \neg F$ *tada je skup* $S \cup \{F\}$ *konzistentan;*

g) Ako $S \vdash_K F$ *i skup S je konzistentan tada je i skup* $S \cup \{F\}$ *konzistentan.*

Sve tvrdnje prethodne leme dokazuju se sasvim na analogni način kao u logici sudova. (U dokazu se koristi teorem dedukcije.)

Definicija 1.47. *Za skup formula S kažemo da je* **maksimalno konzistentan u sistemu K** *ako je konzistentan i svaki njegov pravi nadskup je inkonzistentan.*

Ako je $(W, R, \Vdash)$ Kripkeov model i $w \in W$ tada je skup $\{F : w \Vdash F\}$ maksimalno konzistentan.

Lema 1.48. *Neka je S neki maksimalno konzistentan skup. Tada za sve formule A i B vrijedi:*

a) *Ako* $A, A \to B \in S$ *tada* $B \in S$;

b) $A \in S$ *ili* $\neg A \in S$;

c) *Ako* $\vdash_K A$ *tada* $A \in S$;

d) $\neg A \in S$ *ako i samo ako* $A \notin S$;

e) $A \wedge B \in S$ *ako i samo ako* $A \in S$ *i* $B \in S$;

f) $A \vee B \in S$ *ako i samo ako* $A \in S$ *ili* $B \in S$.

Dokaz sljedeće leme je sasvim analogan kao u logici sudova.

Lema 1.49 (Lindenbaumova lema za sistem **K**)**.**
Za svaki konzistentan skup postoji maksimalno konzistentan nadskup.

Definicija 1.50. *Za Kripkeov model* $(W, R, \Vdash)$ *kažemo da je* **kanonski model** *ako vrijedi:*

a) W *je skup svih maksimalno konzistentnih skupova;*

b) wRu *ako i samo ako za svaku formulu* F *činjenica* $F \in u$ *povlači* $\Diamond F \in w$;

c) $w \Vdash P$ *ako i samo ako* $P \in w$, *za svaku propozicionalnu varijablu* P.

Lema 1.51. *Neka je* $(W, R, \Vdash)$ *kanonski model. Tada za sve* $w, u \in W$ *vrijedi:*

$$wRu \quad \text{ako i samo ako za sve formule} \quad F \quad \text{činjenica} \quad \Box F \in w \quad \text{povlači} \quad F \in u.$$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi wRu, te neka je F formula tako da imamo $F \notin u$. Iz leme 1.48 slijedi $\neg F \in u$. Sada wRu, $\neg F \in u$ i definicija relacije R u kanonskom modelu povlače $\Diamond\neg F \in w$. Pošto je w konzistentan skup tada $\neg\Diamond\neg F \notin w$, tj. $\Box F \notin w$.

Dokažimo sada obrat. Neka su w i u maksimalno konzistentni skupovi za koje ne vrijedi wRu. Iz definicije relacije dostiživosti u kanonskom modelu tada slijedi da postoji formula F tako da vrijedi $F \in u$ i $\Diamond F \notin w$. Sada $\Diamond F \notin w$ i lema 1.48 povlače $\neg\Diamond F \in w$.

Lako je vidjeti da vrijedi $\vdash_K \neg\Diamond F \to \Box\neg F$. Iz leme 1.48 tada slijedi $\neg\Diamond F \to \Box\neg F \in w$. Sada ovo posljednje i prije dokazana činjenica $\neg\Diamond F \in u$, te lema 1.48, povlače $\Box\neg F \in w$.

Pošto imamo $F \in u$ tada očito $\neg F \notin u$.

Rezimirajmo: pretpostavka da ne vrijedi wRu povlači da postoji formula F tako da vrijedi $\Box\neg F \in w$ i $\neg F \notin u$. Q.E.D.

Lema 1.52 (Lema o egzistenciji za sistem **K**).
Neka je $(W, R, \Vdash)$ *kanonski model, te* $w \in W$ *proizvoljan svijet. Ako je* F *formula tako da* $\Diamond F \in w$ *tada postoji svijet* $u \in W$ *tako da* wRu *i* $F \in u$.

Dokaz. Definiramo $v^- = \{F\} \cup \{G : \Box G \in w\}$. Pretpostavimo da je skup v^- inkonzistentan. Tada za svaku formulu A vrijedi $v^- \vdash_K A$, a onda posebno $v^- \vdash_K \neg F$. Iz definicije izvoda slijedi da su moguća sljedeća dva slučaja: $\vdash_K \neg F$ ili postoje $G_1, \ldots, G_n \in v^-$ tako da vrijedi $\vdash_K (G_1 \wedge \ldots \wedge G_n) \to \neg F$.

Ako $\vdash_K \neg F$ tada očito $\vdash_K \Box\neg F$, a onda lema 1.48 povlači $\Box\neg F \in w$. No, iz $\Diamond F \in w$ slijedi $\neg\Box\neg F \in w$, pa je skup w inkonzistentan što je suprotno pretpostavci.

Promotrimo sada slučaj kada postoje $G_1, \ldots, G_n \in v^-$ tako da vrijedi $\vdash_K (G_1 \wedge \ldots \wedge G_n) \to \neg F$. Primjenom pravila generalizacije i aksioma distributivnosti slijedi da vrijedi $\vdash_K (\Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_n) \to \Box\neg F$. Iz $G_1, \ldots, G_n \in v^-$ i definicije skupa v^- slijedi $\Box G_1, \ldots, \Box G_n \in w$. Iz leme 1.48 slijedi $\Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_n \in w$. Sada $\vdash_K (\Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_n) \to \Box\neg F$, $\Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_n \in w$ i lema 1.48 povlače $\Box\neg F \in w$. Pošto je po pretpostavci $\Diamond F \in w$ tada dobivamo da je skup w inkonzistentan, što je nemoguće.

Time smo dokazali da je skup formula v^- konzistentan. Iz Lindenbaumove leme slijedi da postoji maksimalno konzistentan skup $u \in W$ tako da vrijedi $v^- \subseteq u$. Pošto $F \in v^-$ tada $F \in u$.

Iz definicije skupa v^- slijedi da za svaku formulu G za koju je $\Box G \in w$ imamo $G \in v^- \subseteq u$. Iz leme 1.51 slijedi wRu. Q.E.D.

Lema 1.53 (Lema o istinitosti za sistem **K**).
Neka je $(W, R, \Vdash)$ *kanonski model. Tada za svaki svijet* $w \in W$ *i svaku formulu* F *vrijedi:*

$$w \Vdash F \quad \textit{ako i samo ako} \quad F \in w.$$

Dokaz. Tvrdnju leme dokazujemo indukcijom po složenosti formule F. Za ilustraciju promatramo samo u koraku indukcije slučaj $F \equiv \Diamond G$. Primijetimo prvo da vrijedi sljedeće:

$$w \Vdash \Diamond G \;\Leftrightarrow\; \exists u(wRu \;\&\; u \Vdash G) \;\Leftrightarrow\; \text{(pret. ind.)} \;\; \exists u(wRu \;\&\; G \in u)$$

Iz wRu i $G \in u$, te definicije relacije dostiživosti u kanonskom modelu, slijedi $\Diamond G \in w$.

Obrat slijedi direktno iz leme o egzistenciji. Q.E.D.

Teorem 1.54 (Teorem potpunosti za sistem **K**).
Ako je F *valjana formula tada* $\vdash_K F$.

Dokaz. Pretpostavimo $\nvdash_K F$. Iz leme 1.46 tada slijedi da je skup $\{\neg F\}$ konzistentan. Iz Lindenbaumove leme slijedi da postoji maksimalno konzistentan skup w tako da vrijedi $\neg F \in w$. Iz leme o istinitosti slijedi $w \nVdash F$, pa F nije valjana formula. Q.E.D.

1.4 Nepotpunost

U ovoj točki prvo ćemo navesti neke modalne sisteme koji su nepotpuni u odnosu na Kripkeovu semantiku. Zatim, ćemo opisati četiri vrste alternativnih semantika za modalne logike.

Kao prvi primjer nepotpune modalne logike navodimo modalni sistem **GH** iz Boolosove knjige [4]. U osnovnom modalnom jeziku definiramo formulu:

$$H \equiv \Box(A \leftrightarrow \Box A) \to \Box A.$$

Formula H se naziva Henkinov aksiom. Neka je **GH**=**K**+H. Lako je pokazati da za sve Kripkeove okvire $\mathcal{F}$ vrijedi:

$$\mathcal{F} \Vdash H \quad \text{ako i samo ako} \quad \text{okvir} \quad \mathcal{F} \quad \text{je tranzitivan i inverzno dobro fundiran.}$$

Tada kažemo da je klasa svih tranzitivnih inverzno dobro fundiranih okvira karakteristična klasa okvira za sistem **GH**. (Za okvir $\mathcal{F} = (W, R)$ kažemo da je inverzno dobro fundiran ako ne postoji niz svjetova (x_n) tako da vrijedi $x_0 R x_1 R x_2 \ldots$)

Teorem 1.55. *Sistem* **GH** *je nepotpun sistem u odnosu na Kripkeovu modalnu semantiku, tj. točnije: formula* $\Box p \to \Box\Box p$ *je valjana na svakom karakterističnom okviru za sistem* **GH**, *ali* **GH**$\nVdash \Box p \to \Box\Box p$.

J. van Benthem je u jednom članku iz 1978. dokazao nepotpunost modalnih sistema L_1 i L_2. Ovdje navodimo aksiome tih sistema.

$$\begin{array}{ll} L_1 \ldots & \Box p \to p \\ & \Box(\Box p \to \Box q) \vee \Box(\Box q \to \Box p) \\ & (\Diamond p \wedge \Box(p \to \Box p)) \to p \\ & \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} L_2 & \Box p \to p \\ & \Box(\Box(p \to \Box p) \to \Box\Box\Box p) \to p \end{array}$$

Kasnije ćemo definirati polimodalnu logiku dokazivosti **GLP**, te ćemo dokazati da je taj modalni sistem nepotpun u odnosu na Kripkeovu semantiku.

Sada navodimo četiri vrste alternativnih semanitka za modalne logike: opće okvire, topološku semantiku, okolinsku semantiku i algebarsku semantiku.

Opći okviri

Na nivou Kripkeovih modela osnovni je pojam istinitost. To je relativno jednostavan pojam koji uključuje pojam Kripkeovog okvira i jednu jedinu relaciju forsiranja. Na nivou Kripkeovih okvira fundamentalni je pojam valjanost. Taj pojam uključuje okvir i sve relacije forsiranja na njemu. Sada ćemo promatrati prirodan međunivo: okvir s nekom kolekcijom relacija forsiranja. No, ne s bilo kojom kolekcijom relacija forsiranja, već s kolekcijama relacija forsiranja koje su zatvorene na skupovne operacije koje pripadaju logičkim veznicima i modalnim operatorima (govorit ćemo o skupu dopustivih valuacija). Očito, negaciji je pridružena skupovna operacija razlike skupova, disjunkciji pripada operacija unije, te je konjunkciji pridružena skupovna operacija presjeka. Objasnimo u kojem smislu su navedene skupovne operacije pridružene logičkim veznicima. Tu mislimo na sljedeće: ako je $(W, R, \Vdash)$ proizvoljan Kripkeov model, te za proizvoljnu formulu φ označimo $V(\varphi) = \{w \in W : w \Vdash \varphi\}$, tada za sve formule φ i ψ vrijedi:

$$V(\neg\varphi) = W \setminus V(\varphi);$$

$$V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi);$$

$$V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi).$$

Koje skupovne operacije pripadaju modalnim operatorima $\Diamond$ i $\Box$? Označimo te operacije s $m_\Diamond$ i $m_\Box$. Želimo da za svaki Kripkeov model $(W, R, \Vdash)$ i proizvoljnu formulu φ vrijedi:

$$V(\Diamond\varphi) = m_\Diamond(V(\varphi)) \qquad \text{i} \qquad V(\Box\varphi) = m_\Box(V(\varphi)).$$

Lako je vidjeti da je tada $m_\Diamond : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ funkcija koja je definirana sa:

$$m_\Diamond(X) = \{w \in W \ : \ \exists x \in X \ \text{ takav da } \ wRx\}$$

te je $m_\Box : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ funkcija definirana sa:

$$m_\Box(X) = \{w \in W \ : \ \forall x \in W(wRx \Rightarrow x \in X)\}$$

Definicija 1.56. Opći okvir *je par* $(\mathfrak{F}, A)$, *gdje je* $\mathfrak{F}$ *Kripkeov okvir, a* A *je neprazan skup podskupova od* W *koji je zatvoren za sljedeće operacije:*

a) uniju: ako su $X, Y \in A$ *tada je i* $X \cup Y \in A$;

b) komplement: ako je $X \in A$ *tada je* $W \setminus X \in A$;

c) operaciju $m_\Diamond$: *ako je* $X \in A$ *tada* $m_\Diamond(X) \in A$.

Primjer 1.57. *a) Ako je* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *Kripkeov okvir tada je lako provjeriti da su* $(\mathfrak{F}, \emptyset)$ *i* $(\mathfrak{F}, \mathcal{P}(W))$ *opći okviri.*

b) Neka je $\mathfrak{F} = (\mathbb{N}, <)$ Kripkeov okvir. Neka je, zatim A skup svih konačnih i kofinitnih podskupova od $\mathbb{N}$. Tada je $(\mathfrak{F}, A)$ opći okvir.

Svaki Kripkeov okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ možemo promatrati kao opći okvir smatrajući da je $A = \mathcal{P}(W)$.

Definicija 1.58. *Model baziran na općem okviru $(\mathfrak{F}, A)$ je uređena trojka $(\mathfrak{F}, A, \Vdash)$, gdje je $\Vdash$ relacija forsiranja takva da za sve propozicionalne varijable p vrijedi $V(p) \in A$. Relacije forsiranja s navedenim svojstvom nazivamo* **dopustive relacije forsiranja** *za dani opći okvir.*

Propozicija 1.59. *Neka je $(W, R, A, \Vdash)$ model definiran na općem okviru. Tada za sve formule φ vrijedi $V(\varphi) \in A$.*

Propozicija 1.60. *Neka je $(\mathfrak{F}, \Vdash)$ Kripkeov model. Definiramo $A = \{V(\varphi) \ : \ \varphi$ je formula$\}$. Tada je $(\mathcal{F}, A)$ opći okvir.*

Napomena 1.61. *Ako je $(\mathfrak{F}, A)$ opći okvir tada općenito ne mora postojati relacija forsiranja $\Vdash$ tako da vrijedi $A = \{V(\varphi) \ : \ \varphi$ je formula$\}$.*

U tu svrhu promotrimo sljedeći primjer. Neka je dan opći okvir $(\mathbb{N}, <, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pošto je skup $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ neprebrojiv, a skup svih modalnih formula prebrojiv (bili smo pretpostavili da je skup propozicionalnih varijabli prebrojiv), tada niti za jednu relaciju forsiranja $\Vdash$ ne može vrijediti $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{V(\varphi) \ : \ \varphi$ je formula$\}$.

Definicija 1.62. *Kažemo da je formula φ* **valjana na svijetu** *W općeg okvira $(\mathfrak{F}, A)$ ako je φ istinita na w za svaku dopustivu relaciju forsiranja $\Vdash$. Oznaka: $(\mathfrak{F}, A), w \Vdash \varphi$.*

Kažemo da je formula φ **valjana na općem okviru** *$(\mathfrak{F}, A)$ ako je φ valjana na svakom svijetu $w \in W$. Oznaka: $(\mathfrak{F}, A) \Vdash \varphi$.*

Kažemo da je formula φ **g–valjana** *ako je φ valjana na svakom općem okviru $(\mathfrak{F}, A)$. Oznaka: $\Vdash_g \varphi$.*

Propozicija 1.63. *Neka je $\mathfrak{F}$ Kripkeov okvir, te φ neka formula za koju vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$. Tada za sve opće okvire $(\mathfrak{F}, A)$ vrijedi $(\mathfrak{F}, A) \Vdash \varphi$.*

Korolar 1.64. *Ako je φ valjana formula tada je φ g–valjana formula.*

Napomena 1.65. *Obrat prethodne propozicije* 1.63 *ne vrijedi, tj. valjanost formule na nekom općem okviru ne povlači valjanost na pripadnom Kripkeovom okviru. Jedan protuprimjer je McKinseyeva formula $\varphi \equiv \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$. Neka je $\mathfrak{F} = (\mathbb{N}, <)$, te neka je A skup svih konačnih i kofinitnih podskupova od $\mathbb{N}$. Bilo smo već istaknuli da je tada $(\mathfrak{F}, A)$ opći okvir. Lako je provjeriti da vrijedi $(\mathfrak{F}, A) \Vdash \varphi$. Dokažimo sada da ne vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$. U tu svrhu definiramo $V(p) = \{0, 2, 4, \ldots\}$. Tada očito za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \Vdash \Diamond p$, a onda i $n \Vdash \Box\Diamond p$. No, očito i $0 \nVdash \Diamond\Box p$. To znači $0 \nVdash \varphi$.*

Teorem 1.66. *Ako je formula je g–valjana tada je i valjana.*

Sada želimo navesti rezultate o općim okvirima vezane uz potpunost. U tu svrhu prvo definiramo neke pojmove.

Definicija 1.67. *Za normalnu modalnu logiku* Λ *definiramo* W^{Λ} *kao skup svih maksimalno* Λ*–konzistentnih skupova formula, te za* $w, u \in W^{\Lambda}$ *definiramo:*

$$\begin{array}{ll} wR^{\Lambda}u & \textit{ako i samo ako} \\ & \textit{za sve formule } \varphi \textit{ vrijedi da } \Box\varphi \in u \textit{ povlači } \varphi \in w \end{array}$$

Okvir $(W^{\Lambda}, R^{\Lambda})$ *nazivamo* **kanonski Kripkeov okvir** *za logiku* Λ*, te ga označavamo s* $\mathcal{F}_{\Lambda}$*.*

Postoje normalne modalne logike koje nisu potpune u odnosu na svoj kanonski okvir (takve su npr. **GL**, te **K**+McKinseyev aksiom). Ta činjenica je bitna razlika Kripkeovih okvira i općih okvira. Sada dajemo definiciju kanonskog općeg okvira za proizvoljnu normalnu modalnu logiku.

Za svaku formulu ψ označimo: $\hat{\psi} = \{w \in W^{\Lambda} : \psi \in w\}$. Zatim neka je $A^{\Lambda} = \{\hat{\psi} : \psi \text{ je formula}\}$.

Lema 1.68. *Za svaku normalnu modalnu logiku* Λ *vrijedi da je* $f^{c}_{\Lambda} = (W^{\Lambda}, R^{\Lambda}, A^{\Lambda})$ *opći okvir. Nazivamo ga* **kanonski opći okvir** *za logiku* Λ*. Za svaku normalnu modalnu logiku* Λ *vrijedi* $f^{c}_{\Lambda} \Vdash \Lambda$*.*

Teorem 1.69. *Svaka normalna modalna logika je jako potpuna u odnosu na svoj kanonski opći okvir.*

Teorem 1.70. *Svaka normalna modalna logika* Λ *je adekvatna i jako potpuna u odnosu na klasu svih* Λ*-općih okvira.*

Sve detalje o općim okvirima, kao i ovdje ispuštene dokaze možete pronaći u knjizi [2].

Topološka semantika

Sada ćemo definirati drugu vrstu alternativne semantike za modalnu logiku.

Definicija 1.71. Topološki model *je uređena trojka* $M = (X, \tau, V)$*, gdje je* (X, τ) *topološki prostor, a* $V : \{P_0, P_1, \ldots, \} \to \mathcal{P}(X)$ *funkcija koju nazivamo valuacija. Istinitost modalne formule* φ *u nekoj točki* $x \in X$ *topološkog modela* $M = (X, \tau, V)$*, u oznaci* $M, x \Vdash \varphi$*, definiramo na sljedeći način:*

$$
\begin{array}{rll}
M, x \Vdash p & \textit{ako i samo ako} & x \in V(p), \quad \textit{za svaku propozicionalnu varijablu } p; \\
M, x \nVdash \bot; & & \\
M, x \Vdash \neg\varphi & \textit{ako i samo ako} & M, x \nVdash \varphi; \\
M, x \Vdash \varphi \vee \psi & \textit{ako i samo ako} & M, x \Vdash \varphi \;\; \textit{ili} \;\; M, x \Vdash \psi; \\
M, x \Vdash \Box\varphi & \textit{ako i samo ako} & (\exists O \in \tau)(x \in O \wedge (\forall y \in O) M, y \Vdash \varphi).
\end{array}
$$

Sa **S**4 označavamo proširenje modalnog sistema **K** s aksiomima $\Box p \to p$ i $\Box p \to \Box\Box p$.

Teorem 1.72. *Modalna logika* **S***4 je adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih topoloških modela.*

O topološkim modelima modalne logike više će se govoriti prilikom razmatranja polimodalne logike dokazivosti **GLP**. Puno detalja o topoškoj semantici možete naći u [1].

Okolinska semantika

Definicija 1.73. **Okolinski okvir** *je uređeni par (W, R) gdje je W neprazan skup, a $R \subseteq W \times \mathcal{P}(W)$. Za svaki $w \in W$ označavamo sa N_w skup $\{V \subseteq W : wRV\}$, te ga nazivamo okolinom svijeta w.* **Okolinski model** *je uređena trojka $(W, R, \Vdash)$, gdje je (W, R) okolinski okvir, a $\Vdash$ je relacija forsiranja koja komutira s bulovskim veznicima, te vrijedi*

$$w \Vdash \Box\varphi \;\; \textit{ako i samo ako} \;\; \{v \in W : v \Vdash \varphi\} \in N_w.$$

Ako je $(W, R, \Vdash)$ okolinski model, tada za svaki $w \in W$ vrijedi:

$$w \Vdash \Diamond\varphi \;\; \text{ako i samo ako} \;\; \{v \in W : v \nVdash \varphi\} \notin N_w.$$

Napomena 1.74. *Okolinska semantika je generalizacija relacijske semantike, tj. svakom Kripkeovom modelu možemo na prirodan način pridružiti okolinski model.*

Neka je $(W, R, \Vdash)$ Kripkeov model. Definiramo relaciju $R' \subseteq W \times \mathcal{P}(W)$ ovako: $wR'V$ ako i samo ako $V = \{v \in W : vRw\}$. Uočimo da je tada $N_w = \{V\}$. Lako je vidjeti da su zadani Kripkeov model i novi okolinski ekvivalentni, tj. da za svaki svijet $w \in W$ i svaku formulu φ vrijedi:

$$(W, R, \Vdash), w \Vdash \varphi \;\; \textit{ako i samo ako} \;\; (W, R', \Vdash), w \Vdash \varphi.$$

Obrat ne vrijedi, tj. za svaki okolinski model ne postoji Kripkeov model koji mu je ekvivalentan.

Napomena 1.75. *Svakom topoškom modelu prirodno se pridružuje okolinski model na sljedeći način:*

$$V \in N_w \quad \textit{ako i samo ako} \quad w \in U \subseteq V, \quad \textit{gdje je} \quad U \quad \textit{otvoreni skup.}$$

Okolinsku semantiku su definirali nezavisno Montague 1968. i Scott 1970. godine. Glavni razlog definicije nove semantike je bilo to što je relacijska semantika prejaka za neke primjene. Primjerice, formula $\Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$ je valjana u relacijskoj semantici. No, to nije dobro prilikom razmatranja u teoriji igara. Zatim, formula $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ je valjana u relacijskoj semantici, a to nije dobro za logike znanja. U okolinskoj semantici pravilo izvoda nužnosti ne čuva valjanost.

O okolinskoj semantici možete više čitati u knjizi [3], te u člancima: E. Pacuit, *Neighborhood semantics for Modal Logic*, An Introduction, ESSLLI 2007. i V. Shehtman, *On Strong Neighborhood Completeness of Modal and Intermediate Propositional Logics* (Part I), in: M. Kracht, M. de Rijke, H. Wansing, M. Zakharyaschev, Advances in Modal Logic, vol 1, 1996.

Alegebarska semantika

Kao uvod u algebarsku semanitku modalnih logika prvo ćemo reći nešto o algebarskoj semantici logike sudova.

Definicija 1.76. *Neka je B neprazan skup, $+$ binarna, a $-$ unarna operacija na skupu B, te $0 \in B$. Uvedimo još oznake: $1 = -0$ i $a \cdot b = -((-a) + (-b))$.* **Booleova algebra** *je uređena četvorka $(B, +, -, 0)$ koja ima sljedeća svojstva:*

$$\begin{array}{ll}
x + y = y + x & x \cdot y = y \cdot x \\
(x + y) + z = x + (y + z) & (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\
x + 0 = x & x \cdot 1 = x \\
x + (-x) = 0 & x \cdot (-x) = 0 \\
x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) & x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)
\end{array}$$

Ako je A neki skup tada je $(\mathcal{P}(A), \cup, ^c, \emptyset)$ jedna Booleova algebra. Booloeve algebre čiji nosač je podskup nekog partitivnog skupa nazivaju se skupovne algebre. Stoneov teorem reprezentacije tvrdi da je svaka Booleova algebra izomorfna nekoj skupovnoj algebri.

Označimo sa $\mathfrak{B}$ klasu svih Booleovih algebri. Ako je $B \in \mathfrak{B}$ tada svaku funkciju $\theta : \{P_0, P_1, \ldots\} \to B$ nazivamo valuacija. Svaka valuacija se može na jedinstven način proširiti na skup svih formula logike sudova, pri čemu za sve formule φ i ψ vrijedi:

$$\theta(\bot) = 0$$

$$\theta(\neg\varphi) = -\theta(\varphi)$$

$$\theta(\varphi \vee \psi) = \theta(\varphi) + \theta(\psi)$$

Ako su φ i ψ formule tada kažemo da su one jednake u Booleovoj algebri B ako za svaku valuaciju θ vrijedi $\theta(\varphi) = \theta(\psi)$. Oznaka: $B \models \varphi \sim \psi$.

Teorem 1.77 (Teorem potpunosti za logiku sudova u odnosu na Booleove algebre)**.** *Za svaku formulu φ logike sudova vrijedi:*

$$\vdash_{RS} \varphi \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad B \models \varphi \sim \top, \quad \textit{za svaku} \ \ B \in \mathfrak{B}.$$

Za logiku prvog reda promatraju se tzv. Lindenbaumove lagebre. Njima se ovdje nećemo baviti. Reći ćemo još nešto o algebrama za modalne logike.

Definicija 1.78. Booleova algebra s operatorom *(kratko: BAO) je uređena petorka $(B, +, -, 0, f)$ gdje je $(B, +, -, 0)$ Booleova algebra, a $f : B \to B$ je proizvoljna funkcija koja ima sljedeća dva svojstva:*

$$f(0) = 0 \qquad i \qquad f(a + b) = f(a) + f(b).$$

Definicija 1.79. *Neka je $(B, +, -, 0, f)$ neka BAO. Svaka valuacija $\theta : \{P_0, \ldots\} \to B$ na jedinstveni se način proširuje na skup svih modalnih formula osnovnog modalnog jezika, pri čemu su ispunjeni uvjeti kao i u logici sudova, te za svaku formulu φ vrijedi $\theta(\Diamond\varphi) = f(\theta(\varphi))$.*

Neka je B neka BAO, te φ i ψ modalne formule (osnovnog modalnog jezika). Kažemo da su formule φ i ψ jednake u BAO B ako za svaku valuaciju θ vrijedi $\theta(\varphi) = \theta(\psi)$. Oznaka: $B \models \varphi \sim \psi$.

Kako bi mogli izreći teorem potpunosti modalne logike u odnosu na BAO uvodimo još jednu oznaku. Za skup modalnih formula Σ definiramo:

$$V_\Sigma = \{B : \ B \ \text{ je BAO t.d. za svaku formulu } \ \varphi \in \Sigma \ \text{ vrijedi } \ B \models \varphi \sim \top\}.$$

Teorem 1.80 (Teorem potpunosti za modalne logike u odnosu na algebarsku semantiku)**.**
Neka je Σ neki skup modalnih formula. Tada je normalna modalna logika $\mathbf{K}+\Sigma$ adekvatna i potpuna u odnosu na klasu algebri V_Σ, tj. za svaku formulu φ vrijedi:

$$\vdash_{\mathbf{K}+\Sigma} \varphi \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad V_\Sigma \models \varphi \sim \top.$$

Napomena 1.81. *Potpuna kompleksna algebra je proširenje algebre partitivnog skupa s operatorom* $m_\Diamond$. *Oznaka:* $\mathcal{F}^+ = (\mathcal{P}(A), \cup, ^c, \emptyset, m_\Diamond)$. *Kompleksna algebra je proizvoljna podalgebra od* $\mathcal{F}^+$.

Lako je provjeriti da vrijedi $m_\Diamond(\emptyset) = \emptyset$ *i* $m_\Diamond(X \cup Y) = m_\Diamond(X) \cup m_\Diamond(Y)$. *To znači da je svaka kompleksna algebra jedna BAO.*

No, vrijedi i obrat. To je Jónsson, Tarskijev teorem: svaka BAO je izomorfna nekoj kompleksnoj algebri. *Teorija dualnosti sistematski proučava veze modalne logike i algebre. Primjerice, BAO i tzv. deskriptivni opći okviri su isti objekti.*

Više detalje o algebarskoj semantici možete pronaći u knjizi [2].

Poglavlje 2

Logike dokazivosti

U ovom poglavlju navodimo osnovne definicije, te ističemo najvažnije činjenice o logici dokazivosti **GL** (Gödel–Löb). Sistem **GL** je dio svakog sistema logika interpretabilnosti koje ćemo kasnije razmatrati. Ovdje ćemo dokazati potpunost sistema **GL** u odnosu na Kripekovu semantiku tzv. step-by-step metodom. Istu metodu ćemo koristiti prilikom dokaza potpunosti logika interpretabilnosti, ali će tamo biti daleko više tehničkih detalja. U posljednoj točki ovog poglavlja dajemo osnovne informacije o polimodalnoj logici dokazivosti **GLP**.

2.1 Sistem GL

Prije definicije jezika, te nabrajanja aksioma sistema **GL** pokušat ćemo objasniti motivaciju za razmatranja logika dokazivosti. Prilikom proučavanja dokaza Gödelovih teorema nepotpunosti istaknuta su sljedeća svojstva predikata dokazivosti Pr:

a) $Pr(\ulcorner A \to B \urcorner) \to (Pr(\ulcorner A \urcorner) \to Pr(\ulcorner B \urcorner))$

b) $Pr(\ulcorner A \urcorner) \to Pr(\ulcorner Pr(\ulcorner A \urcorner) \urcorner)$

c) ako $\vdash A$ tada $\vdash Pr(\ulcorner A \urcorner)$

To su tzv. Hilbert–Bernaysovi uvjeti izvedivosti. Još je Gödel uočio da bi trebala postojati veza s modalnim logikama jer u normalnim sistemima sljedeće formule su aksiomi: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ i $\Box A \to \Box\Box A$, te je $A/\Box A$ pravilo izvoda. Ključni korak se dogodio Löbovim rješenjem Henkinovog problema.

Sada dajemo prvo definiciju jezika logike dokazivosti **GL**.

Definicija 2.1. *Alfabet logike dokazivosti* **GL** *sadrži sve simbole logike sudova, te jedan unarni modalni operator* $\Box$. *Koristimo i unarni modalni operator* $\Diamond$ *kao pokratu za* $\neg\Box\neg$. *Pojam formule se definira standardno.*

Logika dokazivosti GL *sadrži sljedeće aksiome:*

(A0) sve tautologije logike sudova

(A1) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

(A2) $\Box A \to \Box\Box A$

(A3) $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

Pravila izvoda su modus ponens i nužnost: $A/\Box A$.

Na standardni način se definira pojam dokaza i teorema u sistemu **GL**.

Teorem 2.2 (de Jongh, Kripke, Sambin)**.**
Označimo s $\mathbf{GL}^-$ *podsistem od* **GL** *koji ne sadrži shemu aksioma (A2). Vrijedi* $\mathbf{GL}^- \vdash \Box p \to \Box\Box p$.

Teorem 2.3.
Formula $\Box p \to \Box\Box p$ *je valjana na okviru* (W, R) *ako i samo ako je relacija dostiživosti tranzitivna.*

Definicija 2.4. *Za binarnu relaciju* R *na skupu* W *kažemo da je* **inverzno dobro fundirana** *ako ne postoji niz* $(x_n) \subseteq W$ *takav da vrijedi* $x_1 R x_2 R x_3 \ldots$

Teorem 2.5.
Formula $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ *je valjana na okviru* (W, R) *ako i samo ako relacija* R *je tranzitivna i inverzno dobro fundirana.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je formula $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ valjana na okviru (W, R). Tada su i sve instance sheme $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ valjane na tom okviru. Iz toga lako slijedi (indukcijom po duljini dokaza) da su i svi teoremi sistema $\mathbf{GL}^-$ valjani na okviru (W, R). Iz de Jongh, Kripke, Sambinovog teorema znamo da vrijedi $\mathbf{GL}^- \vdash \Box\, p \to \Box\, \Box\, p$. Iz toga slijedi da je formula $\Box p \to \Box\Box p$ valjana okviru (W, R). Iz teorema 2.3 slijedi da je relacija R tranzitivna.

Pretpostavimo da relacija R nije inverzno dobro fundirana. Tada postoji niz $(x_n) \subseteq W$ takav da vrijedi: $x_1 R x_2 R x_3 \ldots$. Definiramo valuaciju $\Vdash$ na okviru (W, R) ovako:

$$w \Vdash p \text{ ako i samo ako } w \neq x_n, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}$$

Tvrdimo da vrijedi $x_1 \nVdash \Box\, (\Box\, p \to p) \to \Box\, p$. Neka je $x \in W$ proizvoljan za kojeg vrijedi $x_1 R x$ (takav x postoji, jer smo pretpostavili da vrijedi $x_1 R x_2 R x_3 \ldots$) Ako $x \Vdash p$ tada očito $x \Vdash \Box\, p \to p$. Ako $x \nVdash p$ tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $x = x_n$. No, iz $x_n R x_{n+1}$ i $x_{n+1} \nVdash p$ slijedi $x_n \nVdash \Box\, p$. Time imamo $x \Vdash \Box\, p \to p$. Time smo dokazali da vrijedi $x_1 \Vdash \Box\, (\Box p \to p)$. Očito $x_1 \nVdash \Box\, p$ (jer npr. $x_1 R x_2$ i $x_2 \nVdash p$).

Pretpostavimo sada da je okvir (W, R) tranzitivan i inverzno dobro fundiran. Neka je $w \in W$ proizvoljan i $\Vdash$ proizvoljna valuacija. Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash \Box\, (\Box\, p \to p)$. Ako ne postoji $x \in W$ takav da wRx, tada očito $w \Vdash \Box\, p$, pa imamo $w \Vdash \Box\, (\Box\, p \to p) \to \Box\, p$. Promotrimo sada slučaj kada postoji $x \in W$ za kojeg vrijedi wRx. Iz pretpostavke $w \Vdash \Box\, (\Box\, p \to p)$ slijedi $x \Vdash \Box\, p \to p$. Ako za svaki $x \in W$, takav da wRx, vrijedi $x \Vdash p$, tada imamo $w \Vdash \Box\, p$, a onda i $w \Vdash \Box\,(\Box\, p \to p) \to \Box\, p$. Promotrimo sada slučaj kada postoji $x \in W$ takav da wRx i $x \nVdash p$. Tada zbog $x \Vdash \Box\, p \to p$ slijedi $x \nVdash \Box p$. Iz toga slijedi da postoji x_1 takav da $x_1 \nVdash p$. Sada iz $wRxRx_1$ i tranzitivnosti relacije R slijedi wRx_1. Iz pretpostavke $w \Vdash \Box\,(\Box\, p \to p)$ slijedi $x_1 \Vdash \Box\, p \to p$, a onda $x_1 \nVdash \Box\, p$. Analogno dalje. Time dobivamo da relacije R nije inverzno dobro fundirana, što je u suprotnosti s početnom pretpostavkom.

Q.E.D.

Za svaki konačan okvir (W, R) očito vrijedi: relacija R je inverzno dobro fundirana ako i samo ako relacija R je irefleksivna.

Iako je nama u glavnom fokusu potpunost modalnih sistema, sada ćemo reći nešto o aritmetičkoj interpretaciji logike dokazivosti **GL**. Upravo aritmetička interpretacija daje pravo svjetlo na razloge zašto se razmatra logika dokazivosti.

Definicija 2.6. **Aritmetička interpretacija sistema GL** *je svaka funkcija* $*$ *sa skupa svih modalnih formula u skup svih PA–rečenica, tako da vrijedi:*

$$\begin{aligned}
(P)^* &= \textit{proizvoljna aritmetička rečenica, gdje je } P \textit{ propozicionalna varijabla};\\
(\bot)^* &= \forall x(x \neq x);\\
(B \to C)^* &= B^* \to C^*;\\
(\Box A)^* &= Pr(\ulcorner A^* \urcorner).
\end{aligned}$$

Teorem 2.7 (Solovayev prvi teorem)**.**
Za sve modalne formule A vrijedi:

$$\mathbf{GL} \vdash A \quad \textit{ako i samo ako za svaku aritmetičku interpretaciju} \; * \; \textit{vrijedi} \quad PA \vdash A^*.$$

Sve detalje o dokazu Solovayevog teorema možete pronaći u knjigama [3] (članak od Artemova), [4] i [9].

2.2 Potpunost sistema GL

Sada dajemo dokaz teorema potpunosti za sistem **GL** tzv. step–by–step metodom. Osnovna referenca koju koristimo za to je preprint J. Joosten, *Modal Completeness of* **GL** *via the step–by-step method*, Amsterdam, 2003. Ovaj dokaz nam je jako važan za daljnja razmatranja jer sadrži osnovne ideje koje ćemo koristiti prilikom dokaza potpunosti logika interpretabilnosti. Prvo dajemo definiciju izvoda u sistemu **GL**.

Definicija 2.8. *Neka je S skup formula i A neka formula. Kažemo da je formula A* **izvediva iz skupa** S **u sistemu GL**, *te to označavamo sa* $S \vdash_{GL} A$, *ako postoji konačan niz formula* $A_1, \ldots, A_n$ *tako da vrijedi:*

a) $A_n \equiv A$;

b) za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi barem jedno od:

b_1) formula A_i je teorem sistema **GL***;*

b_2) $A_i \in S$;

b_3) formula A_i je nastala primjenom pravila izvoda modus ponens na neke formule A_j i A_k, pri čemu je $j, k < i$.

Istaknimo dvije specifičnosti ove definicije. U uvjetu b$_1$) se dopušta da A_i bude teorem sistema **GL**, a ne samo aksiom. Zatim, u uvjetu b$_3$) se ne dopušta korištenje pravila nužnosti.

Lako je dokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.9 (Teorem dedukcije)**.**
Ako vrijedi $S \cup \{A\} \vdash_{GL} B$ tada $S \vdash_{GL} A \to B$.

Definicija 2.10. *Za skup formula S kažemo da je* **konzistentan** *u sistemu* **GL** *ako vrijedi $S \nvdash_{GL} \perp$. Inače kažemo da je skup S* **inkonzistentan** *u sistemu* **GL***. Za skup formula S kažemo da je* **maksimalno konzistentan** *u sistemu* **GL** *ako je konzistentan i svaki njegov pravi nadskup je inkonzistentan.*

Pošto smo za logiku sudova čak i dokazali neka svojstva konzistentnih skupova, te smo ih za logiku prvog reda i modalni sistem **K** istaknuli, ovdje to nećemo napraviti. No, zbog velike važnosti ističemo Lindenbaumovu lemu za sistem **GL**.

Lema 2.11 (Lindenbaumova lema za **GL**)**.**
Za svaki konzistentan skup S u sistemu **GL** *postoji maksimalno konzistentan skup S' u sistemu* **GL** *tako da vrijedi $S \subseteq S'$.*

Za modalni sistem **K** smo definirali kanonski model, te dokazali lemu egzistencije i lemu o istinitosti. No, kanonski model za **GL** nije inverzno dobro fundiran (dokažite!), pa moramo postupiti malo drugačije.

Definicija 2.12. Označeni okvir *je uređena trojka (W, R, ν) gdje je (W, R) Kripkeov okvir, a ν je funkcija koja svakom svijetu $w \in W$ pridružuje neki maksimalno konzistentan skup $\nu(w)$.*

Primijetimo da u označenom okviru različitim čvorovima mogu biti pridruženi isti maksimalno konzistentni skupovi.

Neka su S_1 i S_2 skupovi formula. Definiramo relaciju $\prec_\Box$ ovako:

$$S_1 \prec_\Box S_2 \text{ ako i samo ako } \Box A \in S_1 \text{ povlači } A, \Box A \in S_2.$$

Definicija 2.13. *Za označeni okvir* (W, R, ν) *kažemo da je* **adekvatan** *ako je relacija* R *tranzitivna, te vrijedi:*

$$\forall x, y(xRy \;\Rightarrow\; \nu(x) \prec_{\Box} \nu(y)).$$

Na svakom označenom okviru prirodno možemo definirati relaciju forsiranja ovako:

$$x \Vdash p \;\text{ ako i samo ako }\; p \in \nu(x).$$

U daljnjim razmatranjima smatramo da je na svakom označenom okviru upravo tako definirana relacija forsiranja.

Za svaku formulu A definiramo formulu $\sim A$ ovako:

$$\sim A = \begin{cases} B, & \text{ako } A \equiv \neg B; \\ \neg A, & \text{inače.} \end{cases}$$

U sljedećim definicijama i lemama smatramo da je skup formula $\mathcal{D}$ zatvoren na potformule i operaciju $\sim$, te je (W, R, ν) adekvatan označeni okvir.

Definicija 2.14. *Kažemo da* **lema o istinitosti vrijedi u okviru** (W, R, ν) *u odnosu na skup formula* $\mathcal{D}$ *ako vrijedi:*

$$(\forall x \in W)(\forall A \in \mathcal{D})(x \Vdash A \;\; \textit{ako i samo ako} \;\; A \in \nu(x)).$$

Definicija 2.15. D–**problem** *u označenom okviru* (W, R, ν) *je uređeni par* $(x, \neg\Box A)$ *koji ima sljedeća tri svojstva:*

a) $x \in W$*;*

b) $\neg\Box A \in \nu(x) \cap \mathcal{D}$*;*

c) $(\forall y \in W)(xRy \Rightarrow \neg A \notin \nu(y))$.

Lema 2.16. *Lema o istinitosti vrijedi u okviru* (W, R, ν) *ako i samo ako ne postoji* $\mathcal{D}$*–problem u okviru* (W, R, ν).

Dokaz. Neka je $(x, \neg\Box A)$ neki $\mathcal{D}$–problem u okviru (W, R, ν). Pretpostavimo da lema o istinitosti vrijedi u okviru (W, R, ν) u odnosu na skup formula $\mathcal{D}$. Tada iz $\neg\Box A \in \nu(x)$ i $\neg\Box A \in \mathcal{D}$, te pretpostavke da lema o istinitosti vrijedi u okviru, slijedi $x \Vdash \neg\Box A$, tj. $x \nVdash \Box A$. Tada postoji $y_0 \in W$ tako da imamo xRy_0 i $y_0 \nVdash A$, tj. $y_0 \Vdash \neg A$. Pošto je skup $\mathcal{D}$ zatvoren na potformule tada $A \in \mathcal{D}$. Sada iz $y_0 \Vdash \neg A$ i $A \in \mathcal{D}$, te činjenice da u okviru vrijedi lema o istinitosti u odnosu na skup $\mathcal{D}$, slijedi $\neg A \in \nu(y_0)$. To je u suprotnosti s pretpostavkom da je $(x, \neg\Box A)$ jedan $\mathcal{D}$–problem.

Pretpostavimo sada da u okviru ne postoji $\mathcal{D}$–problem. Dokazujemo da u okviru vrijedi lema o istinotosti u odnosu na skup $\mathcal{D}$. U tu svrhu dokazujemo indukcijom po složenosti formule $A \in \mathcal{D}$ da za svaki $x \in W$ vrijedi sljedeće:

$$x \Vdash A \text{ ako i samo ako } A \in \nu(x).$$

Za ilustraciju promatramo samo slučaj u koraku indukcije kada $A \equiv \Box B$. Pretpostavimo prvo da vrijedi $x \Vdash \Box B$. Iz pretpostavke indukcije tada imamo $(\forall y \in W)(xRy \Rightarrow B \in \nu(y))$, a onda i $(\forall y)(xRy \Rightarrow \neg B \notin \nu(y))$. Ako bi vrijedilo $\Box B \notin \nu(x)$ tada bi iz maksimalne konzistentnosti skupa $\nu(x)$ slijedilo $\neg\Box B \in \nu(x)$. Time imamo da je $(x, \neg\Box A)$ jedan $\mathcal{D}-$problem, što je suprotno početnoj pretpostavci da okvir ne sadrži $\mathcal{D}-$probleme.

Preostalo je dokazati obrat, tj. da $\Box B \in \nu(x)$ povlači $x \Vdash \Box B$. Pretpostavimo da $\Box B \in \nu(x)$. Pošto je (W, R, ν) adekvatan označeni okvir tada imamo:

$$(\forall y \in W)(xRy \Rightarrow \nu(x) \prec_\Box \nu(y)).$$

Tada iz definicije relacije $\prec_\Box$ imamo:

$$(\forall y \in W)(xRy \Rightarrow B, \Box B \in \nu(y)).$$

Pošto je $\Box B \in \mathcal{D}$, te je skup $\mathcal{D}$ zatvoren na potformule, tada je $B \in \mathcal{D}$. Očito je složenost formule B strogo manja od složenosti formule $\Box B$, pa iz pretpostavke indukcije slijedi da $B \in \nu(y)$ povlači $y \Vdash B$. Time imamo:

$$(\forall y \in W)(xRy \Rightarrow y \Vdash B).$$

Tada $x \Vdash \Box B$. Q.E.D.

Sljedeća lema je analogon leme o egzistenciji za sistem **K**.

Lema 2.17 (Lema o egzistenciji za **GL**).
Neka je S maksimalno konzistentan skup i $\neg\Box A \in S$. Tada postoji maksimalno konzistentan skup S' tako da vrijedi $S \prec_\Box S'$ i $\neg A, \Box A \in S'$.

Skica dokaza. Dovoljno je dokazati da je skup formula $\{B, \Box B : \Box B \in S\} \cup \{\neg A, \Box A\}$ konzistentan jer onda iz Lindenbaumove leme slijedi egzistencija traženog maksimalno konzistentnog skupa S'. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi:

$$\{B, \Box B : \Box B \in S\} \cup \{\neg A, \Box A\} \vdash_{GL} \bot.$$

Iz definicije izvoda u sistemu **GL** tada slijedi da postoje formule $\Box B_1, \ldots, \Box B_n \in S$ tako da vrijedi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} (B \wedge \Box B),\ \neg A,\ \Box A \vdash_{GL} \bot.$$

Primjenom teorema dedukcije i Löbovog aksioma (probajte detaljno izvesti!) dobivamo $\{\Box B_1, \ldots, \Box B_n\} \vdash_{GL} \Box A$. Iz ovog posljednjeg očito slijedi $S \vdash_{GL} \Box A$. No, iz pretpostavke leme znamo $\neg\Box A \in S$, pa slijedi da je skup S inkonzistentan. Q.E.D.

Teorem 2.18 (Teorem potpunosti za **GL**).
Neka je A formula takva da $\nvdash_{GL} A$. Tada postoji konačno stablo (W, R) s korijenom w i model $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ tako da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg A$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{D}$ najmanji skup formula koji sadrži sve potformule formule A, te je zatvoren na operaciju $\sim$. Rekurzivno ćemo definirati konačno stablo s korijenom w tako da vrijedi $w \nVdash A$, te na svakom nivou eliminiramo neki $\mathcal{D}$–problem. Pošto po pretpostavci $\nvdash_{GL} A$ tada je skup $\{\neg A\}$ konzistentan. Iz Lindenbaumove leme slijedi da postoji maksimalno konzistentan skup Γ tako da $\neg A \in \Gamma$.

Neka je F_0 označeni okvir koji sadrži samo jedan svijet w, zatim definiramo $R = \emptyset$ i $\nu(w) = \Gamma$. Očito je F_0 adekvatan okvir i vrijedi $w \nVdash A$.

Pretpostavimo sada da je za neki $n \in \mathbb{N}$ definiran adekvatan označeni okvir $F_n = (W_n, R_n, \nu_n)$ tako da je (W_n, R_n) stablo visine n s korijenom w, te redom vrijedi sljedeće:

a) ako je $y \in W_n$ čija je visina strogo manja od n tada ne postoji formula $B \in \mathcal{D}$ tako da je $(y, \neg\Box B)$ jedan $\mathcal{D}$–problem;
(odnosno, na svim svjetovima čija je visina strogo manja od n ne postoje $\mathcal{D}$–problemi)

b) postoji barem jedan svijet $x \in W_n$ visine n i formula $B \in \mathcal{D}$ tako da je $(x, \neg\Box B)$ jedan $\mathcal{D}$–problem.

(Uočimo da nešto ne valja s modelom $(W_n, R_n, \nu_n, \Vdash)$: svijet x je R–terminalan, ali $x \nVdash \Box B$.)

Sada opisujemo konstrukciju adekvatnog označenog okvira F_{n+1} visine $n + 1$ koji je stablo s korijenom w, te vrijedi $w \nVdash A$. Zatim, u okviru F_{n+1} će vrijediti sljedeće:

a) ne postoji svijet $y \in W_{n+1}$ visine strogo manje od $n + 1$ tako da je $(y, \neg\Box B)$ jedan $\mathcal{D}$–problem, za neku formulu $B \in \mathcal{D}$;

b) ako je $x \in W_{n+1} \setminus W_n$ visine $n + 1$, te je $y \in W_n$ svijet "zbog kojeg je svijet x dodan" (to ćemo točno opisati kasnije) tada je skup svih $\mathcal{D}$–problema određenih svijetom x pravi podskup skupa svih $\mathcal{D}$ određenih svijetom y.
(Kratko možemo reći da dodavanjem novog svijeta nismo povećali skup svih $\mathcal{D}$–problema.)

Za svaki svijet $y \in W_n$ visine n za koji postoji formula $B \in \mathcal{D}$ tako da je $(y, \neg\Box B)$ jedan $\mathcal{D}$–problem, dodat ćemo novi svijet x na način koji ćemo sada opisati. Neka je $y \in W_n$ visine n za koji postoji formula $B \in \mathcal{D}$ tako da je $(y, \neg\Box B)$ jedan $\mathcal{D}$–problem. Neka je x neki objekt tako da $x \notin W_n$. Pošto je $(y, \neg\Box B)$ jedan $\mathcal{D}$–problem, tada po definiciji vrijedi $\neg\Box B \in \nu(y)$. Iz leme o egzistenciji slijedi da postoji maksimalno konzistentan skup Δ tako da vrijedi $\nu(x) \prec_\Box \Delta$ i $\neg B, \Box B \in \Delta$. Definiramo proširenje

ν' funkcije ν stavljajući $\nu'(x) = \Delta$. Označimo redom: $W' = W \cup \{x\}$, R'=tranzitivno zatvorenje relacije $R_n \cup \{(y,x)\}$, te $F' = (W', R', \nu')$.

Lako se vidi da je F' adekvatno označeno konačno stablo s korijenom w. Zatim, iz $\Box B \in \nu'(x)$ očito slijedi $\neg\Box B \notin \nu'(x)$, pa $(x, \neg\Box B)$ nije $\mathcal{D}$–problem u okviru F'. Dodavanjem novog svijeta x eliminirali smo $\mathcal{D}$–problem $(y, \neg\Box B)$ jer vrijedi $yR'x$ i $\neg B \in \nu'(x)$. Dokažimo još da novi svijet nije generirao nove $\mathcal{D}$–probleme, tj. da ne postoji formula $C \in \mathcal{D}$ tako da je $(x, \neg\Box C)$ jedan $\mathcal{D}$–problem u okviru F', a $(y, \neg\Box C)$ nije $\mathcal{D}$–problem u F_n. U tu svrhu pretpostavimo da je $C \in \mathcal{D}$ tako da $(y, \neg\Box C)$ nije $\mathcal{D}$–problem u F_n. Pošto je y jedan R–terminalni svijet u okviru F_n tada nije zadovoljen prvi uvjet iz definicije $\mathcal{D}$–problema, tj. imamo $\neg\Box C \notin \nu(y)$. Iz maksimalne konzistentnosti skupa $\nu(y)$ slijedi $\Box C \in \nu(y)$. Sada $\nu(y) \prec_\Box \nu'(x)$ povlači $\Box C \in \nu'(x)$. To znači da $(x, \neg\Box C)$ nije $\mathcal{D}$–problem u okviru F'.

Upravo opisanu konstrukciju dodavanja novog svijeta napravimo za svaki svijet $y \in W_n$ visine n, te za svaki $\mathcal{D}$–problem oblika $(y, \neg\Box B)$ u okviru F_n. Uočimo da takvih koraka može biti najviše konačno mnogo jer je F_n konačni okvir te $\mathcal{D}$–problema ima konačno. Na taj način dobivamo adekvatni označeni okvir F_{n+1} koji ima strogo manje $\mathcal{D}$–problema nego okvir F_n. Očito ćemo nakon konačno mnogo koraka dobiti adekvatni označeni okvir $F = (W, R, \nu)$ koji ne sadrži više niti jedan $\mathcal{D}$–problem, te je (W, R) konačno stablo s korijenom w.

Iz leme 2.16 slijedi da za okvir F vrijedi lema o istinitosti u odnosu na skup $\mathcal{D}$. Tada posebno $\neg A \in \nu(w)$ povlači $w \Vdash \neg A$. Q.E.D.

2.3 Polimodalna logika dokazivosti – sistem GLP

Sintaksa

Sistem **GLP** uveo je Japaridze 1986.

Alfabet: logika sudova + modalni operatori $[n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Formule: logika sudova + ako je A formula, onda je i $[n]A$ formula.

Pokrata: $\langle n \rangle A \equiv \neg[n]\neg A$.

Aksiomi: tautologije (u novom jeziku!) + sheme aksioma

(K_n) $[n](A \to B) \to ([n]A \to [n]B)$

(L_n) $[n]([n]A \to A) \to [n]A$

$(P1)$ $[n]A \to [m]A$, ako je $n < m$

$(P2)$ $\langle n \rangle A \to [m] \langle n \rangle A$, ako je $n < m$.

Uočimo da prve dvije sheme aksioma sugeriraju da se radi o nizu operatora dokazivosti, dok druge dvije određuju odnos među njima.

Pravila izvoda: modus ponens i $\dfrac{A}{[n]A}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aritmetička interpretacija

Neka je T dovoljno jaka aritmetička teorija (sadrži teoriju $I\Delta_0 + exp$, koja ima indukciju samo za Δ_0 formule, tj. one koje sadrže samo ograničene kvantifikatore, te u kojoj je potenciranje reprezentabilno).

Definicija 2.19. Aritmetička interpretacija *sistema* **GLP** *je svaka funkcija* $*$ *sa skupa svih* **GLP** *formula u skup* PA *rečenica sa svojstvima analognim artimetičkoj interpretaciji sistema* **GL**, *pri čemu je* $[0]$ *interpretiran kao* $\Box$, *tj.* $([0]A)^* \equiv Pr(\ulcorner A^* \urcorner)$, *te*
$([n]A)^* \equiv$ *„A^* je dokaziva u teoriji proširenoj svim istinitim Π_n rečenicama”.*

Podsjetimo se, Π_n formule sadrže n alternacija kvantifikatora, od kojih je prvi $\forall$, kao prefiks Δ_0 potformule (slično se definira Σ_n formula, s tim da je prvi kvantifikator $\exists$).

Napomena 2.20. *Dokazivost u teoriji proširenoj svim istinitim Π_n rečenicama može se formalizirati:*

a) postoji formula $True_n(x)$ takva da vrijedi $\mathbb{N} \models True_n(\bar{k})$ ako i samo ako je k Gödelov broj istinite Π_n rečenice;

b) $([n]A)^* \equiv \exists y(True_n(y) \wedge Pr_T(y \to \ulcorner A^* \urcorner))$, što je Σ_{n+1} rečenica.

Artimetičku adekvatnost i potpunost (za svaku **GLP** formulu A vrijedi $\vdash_{GLP} A$ ako i samo ako $\vdash_T A^*$ za svaku aritmetičku interpretaciju $*$) dokazao je Japaridze.

Kripkeova semantika?

Kripkeov okvir za polimodalnu logiku je relacijska struktura s nosačem $W \neq \emptyset$ i indeksiranom familijom relacija dostiživosti pridruženih modalnim operatorima. Relacija forsiranja definira se za svaki modalni operator analogno kao za $\Box$ u slučaju osnovnog modalnog jezika. Dakle, u slučaju sistema **GLP** okvir bi bio $\mathfrak{F} = (W, (R_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $R_n \subseteq W \times W$, $n \in \mathbb{N}$, a o relaciji forsiranja istaknimo samo da se definira $w \Vdash [n]A$ ako za sve u takve da je wR_nu vrijedi $u \Vdash A$.

Propozicija 2.21. *Vrijedi:*

a) $\mathfrak{F} \Vdash [n]([n]A \to A) \to [n]A$ *ako i samo ako je* R_n *tranzitivna i inverzno dobro fundirana;*

b) $\mathfrak{F} \Vdash [n]A \to [n+1]A$ *ako i samo ako* $R_{n+1} \subseteq R_n$*;*

c) $\mathfrak{F} \Vdash \langle n\rangle A \to [n+1]\langle n\rangle A$ *ako i samo ako* wR_nv *i* $wR_{n+1}u$ *povlači* uR_nv.

Korolar 2.22. *Ako je* $\mathfrak{F} = (W, (R_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *adekvatan za sistem* **GLP** *onda je* $R_n = \emptyset$ *za svaki* $n > 0$.

Dokaz. Pretpostavimo $R_1 \neq \emptyset$, tj. postoje w, u tako da je wR_1u. No, tada iz druge tvrdnje propozicije slijedi wR_0u, a onda iz treće tvrdnje uR_0u, što je nemoguće jer je R_0 inverzno dobro fundirana. Dakle, $R_1 = \emptyset$, pa iz druge tvrdnje propozicije slijedi tvrdnja. Q.E.D.

Dakle, ne postoji netrivijalna Kripkeova semantika za **GLP**. Stoga koristimo topološku semantiku.

Topološka semantika

Razmotrimo najprije topološku semantiku za osnovni modalni jezik. Topološka semantika je poseban slučaj okolinske semantike. Podsjetimo se, okolinski model je $(W, R, \Vdash)$, gdje je $W \neq \emptyset$, $R \subseteq W \times \mathcal{P}(W)$, pri čemu kažemo da je O okolina svijeta w ako vrijedi wRO, te se definira $w \Vdash \Box A$ ako je skup svih svjetova u kojima vrijedi A okolina svijeta w, dok je u ostalim slučajevima relacija forsiranja definirana kao u Kripkeovoj semantici.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Na njemu možemo definirati okolinski model, pri čemu je okolina definirana u topološkom smislu, tj. O je *okolina* točke $x \in X$ ako je $x \in U \subseteq O$ za neki $U \in \mathcal{T}$.

Drugim riječima, vrijedi $x \Vdash \Box A$ ako i samo ako postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U$ i za sve $y \in U$ vrijedi $y \Vdash A$. Topološkom terminologijom, to znaši da je x u interioru skupa $\{y \in X : y \Vdash A\}$. Također $x \Vdash \Diamond A$ ako i samo ako je x u zatvaraču tog skupa.

No, sljedeća propozicija pokazuje da ovako definirana topološka semantika još uvijek nije dobra za logiku dokazivosti.

Propozicija 2.23. *Formula* $\Box p \to p$ *je istinita u svakoj točki svakog okolinskog modela na topološkom prostoru.*

Dokaz. Neka je $x \Vdash \Box p$. Tada postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U$ i $y \Vdash p$ za sve $y \in U$. Posebno, $x \Vdash p$. Q.E.D.

Podsjetimo se, formula $\Box p \to p$ karakterizira refleksivne Kripkeove okvire, dok su **GL** okviri inverzno dobro fundirani, što posebno znači da su irefleksivni.

Napomena 2.24. *Prije nego prilagodimo topološku semantiku logici dokazivosti, napomenimo da je vrlo jednostavno dokazati analogon prethodne propozicije za formulu* $\Box p \to \Box\Box p$*, koja karakterizira tranzitivne Kripkeove okvire. Štoviše, pokazuje se da je sistem* **S4** *(proširenje sistema* **K** *shemama aksioma* $\Box A \to A$ *i* $\Box A \to \Box\Box A$*) adekvatan i potpun s obzirom na ovako definiranu topološku semantiku.*

Definicija 2.25. Topološki model *je uređena trojka* $(X, \mathcal{T}, \Vdash)$*, gdje je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor, a* $\Vdash$ *relacija forsiranja definirana na uobičajen način u atomarnim i bulovskim slučajevima, te* $x \Vdash \Box A$ *ako postoji* $U \in \mathcal{T}$ *takav da je* $x \in U$ *i za sve* $y \in U$ *takve da je* $y \neq x$ *vrijedi* $y \Vdash A$.

Kažemo da je formula valjana na topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ *ako je istinita u svakoj točki svakog topološkog modela* $(X, \mathcal{T}, \Vdash)$.

Ovako definiran topološki model također je poseban slučaj okolinskog modela, pri čemu okolinom točke x ovdje smatramo bilo koji nadskup svakog skupa $U \setminus \{x\}$, gdje je $x \in U \in \mathcal{T}$.

Uočimo da je $x \Vdash \Diamond A$ ako i samo ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U$ postoji $y \in U$ takav da je $y \neq x$ i $y \Vdash A$. Drugim riječima, x je gomilište skupa $\{y \in X : y \Vdash A\}$.

Kažemo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ *raspršen* ako svaki neprazan podskup $S \subseteq X$ ima izoliranu točku.

Primjer 2.26. *Trivijalni primjer raspršenog prostora je diskretni topološki prostor. Netrivijalni primjer je* $(\alpha, \mathcal{T})$*, gdje je* α *ordinal, a* $\mathcal{T}$ *uređajna topologija. Naime, svaki* $S \subseteq \alpha$ *je dobro uređen, pa ima najmanji element* $\min S$. *Taj minimalni element je izolirana točka, jer* $[0, \min S + 1\rangle \in \mathcal{T}$ *siječe* S *samo u* $\min S$.

Propozicija 2.27. *Formula* $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ *je valjana na topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T})$ *ako i samo ako je on raspršen.*

Dokaz. Dokažimo samo dovoljnost. Neka je $(X, \mathcal{T})$ raspršen, $\Vdash$ proizvoljna i $x \in X$. Pretpostavimo suprotno, tj. $x \Vdash \Box(\Box A \to A)$ i $x \Vdash \neg\Box A$. Tada postoji $U \in \mathcal{T}$ takva da je $x \in U$ i za sve $y \in U$, $y \neq x$, vrijedi $y \Vdash \Box A \to A$. S druge strane, x je gomilište skupa $\{y \in X : y \Vdash \neg A\}$, pa je skup S svih točaka skupa $U \setminus \{x\}$ u kojem vrijedi $\neg A$ neprazan. Kako je prostor raspršen skup S ima izoliranu točku z, tj. postoji $V \in \mathcal{T}$ takav da je $z \in V$ i na $V \cap S = \{z\}$. Sada je $U \cap V$ otvorena okolina točke z na kojoj A vrijedi u svim točkama osim u z. Dakle $z \Vdash \Box A$. No, $z \in U \setminus \{x\}$, pa je $z \Vdash \Box A \to A$, dakle $z \Vdash A$. Time je dobivena kontradikcija. Q.E.D.

Adekvatnost i potpunost sistema **GL** u odnosu na klasu svih raspršenih topoloških prostora dokazao je Esakia 1981.

Topološka semantika za sistem GLP

Neka je $X \neq \emptyset$ i $(X, \mathcal{T}_n)$ topološki prostor, $n \in \mathbb{N}$.

Uređeni par $(X, (\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ zvat ćemo **politopološki prostor**.

U topologiji se za $S \subseteq X$ s dS označava skup gomilišta skupa S. U politopološkom prostoru ćemo s d_nS označavati skup gomilišta skupa S s obzirom na topologiju $\mathcal{T}_n$.

Definicija 2.28. Politopološki model *je trojka* $(X, (\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \Vdash)$, *gdje je* $(X, (\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *politopološki prostor, a* $\Vdash$ *relacija forsiranja definirana na uobičajen način u atomarnim i bulovskim slučajevima, te* $x \Vdash [n]A$ *ako postoji* $U \in \mathcal{T}_n$ *takav da je* $x \in U$ *i za sve* $y \in U$ *takve da je* $y \neq x$ *vrijedi* $y \Vdash A$.

Kažemo da je formula valjana na politopološkom prostoru $(X, (\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *ako je istinita u svakoj točki svakog politopološkog modela* $(X, (\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \Vdash)$.

Uočimo da vrijedi $x \Vdash \langle n \rangle A$ ako i samo ako je $x \in d_n\{y \in X : y \Vdash A\}$.

Sada ćemo dokazati teorem adekvatnosti topološke semantike za **GLP**.

Teorem 2.29. *Neka je* $(X, (\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *politopološki prostor takav da za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

1. $(X, \mathcal{T}_n)$ *je raspršen topološki prostor;*
2. $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_{n+1}$ *(tj.* $\mathcal{T}_{n+1}$ *je finija topologija od* $\mathcal{T}_n$*);*
3. *za svaki* $S \subseteq X$ *vrijedi* $d_nS \in \mathcal{T}_{n+1}$.

Tada je svaki teorem sistema **GLP** *valjan na* $(X, (\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Dokaz. Treba dokazati da su svi aksiomi sistema **GLP** valjani na $(X, (\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ i da pravila izvoda čuvaju valjanost. Iz 1. i iz dokaza prethodne propozicije tvrdnja slijedi za sve aksiome sheme L_n. Dokažimo još samo da tvrdnja vrijedi za $P1$ i $P2$.

($P1$) Neka je $x \in X$ takav da vrijedi $x \Vdash [n]A$ i neka je $m > n$. Tada postoji $U \in \mathcal{T}_n$, $x \in U$ i za sve $y \in U$, $y \neq x$, vrijedi $y \Vdash A$. Iz 2. slijedi $U \in \mathcal{T}_m$. Dakle, $x \Vdash [m]A$.

($P2$) Neka je $x \in X$ takav da vrijedi $x \Vdash \langle n \rangle A$ i $m > n$. Tada je $x \in d_n\{y \in X : y \Vdash A\} \in \mathcal{T}_{n+1} \subseteq \mathcal{T}_m$. Neka je $U = d_n\{y \in X : y \Vdash A\}$. Tada za svaki $y \in U$ vrijedi $y \Vdash \langle n \rangle A$. Slijedi $x \Vdash [m] \langle n \rangle A$. Q.E.D.

Politopološke prostore za koje vrijede pretpostavke prethodnog teorema zovemo **GLP**-*prostori*. Potpunost sistema **GLP** u odnosu na **GLP**–prostore dokazali su Beklemishev i Gabelaia 2013.

Poglavlje 3

Logike interpretabilnosti

Logike interpretabilnosti su proširenja logike dokazivosti **GL**. U ovom poglavlju glavni nam je cilj dati dokaze potpunosti raznih logika interpretabilnosti. U prvoj točki dajemo motivaciju za proučavanje logika interpretabilnosti, tj. definiramo relaciju relativne interpretabilnosti između dviju teorija prvog reda. Nakon toga definiramo jezik, te navodimo aksiome osnovne logike interpretabilnosti **IL**. Glavni dio poglavlja odnosi se na dokaze potpunosti sistema **IL** i njegovih proširenja step-by-step metodom.

3.1 Relativna interpretabilnost

Logika dokazivosti teorije PA (Peanova aritmetika) i GB (Gödel–Bernaysova teorija skupova) je **GL**. No, GB je konačno aksiomatizabilna, a PA nije. Iz tog razloga promatraju se modalni opisi i drugih aritmetičkih svojstava kako bi se razlikovale takve teorije. Primjerice, razmatrali su se modalni opisi ovih aritmetičkih pojmova: interpolabilnost (Ignatiev), aritmetička hijerarhija (Japaridze), konzervativnost i interpretabilnost (Hájek, Švejdar; Visser).

Sada nam je cilj definirati relaciju interpretabilnosti među teorijama. Ako su T i T' dvije teorije prvog reda s istim alfabetom tada ih jednostavo možemo uspoređivati. Jedna teorija može biti podteorija druge, ili obratno, ili jednostavno nisu usporedive. Ako teorije imaju različite alfabete tada moramo prvo na neki način "translatirati" (interpretirati) jedan alfabet u drugi, a onda uspoređivati teorije. To je upravo pojam interpretabilnosti.

Sada ćemo definirati pojam interpretabilnosti između dviju teorija prvog reda, te istaknuti osnovna svojstva. Osnovna referenca koju koristimo je [9].

Promatramo teorije prvog reda s jednakošću. Pretpostavljamo da alfabet svake teorije koju promatramo sadrži konačno (u najgorem slučaju prebrojivo) relacijskih simbola, te ne sadrži funkcijske i konstantske simbole.

U sljedećim razmatranjima koristimo sljedeće oznake:

a) σ – alfabet neke teorije prvog reda (PAZI! σ nije signatura, već alfabet);

b) Fm_σ – skup svih formula nad σ;

c) St_σ – skup svih rečenica nad σ.

Teorija T prvog reda je uređeni par (Ax, σ), gdje je $Ax \subseteq St_\sigma$ (skup nelogičkih aksioma). (To znači da teoriju ne identificiramo sa skupom svih njenih teorema, već sa skupom nelogičkih aksioma).

Dokazivost u teoriji promatramo u klasičnom (sintaktičkom smislu). Zapravo dokazivost u nekoj teoriji $T = (Ax, \sigma)$ znači izvedivost iz Ax u klasičnoj logici prvog reda.

Neka su σ i σ' alfabeti, te Var_σ i $Var_{\sigma'}$ pripadni skupovi individualnih varijabli. Neka vrijedi $Var_\sigma \subseteq Var_{\sigma'}$ i $Var_{\sigma'} \setminus Var_\sigma$ je beskonačan skup. **Relativna translacija alfabeta** σ u σ' je par $(\psi, U(x))$, gdje je redom:

a) $\psi : \{R : R \in \sigma \text{ relacijski simbol}\} \to Fm_{\sigma'}$, takva da:

$$\sigma \ni R^n \mapsto R^\psi(x_1, \ldots, x_n),$$

gdje je R^ψ neka σ'–formula čije vezane varijable ne pripadaju σ, i čije slobodne varijable su prvih n–varijabli u listi varijabli od σ';

b) $U(x)$ je σ'–formula s točno samo varijablom x slobodnom, te čije vezane varijable ne pripadaju σ.

Za svaku formulu $F \in FM_\sigma$ definiramo relativnu translaciju kao formulu $F^\psi \in FM_{\sigma'}$ rekurzivno ovako:

a) $(x = y)^\psi \equiv x = y$;

b) za svaku atomarnu formulu $F \equiv R(x_1, \ldots, x_n)$ definiramo $F^\psi \equiv R^\psi(x_1, \ldots, x_n)$;

c) ψ komutira s bulovskim veznicima;

d) $(\forall x F)^\psi \equiv \forall x(U(x) \to F^\psi)$;

e) $(\exists x F)^\psi \equiv \exists x(U(x) \land F^\psi)$.

Ako su T i T' teorije s alfabetima σ i σ', te $(\psi, U(x))$ relativna translacija od σ u σ', tada definiramo teorije:

$$T^\psi = (\{F^\psi : F \in St_\sigma,\ T \vdash F\}, \sigma')$$

$$(T')^{\psi^{-1}} = (\{F : F \in St_\sigma,\ T' \vdash F^\psi\}, \sigma)$$

Propozicija 3.1. *Neka su $T = (Ax, \sigma)$ i $T' = (Ax', \sigma')$ potpune i konzistentne teorije prvog reda, te $(\psi, U(x))$ relativna translacija od σ u σ', takva da za sve $F \in St_{\sigma'}$ postoji $G \in St_\sigma$ tako da $F \equiv G^\psi$. Tada je ekvivalentno:*

a) $T^\psi \subseteq T'$ *c)* $T' \subseteq T^\psi$

b) $(T')^{\psi^{-1}} \subseteq T$ *d)* $T \subseteq (T')^{\psi^{-1}}$

Za ilustraciju dokažimo da a) povlači b). Neka je $F \in (T')^{\psi^{-1}}$. Tada vrijedi $F \in St_\sigma$ i $T' \vdash F^\psi$. Pretpostavimo $T \nvdash F$. Pošto je teorija T po pretpostavci potpuna tada vrijedi $T \vdash \neg F$. Tada je $(\neg F)^\psi \in T^\psi$. Iz a) slijedi $(\neg F)^\psi \in T'$, tj. $T' \vdash \neg F^\psi$. Time smo dobili da je teorija T' inkonzistentna, što je suprotno pretpostavci. Dakle, mora vrijediti $T \vdash F$. Q.E.D.

Ako teorije nisu potpune i konzistentne tada općenito ekvivalencije iz prethodne propozicije ne vrijede. To je motivacija za sljedeću definiciju.

Definicija 3.2. *Neka su $T = (Ax, \sigma)$ i $T' = (Ax', \sigma')$ teorije prvog reda. Kažemo da je teorija T je* **interpretabilna** *u teoriji T' ako postoji relativna translacija $(\psi, U(x))$ od σ u σ' tako da vrijedi $T^\psi \subseteq T'$. Tada relativnu translaciju nazivamo i* **interpretacija od T u T'**.

Propozicija 3.3. *Neka su $T = (Ax, \sigma)$ i $T' = (Ax', \sigma')$ teorije prvog reda s jednakošću. Neka je $(\psi, U(x))$ interpretacija od T u T'. Tada vrijedi $T' \vdash \exists x U(x)$.*

(To znači da je "domena" interpretacije uvijek neprazna).

Primjer 3.4 (Uzajamna interpretabilnost Peanove aritmetike i teorije skupova). *Označimo sa $ZF_{fin} \equiv$ teorija dobivenu iz ZF zamjenom aksioma beskonačnosti s njegovom negacijom. Opišimo prvo interpretaciju PA u ZF_{fin}. Neka je $Lim(y)$ formula koja izražava da je skup y ordinal druge vrste. Neka je $y = \omega$ pokrata za formulu $Lim(y) \wedge \forall z(z \in y \to \neg Lim(z))$. Neka je $U(x) \equiv \exists y(y = \omega \wedge x \in y)$. Sada definiramo translaciju alfabeta ψ.*

a) $\psi(0) = \emptyset$;
Konstantski simbol 0 jezika PA translantira se u simbol $\emptyset$. (Do sada nismo promatrali interpretacije teorija koje sadrže konstantske simbole!)

b) Atomarnu PA–formulu $y = x'$, translantiramo u ZF–formulu $y = x \cup \{x\}$.
U sljedećim zapisima umjesto $x \cup \{x\}$ pišemo kraće x'.

c) Atomarnu PA–formulu $x + y = z$ translantiramo u sljedeću ZF–formulu:

$$\exists v \Big(Func(v) \wedge Dom(v) = y' \wedge (0, x) \in v \wedge (y, z) \in v$$

$$\wedge\ \forall t \forall u (t \in Dom(v) \wedge t \neq y \wedge (t, u) \in v \to (t', v') \in v) \Big)$$

gdje je $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, $Func(v)$ je formula koja izražava da je v funkcija, a $Dom(v)$ je pokrata za term koji označava domenu od v.

d) Atomarnu PA–formulu $x \cdot y = z$ translatiramo u sljedeću ZF–formulu:

$$\exists v\Big(\quad Func(v) \wedge Dom(v) = y' \wedge (0,0) \in v \wedge (y,z) \in v$$

$$\wedge\ \forall t \forall u((t,u) \in v \wedge t \neq y \rightarrow (t', u + x) \in v) \Big).$$

Može se pokazati da su tada relativne translacije svih aksioma Peanove aritmetike dokazivi u teoriji ZF_{fin}. (Detalje možete, primjerice, vidjeti u sljedećim knjigama: Drake, Singh, Intermediate set theory; S. Kurepa, Uvod u matematiku; M. Vuković, Predavanja iz kolegija Teorija skupova).

Za obratnu interpretabilnost spomenimo samo da relativnu translaciju od $x \in y$ definiramo sa: "x se javlja u binarnom razvoju od y kao eksponent."

Sada navodimo još nekoliko primjera iako nećemo definirati sve potrebne pojmove, odnosno dokazivati tvrdnje.

a) Teorija $ZFC^- + V = HC$ (ZFC bez aksioma partitivnog skupa) je interpretabilna u A_2 (aritmetika drugog reda). To su dokazali Kreisel i Zbierski.

b) Sljedeće teorije su međusobno interpretabilne: A_2, A_2^-, ZFC^-, ZF^-. (Za proizvoljnu teoriju T sa T^- je označena teorija T bez aksioma partitivnog skupa).

c) Dvodimenizionalna eliptička geometrija je interpretabilna u trodimenzionalnoj euklidskoj geometriji.

d) Gödelova interpetacija elementarne sintakse u aritmetiku. Ta interpretacija igra centralnu ulogu u dokazu Gödelovih teorema nepotpunosti.

e) Gödelova interpretacija $ZF + V = L$ u ZF. Ta interpretacija omogućava dokaz relativne konzistentnosti hipoteze kontinuuma sa ZF.

Sada ćemo navesti neke karakterizacije interpretabilnosti za specifične vrste teorija. Za teoriju T kažemo da je **superaritmetička** ako joj je skup aksioma primitivno rekurzivan i sadrži aksiome PA.

Teorem. (Orey, Hájek)
Za sve superaritmetičke teorije $T = (Ax, \sigma)$ i $T' = (Ax', \sigma')$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

a) teorija T je interpretabilna u teoriji T';

b) *za sve prirodne brojeve m vrijedi $T' \vdash Con_{T\downarrow m}$*
(sa $T \downarrow m$ je označena teorija čiji su aksiomi oni aksiomi od T čiji je kod manji od m);

c) *teorija T je Π_1–konzervativna nad T', tj. za svaku rečenicu $F \in St_\sigma \cap \Pi_1$ za koju vrijedi $T \vdash F$, vrijedi i $T' \vdash F$.*

Za konačno aksiomatizabilne teorije karakterizacija interpretabilnosti je sasvim drugačija. Za teoriju T kažemo da je **sekvencijalna** ako "može kodirati konačne nizovi".

Teorem (H. Friedman).
Za sve konačno aksiomatizabilne sekvencijalne teorije T i T' vrijedi:

teorija T je interpetabilna u teoriji T' ako i samo ako je u $I\Delta_0 + EXP$ dokazivo da konzistentnost od T' povlači konzistentnost od T.

U daljnjim razmatranjima promatrat ćemo pojam interpretabilnosti između teorija oblika $T + A$ i $T + B$, gdje je T neka superaritmetička teorija, a A i B su rečenice od T.

Ako su σ i σ' alfabeti, takvi da je $\sigma = \sigma'$, kada promatramo relativne translacije među njima pretpostavljamo da su simboli samo grafički jednaki, tj. da su u biti različiti.

Neka je T neka teorija prvog reda, te A i B neke rečenice pripadnog jezika. Može se pokazati da postoji Σ_1–formula $Int(x, y)$ tako da vrijedi:

ako je teorija $T+B$ interpretabilna u teoriji $T+A$ tada $T \vdash Int(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner)$.

U daljnijim razmatranjima umjesto $Int(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner)$ pisat ćemo samo kratko $A \rhd B$.

Teorem. *Neka je T proizvoljna teorija, te A, B i C proizvoljne rečenice. Tada vrijedi:*

a) $T \vdash Pr_T(\ulcorner A \to B \urcorner) \to A \rhd B$

b) $T \vdash (A \rhd B \ \wedge B \rhd C) \to (A \rhd C)$

c) $T \vdash ((A \rhd C) \wedge (B \rhd C)) \to ((A \vee B) \rhd C)$

d) $T \vdash A \rhd B \to (\neg Pr_T(\ulcorner \neg A \urcorner) \to \neg Pr_T(\ulcorner \neg B \urcorner))$

e) $T \vdash \neg Pr_T(\ulcorner \neg A \urcorner) \rhd A$

3.2 Modalni opis relativne interpretabilnosti

Modalni opis relativne interpretabilnosti prvi su razmatrali P. Hájek (1981.) i V. Švejdar (1983). Albert Visser je 1988. definirao modalni sistem **IL** (interpretability logic) koji ćemo nazivati **logika interpretabilnosti**.

Definicija 3.5. *Jezik logike interpretabilnosti* **IL** *sadrži:*

a) prebrojivo mnogo propozicionalnih varijabli $p_0,\ p_1, \ldots$

b) logičke konstante $\top$ *i* $\bot$

c) bulovske logičke veznike $\neg,\ \wedge,\ \vee, \rightarrow$ *i* $\leftrightarrow$

d) unarni modalni operator $\Box$

e) binarni modalni operator $\rhd$.

Pojam formule se definira rekurzivno sasvim na analogni način kao za sistem **GL** pri čemu još dodajemo: ako su A i B formule tada je i $A \rhd B$ formula.

Definicija 3.6. *Sistem* **IL** *sadrži sljedeće (sheme) aksioma:*

(L0) *sve tautologije (u modalnom jeziku!)*

(L1) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

(L3) $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$

(J1) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rhd B)$

(J2) $(A \rhd B\ \wedge B \rhd C) \rightarrow (A \rhd C)$

(J3) $((A \rhd C) \wedge (B \rhd C)) \rightarrow ((A \vee B) \rhd C)$

(J4) $(A \rhd B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$

(J5) $\Diamond A \rhd A$

Simbol $\Diamond$ koristimo kao pokratu za $\neg\Box\neg$. Modalni operator $\rhd$ ima isti prioritet kao i $\rightarrow$. Pravila izvoda sistema **IL** su modus ponens i generalizacija (nužnost).

Definicija 3.7. Aritmetička interpretacija $*$ *je preslikavanje koje svakoj modalnoj formuli* A *pridružuje rečenicu* A^* *teorije* T *tako da su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

a) propozicionalnoj varijabli P *pridružujemo neku rečenicu* P^* *od* T;

b) $(\top)^* =\ 0 = 0,\ (\bot)^* =\ 0 = 1;$

c) funkcija $*$ komutira s propozicionalnim veznicima;

d) $(\Box A)^* = Pr(\ulcorner A^* \urcorner)$;

e) $(A \rhd B)^* = Int(\ulcorner A^* \urcorner, \ulcorner B^* \urcorner)$.

Kako bi mogli izreći teoreme o modalnim opisima relacije relativne interpretabilnosti za pojedine vrsta teorija, moramo istaknuti još neke posebne modalne formule koji se obično nazivaju **principi**.

Princip Montagne, koji kratko označavamo s $\mathtt{M}$, glasi ovako:

$$\mathtt{M} \ \equiv \ A \rhd B \to ((A \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C))$$

Princip $\mathtt{M}$ je direktna posljedica Orey, Hájekovog teorema. Dokaz adekvatnosti principa $\mathtt{M}$, kao i sve potrebne definicije, dane su u Berarduccijevom članku u JSL–u 1990. Sa $\mathbf{IL}\mathtt{M}$ označavamo proširenje sistema **IL** čiji je novi aksiom princip $\mathtt{M}$.

Teorem (Berarducci, Shavrukovljev teorem, 1990.)
Za svaku modalnu formulu A vrijedi:

$\mathbf{IL}\mathtt{M} \vdash A$ *ako i samo ako* $PA \vdash A^*$ *za svaku arit. interpretaciju* $*$.

Princip perzistentnosti, koji kratko označavamo s $\mathtt{P}$, glasi ovako:

$$\mathtt{P} \equiv A \rhd B \to \Box(A \rhd B)$$

On je valjan u svakoj konačno aksiomatizabilnoj teoriji prvog reda, jer takva teorija ima očito Σ^0_1–predikat interpretabilnosti. Sa $\mathbf{IL}\mathtt{P}$ označavamo proširenje sistema **IL** čiji je novi aksiom princip $\mathtt{P}$.

Teorem (Visser, 1988.)
Neka je T neka Σ^0_1–adekvatna konačno aksiomatizabilna sekvencijalna teorija koja proširuje $I\Delta_\circ + SUPEXP$. Tada za svaku modalnu formulu A vrijedi:

$\mathbf{IL}\mathtt{P} \vdash A$ *ako i samo ako* $T \vdash A^*$ *za svaku aritmetičku interpretaciju* $*$.

3.3 Modalna potpunost logika interpretabilnosti

Sintaksa i semantika

O sistemu **IL** i njegovoj artimetičkoj interpretaciji bilo je govora u prethodnoj točki. U nastavku ćemo se baviti samo modalnom semantikom logike interpretabilnosti. Cilj je dokazati modalnu potpunost sistema **IL** i njegovih proširenja step–by–step metodom.

Podsjetimo se, sintaksa logike interpretabilnosti je proširenje osnovnog modalnog jezika binarnim modalnim operatorom $\rhd$: ako su A i B formule, onda je i $A \rhd B$ formula. U pisanju formula često izostavljamo zagrade, pri čemu najviši prioritet imaju $\neg$, $\Box$ i $\Diamond$, zatim $\wedge$, $\vee$ i $\rhd$, a najniži $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$.

Aksiomi su tautologije (u novom jeziku!) i sljedeće sheme:

(K) $\quad \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
(L) $\quad \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$
$(J1)$ $\quad \Box(A \rightarrow B) \rightarrow A \rhd B$
$(J2)$ $\quad (A \rhd B) \wedge (B \rhd C) \rightarrow A \rhd C$
$(J3)$ $\quad (A \rhd C) \wedge (B \rhd C) \rightarrow (A \vee B) \rhd C$
$(J4)$ $\quad A \rhd B \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$
$(J5)$ $\quad \Diamond A \rhd A.$

Pravila izvoda su modus ponens i $\dfrac{A}{\Box A}$.

Sada ćemo definirati modalnu semantiku sistema **IL**.

Definicija 3.8. Veltmanov okvir *je uređena trojka* $\mathfrak{F} = (W, R, \{S_w : w \in W\})$, *gdje je* (W, R) *tranzitivan i inverzno dobro fundiran Kripkeov okvir, a za svaki* $w \in W$, S_w *je binarna relacija na* $\{u \in W : wRu\}$ *koja je refleksivna, tranzitivna i proširuje* R*, tj. iz* $wRuRv$ *uvijek slijedi* uS_wv.

Veltmanov model *je četvorka* $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$*, gdje je* $(W, R, \{S_w : w \in W\})$ *Veltmanov okvir, a* $\Vdash$ *relacija forsiranja definirana kao za osnovni modalni jezik, te* $w \Vdash A \rhd B$ *ako za svaki* u *takav da je* wRu *i* $u \Vdash A$ *postoji* v *takav da je* uS_wv *i* $v \Vdash B$.

Kažemo da je formula A **valjana** *na Veltmanovom okviru i pišemo* $\mathfrak{F} \Vdash A$ *ako je* A *istinita u svakom svijetu za svaku relaciju forsiranja na* $\mathfrak{F}$.

Najprije dokažimo adekvatnost Veltmanove semantike.

Teorem 3.9. *Neka je* A *formula logike interpretabilnosti. Ako* $\vdash_{IL} A$ *onda je formula* A *valjana na svakom Veltmanovom okviru.*

Dokaz. Neka je $(W, R, \{S_w : w \in W\})$ bilo koji Veltmanov okvir. Treba dokazati da su svi aksiomi sistema **IL** valjani na okviru, te da pravila izvoda čuvaju valjanost. Dokažimo samo valjanost shema aksioma $(J1)$–$(J5)$ (valjanost shema aksioma K i L slijedi iz dokaza teorema adekvatnosti za sistem **GL**).

Neka je $\Vdash$ bilo koja relacija forsiranja i $w \in W$ proizvoljan.

$(J1)$ Pretpostavimo $w \Vdash \Box(A \to B)$. Treba dokazati $w \Vdash A \rhd B$. Neka je $u \in W$ takav da je wRu i $u \Vdash A$. Kako je S_w refleksivna, to je uS_wu. Iz pretpostavke slijedi $u \Vdash A \to B$. Dakle, $u \Vdash B$. Iz definicije relacije forsiranja slijedi $w \Vdash A \rhd B$.

$(J2)$ Dokazuje se slično kao $(J1)$ koristeći tranzitivnost relacije S_w.

$(J3)$ Trivijalno slijedi iz definicije Veltmanovog modela.

$(J4)$ Pretpostavimo $w \Vdash A \rhd B$. Treba dokazati $w \Vdash \Diamond A \to \Diamond B$. Pretpostavimo $w \Vdash \Diamond A$. Tada postoji u takav da je wRu i $u \Vdash A$. Sada iz prve pretpostavke slijedi da postoji v takav da je uS_wv i $v \Vdash B$. No, također je wRv. Dakle, $w \Vdash \Diamond B$.

$(J5)$ Neka je u takav da je wRu i $u \Vdash \Diamond A$. Tada postoji v takav da je uRv i $v \Vdash A$. No, $wRuRv$ povlači uS_wv, dakle $w \Vdash \Diamond A \rhd A$. Q.E.D.

Proširenja sistema IL

Podsjetimo se, logika interpretabilnosti Peanove aritmetike nije **IL**, nego **IL**$\mathtt{M}$, koja se dobije dodavanjem sljedeće sheme aksioma sistemu **IL**:

$\mathtt{M} \equiv A \rhd B \to (A \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C)$.

Nadalje, logika interpretabilnosti (dovoljno jakih) konačno aksiomatizabilnih teorija je sistem **IL**$\mathtt{P}$, dobiven proširenjem sistema **IL** shemom aksioma $\mathtt{P} \equiv A \rhd B \to \Box(A \rhd B)$.

Još mnogi principi interpretabilnosti otkriveni su u potrazi za logikom interpretabilnosti svih (dovoljno jakih) aritmetičkih teorija **IL**(All), čija aksiomatizacija je još uvijek otvoren problem (cilj: odrediti sistem **IL**(All) tako da za svaku formulu A vrijedi: $\vdash_{IL(All)} A$ ako i samo ako za svaku teoriju T i za svaku aritmetičku interpretaciju $*$ vrijedi $\vdash_T A^*$). Neki od tih principa su:

$$\begin{aligned}
\mathtt{M}_0 &\equiv A \rhd B \to (\Diamond A \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C) \\
\mathtt{W} &\equiv A \rhd B \to A \rhd (B \wedge \Box\neg A) \\
\mathtt{W}^* &\equiv A \rhd B \to (B \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C \wedge \Box\neg A)
\end{aligned}$$

S W obično označavamo i nosač Veltmanovog okvira, no iz konteksta će uvijek biti jasno radi li se o tome ili o principu interpretabilnosti.

Teorem 3.10. *Neka je $\mathfrak{F} = (W, R, \{S_w : w \in W\})$ Veltmanov okvir. Tada redom vrijedi:*

a) $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{M}$ ako i samo ako uS_wvRz uvijek povlači uRz;

b) $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{P}$ ako i samo ako $wRw'RuS_wv$ uvijek povlači $uS_{w'}v$;

c) $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{M}_0$ ako i samo ako $wRuRxS_wvRz$ uvijek povlači uRz;

d) $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{W}$ ako i samo ako je relacija $S_w \circ R$ inverzno dobro fundirana za svaki w;

e) $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{W}^*$ ako i samo ako $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{M}_0$ i $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{W}$.

Dokaz. Dokažimo samo dovoljnost (taj smjer je dovoljan za dokaz adekvatnosti odgovarajućih sistema).

a) Neka je $\mathfrak{F}$ Veltmanov okvir takav da uS_wvRz uvijek povlači uRz. Neka su $\Vdash$ i $w \in W$ proizvoljni. Treba dokazati $w \Vdash M$. Pretpostavimo $w \Vdash A \rhd B$. Treba dokazati $w \Vdash (A \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C)$. Neka je u takav da je wRu i $u \Vdash A \wedge \Box C$. Posebno, $u \Vdash A$, pa iz $w \Vdash A \rhd B$ slijedi da postoji v takav da je uS_wv i $v \Vdash B$. Preostaje dokazati $v \Vdash \Box C$. Neka je z bilo koji svijet takav da je vRz. Sada imamo uS_wvRz, pa iz pretpostavke slijedi uRz. Treba dokazati $z \Vdash C$. No, $u \Vdash \Box C$, pa je $z \Vdash C$, što je i trebalo dokazati.

   Slično se dokazuju tvrdnje za principe $\mathtt{P}$ i $\mathtt{M}_0$.

d) Neka je $\mathfrak{F}$ Veltmanov okvir takav da je $S_w \circ R$ inverzno dobro fundirana i neka su $\Vdash$ i w proizvoljni. Treba dokazati $w \Vdash W$. Pretpostavimo $w \Vdash A \rhd B$. Treba dokazati $w \Vdash A \rhd (B \wedge \Box\neg A)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji u takav da je wRu i $u \Vdash A$ i za svaki x takav da je uS_wx vrijedi $x \Vdash \neg B \vee \Diamond A$. Kako je $w \Vdash A \rhd B$, to postoji v takav da je uS_wv i $v \Vdash B$. Dakle, $v \Vdash \Diamond A$, pa postoji u_1 takav da je vRu_1 i $u_1 \Vdash A$. Iz tranzitivnosti relacije R slijedi wRu_1, pa za u_1 primijenimo isti argument kao za u i nastavljajući postupak dobivamo beskonačni niz $wRuS_wvRu_1S_wv_1Ru_2S_wv_2\dots$, što je u kontradikciji s pretpostavkom.

   Tvrdnja za princip $\mathtt{W}^*$ može se dokazati pomoću aksioma, bez pozivanja na semantiku, no dokaz ovdje ispuštamo. Q.E.D.

Za svaki od navedenih principa interpretabilnosti X, s $\mathbf{IL}X$ ćemo označavati sistem dobiven dodavanjem sheme aksioma X sistemu $\mathbf{IL}$. Općenitije, dopuštamo da je X skup principa, uključujući i prazan skup, pa će oznaka $\mathbf{IL}X$ obuhvaćati i osnovni sistem $\mathbf{IL}$.

Klasu svih Veltmanovih okvira koji zadovoljavaju uvjete prethodnog teorema u odnosu na princip interpretabilnosti X zovemo *karakteristična klasa* za X. Veltmanov okvir iz karakteristične klase za princip X zovemo i $\mathbf{IL}X-$*okvir* (slično, govorimo i o $\mathbf{IL}X-$*modelima*). Kratko kažemo da je sistem $\mathbf{IL}X$ *potpun* sistem ako je potpun u odnosu na karakterističnu klasu principa X, tj. ako za svaku formulu A vrijedi: ako je $\mathfrak{F} \Vdash A$ za svaki $\mathbf{IL}X-$okvir $\mathfrak{F}$, onda je $\vdash_{ILX} A$. Pritom je karakteristična klasa za osnovni sistem $\mathbf{IL}$ klasa svih Veltmanovih okvira. Obratna tvrdnja, tj. adekvatnost za $\mathbf{IL}$, $\mathbf{IL}\mathtt{M}$, $\mathbf{IL}\mathtt{P}$, $\mathbf{IL}\mathtt{W}$, $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ i $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$, slijedi iz prethodna dva teorema.

De Jongh i Veltman su 1990. dokazali potpunost sistema $\mathbf{IL}$, $\mathbf{IL}\mathtt{M}$ i $\mathbf{IL}\mathtt{P}$, te nešto kasnije $\mathbf{IL}\mathtt{W}$. Goris i Joosten 2004. su dali nove dokaze potpunosti sistema $\mathbf{IL}$ i $\mathbf{IL}\mathtt{M}$ koristeći step–by–step metodu, kojom su dokazali i modalnu potpunost sistema $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ i $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$.

Struktura dokaza potpunosti step-by-step metodom

Potpunost se dokazuje obratom po kontrapoziciji: pretpostavimo da je A formula takva da $\nvdash_{ILX} A$ i dokažimo da tada postoji $\mathbf{IL}X-$model i svijet w tog modela takav da je $w \Vdash \neg A$. Struktura dokaza slična je strukturi dokaza potpunosti sistema **GL** step–by–step metodom s jednog od ranijih predavanja. Koraci dokaza:

1. Iz $\nvdash_{ILX} A$ slijedi da je $\{\neg A\}$ jedan $\mathbf{IL}X-$konzistentan skup. Koristeći analogon Lindenbaumove leme, proširimo skup $\{\neg A\}$ do maksimalnog $\mathbf{IL}X-$konzistentnog skupa formula Γ. U dokazima potpunosti maksimalno konzistentni skupovi često se uzimaju za elemente modela. U step–by–step metodi potrebno je dopustiti korištenje istog maksimalno konzistentnog skupa na više mjesta u modelu, te stoga konstruiramo označeni okvir, tj. svakom svijetu pridružujemo maksimalno konzistentan skup. Konstrukcija počinje jednočlanim okvirom $\mathfrak{F}$ čijem elementu je pridružen skup Γ.

2. Postoji konačan skup formula $\mathcal{D}$ koji sadrži formulu $\neg A$ i zatvoren je na potformule i operaciju $\sim$ (podsjetimo se, ako je formula B oblika $\neg C$, onda s $\sim B$ označavamo C, a u suprotnom s $\sim B$ označavamo $\neg B$). Definiramo što znači da za označeni okvir vrijedi lema o istinitosti u odnosu na $\mathcal{D}$. Definiramo $\mathcal{D}-$probleme (smetnje lemi o istinitosti za formule oblika $\neg(B \rhd C) \in \mathcal{D}$) i $\mathcal{D}-$nedostatke (slično za formule oblika $B \rhd C \in \mathcal{D}$). Dokazujemo da lema o istinitosti u odnosu na $\mathcal{D}$ vrijedi ako ne postoje $\mathcal{D}-$problemi ni $\mathcal{D}-$nedostaci.

3. Dokazujemo glavnu lemu po kojoj se $\mathfrak{F}$ uz određene uvjete može proširiti do $\mathbf{IL}X-$modela bez $\mathcal{D}-$problema i $\mathcal{D}-$nedostataka postupnom eliminacijom takvom da se eliminirani $\mathcal{D}-$problemi i $\mathcal{D}-$nedostaci ne mogu ponovo pojaviti u nastavku konstrukcije. Ako sistem $\mathbf{IL}X$ zadovoljava uvjete glavne leme, onda je potpun. Naime, našli smo model u kojem u polaznom svijetu vrijedi $\neg A$ jer je $\neg A \in \Gamma$ i vrijedi lema o istinitosti u odnosu na $\mathcal{D}$.

Goris i Joosten su glavnu lemu formulirali vrlo općenito, kako bi postigli uniformnu metodu dokaza potpunosti za različita proširenja sistema **IL**. U dokazivanju potpunosti pojedinog sistema $\mathbf{IL}X$ stoga je glavni preostali posao dokazati da $\mathbf{IL}X$ zadovoljava uvjete glavne leme.

Konzistentni skupovi formula

Definicija 3.11. *Neka je S skup formula i A formula. Kažemo da se* **formula** A **može izvesti iz skupa** S **u sistemu** $\mathbf{IL}X$, *i pišemo $S \vdash_{ILX} A$, ako postoji konačan niz formula (izvod) koji završava s A, a čiji svaki član je teorem sistema $\mathbf{IL}X$, formula iz S ili formula dobivena primjenom pravila izvoda modus ponens na formule koje joj prethode u nizu.*

Kažemo da je skup S jedan $\mathbf{IL}X-$konzistentan skup ako $S \nvdash_{ILX} \bot$.

Kažemo da je $\mathbf{IL}X-$konzistentan skup S maksimalan ako za svaku formulu A vrijedi $A \in S$ ili $\neg A \in S$.

Korolar 3.12. *Neka je $\mathfrak{F}$ neki* **IL**$X-$*okvir,* $\Vdash$ *proizvoljna relacija forsiranja na* $\mathfrak{F}$ *i* $w \in W$*. Tada je* $S = \{A : w \Vdash A\}$ *maksimalan* **IL**$X-$*konzistentan skup.*

Dokaz. Jasno, $\bot \notin S$. S druge strane, očito je S zatvoren na modus ponens, te zbog adekvatnosti Veltmanove semantike, svi teoremi sistema **IL**X su u S. Stoga za svaku formulu A vrijedi: ako $S \vdash_{ILX} A$, onda je $A \in S$. Sada je jasno da pretpostavka $S \vdash_{ILX} \bot$ vodi na kontradikciju. Q.E.D.

Za ovako definiran pojam izvoda vrijedi teorem dedukcije.

Propozicija 3.13. *Ako* $S \cup \{A\} \vdash_{ILX} B$*, onda* $S \vdash_{ILX} A \to B$*.*

Dokaz. Dovoljnost je očigledna. Nužnost se dokazuje indukcijom po duljini izvoda za B iz $S \cup \{A\}$. Baza indukcije je trivijalno ispunjena. Ako je duljina izvoda veća od 1, onda je formula B dobivena primjenom pravila modus ponens na neke formule C i $C \to B$ koje joj prethode u izvodu. Prema pretpostavci indukcije postoje izvodi za $A \to C$ i $A \to (C \to B)$ iz S. Koristeći formulu $(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$, koja je tautologija, pa stoga i teorem sistema **IL**X, sada se lako vidi da postoji i izvod za $A \to B$ iz S. Q.E.D.

Koristeći prethodnu propoziciju, standardnim argumentom se dokazuje analogon Lindenbaumove leme.

Lema 3.14. *Za svaki* **IL**$X-$*konzistentni skup formula* S *postoji neki maksimalan* **IL**$X-$*konzistentan skup formula* S' *takav da je* $S \subseteq S'$*.*

Dokaz. Skup svih formula logike interpretabilnosti je prebrojiv. Neka su $A_1, A_2, \dots$ sve formule. Definiramo:

$$\begin{aligned} S_0 &= S \\ S_{n+1} &= \begin{cases} S_n \cup \{A_{n+1}\}, \text{ ako } S_n \vdash_{ILX} A_{n+1}; \\ S_n \cup \{\neg A_{n+1}\}, \text{ inače;} \end{cases} \\ S' &= \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n. \end{aligned}$$

Indukcijom se dokazuje da je S_n jedan **IL**$X-$konzistentan skup za svaki $n \in \mathbb{N}$, a potom nije teško vidjeti sa je S' također **IL**$X-$konzistentan skup, te da je maksimalan. Dokažimo samo prvi slučaj koraka indukcije. Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup $S_n \cup \{A_{n+1}\}$ inkonzistentan. Tada $S_n \cup \{A_{n+1}\} \vdash_{ILX} \bot$, pa iz prethodne propozicije slijedi $S_n \vdash_{ILX} A_{n+1} \to \bot$. Primjenom pravila modus ponens dobivamo $S_n \vdash_{ILX} \bot$, što je u kontradikciji s pretpostavkom indukcije. Q.E.D.

Označeni okviri, problemi i nedostaci

Definicija označenog Veltmanovog okvira analogna je definiciji označenog okvira u dokazu potpunosti sistema **GL**, no ovdje osim označavanja svakog svijeta maksimalnim

$\mathbf{IL}X-$konsistentnim skupovima imamo i označavanje formulom nekih parova svjetova koji su povezani relacijom R. Ovo označavanje je potrebno kod osiguravanja da se uklonjeni $\mathcal{D}-$problemi neće ponovo pojaviti.

Definicija 3.15. **Označeni Veltmanov okvir** *je* $(\mathfrak{F}, \nu)$*, gdje je* $\mathfrak{F}$ *Veltmanov okvir, a* ν *funkcija koja svakom* $w \in W$ *pridružuje maksimalan* $\mathbf{IL}X-$*konzistentan skup* $\nu(w)$*, a nekim uređenim parovima* (u, v) *takvim da je* uRv *pridružuje formulu* $\nu(u, v)$.

Napomena 3.16. *Na označenom Veltmanovom okviru možemo definirati relaciju forsiranja i tako dobiti Veltmanov model tako da stavimo* $w \Vdash p$ *ako i samo ako* $p \in \nu(w)$ *(pritom se gubi informacija o označavanju). Obratno, Veltmanov model možemo promatrati kao označeni Veltmanov okvir, pri čemu je* $\nu(w) = \{A : w \Vdash A\}$ *(dok nijedan uređeni par nije označen).*

Definicija 3.17. *Neka je* $(\mathfrak{F}, \nu)$ *označeni okvir i* $\mathcal{D}$ *skup formula. Kažemo da* **lema o istinitosti vrijedi** *za* $(\mathfrak{F}, \nu)$ *u odnosu na* $\mathcal{D}$ *ako za svaki* $w \in W$ *i za svaku formulu* $A \in \mathcal{D}$ *vrijedi* $w \Vdash A$ *ako i samo ako* $A \in \nu(w)$ *(pri čemu je* $\Vdash$ *relacija forsiranja definirana u prethodnoj napomeni).*

Definicija 3.18. *Neka je* $(\mathfrak{F}, \nu)$ *označeni okvir i* $\mathcal{D}$ *skup formula.* $\mathcal{D}-$**problem** *je uređeni par* $(x, \neg(A \rhd B))$ *takav da je* $\neg(A \rhd B) \in \nu(x) \cap \mathcal{D}$ *i za svaki* y *takav da je* xRy *i* $A \in \nu(y)$ *postoji* z *takav da je* yS_xz *i* $B \in \nu(z)$. $\mathcal{D}-$**nedostatak** *je uređena trojka* $(x, y, A \rhd B)$ *takva da je* xRy, $A \rhd B \in \nu(x) \cap \mathcal{D}$ *i* $A \in \nu(y)$*, ali ne postoji* z *takav da je* yS_xz *i* $B \in \nu(z)$.

Eliminacija problema i nedostataka

Napomena 3.19. *Radi smanjenja broja slučajeva u dokazima indukcijom po složenosti formule, korisno je promatrati minimalni alfabet. Tako ćemo u nastavku smatrati da je jedini modalni operator u alfabetu* $\rhd$*, dok je* $\Box$ *definiran kao pokrata:* $\Box A$ *označava* $\neg A \rhd \bot$*. Naime, lako se vidi da vrijedi sljedeća ekvivalencija:* $w \Vdash \Box A$ *ako i samo ako* $w \Vdash \neg A \rhd \bot$ *(također, nije teško dokazati da vrijedi* $\vdash_{IL} \Box A \leftrightarrow \neg A \rhd \bot$*).*

Kao što je poznato iz logike sudova, u alfabetu nisu potrebni ni svi logički veznici (npr. iz $\neg$ *i* $\vee$ *moguće je definirati sve ostale).*

Lema 3.20. *Neka je* $(\mathfrak{F}, \nu)$ *označeni okvir i* $\mathcal{D}$ *skup formula zatvoren na potformule i operaciju* $\sim$*. Tada lema o istinitosti vrijedi za* $(\mathfrak{F}, \nu)$ *u odnosu na* $\mathcal{D}$ *ako i samo ako ne postoje* $\mathcal{D}-$*problemi ni* $\mathcal{D}-$*nedostaci.*

Dokaz. Nužnost je očigledna. Dokažimo dovoljnost. Pretpostavimo da ne postoje problemi ni nedostaci i indukcijom po složenosti formule dokažimo da vrijedi lema o istinitosti. Baza indukcije slijedi iz definicije relacije forsiranja. Korak indukcije se lako dokazuje za slučajeve formula dobivenih primjenom bulovskih veznika. Dokažimo tvrdnju koraka indukcije za formule oblika $A \rhd B \in \mathcal{D}$. Neka je $w \in W$. Treba dokazati da vrijedi: $w \Vdash A \rhd B$ ako i samo ako $A \rhd B \in \nu(w)$.

Pretpostavimo $w \Vdash A \rhd B$. Tada za svaki u takav da je wRu i $u \Vdash A$ postoji v takav da je uS_wv i $v \Vdash B$. Kako je $\mathcal{D}$ zatvoren na potformule, to su $A, B \in \mathcal{D}$ i to niže složenosti, pa iz pretpostavke indukcije slijedi da za svaki u takav da je wRu i $A \in \nu(u)$ postoji v takav da je uS_wv i $B \in \nu(v)$. Kada bi vrijedilo $A \rhd B \notin \nu(w)$, onda bi bilo $\neg(A \rhd B) \in \nu(w)$. No, kako je $\mathcal{D}$ zatvoren na operaciju $\sim$, to bi tada $(w, \neg(A \rhd B))$ bio $\mathcal{D}-$problem, suprotno pretpostavci. Dakle, $A \rhd B \in \nu(w)$.

Obratno, neka je $A \rhd B \in \nu(w)$. Pretpostavimo suprotno, tj. $w \nVdash A \rhd B$. Tada postoji u takav da je wRu i $u \Vdash A$ i za svaki v takav da je uS_wv vrijedi $v \nVdash B$. Po pretpostavci indukcije to znači da je $(w, u, A \rhd B)$ $\mathcal{D}-$nedostatak. Time je dobivena kontradikcija. Q.E.D.

Ideja eliminacije je vrlo jednostavna:

- $\mathcal{D}-$nedostatak $(x, y, A \rhd B)$ eliminiramo dodavanjem novog svijeta z takvog da je vS_wz i $B \in \nu(z)$;
- $\mathcal{D}-$problem $(x, \neg(A \rhd B))$ eliminiramo dodavanjem novog svijeta y takvog da je xRy i $A, \neg B \in \nu(y)$ koji je u relaciji S_w samo sa samim sobom.

Pomoćni pojmovi

Najprije definiramo neke relacije među maksimalnim konzistentnim skupovima.

Neka su S_1 i S_2 maksimalni **IL**$X-$konzistentni skupovi. Pišemo:

a) $S_1 \prec S_2$ ako iz $\Box A \in S_1$ uvijek slijedi $\Box A, A \in S_2$;

b) $S_1 \prec_C S_2$ ako iz $A \rhd C \in S_1$ uvijek slijedi $\neg A, \Box\neg A \in S_2$;

c) $S_1 \subseteq_\Box S_2$ ako $\Box A \in S_1$ uvijek povlači $\Box A \in S_2$.

Podsjetimo se, prvu relaciju smo koristili i u dokazu potpunosti sistema **GL** step–by–step metodom. Prva relacija može se definirati pomoću druge. Lako se vidi da vrijedi sljedeća ekvivalencija: $S_1 \prec S_2$ ako i samo ako $S_1 \prec_\perp S_2$.

Definicija 3.21. *Neka je $(\mathfrak{F}, \nu)$ označeni okvir, $x \in W$ i C formula. $C-$***kritični konus** *nad x (oznaka $\mathcal{C}_x^C$) je najmanji skup svjetova koji sadrži sve y takve da je $\nu(x, y) = C$ i zatvoren je na relacije S_x i R.*

Generalizirani $C-$**konus** *nad x (oznaka $\mathcal{G}_x^C$) je najmanji skup koji sadrži $\mathcal{C}_x^C$ i zatvoren je na relacije R i na S_w za svaki $w \in W$.*

Definicija 3.22. *Za označeni okvir kažemo da je* **adekvatan** *ako vrijedi:*

a) ako xRy onda je $\nu(x) \prec \nu(y)$;

b) ako $A \neq B$ onda je $\mathcal{G}_x^A \cap \mathcal{G}_x^B = \emptyset$;

c) ako $y \in \mathcal{C}_x^A$, onda je $\nu(x) \prec_A \nu(y)$.

Lema 3.23. *Neka je $(x, \neg(A \rhd B))$ $\mathcal{D}-$problem u adekvatnom označenom okviru. Tada za svaki $y \in \mathcal{C}_x^B$ vrijedi $A \notin \nu(y)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji $y \in \mathcal{C}_x^B$ takav da je $A \in \nu(y)$. Iz definicije kritičnog konusa slijedi xRy. Iz definicije $\mathcal{D}-$problema slijedi da postoji z takav da je yS_xz i $B \in \nu(z)$. No, tada je i $z \in \mathcal{C}_x^B$. Iz definicije adekvatnog okvira slijedi $\nu(x) \prec_B \nu(z)$. No, $\vdash_{ILX} B \rhd B$, pa je $B \rhd B \in \nu(x)$ i stoga posebno $\neg B \in \nu(z)$. Kontradikcija. Q.E.D.

Napomena 3.24. *Iz prethodne leme slijedi da u adekvatnom označenom okviru ne postoje $\mathcal{D}$-problemi ako ne postoji uređeni par $(x, \neg(A \rhd B))$ takav da je $\neg(A \rhd B) \in \nu(x) \cap \mathcal{D}$ i za svaki $y \in \mathcal{C}_x^B$ vrijedi $A \notin \nu(y)$. U nastavku ćemo takve parove $(x, \neg(A \rhd B))$ zvati $\mathcal{D}-$problemi.*

Definicija 3.25. *Kažemo da je $(\mathfrak{F}', \nu')$* **proširenje označenog okvira** $(\mathfrak{F}, \nu)$ *ako je $W \subseteq W'$ i relacije R, S_w i funkcija ν su restrikcije relacija R', S'_w, odnosno funkcije ν'.*

Napomena 3.26. *Proširenje općenito ne mora biti Veltmanov model. Definicija ovo dopušta jer u pojedinom koraku konstrukcije eliminiramo problem ili nedostatak dodavanjem novog svijeta, no od dobivene strukture ne možemo odmah zahtijevati da zadovoljava svojstva Veltmanovog modela (npr. R nije nužno tranzitivna). Stoga ćemo kod dokaza potpunosti pojedinih sistema definirati odgovarajuće tzv. kvaziokvire.*

Definicija 3.27. *Neka je $\mathfrak{F}$ konačan Veltmanov okvir. Maksimalnu duljinu niza oblika $x_0R \ldots Rx_n$ zovemo* **dubina okvira** $\mathfrak{F}$.

Indeksiranu familiju označenih okvira $(\mathfrak{F}_i, \nu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zovemo **lanac** *ako je $(\mathfrak{F}_{i+1}, \nu_{i+1})$ proširenje označenog okvira $(\mathfrak{F}_i, \nu_i)$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Kažemo da je lanac* **ograničen** *ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je dubina svih članova lanca manja od n.* **Unija ograničenog lanca označenih okvira** *je označeni okvir čiji nosač, relacija dostiživosti, relacije S_w i funkcija ν su definirani kao unije odgovarajućih komponenata članova lanca.*

Napomena 3.28. *Lako se vidi da je unija ograničenih lanaca zaista označeni okvir, tj. da vrijede sva svojstva iz definicije Veltmanovog okvira. Uočimo da je ograničenost lanca nužan uvjet da relacija dostiživosti unije bude inverzno dobro fundirana.*

Glavna lema

Lema 3.29. *Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula zatvoren na potformule i operaciju $\sim$. Neka je $\mathcal{I}$ klasa označenih okvira tako da vrijedi:*

a) ako je $(\mathfrak{F}, \nu)$ unija ograničenog lanca označenih okvira iz $\mathcal{I}$ onda je $\mathfrak{F}$ jedan **IL**$X-$*okvir;*

b) za svaki $(\mathfrak{F}, \nu)$ iz $\mathcal{I}$ i za sve $x, y \in W$, takve da je xRy, postoji formula $D \in \mathcal{D}$ takva da je $\Box\neg D \in \nu(y) \setminus \nu(x)$;

c) Za svaki adekvatni označeni okvir $(\mathfrak{F}, \nu)$ iz klase $\mathcal{I}$, svaki $\mathcal{D}-$problem i $\mathcal{D}-$nedostatak može se eliminirati proširenjem do adekvatnog označenog okvira koji je također u $\mathcal{I}$.

Ako postoji takva klasa $\mathcal{I}$, onda se svaki konačan adekvatan označeni okvir $(\mathfrak{F}, \nu)$ iz $\mathcal{I}$ može proširiti do adekvatnog označenog okvira $(\hat{\mathfrak{F}}, \hat{\nu})$ takvog da je $\hat{\mathfrak{F}}$ jedan **IL***$X-$okvir i za kojeg vrijedi lema o istinitosti u odnosu na $\mathcal{D}$.*

Nadalje, ako za bilo koji konačan $\mathcal{D}$ zatvoren na potformule i operaciju $\sim$ postoji takva klasa $\mathcal{I}$ tako da je svaki jednočlani označeni okvir u klasi $\mathcal{I}$, onda je **IL***X potpun sistem.*

Dokaz. Neka je $(\mathfrak{F}, \nu)$ adekvatan označeni okvir iz klase $\mathcal{I}$. Dovoljno je dokazati da se $(\mathfrak{F}, \nu)$ može proširiti do adekvatnog označenog okvira $(\hat{\mathfrak{F}}, \hat{\nu})$ takvog da je $\hat{\mathfrak{F}}$ jedan **IL**$X-$okvir i u kojem nema problema ni nedostataka.

Stavimo $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$. Promotrimo skup

$$\mathcal{A} = \{(x, \neg(A \rhd B)) : x \in X, \neg(A \rhd B) \in \mathcal{D}\} \cup \{(x, y, C \rhd D) : x, y, \in X, C \rhd D \in \mathcal{D}\}.$$

Taj skup je prebrojiv. Fiksirajmo neko nizanje elemenata tog skupa.

Stavimo $\mathfrak{F}_0 = (\mathfrak{F}, \nu)$. Definirat ćemo lanac adekvatnih označenih okvira $\mathfrak{F}_i$, $i \in \mathbb{N}$ u klasi $\mathcal{I}$ (umjesto ν_i pisat ćemo ν za sve i. Također ćemo koristiti oznake R i S_w bez dodatnih indeksa za odgovarajuće relacije u svim članovima niza). Pretpostavimo da je definiran $\mathfrak{F}_i$ i fiksirajmo jednu bijekciju koja njegove elemente preslikava u početni komad skupa X. Drugim riječima, označimo njegove elemente s $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Promotrimo najmanji element skupa $\mathcal{A}$ (s obzirom na fiksirano nizanje elemenata tog skupa) koji je problem ili nedostatak u $\mathfrak{F}_i$.

Prema pretpostavci leme, $\mathfrak{F}_i$ se može proširiti do adekvatnog označenog okvira $\mathfrak{F}_{i+1}$ koji je također u $\mathcal{I}$, a u kojem ne postoji taj problem, odnosno nedostatak. Dokažimo da se on neće ponovo pojaviti u nastavku konstrukcije.

Ako je riješ o nedostatku $(x, y, C \rhd D)$, $C \rhd D \in \nu(x)$, $C \in \nu(y)$, u $\mathfrak{F}_{i+1}$ to više nije nedostatak, pa postoji z takav da je yS_xz i $D \in \nu(z)$. No, taj z će biti sadržan i u svim proširenjima okvira $\mathfrak{F}_{i+1}$, pa $(x, y, C \rhd D)$ ni u njima neće biti nedostatak.

Ako je pak riječ o problemu $(x, \neg(A \rhd B))$ koji je u $\mathfrak{F}_{i+1}$ eliminiran, onda u $\mathfrak{F}_{i+1}$ postoji $y \in \mathcal{C}_x^B$ takav da je $A \in \nu(y)$. No, taj y će biti sadržan i u svim proširenjima okvira $\mathfrak{F}_{i+1}$, pa $(x, \neg(A \rhd B))$ ni u njima neće biti problem.

Očito je svaki problem i nedostatak eliminiran u nekom članu lanca i u njihovoj uniji. Iz drugog uvjeta u pretpostavkama leme slijedi da niz oblika $w_0Rw_1Rw_2\ldots$ ne može imati duljinu veću od broja elemenata skupa $\mathcal{D}$. Dakle, dobiveni lanac je ograničen. Iz prvog uvjeta u pretpostavkama leme sada slijedi da je unija $\hat{\mathfrak{F}}$ dobivenog lanca **IL**$X-$okvir. Lako se vidi da je $\hat{\mathfrak{F}}$ adekvatan, tj. da na uniji ograničenog lanca adekvatnih okvira vrijede sva svojstva iz definicije adekvatnosti. Sada, kako u $\hat{\mathfrak{F}}$ nema problema ni nedostataka, zaključujemo da za $\hat{\mathfrak{F}}$ vrijedi lema o istinitosti u odnosu na $\mathcal{D}$.

Preostaje dokazati drugu tvrdnju leme, tj. da iz pretpostavki navedenih u iskazu leme slijedi potpunost sistema $\mathbf{IL}X$. Neka je A formula takva da $\nvdash_{ILX} A$. Treba dokazati da postoji $\mathbf{IL}X-$-model i svijet w tog modela takav da je $w \Vdash \neg A$.

Neka je Γ maksimalan konzistentan skup koji sadrži $\neg A$ i neka je $\mathcal{D}$ najmanji skup koji sadrži $\neg A$ i zatvoren je na potformule i za operaciju $\sim$. Prema pretpostavci, postoji klasa $\mathcal{I}$ sa svojstvima nevedenim pretpostavci leme takva da je svaki jednočlani označeni okvir u $\mathcal{I}$, pa tako i označeni (i trivijalno adekvatan) okvir $\mathfrak{F}$ čiji nosač je $\{x_0\}$, $R = \emptyset$ i $S_{x_0} = \emptyset$, te $\nu(x_0) = \Gamma$. Prema prvoj tvrdnji leme, $\mathfrak{F}$ se može proširiti do $\mathbf{IL}X-$okvira $\hat{\mathfrak{F}}$ za koji vrijedi lema o istinitosti u odnosu na $\mathcal{D}$, pa za odgovarajuću relaciju forsiranja $\Vdash$ u $\hat{\mathfrak{F}}$ vrijedi $x_0 \Vdash \neg A$, što je i trebalo dokazati. Q.E.D.

Sljedeće leme koristit će se za definiranje maksimalnih konzistentnih skupova kojima će biti označeni svjetovi koje dodajemo radi uklanjanja problema i nedostataka.

Lema 3.30. *Neka je Γ maksimalan $\mathbf{IL}X-$konzistentan skup i $\neg(A \rhd B) \in \Gamma$. Tada postoji maksimalan $\mathbf{IL}X-$konzistentan skup Δ takav da je $\Gamma \prec_B \Delta$ i $A, \Box\neg A \in \Delta$.*

Dokaz. Treba dokazati da je skup formula $S = \{\neg C, \Box\neg C : C \rhd B \in \Gamma\} \cup \{A, \Box\neg A\}$ konzistentan. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje formule $C_1, \ldots, C_n$ takve da je $C_i \rhd B \in \Gamma$ za svaki i i $\neg C_1, \ldots \neg C_n, \Box\neg C_1, \ldots, \Box\neg C_n, A, \Box\neg A \vdash_{ILX} \bot$.

Stavimo $C = C_1 \vee \cdots \vee C_n$. Lako se vidi da je $C \rhd B \in \Gamma$ i pritom vrijedi $\neg C, \Box\neg C, A, \Box\neg A \vdash_{ILX} \bot$. Stoga je $\vdash_{ILX} A \wedge \Box\neg A \to C \vee \Diamond C$. Lako je dokazati da za sve formule A i C vrijedi $\vdash_{ILX} A \rhd (A \wedge \Box\neg A)$ i $\vdash_{ILX} (C \vee \Diamond C) \rhd C$. Stoga je $\vdash_{ILX} A \rhd C$. Kako je $C \rhd B \in \Gamma$, to je i $A \rhd B \in \Gamma$. No, to je u kontradikciji s pretpostavkom leme. Q.E.D.

Lema 3.31. *Neka su Γ i Δ maksimalni $\mathbf{IL}X-$konzistentni skupovi takvi da je $\Gamma \prec_B \Delta$ i neka je $C \rhd D \in \Gamma$ i $C \in \Delta$. Tada postoji maksimalan $\mathbf{IL}X-$konzistentan skup Δ' takav da je $\Gamma \prec_B \Delta'$ i $D, \Box\neg D \in \Delta'$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Iz prethodne leme slijedi $D \rhd B \in \Gamma$. Kako je po pretpostavci $C \rhd D \in \Gamma$, to je onda i $C \rhd B \in \Gamma$. No, iz $\Gamma \prec_B \Delta$ sada posebno slijedi $\neg C \in \Delta$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Q.E.D.

Uočimo da iz $\Gamma \prec_B \Delta$ uvijek slijedi $\Gamma \prec \Delta$. Naime, neka je $\Box A \in \Gamma$. Tada je i $\neg A \rhd \bot \in \Gamma$. No, $\vdash_{ILX} \bot \rhd B$, pa je i $\neg A \rhd B \in \Gamma$. Sada iz $\Gamma \prec_B \Delta$ slijedi $A, \Box A \in \Delta$.

Dokaz potpunosti sistema IL step–by–step metodom

Definicija 3.32. **Kvaziokvir** *je uređena četvorka $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \nu)$, gdje je $W \neq \emptyset$, R inverzno dobro fundirana relacija na W, S_w binarna relacija na $\{u \in W : wRu\}$ za svaki $w \in W$, te ν funkcija označavanja definirana kao za označene okvire, tako da vrijede sva tri uvjeta kao u definiciji adekvatnih označenih okvira, pri čemu su kritični i generalizirani konusi definirani kao za označene okvire.*

Lema 3.33. *Neka je* $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \nu)$ *kvaziokvir. Tada postoji adekvatan označeni okvir* $(W, R', \{S'_w : w \in W\}, \nu)$ *takav da je* $R \subseteq R'$ *i* $S_w \subseteq S'_w$*, za sve* $w \in W$*.*

Dokaz. Rekurzivno proširujemo relacije R i S_w tako da uklonimo protuprimjere za tranzitivnost relacije R, refleksivnost i tranzitivnost relacija S_w i svojstvo da S_w proširuje R na $\{u \in W : wRu\}$. Lako se dokazuje da dobivamo niz kvaziokvira (štoviše, kritični i generalizirani konusi se ovim proširenjima ne mijenjaju), čija unija je adekvatan označeni okvir. Provjera svih svojstava je opsežna, ali rutinska, pa detalje ispuštamo. Q.E.D.

Proširenje iz dokaza leme je minimalno i zovemo ga **IL**–*zatvarač* kvaziokvira.

Korolar 3.34. *Neka je* $\mathcal{D}$ *konačan skup formula zatvoren na potformule i operaciju* $\sim$ *. Neka je* $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \nu)$ *kvaziokvir takav da za sve* $x, y \in W$*, za koje vrijedi* xRy*, postoji formula* $D \in \mathcal{D}$ *takva da je* $\Box\neg D \in \nu(y) \setminus \nu(x)$*. Tada i njegov* **IL**–*zatvarač ima analogno svojstvo.*

Dokaz. Treba provjeriti da je traženo svojstvo očuvano u koraku rekurzije iz dokaza prethodne leme. Promotrimo samo slučaj kad u danom kvaziokviru imamo $aRbRc$ i stoga u njegovom **IL**–zatvaraču vrijedi $aR'c$. Treba dokazati da postoji formula $D \in \mathcal{D}$ takva da je $\Box\neg D \in \nu(c) \setminus \nu(a)$. Iz definicije kvaziokvira slijedi $\nu(a) \prec \nu(b) \prec \nu(c)$, a po pretpostavci korolara postoji formula $D \in \mathcal{D}$ takva da je $\Box\neg D \in \nu(c) \setminus \nu(b)$. Iz definicije relacije $\prec$ slijedi $\Box\neg D \notin \nu(a)$, što je i trebalo dokazati. Q.E.D.

Teorem 3.35. *Sistem* **IL** *je potpun u odnosu na Veltmanovu semantiku.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula zatvoren na potformule i operaciju $\sim$. Neka je $\mathcal{I}$ klasa svih označenih okvira za koje vrijedi: za sve $x, y \in W$ takve da je xRy postoji fromula $D \in \mathcal{D}$ takva da je $\Box\neg D \in \nu(y) \setminus \nu(x)$. Iz glavne leme slijedi da treba dokazati:

a) svaki jednočlani označeni okvir je u klasi $\mathcal{I}$;

b) unija ograničenog lanca označenih okvira je **IL**–okvir;

c) svaki problem i nedostatak u adekvatnom označenom okviru iz $\mathcal{I}$ može se eliminirati proširenjem do adekvatnog označenog okvira koji je također u $\mathcal{I}$.

Prvi i drugi uvjet su trivijalno ispunjeni (u slučaju sistema **IL** radi se o klasi svih Veltmanovih okvira, a već smo napomenuli da je unija ograničenog lanca zaista označeni Veltmanov okvir). Preostaje dokazati treći uvjet. Neka je $(\mathfrak{F}, \nu)$ adekvatan označeni okvir iz $\mathcal{I}$.

Neka je $(a, \neg(A \rhd B))$ problem. Iz leme 3.30 slijedi da postoji skup formula Δ takav da je $\nu(a) \prec_B \Delta$ i $A, \Box\neg A \in \Delta$. Uzmimo neki $b \notin W$. Promotrimo strukturu s nosačem $W \cup \{b\}$, relacijom dostiživosti $R \cup \{(a, b)\}$, nepromijenjenim relacijama

S_w, $w \in W$ i $S_b = \emptyset$, te ν proširenom s $\nu(b) = \Delta$ i $\nu(a,b) = B$. Lako se vidi da je ta struktura kvaziokvir. Provjerimo samo da 3. svojstvo iz definicije adekvatnog označenog okvira vrijedi i za novi svijet b, tj. ako je $b \in \mathcal{C}_x^C$, onda je $\nu(x) \prec_C \nu(b)$. U slučaju $x = a$, kako je $\nu(a,b) = B$ i $\nu(b) = \Delta$, to je $b \in \mathcal{C}_a^B$ i $\nu(a) \prec_B \nu(b)$. U slučaju $x \neq a$, iz $b \in \mathcal{C}_x^C$ slijedi $a \in \mathcal{C}_x^C$, dakle $\nu(x) \prec_C \nu(a)$. No, kako je $\nu(a) \prec \nu(b)$, to je i $\nu(x) \prec_C \nu(b)$. Također, na tom kvaziokviru vrijedi svojstvo iz definicije klase $\mathcal{I}$, jer je $A \in \mathcal{D}$ i $\Box\neg A \in \nu(b) \setminus \nu(a)$. Stoga se taj kvaziokvir može proširiti do adekvatnog označenog okvira iz klase $\mathcal{I}$, u kojem $(a, \neg(A \rhd B))$ očito nije problem.

Neka je sada $(a, b, C \rhd D)$ nedostatak. Neka je B formula takva da je $b \in \mathcal{C}_a^B$. Ako takva formula ne postoji, stavimo da je B jednaka $\bot$. Ako takva formula postoji onda je jedinstvena po svojstvu 2 iz definicije adekvatnog označenog okvira. Iz leme 3.31 slijedi da postoji skup formula Δ' takav da je $\nu(a) \prec_B \Delta'$ i $D, \Box\neg D \in \Delta'$. Uzmimo neki $c \notin W$. Promotrimo strukturu s nosačem $W \cup \{c\}$, relacijom dostiživosti $R \cup \{(a,c)\}$, nepromijenjenim relacijama S_w, $w \in W$, osim $S_a \cup \{(b,c)\}$, te $S_c = \emptyset$ i ν proširenom s $\nu(c) = \Delta'$. Lako se vidi da je to kvaziokvir. Pritom vrijedi svojstvo iz definicije klase $\mathcal{I}$, jer je $\Box\neg D \in \nu(c) \setminus \nu(a)$. Stoga se taj kvaziokvir može proširiti do adekvatnog označenog okvira iz klase $\mathcal{I}$, u kojem $(a, b, C \rhd D)$ nije nedostatak.

Q.E.D.

Dokaz potpunosti sistema ILM step–by–step metodom

Podsjetimo se da je sistem **IL**M je proširenje sistema **IL** shemom aksioma M$\equiv A \rhd B \to (A \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C)$ (princip Montagne). Pritom za Veltmanov okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi: $\mathfrak{F} \Vdash M$ ako i samo ako uS_wvRz uvijek povlači uRz. Takav okvir $\mathfrak{F}$ nazivamo **IL**M–okvir.

Definicija 3.36. *Adekvatan označeni okvir* $(\mathfrak{F}, \nu)$ *zovemo* **adekvatan ILM-okvir** *ako je* $\mathfrak{F}$ **IL***M–okvir i za sve* $w, u, v \in W$ *vrijedi: ako je* uS_wv*, onda je* $\nu(u) \subseteq_\Box \nu(v)$.

Definicija 3.37. *Neka je* $(\mathfrak{F}, \nu)$ *označeni okvir,* $x \in W$ *i* C *formula.* $C-$**kritični** $\mathcal{M}-$**konus** *nad* x *(oznaka* $\mathcal{M}_x^C$*) je najmanji skup svjetova koji sadržii* $\mathcal{C}_x^C$ *i zatvoren je na* R, S_x *i* $R \circ S^{tr}$*, gdje je* S^{tr} *tranzitivno zatvorenje relacije* S *definirane tako da stavimo* uSv *ako i samo ako postoji* w *takav da je* uS_wv.

Definicija 3.38. **IL***M*–**kvaziokvir** *je kvaziokvir takav da vrijedi:*

a) ako je yS_xz *onda je* $\nu(y) \subseteq_\Box \nu(z)$;

b) ako je $y \in \mathcal{M}_x^A$*, onda je* $\nu(x) \prec_A \nu(y)$;

c) $S^{tr} \circ R^{tr}$ *je inverzno dobro fundirana.*

Lako se vidi da je $\mathcal{C}_x^A \subseteq \mathcal{M}_x^A \subseteq \mathcal{G}_x^A$, te da na **IL**M–okviru vrijedi $\mathcal{M}_x^A = \mathcal{C}_x^A$.

Lema 3.39. *Neka je* $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \nu)$ **IL***M–kvaziokvir. Tada postoji adekvatni* **IL***M–okvir* $(W, R', \{S'_w : w \in W\}, \nu)$ *takav da je* $R \subseteq R'$ *i* $S_w \subseteq S'_w$, $w \in W$.

Dokaz. Rekurzivno proširujemo relacije R i S_w tako da uklonimo protuprimjere za svojstva iz definicije Veltmanovog okvira kao u dokazu analogne leme za sistem **IL**, te za svojstvo da iz uS_wvRz uvijek slijedi uRz. Lako se dokazuje da dobivamo niz **IL**M–kvaziokvira (pritom se kritični $\mathcal{M}$-konusi i generalizirani konusi ne mijenjaju), čija unija je adekvatan **IL**M–okvir. I ovdje detalje ispuštamo. Q.E.D.

Proširenje iz dokaza leme je minimalno i zovemo ga **IL**M–*zatvarač*.

Korolar 3.40. *Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula zatvoren na potformule i operaciju $\sim$. Neka je $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \nu)$* **IL**M*–kvaziokvir takav da za sve $x, y \in W$ takve da je xRy postoji $D \in \mathcal{D}$ takva da je $\Box\neg D \in \nu(y) \setminus \nu(x)$. Tada i njegov* **IL**M*–zatvarač ima analogno svojstvo.*

Dokaz. Dokazuje se slično kao analogni korolar za sistem **IL**. Dokažimo samo da, ako u danom **IL**M–kvaziokviru imamo uS_wvRz i stoga u **IL**M–zatvaraču $uR'z$ postoji fromula $D \in \mathcal{D}$ tako da je $\Box\neg D \in \nu(z) \setminus \nu(u)$. Po pretpostavci korolara postoji formula $D \in \mathcal{D}$ tako da je $\Box\neg D \in \nu(z) \setminus \nu(v)$, a po definiciji **IL**M–kvaziokvira iz uS_wv slijedi $\nu(u) \subseteq_\Box \nu(v)$. Q.E.D.

Za dokaz potpunosti sistema **IL**M trebamo pojačati lemu koju koristimo za uklanjanje nedostataka (analogon leme 3.31).

Lema 3.41. *Neka su Γ i Δ maksimalni* **IL**M*–konzistentni skupovi takvi da je $\Gamma \prec_B \Delta$ i neka je $C \rhd D \in \Gamma$ i $C \in \Delta$. Tada postoji maksimalan* **IL**M*–konzistentan skup Δ' takav da je $\Gamma \prec_B \Delta'$, $\Delta \subseteq_\Box \Delta'$ i $D, \Box\neg D \in \Delta'$.*

Dokaz. Ako je skup $\{\neg A, \Box\neg A : A \rhd B \in \Gamma\} \cup \{\Box E : \Box E \in \Delta\} \cup \{D, \Box\neg D\}$ konzistentan, onda slijedi tvrdnja. Pretpostavimo suprotno. Tada vrijedi:

$$\neg A_1, \ldots, \neg A_n, \Box\neg A_1, \ldots, \Box\neg A_n, \Box E_1, \ldots, \Box E_m, D, \Box\neg D \vdash_{ILM} \bot,$$

za neke formule $A_1 \rhd B, \ldots, A_n \rhd B \in \Gamma$ i $\Box E_1, \ldots, \Box E_m \in \Delta$. Uočimo da je pritom $\Box E \in \Delta$, gdje je $E = E_1 \wedge \cdots \wedge E_m$. Sada je jasno da je dovoljno dokazati sljedeće kako bismo dobili kontradikciju: za svaku formulu $\Box E \in \Delta$ postoji maksimalan **IL**M–konzistentan skup Δ'' takav da je $\Gamma \prec_B \Delta''$ i $\Box E, D, \Box\neg D \in \Delta''$.

Kako je $C \rhd D \in \Gamma$, koristeći princip M dobivamo $(C \wedge \Box E) \rhd (D \wedge \Box E) \in \Gamma$. Pritom je $C \wedge \Box E \in \Delta$. Prema lemi 3.31 postoji skup Δ'' takav da je $\Gamma \prec_B \Delta''$ i $D \wedge \Box E, \Box(\neg D \vee \neg\Box E) \in \Delta''$. Odmah imamo $\Box E, D \in \Delta''$. Lako se vidi da vrijedi $\vdash_{ILM} \Box E \wedge \Box(\neg D \vee \neg\Box E) \to \Box\neg D$, pa je i $\Box\neg D \in \Delta''$. Q.E.D.

Teorem 3.42. *Sistem* **IL**M *je potpun u odnosu na Veltmanovu semantiku.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula zatvoren na potformule i operaciju $\sim$. Neka je $\mathcal{I}$ klasa svih označenih okvira $(\mathfrak{F}, \nu)$ takvih da vrijedi:

a) za sve x, y takve da je xRy, postoji formula $D \in \mathcal{D}$ takva da je $\Box\neg D \in \nu(y) \setminus \nu(x)$;

b) za sve w, u, v, z, ako je uS_wvRz, onda je uRz (tj. $\mathfrak{F}$ je $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–okvir).

Prema glavnoj lemi, dovoljno je dokazati:

(1) svaki jednočlani označeni okvir je u klasi $\mathcal{I}$;

(2) unija ograničenog lanca označenih okvira iz $\mathcal{I}$ je $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–okvir;

(3) svaki problem i nedostatak u adekvatnom $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–okviru iz $\mathcal{I}$ može se eliminirati proširenjem do adekvatnog $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–okvira koji je također u $\mathcal{I}$.

Prvi uvjet je trivijalno ispunjen, a za drugi je dovoljno primijetiti da je unija ograničenog lanca $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–okvira također $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–okvir, što je očigledno. Preostaje dokazati da vrijedi treći uvjet.

Neka je $(\mathfrak{F}, \nu)$ adekvatan $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–okvir iz $\mathcal{I}$.

Neka je $(a, \neg(A \rhd B))$ problem. Okvir proširujemo kao u dokazu potpunosti sistema $\mathbf{IL}$: za neki $b \notin W$, nosač proširimo na $W \cup \{b\}$, relaciju dostiživosti na $R \cup \{(a, b)\}$, ne mijenjamo relacije S_w za $w \in W$, stavimo $S_b = \emptyset$, te ν proširimo s $\nu(a, b) = B$ i $\nu(b) = \Delta$, pri čemu je $\nu(a) \prec_B \Delta$ i $A, \Box\neg A \in \Delta$ (takav Δ postoji prema lemi 3.30). Lako se vidi da na dobivenoj strukturi vrijedi prvi uvjet iz definicije klase $\mathcal{I}$, pa preostaje dokazati da je ta struktura $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–kvaziokvir (čiji $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–zatvarač je očito u klasi $\mathcal{I}$ i na njemu više ne postoji taj problem). Iz dokaza potpunosti sistema $\mathbf{IL}$ slijedi da je kvaziokvir. Preostaje provjeriti tri nova uvjeta iz definicije $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–kvaziokvira.

Provjerimo samo da drugo svojstvo vrijedi i za novi svijet b, tj. da iz $b \in \mathcal{M}_x^C$ slijedi $\nu(x) \prec_C \nu(b)$. Za $x = a$ imamo $b \in \mathcal{C}_x^B \subseteq \mathcal{M}_x^B$ i $\nu(a) \prec_B \nu(b)$. Za $x \neq a$, ako je $a \in \mathcal{M}_x^C$, onda je $\nu(x) \prec_C \nu(a) \prec \nu(b)$ i stoga $\nu(x) \prec_C \nu(b)$. Preostaje slučaj $x \neq a$ i $a \notin \mathcal{M}_x^C$. No, to je moguće samo ako postoji $a' \in \mathcal{M}_x^C$ tako da je $a' S^{tr} a$. Sada imamo $\nu(x) \prec_C \nu(a') \subseteq_\Box \nu(a) \prec \nu(b)$. Lako se vidi da slijedi $\nu(x) \prec_C \nu(b)$.

Neka je sada $(a, b, C \rhd D)$ nedostatak. Neka je B formula takva da je $b \in \mathcal{C}_a^B$, ili $\perp$ ako takva B ne postoji. Prema prethodnoj lemi postoji Δ' takav da je $\nu(a) \prec_B \Delta'$, $\nu(b) \subseteq_\Box \Delta'$ i $D, \Box\neg D \in \Delta'$. Za neki $c \notin W$, nosač proširimo na $W \cup \{c\}$, relaciju dostiživosti na $R \cup \{(a, c)\}$, ne mijenjamo relacije S_w za $w \in W$, osim što definiramo $S_a \cup \{(b, c)\}$, te stavimo $S_c = \emptyset$. Funkciju označavanja ν proširimo s $\nu(c) = \Delta'$. Slično kao u dijelu dokaza za probleme, lako se vidi da je to $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–kvaziokvir za koji vrijedi prvo svojstvo iz definicije klase $\mathcal{I}$, pa tvrdnja slijedi primjenom prethodnog korolara, pri čemu je očito da na $\mathbf{IL}\mathtt{M}$–zatvaraču više ne postoji taj nedostatak. Q.E.D.

Potpunost sistema $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$

Podsjetimo se, sistem $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ je proširenje sistema $\mathbf{IL}$ shemom aksioma $\mathtt{M}_0 \equiv A \rhd B \to (\Diamond A \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C)$. Za Veltmanov okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{M}_0$ ako i samo ako $wRuRxS_wyRz$ uvijek povlači uRz. Takav Veltmanov okvir $\mathfrak{F}$ nazivamo $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvir.

Koristeći step–by–step metodu u dokazivanju potpunosti uvijek trebamo osigurati da wRx povlači $\nu(w) \prec \nu(x)$. Za sistem $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ to znači da treba vrijediti: ako je $wRuRxS_wyRz$ onda je $\nu(u) \prec \nu(z)$. U tu svrhu očito je dovoljno osigurati da

$wRuRxS_wy$ uvijek povlači $\nu(u) \subseteq_\Box \nu(y)$. Stoga će to biti jedno od svojstava u definiciji adekvatnog $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvira. Sljedeći primjer pokazuje neke poteškoće na koje nailazimo nastojeći osigurati da se to svojstvo očuva kod proširenja označenih okvira, te ideje rješavanja tih poteškoća.

Primjer 3.43. *Promotrimo označeni okvir s nosačem $\{w, u, x\}$ takav da je $wRuRx$ i $C \rhd D \in \nu(w)$, $C \in \nu(x)$. Nedostatak $(w, x, C \rhd D)$ možemo eleiminirati ako možemo dodati svijet y takav da je xS_wy i $D \in \nu(y)$, te $\nu(u) \subseteq_\Box \nu(y)$.*

U ovom primjeru problem možemo riješiti koristeći sljedeću tvrdnju, koja se lako dokazuje kao analogna lema za sistem $\mathbf{IL}\mathtt{M}$, primjenom principa $\mathtt{M}_0$ umjesto $\mathtt{M}$ na istom mjestu u dokazu:

> *Neka su Γ i Δ maksimalni $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$konzistentni skupovi takvi da je $\Gamma \prec_B \Delta$ i neka je $C \rhd D \in \Gamma$ i $\Diamond C \in \Delta$. Tada postoji maksimalan $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$konzistentan skup Δ' takav da je $\Gamma \prec_B \Delta'$, $\Delta \subseteq_\Box \Delta'$ i $D, \Box\neg D \in \Delta'$.*

Međutim, ako u nosaču postoji i $u' \neq u$ takav da je $wRuRx$ i $wRu'Rx$, onda treba vrijediti $\nu(u) \subseteq_\Box \nu(y)$ i $\nu(u') \subseteq_\Box \nu(y)$, što prethodna tvrdnja ne osigurava, jer treba naći isti Δ' za $\nu(u)$ i $\nu(u')$. Rješenje će biti neka svojstva koja ćemo zahtijevati od klase $\mathcal{I}$ iz glavne leme, a koja osiguravaju da su u ovakvim primjerima neposredni prethodnici svijeta x linearno uređeni relacijom $\subseteq_\Box$, a veći su u smislu relacije $\subseteq_\Box$ od svih ostalih, što osigurava $\nu(u) \subseteq_\Box \nu(u')$ ili $\nu(u') \subseteq_\Box (u)$, pa je dovoljno promatrati jedan od svjetova između w i x.

Pritom, ako je $\nu(w) \prec_A \nu(x)$, želimo i $\nu(w) \prec_A \nu(y)$. Stoga trebamo osigurati da $wRuRx$ i $x \in \mathcal{C}_w^A$ povlači $\nu(w) \prec_A \nu(u)$. To ćemo također riješiti odgovarajućim zahtjevom na klasu $\mathcal{I}$.

No, ako pritom dobijemo nedostatak $(w, y, E \rhd F)$ i kasnije ga eliminiramo dodavanjem y' takvog da je yS_wy' i $F \in \nu(y')$, onda po tranzitivnosti relacije S_w mora biti i xS_wy', pa imamo $wRuRxS_wy'$ i stoga mora biti $\nu(u) \subseteq_\Box \nu(y')$. Spomenuti analogon leme to ne osigurava, jer je moguće $\Diamond E \notin \nu(u)$, pa će nam biti potrebna složenija lema za eliminaciju nedostataka.

Lema 3.44. *Neka su Γ i Δ maksimalni $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$-konzistentni skupovi formula takvi da je $\Gamma \prec_C \Delta$, $P \rhd Q \in \Gamma$, $\Diamond P \in \Delta$ i $S_1 \rhd T_1, \ldots, S_n \rhd T_n \in \Gamma$.*

Tada postoje maksimalni $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$konzistentni skupovi $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$, pri čemu je $k \leqslant n$, takvi da vrijedi:

a) $\Gamma \prec_C \Delta_i$ *za svaki* i;

b) $\Delta \subseteq_\Box \Delta_i$ *za svaki* i;

c) $Q \in \Delta_0$;

d) ako je $S_j \in \Delta_h$ *za neke* j, h, *onda je* $T_j \in \Delta_i$ *za neki* i.

Za bilo koju binarnu relaciju R sa R^* označavamo njeno refleksivno i tranzitivno zatvorenje, a sa R^1 označavamo relaciju neposrednog $R-$sljedbenika. Također, za relaciju S_w sa $\mathcal{S}_w$ označavamo relaciju definiranu tako da je $x\mathcal{S}_w y$ ako i samo ako je $xS_w y$, ali $x \neq y$ i ne vrijedi $x(S_w \cup R)^* \circ R \circ (S_w \cup R)^* y$.

Definicija 3.45. *Adekvatan označeni okvir* $(\mathfrak{F}, \nu)$ *zovemo* **adekvatan IL**$\mathtt{M}_0$**−okvir** *ako je* $\mathfrak{F}$ *jedan* **IL**$\mathtt{M}_0$*−okvir i za sve* $w, u, x, y \in W$ *vrijedi:*

a) ako je $wRuRxS_w y$ *onda je* $\nu(u) \subseteq_\Box \nu(y)$*;*

b) ako je $xS_w y$ *onda je* $x(\mathcal{S}_w \cup R)^* y$*;*

c) ako je xRy *onda je* $x(R^1)^{tr} y$*.*

Neka je $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \nu)$ kvaziokvir. S K označavamo najmanju tranzitivnu binarnu relaciju na W takvu da je $R \subseteq K$ i za sve $w, u, x, y, z \in W$ vrijedi: ako je $wKuK^1x(\mathcal{S}_w)^{tr}yK^1z$, onda je uKz.

Očito, ako je $(W, R, \{S_w : w \in W\})$ **IL**$\mathtt{M}_0$−okvir, onda je $K = R$. Lako se vidi da ako proširimo relaciju R unutar relacije K onda se relacija K ne mijenja.

Definicija 3.46. *Neka je* $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \nu)$ *kvaziokvir,* $x \in W$ *i* C *formula. S* $\mathcal{N}_x^C$ *označavamo najmanji skup svjetova koji sadržii* $\mathcal{C}_x^C$ *i zatvoren je na* K *i* S_x*.*

Na **IL**$\mathtt{M}_0$−okviru vrijedi $\mathcal{N}_x^C = \mathcal{C}_x^C$.

Definicija 3.47. **IL**$\mathtt{M}_0$**−kvaziokvir** *je kvaziokvir takav da vrijedi:*

a) K *je inverzno dobro fundirana;*

b) ako je xKy *onda je* $\nu(x) \prec \nu(y)$*;*

c) ako je $x \in \mathcal{N}_w^A$ *onda je* $\nu(w) \prec_A \nu(x)$*;*

d) ako je $wKuKx(S_w \cup K)^* y$ *onda je* $\nu(u) \subseteq_\Box \nu(y)$*;*

e) ako je $xS_w y$ *onda je* $x(\mathcal{S}_w \cup R)^* y$*;*

f) ako je $wKuK^1x(\mathcal{S}_w)^{tr}yK^1z$ *onda je* $u(K^1)^{tr}z$*;*

g) ako je xRy *onda je* $x(R^1)^{tr}y$*.*

Lema 3.48. *Svaki* **IL**$\mathtt{M}_0$*−kvaziokvir može se proširiti do adekvatnog* **IL**$\mathtt{M}_0$*−okvira.*

Prethodna lema se dokazuje slično kao analogna lema za sistem **IL**, s tim da treba ukloniti i protuprimjere za karakteristično svojstvo **IL**$\mathtt{M}_0$−okvira.

Teorem 3.49. *Sistem* **IL**$\mathtt{M}_0$ *je potpun u odnosu na Veltmanovu semantiku.*

Skica dokaza. Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula zatvoren na potformule i operaciju $\sim$. Neka je $\mathcal{I}$ klasa svih označenih okvira $(\mathfrak{F}, \nu)$ takvih da vrijedi:

a) za sve x, y takve da je xRy, postoji formula $D \in \mathcal{D}$ takva da je $\Box\neg D \in \nu(y) \setminus \nu(x)$;

b) $\mathfrak{F}$ je $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvir;

c) za svaki x, skup $\{\nu(u) : uK^1x\}$ je linearno uređen relacijom $\subseteq_\Box$;

d) ako je wK^1x i $w(K \setminus K^1)x'(S_w \cup K)^*x$ onda ne postoji nedostatak u w u odnosu na x;

e) ako je $wKuKx(S_w \cup K)^*y$ onda je $\subseteq_\Box$ $-$najveći element skupa $\{\nu(t) : wKtK^1y\}$, ako postoji, $\subseteq_\Box$ $-$veći od $\nu(u)$;

f) ako je $wKxKy$ i $y \in \mathcal{N}_w^A$ onda je $x \in \mathcal{N}_w^A$;

g) vrijedi još devet svojstava koja nećemo navoditi, a radi se o tehničkim svojstvima koja osiguravaju da se u konstrukciji čuvaju gore navedena bitna svojstva. (vidi Goris, Joostenov preprint iz 2004.)

I ovdje se trivijalno vidi da je svaki jednočlani označeni okvir u klasi $\mathcal{I}$ i da je unija ograničenog lanca $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvira također $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvir, pa prema glavnoj lemi preostaje dokazati da se svaki problem i nedostatak u adekvatnom $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okviru iz $\mathcal{I}$ može eliminirati proširenjem do adekvatnog $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvira koji je također u $\mathcal{I}$.

Jednostavno se dokazuje analogon korolara kakve smo imali u slučajevima sistema **IL** i $\mathbf{IL}\mathtt{M}$, po kojem se svaki $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$kvaziokvir koji zadovoljava sva svojstva iz definicije klase $\mathcal{I}$, osim što možda nije $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvir, može se proširiti do adekvatnog $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvira iz klase $\mathcal{I}$.

Neka je $(\mathfrak{F}, \nu)$ adekvatan $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvir iz $\mathcal{I}$.

Neka je $(a, \neg(A \rhd B))$ problem. Kao i kod sistema **IL** i $\mathbf{IL}\mathtt{M}$, za neki $b \notin W$ nosač proširimo na $W \cup \{b\}$, relaciju dostiživosti na $R \cup \{(a, b)\}$, te funkciju ν proširimo s $\nu(a, b) = B$ i $\nu(b) = \Delta$, pri čemu je $\nu(a) \prec_B \Delta$ i $A, \Box\neg A \in \Delta$. Nizom lema dokazujemo da je dobivena struktura $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$kvaziokvir koji ima sva svojstva iz definicije klase $\mathcal{I}$, osim što nije $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvir. Stoga se može proširiti do $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvira iz klase $\mathcal{I}$ u kojem više ne postoji taj problem.

Neka je $(a, b, C \rhd D)$ nedostatak. U slučaju aR^1b nema poteškoća specifičnih za sistem $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$, pa se taj slučaj dokazuje analogno kao i za sisteme **IL** i $\mathbf{IL}\mathtt{M}$. Stoga promotrimo slučaj $a(R \setminus R^1)b$. Neka je u $\subseteq_\Box$ $-$najveći element skupa $\{r : aKrK^1b\}$ (takav postoji po 3. svojstvu iz definicije klase $\mathcal{I}$). Pritom je $K = R$ jer je $\mathfrak{F}$ $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$okvir.

Neka je A formula takva da je $b \in \mathcal{N}_a^A$, ili $\perp$ ako takva formula A ne postoji. Tada iz 6. uvjeta iz definicije klase $\mathcal{I}$, te zbog adekvatnosti, $\nu(a) \prec_A \nu(u)$.

Pritom je $\Diamond C \in \nu(u)$ (jer bi u suprotnom iz $\Box\neg C \in \nu(u)$ i uRb zbog adekvatnosti slijedilo $\nu(u) \prec \nu(b)$ i stoga posebno $\neg C \in \nu(b)$).

Za neki skup Y disjunktan s W postoji skup $\{\Delta_y : y \in Y\}$ maksimalnih $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0-$konzistentnih skupova formula sa svim svojstvima navedenim u lemi 3.44. Sada nosač proširimo na $W \cup Y$, relaciju dostiživosti na $R \cup \{(a, y) : y \in Y\}$, relaciju S_a na

$S_a \cup \{(b,y) : y \in Y\} \cup \{(y,y') : y,y' \in Y\}$, te ν proširimo s $\nu(y) = \Delta_y$ i $\nu(a,y) = A$, za sve $y \in Y$.

Nizom lema dokazuje se da je time dobiven $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$−kvaziokvir za koji vrijede sva svojstva iz definicije klase $\mathcal{I}$ osim što možda nije $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$−okvir, te se stoga može proširiti do $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$−okvira iz klase $\mathcal{I}$, u kojem više ne postoji taj nedostatak. Dokažimo samo četvrto svojstvo iz definicije $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$−kvaziokvira radi ilustracije korištenja svojstava klase $\mathcal{I}$. Radi izbjegavanja uvođenja novih oznaka, koristit ćemo oznake R, K, S_w itd. za odgovarajuće relacije na proširenoj strukturi. Neka je $wKsKx(S_w \cup K)^*y$, pri čemu su neki od navedenih svjetova novi, tj. iz Y. No, očito je nemoguće $w \in Y$, kao i $s \in Y$. Također, slučaj da su i x i y iz Y moguć je samo ako je $w = a$ i $aRxS_ay$. No u tom slučaju ne postoji s između a i x. Dakle, samo je $y \in Y$. Sada imamo dva slučaja, s obzirom na to je li K ili S_w posljednja relacija u kompoziciji $x(S_w \cup K)^*y$. Promotrimo samo drugi slučaj. No, tada mora biti $w = a$ i imamo $aKsKx(S_a \cup K)^*bS_ay$. Pritom je $\nu(y)$ $\subseteq_\Box$ −veći od $\subseteq_\Box$ −najvećeg elementa skupa $\{\nu(r) : aKrK^1b\}$, pa prema 5. svojstvu iz definicije klase $\mathcal{I}$ vrijedi $\nu(s) \subseteq_\Box \nu(y)$, što je i trebalo dokazati. Q.E.D.

Potpunost sistema $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$

Sjetimo se principa interpretabilnosti $\mathtt{W}$ i $\mathtt{W}^*$:

$\mathtt{W} \equiv A \rhd B \to A \rhd (B \wedge \Box\neg A)$

$\mathtt{W}^* \equiv A \rhd B \to (B \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C \wedge \Box\neg A)$

Podsjetimo se, za Veltmanov okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{W}$ ako i samo ako je za svaki $w \in W$ relacija $S_w \circ R$ inverzno dobro fundirana. Nadalje, vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{W}^*$ ako i samo ako je $\mathfrak{F}$ $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$−okvir ujedno i $\mathbf{IL}\mathtt{W}$–okvir. To slijedi iz činjenice da su skupovi teorema sistema $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$ i $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0\mathtt{W}$ jednaki. Naime, nije teško dokazati da redom vrijedi: $\vdash_{ILW^*} \mathtt{M}_0$, $\vdash_{ILW^*} \mathtt{W}$ i $\vdash_{ILM_0W} \mathtt{W}^*$.

Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula i neka su Δ i Δ' maksimalni $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$−konzistentni skupovi. Pišemo $\Delta \subset_\Box^{\mathcal{D}} \Delta'$ ako je $\Delta \subseteq_\Box \Delta'$ i postoji formula $\Box A \in \mathcal{D}$ takva da vrijedi $\Box A \in \Delta' \setminus \Delta$.

Tvrdnja sljedeće leme lako slijedi iz konačnosti skupa $\mathcal{D}$.

Lema 3.50. *Neka je $(\mathfrak{F}, \nu)$ kvaziokvir i $\mathcal{D}$ konačan skup formula. Tada vrijedi: ako $wRuRxS_wy$ uvijek povlači $\nu(u) \subset_\Box^{\mathcal{D}} \nu(y)$, onda je relacija $S_w \circ R$ inverzno dobro fundirana.*

Lema 3.51. *Neka je $(\mathfrak{F}, \nu)$ $\mathbf{IL}M_0$−kvaziokvir i $\mathcal{D}$ konačan skup formula tako da vrijedi: ako $wRuRxS_wy$ onda $\nu(u) \subset_\Box^{\mathcal{D}} \nu(y)$. Tada vrijedi: ako $wRuRx(S_w \cup R)^*y$ onda $\nu(u) \subset_\Box^{\mathcal{D}} \nu(y)$.*

Dokaz. Neka je $wRuRx(S_w \cup R)^*y$. Tvrdnja slijedi indukcijom po minimalnom broju R−koraka na putu od x do y. Q.E.D.

Definicija 3.52. *Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula. Adekvatan* $\mathbf{IL}M_0$*−okvir nazivamo* **adekvatan $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$−okvir** *(u odnosu na $\mathcal{D}$) ako $wRuRx(\mathcal{S}_w)^{tr}y$ uvijek povlači $\nu(u) \subset_\Box^{\mathcal{D}} \nu(y)$.*

Definicija 3.53. *Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula.* $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$*−kvaziokvir nazivamo* $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$**−kvaziokvir** *(u odnosu na $\mathcal{D}$) ako $wKuKx(\mathcal{S}_w)^{tr}y$ uvijek povlači $\nu(u) \subset_{\Box}^{\mathcal{D}} \nu(y)$.*

Lema 3.54. *Svaki* $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$*−kvaziokvir se može proširiti do adekvatnog* $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$*−okvira.*

Dokaz. Neka je $(\mathfrak{F}, \nu)$ jedan $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$−kvaziokvir. Tada je $(\mathfrak{F}, \nu)$ jedan $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$−kvaziokvir. Kako se K i $(\mathcal{S}_w)^{tr}$ ne mijenjaju u konstrukciji niza $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$−kvaziokvira u dokazu analogne leme za $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$, to se dodatno svojstvo $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$−kvaziokvira čuva u konstrukciji. Očito je i da se to svojstvo čuva i na uniji ograničenog lanca, pa je unija tog niza adekvatan $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$−okvir. Q.E.D.

Lema 3.55. *Neka su Γ i Δ maksimalni* $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$*−konzistentni skupovi formula takvi da je $\Gamma \prec_C \Delta$, $P \rhd Q \in \Gamma$, $\Diamond P \in \Delta$ i $S_1 \rhd T_1, \ldots, S_n \rhd T_n \in \Gamma$. Tada postoje maksimalni* $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$*−konzistentni skupovi $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$, pri čemu je $k \leqslant n$, takvi da vrijedi:*

a) $\Gamma \prec_C \Delta_i$ *za svaki* i;

b) $\Delta \subseteq_{\Box} \Delta_i$ *za svaki* i;

c) $\Box\neg P \in \Delta_i$ *za svaki* i;

d) $Q \in \Delta_0$;

e) ako je $S_j \in \Delta_h$ za neke j, h, onda je $T_j \in \Delta_i$ za neki i.

Uočimo da je prethodna lema vrlo slična odgovarajućoj lemi za $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$, uz dodatno (treće) svojstvo koje zajedno s drugim povlači $\Delta \subset_{\Box}^{\mathcal{D}} \Delta_i$ za svaki i, ako je $\Box\neg P \in \mathcal{D}$.

Teorem 3.56. *Sistem* $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$ *je potpun u odnosu na Veltmanovu semantiku.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula zatvoren na potformule i operaciju $\sim$. Neka je $\mathcal{I}$ klasa svih označenih okvira $(\mathfrak{F}, \nu)$ takvih da vrijede sva svojstva kao u dokazu potpunosti sistema $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$, te iz $wKuKx(\mathcal{S}_w)^{tr}y$ uvijek slijedi $\nu(u) \subset_{\Box}^{\mathcal{D}} \nu(y)$.

Trivijalno je svaki jednočlani označeni okvir u klasi $\mathcal{I}$. Koristeći lemu 3.50 lako se vidi da je unija ograničenog lanca označenih okvira iz $\mathcal{I}$ također $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$−okvir. Iz glavne leme slijedi da je još preostalo dokazati da se svaki problem i nedostatak u adekvatnom $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$−okviru iz $\mathcal{I}$ može eliminirati proširenjem do adekvatnog $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$−okvira koji je također u $\mathcal{I}$. Za eliminaciju problema koristimo dokaz potpunosti sistema $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ i lemu 3.54. Za eliminaciju nedostataka postupamo analogno kao u dokazu potpunosti sistema $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ koristeći još lemu 3.55. Q.E.D.

3.4 Bisimulacije

U ovom dijelu razmatramo posebne relacije između Veltmanovih modela koje se nazivaju bisimulacije. Prvo ćemo kao motivaciju navesti neke pojmove i rezultate iz logike prvog reda. Zatim ćemo razmatrati bisimulacije Kripkeovih modela osnovne modalne logike. Rezultati ove točke trebat će u sljedećnim dijelovima o filtracijama Veltmanovih modela i odlučivosti logika interpretabilnosti.

Parcijalni izomorfizmi

Na početku želimo naglasiti da sve detalje koji su ovdje ispušteni možete vidjeti u [14] (nastavni materijal za kolegij *Primijenjena logika* koji se izvodio na doktorskom studiju matematike).

Ako su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dva modela logike prvog reda koji su izomorfni tada je lako indukcijom po složenosti formule F dokazati da vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models F \text{ ako i samo ako } \mathfrak{N} \models F.$$

Tada se još kaže da su modeli $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ **elementarno ekvivalentni**, te to označavamo sa $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. No, obrat općenito ne vrijedi. Primjerice, može se pokazati da vrijedi $(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{R}, <)$. Očito modeli $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ nisu izomorfni. Prirodno se postavlja pitanje što možemo reći o elementarno ekvivalentnim modelima. U tu svrhu prvo definiramo pojam parcijalnog izomorfizma.

U daljnjem tekstu pretpostavljamo da je σ neka zadana signatura (neke teorije prvog reda).

Definicija 3.57. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ–strukture.* **Parcijalni izomorfizam** *je svaka injekcija $p : S \subseteq M \to N$ koja ima svojstva:*

a) za svaki relacijski simbol $R^n \in \sigma$ i sve $a_1, \dots a_n \in S$ vrijedi:

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{M}} \text{ ako i samo ako } (p(a_1), \dots, p(a_n)) \in R^{\mathfrak{N}};$$

b) za svaki funkcijski simbol $f^n \in \sigma$ i sve $a_1, \dots a_n \in S$, takve da je $f^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \in S$, vrijedi:

$$p(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(p(a_1), \dots, p(a_n));$$

c) za svaki konstantski simbol $c \in \sigma$, takav da je $c^{\mathfrak{M}} \in S$, vrijedi $p(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$.

Uočite da o parcijalnom izomorfizmu p ne možemo govoriti kao o izomorfizmu nekih podmodela, jer $Dom(p)$ ne mora biti podmodel (ne mora sadržavati interpretacije svih konstantskih simbola, te skup $Dom(p)$ ne mora biti zatvoren na interpretacije svakog funkcijskog simbola).

Definicija 3.58. *Za σ–strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ kažemo da su* **konačno izomorfne** *ako postoji niz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nepraznih skupova parcijalnih izomorfizama tako da vrijedi:*

(forth) *za sve $p \in I_{n+1}$ i $a \in M$ postoji parcijalni izomorfizam $q \in I_n$ tako da vrijedi $a \in Dom(q)$ i $q \supseteq p$;*

(back) *za sve $p \in I_{n+1}$ i $b \in N$ postoji parcijalni izomorfizam $q \in I_n$ tako da vrijedi $b \in Rng(q)$ i $q \supseteq p$.*

Ako su strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ konačno izomorfne tada to označavamo sa $\mathfrak{M} \simeq_f \mathfrak{N}$.

Definicija konačne izomorfnosti, odnosno uvjeti (forth) i (back), analogni su Cantorovom dokazu teorema o uređanoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$. (Dokaz je u nastavnom materijalu za kolegij *Teorija skupova* na sljedećoj mrežnoj adresi: https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/ts-skripta-2015.pdf)

Teorem 3.59 (Fraïsséov teorem).
Neka je σ konačan skup nelogičkih simbola koji sadrži samo relacijske simbole. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ proizvoljne dvije σ–strukture. Tada vrijedi:

$$\mathfrak{M} \simeq_f \mathfrak{N} \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}.$$

Ehrenfeuchtove igre

Sada razmatramo još jedan način opisa elementarne ekvivalencije. To su igre. Najpoznatije igre između struktura za logiku prvog reda nazivaju se Ehrenfeuchtove igre. Kasnije ćemo razmatrati i igre između Veltmanovih modela koje će nam trebati prilikom dokaza van Benthemovog teorema karakterizacije za logiku interpretabilnosti. O Ehrenfeuchtovim igrama detaljnije možete čitati u [14].

Radi jednostavnijeg izlaganja i zapisa sada promatramo signaturu σ koja od nelogičkih simbola sadrži samo simbol za jednakost i jedan dvomjesni relacijski simbol R.
Zatim, pretpostavljamo da su sve promatrane strukture **normalne**, tj. da je simbol $=$ interpretiran relacijom jednakosti.

Definicija 3.60. *Neka su $\mathfrak{M} = (M, R_M)$ i $\mathfrak{N} = (N, R_N)$ dvije σ–strukture. Svaku konačnu injekciju iz M u N koja čuva relacije R_M i R_N nazivamo* **lokalni izomorfizam**.

Definicija 3.61 (Ehrenfeuchtova igra).
Svake dvije σ–strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ zajedno s prirodnim brojem $n \in \mathbb{N}$ određuju Ehrenfeuchtovu igru duljine n između struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$. Ehrenfeuchtovu igru između struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ igraju dva igrača, **Spoiler** *i* **Duplikator** *naizmjence, dok svaki ne napravi n poteza. Na početku Spoiler bira jedan element iz jednog od modela, i nakon*

njega Duplikator bira jedan element iz drugog modela. Ta dva elementa čine jedan par. Nakon toga ponavlja se postupak. Spoiler bira iz jednog od modela i za njim i Duplikator, i tako sve dok ne naprave n poteza, odnosno dok ne odrede n parova (ne nužno međusobno različitih). Na kraju igre tih n parova čine konačnu relaciju između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$. Duplikator pobjeđuje u igri ako je dobivena relacija lokalni izomorfizam. U suprotnom definiramo da pobjeđuje Spoiler.

Primijetimo da Spoiler pokušava u n poteza naglasiti razliku između struktura, a Duplikator pokušava te razlike "sakriti".

Definicija 3.62. Strategija *za nekog igrača je pravilo koje mu govori koji potez odigrati u svakom trenutku igre kada je njegov red za potez.* **Pobjednička strategija** *za nekog igrača za zadane strukture i broj poteza, je strategija koja ga vodi do pobjede u svakoj igri između tih struktura u danom broju poteza.*
Determinirane igre *su one igre u kojima uvijek neki igrač mora pobijediti.*
Sa $D(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, n)$ označavamo da u svakoj igri s n poteza između struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ Duplikator ima pobjedničku strategiju.

Teorem 3.63 (o determiniranosti Ehrenfeuchtovih igara)**.**
Za svake dvije σ–strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$, te svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji pobjednička strategija za jednog igrača za svaku Ehrenfeuchtovu igru između struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ u n poteza.

Definicija 3.64. Kvantifikatorski rang formule *F, u oznaci $qr(F)$, je maksimalan broj uklopljenih kvantifikatora.*
*Za σ–strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ kažemo da su n–***elementarno ekvivalentne***, te pišemo $\mathfrak{M} \equiv_n \mathfrak{N}$, ako za sve σ–rečenice F, za koje imamo $qr(F) \leq n$, vrijedi: $\mathfrak{M} \models F$ ako i samo ako $\mathfrak{N} \models F$.*

Teorem 3.65 (Ehrenfeuchtov teorem)**.**
Neka su $\mathfrak{M}$ ı $\mathfrak{N}$ dvije σ–strukture, te $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada vrijedi:

$$D(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, n) \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \equiv_n \mathfrak{N}.$$

Fraisséov teorem je zapravo algebarska verzija Ehrenfeuchtovog teorema.

Bisimulacije Kripkeovih modela

Bisimulaciije su najvažnije relacije između Kripkeovih modela. U samoj njihovoj definiciji postoje uvjeti (forth) i (back), pa su na taj način bisimulacije analogne pojmu konačne izomorfnosti za strukture logike prvog reda, odnosno analogne su Ehrenfeuchtovim igrama.

Prije definicije bisimulacije Kripkeovih modela definiramo stupanj modalne formule, te relacije modalne ekvivalencije.

Definicija 3.66. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', \Vdash)$ *Kripkeovi modeli. Za svjetove* $w \in W$ *i* $w' \in W'$ *kažemo da su* **modalno ekvivalentni** *ako za sve formule* A *vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash A \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash A.$$

Ako su w *i* w' *modalno ekvivalentni tada to označavamo sa* $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$.

Kako bi mogli definirati "konačne aproksimacije" relacije modalne ekvivalencije definiramo prvo pojam stupnja modalne formule. Taj pojam je sasvim analogan pojmu kvantifikatorskog ranga za formule logike prvog reda.

Definicija 3.67. **Stupanj modalne formule** φ, *u oznaci* $\delta(\varphi)$, *definiramo rekurzivno na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} &\delta(\bot) = \delta(p) = 0, \quad \textit{za svaku propozicionalnu varijablu } p; \\ &\delta(\varphi \to \psi) = \max\{\delta(\varphi), \delta(\psi)\}; \\ &\delta(\Box\varphi) = \delta(\varphi) + 1. \end{aligned}$$

Uočite da je stupanj modalne formule zapravo maksimalan broj ugniježđenih modalnih operatora.

Definicija 3.68. *Neka su* $(\mathfrak{M}, w)$ *i* $(\mathfrak{M}', w')$ *dva točkovna modela, te* $n \in \mathbb{N}$. *Kažemo da su ti točkovni modeli* n–**ekvivalentni** *ako za svaku formulu* φ *za koju vrijedi* $\delta(\varphi) \leq n$, *imamo:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi.$$

Oznaka: $(\mathfrak{M}, w) \equiv_n (\mathfrak{M}', w')$, *odnosno ponekad samo kratko* $w \equiv_n w'$.

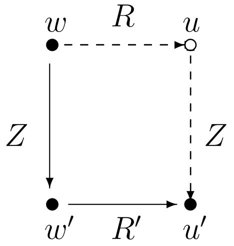
Ako vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \equiv_0 (\mathfrak{M}', w')$ *tada kažemo još da su svjetovi* w *i* w' **atomarno ekvivalentni**.

Definicija 3.69. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', \Vdash)$ *Kripkeovi modeli. Za nepraznu relaciju* $Z \subseteq W \times W'$ *kažemo da je* **bisimulacija** *između modela* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *ako ispunjava slijedeća tri uvjeta:*

- *(at)* *ako* $(w, w') \in Z$ *tada* $w \equiv_0 w'$;
- *(forth)* *za sve* $(w, w') \in Z$ *i sve* $u \in W$ *takve da vrijedi* wRu *postoji* $u' \in W'$ *takav da* uZu' *i* $w'R'u'$;
  upravo navedeni uvjet odmah ilustriramo slikom pri čemu punim crtama označavamo relacije čija egzistencija se pretpostavlja, a s isprekidanim crtama označavamo relacije čija se egzistencija traži:

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "R"] \arrow[d, "Z"'] & u \arrow[d, dashed, no head, "Z"] \\ w' \arrow[r, dashed, "R'"'] & u' \end{tikzcd}$$

(back) *za sve* $(w, w') \in Z$ *i sve* $u' \in W'$ *takve da vrijedi* $w'R'u'$ *postoji* $u \in W$ *tako da* uZu' *i* wRu;
upravo formulirani uvjet (back) također ilustriramo slikom:



Ako je Z bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ tada to označavamo sa $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$, te umjesto $(w, w') \in Z$ pišemo i $Z : \mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$, odnosno i $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$. Kažemo još da su modeli $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ bisimulirani ako postoji neka bisimulacija između njih, te pišemo $\mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$.

Propozicija 3.70. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$, $\mathfrak{M}' = (W', R', \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}'' = (W'', R'', \Vdash)$ *Kripkeovi modeli. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) $\{(w, w) : w \in W\} \ : \ \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}$;

b) ako je $f : W \to W'$ *izomorfizam modela tada je* $\{(w, f(w)) : w \in W\}$ *bisimulacija;*

c) ako $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$ *tada* $Z^{-1} : \mathfrak{M}' \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}$;

d) ako $Z_1 : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$ *i* $Z_2 : \mathfrak{M}' \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}''$ *tada* $Z_1 \circ Z_2 : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}''$;

e) ako je $\{Z_i : i \in I\}$ *neka familija bisimulacija između modela* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *tada* $\bigcup_{i \in I} Z_i : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$;

f) za svaka dva Kripkeova modela postoji najveća bisimulacija.

Istaknimo osnovnu vezu bisimulacija i modalne ekvivalencije. Tvrdnju je lako dokazati indukcijom po složenosti formule.

Propozicija 3.71. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', \Vdash)$ *Kripkeovi modeli, te* $w \in W$ *i* $w' \in W'$ *proizvoljni svjetovi. Ako* $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$ *tada* $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$.

Obrat prethodne propozicije općenito ne vrijedi. Protuprimjer možete vidjeti, primjerice, u [2]. Kako bismo mogli izreći svojevrsni obrat prethodne propozicije, promatramo posebne vrste modela.

Definicija 3.72. *Za Kripkeov model* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *kažemo da je* **slikovno konačan** *ako je za svaki* $w \in W$ *skup* $R[w] = \{x : wRx\}$ *konačan.*

Teorem 3.73 (Hennessy–Milnerov teorem).
Neka su $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *slikovno konačni modeli. Ako* $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$ *tada* $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$.

Dokaz. Tvrdimo da je relacija modalne ekvivalencije jedna bismulacija. Uvjet (at) iz definicije bisimulacije je trivijalno ispunjen.

Dokažimo da vrijedi i uvjet ($forth$). Neka $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$ i wRu. Pretpostavimo da ne postoji svijet $u' \in W'$ za koji bi vrijedilo $\mathfrak{M}, u \equiv \mathfrak{M}', u'$ i $w'R'u'$.

Ako bi skup $R'[w']$ bio prazan tada bi imali $w' \Vdash \Box\bot$. No, pošto vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$ tada bi imali i $w \Vdash \Box\bot$. No, to je nemoguće zbog pretpostavke da za svijet v vrijedi wRv. Iz toga zaključujemo da je skup $R'[w']$ neprazan.

Pošto je po pretpostavci model $\mathfrak{M}'$ slikovno konačan tada skup $R'[w']$ mora biti konačan. Neka je $R'[w'] = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$. Iz pretpostavke s početka dokaza slijedi da niti za jedan $i \in \{1, \ldots, n\}$ ne vrijedi $\mathfrak{M}, u \equiv \mathfrak{M}', u'_i$. Tada za svaki $i \in \{1, \ldots n\}$ postoji formula A_i tako da vrijedi $\mathfrak{M}, u \Vdash A_i$ i $\mathfrak{M}', u'_i \nVdash A_i$. Tada očito vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ i $\mathfrak{M}', w' \nVdash \Diamond(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$, što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema da vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$.
Uvjet ($back$) iz definicije bisimulacije dokaže se analogno. Q.E.D.

Bisimulacijske igre na Kripkeovim modelima

Sada želimo definirati igre na Kripkeovim modelima. Zatim, razmatrat ćemo tzv. konačne bisimulacije. Kasnije ćemo definirati analogone tih pojmova za logike interpretabilnosti, te ćemo ih koristi prilikom dokaza van Benthemovog teorema karakterizacije za logike interpretabilnosti.

Definicija 3.74. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', \Vdash)$ *Kripkeovi modeli, te* $w \in W$ *i* $w' \in W'$ *proizvoljni svjetovi.* **Bisimulacijsku igru** *između modela* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *s početkom u* $(\mathfrak{M}, w; \mathfrak{M}', w')$ *igraju dva igrača. Označimo ih s* I *i* II. *Za igru se koriste i dva kamenčića. Kamenčićima igrači označavaju konfiguraciju igre* $(\mathfrak{M}, u; \mathfrak{M},' u')$ *ako su kamenčići na svjetovima* u *i* u'.

Na početku igre prvo se provjeri vrijedi li $w \equiv_0 w'$. *Ako to ne vrijedi igra se niti ne počinje, te se definira da je igrač* I *pobjedio.*

Sada opisujemo tijek igre u slučaju kada vrijedi $w \equiv_0 w'$. *Pretpostavimo da su u nekom trenutku kamenčići na svjetovima* $u \in W$ *i* $u' \in W'$. *Ako ne vrijedi* $u \equiv_0 u'$ *tada definiramo da je igrač* I *pobjedio i igra je gotova.*

Ako vrijedi $u \equiv_0 u'$ *tada u sljedećem potezu igrač* I *prvo bira jedan od modela* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$. *Zatim, u izabranom modelu bira neki svijet* v *tako da vrijedi* uRv, *odnosno* $uR'v$. *Ako takav svijet* v *ne postoji tada definiramo da je igrač* I *izgubio igru.*

Igrač II *radi isto ali u drugom modelu. Ako igrač* II *ne može izabrati traženi svijet, tj. kamenčić se nalazi na nekom terminalnom svijetu, tada definiramo da je igrač* I *pobjedio.*

U slučaju da igra ne završi u konačno mnogo poteza, tj. beskonačno dugo traje, tada definiramo da je pobijedio igrač II.

Definicija 3.75. *Kažemo da igrač II ima* **pobjedničku strategiju** *u nekoj bisimulacijskoj igri s početkom u $(\mathfrak{M}, w; \mathfrak{M}', w')$ ako uvijek na potez igrača I može odgovoriti potezom koji mu garantira pobjedu.*

Propozicija 3.76. *Igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri s početkom u $(\mathfrak{M}, w; \mathfrak{M}', w')$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$.*

Bisimulacijsku igru u n–poteza definiramo na sasvim analogni način kao (neograničenu) bisimulacijsku igru pri čemu definiramo da ona završva najviše nakon n poteza. Zatim, definiramo da igrač II pobjeđuje nakon n–tog ako je zadnji par izabranih svjetova atomarno ekvivalentan.

Definicija 3.77. *Neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ dva točkovna modela, te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da su ti točkovni modeli:*

a) n–**bisimulirani** *ako igrač II ima pobjedinčku strategiju u bisimulacijskoj igri u n poteza s početkom u $(\mathfrak{M}, w; \mathfrak{M}', w')$.*
Oznaka: $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}', w'$;

b) **konačno bisimulirani** *ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}', w'$.*
Oznaka: $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_\omega \mathfrak{M}', w'$;

Definicija 3.78. *Neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ točkovni modeli i $n \in \mathbb{N}$. Za konačan niz binarnih relacija $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ kažemo da je* n–**bisimulacija** *između svjetova w i w', te to označavamo sa $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow_n \mathfrak{M}', w$, ako $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0 \subseteq W \times W$ i vrijede sljedeći uvjeti:*

a) wZ_nw';

b) za sve $v \in W$ i $v' \in W'$ takve da vZ_0v', za svaku propozicionalnu varijablu p imamo:

$$\mathfrak{M}, v \Vdash p \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', v' \Vdash p;$$

c) za sve $u, v \in W$, $v' \in W'$ te svaki $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ za koje vrijedi $uZ_{i+1}u'$ i uRv, postoji $u' \in W'$ tako da vZ_iv' i $u'R'v'$;

d) za sve $u \in W$, $u', v' \in W'$ te svaki $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ za koje vrijedi $uZ_{i+1}u'$ i $u'R'v'$, postoji $u \in W$ tako da vZ_iv' i uRv.

Kako bi izrekli teorem koji povezuje konačne bisimulacije i konačne bisimulacijske igre, definiramo još posebne karakteristične formule za svaki točkovni model.

Nadalje pretpostavljamo da je skup propozicionalnih varijabli $Prop$ konačan.

Definicija 3.79. *Neka je* $\mathfrak{M}$ *Kripkeov model i* w *neki njegov svijet. Za svaku varijablu* $p \in Prop$ *definiramo:*

$$\overline{p} = \begin{cases} p, & \text{ako } \mathfrak{M}, w \Vdash p, \\ \neg p, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ *rekurzivno definiramo formulu* $\chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$ *ovako:*

$$\chi^0_{[\mathfrak{M},w]} \equiv \bigwedge_{p \in Prop} \overline{p},$$

$$\chi^{n+1}_{[\mathfrak{M},w]} \equiv \chi^0_{[\mathfrak{M},w]} \wedge \bigwedge_{u \in W,\ wRu} \Diamond \chi^n_{[\mathfrak{M},w]} \wedge \Box \bigvee_{u \in W,\ wRu} \chi^n_{[\mathfrak{M},w]}.$$

Teorem 3.80. *Neka su* $(\mathfrak{M}, w)$ *i* $(\mathfrak{M}', w')$ *točkovni slikovno konačni Kripkeovi modeli. Neka je skup Prop svih propozicionalnih varijabli konačan. Tada su za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$

b) $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}', w'$

c) $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow_n \mathfrak{M}', w'$

d) $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$.

Korolar 3.81. *Neka je skup svih propozicionalnih varijabli Prop konačan. Tada za sve točkovne modele* $(\mathfrak{M}, w)$ *i* $(\mathfrak{M}', w')$ *vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_\omega \mathfrak{M}', w' \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'.$$

Napomena 3.82. *Rezimirajmo ovdje sve tvrdnje o bisimulacijama i elementarnoj ekvivalenciji na Kripkeovim modelima.*

Ako $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$ *tada* $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$*. Obrat općenito ne vrijedi. Ako su modeli slikovno konačni tada vrijedi obrat (Hennessy–Milnerov teorem).*

Ako $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}', w'$ *tada* $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$*. Obrat općenito ne vrijedi. Ako je skup svih propozicionalnih varijabli konačan tada vrijedi i obrat.*

Jedna od glavnih posljedica prethodnih razmatranja je sljedeći teorem o svojstvu konačnih modela (eng. finite model property, ili kratko fmp).

Teorem 3.83 (fmp za osnovnu modalnu logiku)**.**
Ako je neka modalna formula ispunjiva tada postoji konačan Kripkeov model i svijet tog modela na kojem je formula istinita.

Dokaz prethodnog teorema možete pogledati u knjizi [2].

Bisimulacije Veltmanovih modela

A. Visser je definirao bisimulacije između Veltmanovih modela. Koristio je bisimulacije prilikom dokaza aritmetičke potpunosti sistema **IL**P.

A. Berarducci je koristio bisimulacije Veltmanovih modela prilikom dokaza aritmetičke potpunosti sitema **IL**M.

A. Visser je primjenom bisimulacija dokazao da niti jedan sistem između **IL**$\mathtt{M}_0$ i **IL**M nema Craigovo interpolacijsko svojstvo.

Definicija 3.84. Bisimulacija između Veltmanovih modela $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', \{S'_w : w \in W'\}, \Vdash)$ *je neprazna binarna relacija* $Z \subseteq W \times W'$ *tako da vrijedi:*

(at) *ako* wZw' *tada za svaku propozicionalnu varijablu* p *vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash p \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash p;$$

(forth) *ako* wZw' *i* wRu *tada postoji* $u' \in W'$ *tako da* $w'R'u'$, uZu' *i za svaki* $v' \in W'$ *koji ima svojstvo* $u'S_{w'}v'$ *postoji* $v \in W$ *takav da* uS_wv *i* vZv';
upravo iskazani uvjet ilustriramo slikom pri čemu punim linijma označavamo relacije čija se egzistencija pretpostavlja, a isprekidanim linijama označavamo relacije čija se egzistencija traži:

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "R"] \arrow[d, "Z"'] & u \arrow[r, dashed, "S_w"] \arrow[d, dashed, "Z"'] & v \arrow[d, dashed, "Z"] \\
w' \arrow[r, dashed, "R'"'] & u' \arrow[r, "S'_{w'}"'] & v'
\end{tikzcd}$$

(back) *ako* wZw' *i* $w'Ru'$ *tada postoji* $u \in W$ *tako da* wRu, uZu' *za svaki* $v \in W$ *koji ima svojstvo* uS_wv *postoji* $v' \in W'$ *takav da* $u'S_{w'}v'$ *i* vZv';
upravo iskazani uvjet također ilustriramo slikom:

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, dashed, "R"] \arrow[d, "Z"'] & u \arrow[r, "S_w"] \arrow[d, dashed, "Z"'] & v \arrow[d, dashed, "Z"] \\
w' \arrow[r, "R'"'] & u' \arrow[r, dashed, "S'_{w'}"'] & v'
\end{tikzcd}$$

Koristimo iste oznake za bisimuliranost kao i kod Kripkeovih modela. Ovdje ćemo ih ponoviti. Ako je Z bisimulacija između Veltmanovih modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ tada to označavamo sa $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$, te umjesto $(w, w') \in Z$ pišemo i $Z : \mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$, odnosno i $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$.
Kažemo još da su Veltmanovi modeli $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ bisimulirani ako postoji neka bisimulacija između njih, te pišemo $\mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$.

Propozicija 3.85. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$, $\mathfrak{M}' = (W', R', \{S'_w : w \in W'\}, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}'' = (W'', R'', \{S''_w : w \in W''\}, \Vdash)$ *Veltmanovi modeli. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) $\{(w, w) : w \in W\} : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}$, *tj. relacija identitete je bisimulacija;*

b) ako je $f : W \to W'$ *izomorfizam modela* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *tada je* $\{(w, f(w)) : w \in W\}$ *bisimulacija;*

c) ako $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$ *tada* $Z^{-1} : \mathfrak{M}' \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}$;

d) ako $Z_1 : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$ *i* $Z_2 : \mathfrak{M}' \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}''$ *tada* $Z_1 \circ Z_2 : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}''$;

e) ako je $\{Z_i : i \in I\}$ *neka familija bisimulacija između modela* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *tada* $\bigcup_{i \in I} Z_i : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$;

f) za svaka dva Veltmanova modela postoji najveća bisimulacija.

Definicija 3.86. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', \{S'_w : w \in W'\}, \Vdash)$ *Veltmanovi modeli. Za svjetove* $w \in W$ *i* $w' \in W'$ *kažemo da su* **modalno ekvivalentni** *ako za sve formule* A *vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash A \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', w' \Vdash A.$$

Ako su w *i* w' *modalno ekvivalentni svjetovi tada to označavamo sa* $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w$.

Istaknimo osnovnu vezu bisimulacija i modalne ekvivalencije. Tvrdnju je lako dokazati indukcijom po složenosti formule.

Propozicija 3.87. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', \{S_w : w \in W'\}, \Vdash)$ *Veltmanovi modeli, te* $w \in W$ *i* $w' \in W'$ *proizvoljni svjetovi. Ako* $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$ *tada* $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$.

Obrat prethodne propozicije ne vrijedi. Protuprimjer možete vidjeti u članku D. Vrgoč, V. Čačić, Studia Logica 2013.

Za Veltmanov model $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ kažemo da je **slikovno konačan** ako je za svaki $w \in W$ skup $R[w] = \{x \in W : wRx\}$ konačan.

Teorem 3.88 (Hennessy–Milnerov teorem za Veltmanove modele)**.**
Neka su $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *slikovno konačni Veltmanovi modeli. Ako* $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$ *tada* $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$.

Prethodni teorem je dokazao R. de Jonge 2006.

Bisimulacijske igre na Veltmanovim modelima

Rezultati ove točke koristit će se prilikom dokaza van Benthemovog teorema karakterizacije za logike interpretabilnosti. Koristimo članak V. Čačić, D. Vrgoč, Studia Logica 2013.

Definicija 3.89. **Stupanj modalne formule** φ, *u oznaci* $\delta(\varphi)$, *definiramo rekurzivno na sljedeći način:*

$$\begin{aligned}
&\delta(\bot) = \delta(p) = 0, \quad \textit{za svaku propozicionalnu varijablu } p;\\
&\delta(\varphi \to \psi) = \max\{\delta(\varphi), \delta(\psi)\};\\
&\delta(\Box\varphi) = \delta(\varphi) + 1;\\
&\delta(\varphi \rhd \psi) = \max\{\delta(\varphi), \delta(\psi)\} + 1.
\end{aligned}$$

Uočite da je stupanj modalne formule zapravo maksimalan broj ugnježđenih modalnih operatora.

Definicija 3.90. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', \{S'_w : w \in W'\}, \Vdash)$ *Veltmanovi modeli te* $n \in \mathbb{N}$. *Neka* $w \in W$ *i* $w' \in W'$. *Kažemo da su svjetovi* w *i* w' n–**modalno ekvivalentni** *ako za svaku formulu* φ *za koju je* $\delta(\varphi) \leq n$, *vrijedi sljedeće:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi.$$

Oznaka: $w \equiv_n w'$.

Ako vrijedi $w \equiv_0 w'$ tada kažemo još da su svjetovi w i w' **atomarno ekvivalentni**.

Definicija 3.91. *Neka su* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *Veltmanovi modeli i* $n \in \mathbb{N}$. n–**bisimulacija** *je konačan niz binarnih relacija* $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$ *tako da vrijedi:*

(at) *ako* wZ_0w' *tada* $w \equiv_0 w'$;

(forth) *za svaki* $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ *ako* $wZ_{i+1}w'$ *i* wRu, *postoji* $u' \in W'$ *tako da* uZ_iu' *i* $w'R'u'$, *te za svaki* $v' \in W'$ *takav da* $u'S'_{w'}v'$, *postoji* $v \in W$ *tako da vrijedi* vZ_iv' *i* uS_wv;

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "R"] \arrow[d, "Z_{i+1}"'] & u \arrow[r, dashed, "S_w"] \arrow[d, dashed, "Z_i"'] & v \arrow[d, dashed, "Z_i"] \\
w' \arrow[r, dashed, "R'"'] & u' \arrow[r, "S'_{w'}"'] & v'
\end{tikzcd}$$

(back) *za svaki* $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ *ako* $wZ_{i+1}w'$ *i* $w'Ru'$, *postoji* $u \in W$ *tako da* uZ_iu' *i* wRu, *te za svaki* $v \in W$ *takav da* uS_wv, *postoji* $v' \in W'$ *tako da vrijedi* vZ_iv' *i* $u'S'_{w'}v'$;

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, dashed, "R"] \arrow[d, "Z_{i+1}"'] & u \arrow[r, "S_w"] \arrow[d, dashed, "Z_i"'] & v \arrow[d, dashed, "Z_i"] \\
w' \arrow[r, "R'"'] & u' \arrow[r, dashed, "S'_{w'}"'] & v'
\end{tikzcd}$$

Oznaka: $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}', w'$.

Propozicija 3.92. *Neka su* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *Veltmanovi modeli i* $n \in \mathbb{N}$, *te* w *svijet modela* $\mathfrak{M}$, *a* w' *svijet modela* $\mathfrak{M}'$. *Ako* $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}', w'$ *tada* $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$.

Modalnu ekvivalenciju možemo opisati i pomoću igara.

Definicija 3.93. *Neka su* $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, \{S_w^{(i)} : w \in W\}, \Vdash)$, $i \in \{0,1\}$, *dva Veltmanova modela.* **Bisimulacijsku igru** *igraju dva igrača koje označavamo sa* I *i* II. *Konfiguracija je svaka uređena četvorka* $(\mathfrak{M}_0, w_0; \mathfrak{M}_1, w_1)$, *gdje je* $w_0 \in W_0$ *i* $w_1 \in W_1$.

Ako je $(\mathfrak{M}_0, w_0; \mathfrak{M}_1, w_1)$ *neka konfiguracija, tada se potez koji se nastavlja na tu konfiguraciju, sastoji redom od sljedećih koraka:*

a) *ako svjetovi* w_0 *i* w_1 *nisu atomarno ekvivalentni tada definiramo da je igrač* I *pobijedio;*

b) *igrač* I *bira jedan od modela* $\mathfrak{M}_i$; *neka je* $j = 1 - i$;

c) *igrač* I *izabire svijet* u_i *modelu* $\mathfrak{M}_i$ *tako da vrijedi* $w_i R_i u_i$; *ako ne postoji takav svijet tada definiramo da je igrač* II *pobijedio;*

d) *igrač* II *izabire svijet* u_j *u modelu* $\mathfrak{M}_j$ *pri čemu mora vrijediti* $w_j R_j v_j$; *ako takav svijet ne postoji tada definiramo da je igrač* I *pobijedio;*

e) *igrač* I *bira svijet* $v_j \in W_j$ *tako da vrijedi* $u_j S_{w_j}^{(j)} v_j$;

f) *igrač* II *bira svijet* $v_i \in W_i$ *tako da vrijedi* $u_i S_{w_i}^{(i)} v_i$.

Igrač I *određuje hoće li se igra nastaviti od konfiguracije* $(\mathfrak{M}_0, u_0; \mathfrak{M}_1, u_1)$ *ili* $(\mathfrak{M}_0, v_0; \mathfrak{M}_1, v_1)$. *Ako igra beskonačno traje tada definiramo da je pobjednik igrač* II.

Igra u n **poteza**, *ili kratko* n–**igra**, *ima još sljedeće pravilo: ako nakon* n *poteza igrač* I *nije pobijedio tada definiramo da je pobijedio igrač* II.

Propozicija 3.94. *Neka su* $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, \{S_w^{(i)} : w \in W\}, \Vdash)$, $i \in \{0,1\}$, *dva Veltmanova modela. Neka su* $w_0 \in W_0$ *i* $w_1 \in W_1$ *proizvoljni svjetovi. Tada vrijedi:*

a) *Igrač* II *ima pobjedničku strategiju u svakoj* n–*igri s početnom konfiguracijom* $(\mathfrak{M}_0, w_0; \mathfrak{M}_1, w_1)$ *ako i samo ako vrijedi* $\mathfrak{M}_0, w_0 \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}_1, w_1$;

b) *Igrač* II *ima pobjedničku strategiju u svakoj bisimulacijskoj igri s početnom konfiguracijom* $(\mathfrak{M}_0, w_0; \mathfrak{M}_1, w_1)$ *ako i samo ako vrijedi* $\mathfrak{M}_0, w_0 \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}_1, w_1$.

3.5 Generalizirane Veltmanove semantike

Prvu verziju generalizirane Veltmanove semantike je definirao de Jongh 1992. godine. Osnovna namjena ove druge vrste semantike za logike interpretabilnosti bila je primjena prilikom dokaza nezavisnosti principa interpretabilnosti. Kasnije se pokazalo da generalizirana semantika ima i značajnu ulogu prilikom dokaza odlučivosti[1]. Goris i Joosten su u preprintu iz 2004. godine razmatrali još dvije vrste generalizirane Veltmanove semantike. Mi ćemo ovdje razmatrati samo de Jonghovu verziju.

Definicija 3.95. *Uređena trojka* $(W, R, \{S_w : w \in W\})$ *se naziva* **generalizirani Veltmanov okvir** *ako vrijedi:*

a) uređeni par (W, R) *je* **GL***–okvir;*

b) ako uS_wV *tada* wRu *i* $V \subseteq R[w]$;

c) ako $wRuRv$ *tada* $uS_w\{v\}$*;*

d) kvazirefleksivnost: ako wRu *tada* $uS_w\{u\}$*;*

e) kvazitranzitivnost: uS_wV *i* $(\forall v \in V)uS_wZ_v$ *povlači* $uS_w \cup_{v\in V} Z_v$*;*

f) monotonost: ako uS_wV *i* $V \subseteq Z \subseteq W[w]$ *tada* uS_wZ.

Napomena 3.96. *Goris i Joosten u preprintu iz 2004. godine i u članku u Log. Jou. IGPL, 2011. definirali su još dvije verzije generalizirane semantike. Nazvali su ih* $\boldsymbol{IL}_{set}$ *i* $\boldsymbol{IL}^*_{set}$ *semantike.* $\boldsymbol{IL}_{set}$ *okvir mora zadovoljavati iste uvjete kao upravo definirani generalizirani Veltmanov okvir osim što uvjet kvazitranzitivnosti glasi: ako* uS_wV *tada* $(\forall v \in V)(\forall Z)(v \notin Z \ \& \ vS_wZ \ \Rightarrow \ uS_wZ)$*, te se ne zahtijeva uvjet monotonosti. U definiciji* $\boldsymbol{IL}^*_{set}$ *okvir također se ne zahtijeva uvjet monotonosti te uvjet kvazitranzitivnosti glasi: ako* uS_wV *tada* $(\exists v \in V)(\forall Z)(vS_wZ \ \Rightarrow \ uS_wZ)$.

Kvazitranzitivnost se koristi prilikom dokaza adekvatnosti semantike za sistem ***IL****, točnije važna je za dokaz valjanosti aksioma (J2).*

Definicija 3.97. Generalizirani Veltmanov model *je četvorka* $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$*, gdje je* $(W, R, \{S_w : w \in W\})$ *generalizirani Veltmanov okvir, a* $\Vdash$ *je relacija forsiranja za koju samo ističemo sljedeće svojstvo:*

$$w \Vdash A \rhd B \ \Leftrightarrow \ (\forall u)\,(wRu \ \& \ u \Vdash A \ \Rightarrow \ (\exists V)(uS_wV \ \& \ V \Vdash B))\,.$$

Teorem 3.98 (adekvatnost generalizirane semantike za sistem **IL**).
Ako **IL**$\vdash A$ *tada za svaki generalizirani Veltmanov model* $\mathfrak{N}$ *vrijedi* $\mathfrak{N} \Vdash A$.

[1]Problemi odlučivosti i fmp za logike interprtabilnosti razmatrat će se kasnije.

Teorem 3.99 (potpunost **IL** u odnosu na generaliziranu semantiku)**.**
Ako za sve konačne generalizirane Veltmanove modele $\mathfrak{M}$ *vrijedi* $\mathfrak{M} \models A$ *tada je u sistemu* ***IL*** *dokaziva formula* A.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo obratom po kontrapoziciji. Neka je A formula tako da $\mathbf{IL} \nvdash A$. Iz de Jongh–Veltmanovog teorema znamo da postoji konačan Veltmanov model $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ tako da $\mathfrak{M} \not\models A$. Pomoću Veltmanovog modela $\mathfrak{M}$ definiramo generalizirani Veltmanov model $\mathfrak{M}' = (W, R, \{S'_w : w \in W\}, \Vdash')$, gdje je za $w \in W$ i $V \subseteq R[w]$, te $v \in R[w]$ definiramo: vS'_wV ako i samo ako $(\exists u \in V)(vS_wu)$. Zatim, relacija $\Vdash'$ neka se poklapa s relacijom $\Vdash$ na propozicionalnim varijablama, a na složenim formulama proširimo po definiciji. Lako se dokaže da je $\mathfrak{M}'$ generalizirani Veltmanov model, te da vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash B$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w \Vdash B$, za sve formule B i sve $w \in W$. Q.E.D.

Nezavisnost principa interpretabilnosti

Ovdje navodimo tzv. karakteristične klase generaliziranih Veltmanovih okvira za neke principe interpretabilnosti, te ilustriramo kako pomoću karakterističnih klasa dokazati nezavisnost pojednih principa. Veći dio rezultata je iz članka M. Vuković, Notre Dame Jou. Form. Logic, 1999.

Za princip interpretabilnosti X karakteristična klasa generaliziranih Veltmanovih okvira, u oznaci $Char_{gen}(X)$, je klasa svih generaliziranih Veltmanovih okvira na kojima je valjana svaka instancijacija principa X.

Propozicija 3.100. *Neka je* X *neki princip interpretabilnosti i* A *neka formula tako da vrijedi* $\mathbf{IL}X \vdash A$. *Tada za svaki okvir* $\mathcal{F} \in Char_{gen}(X)$ *vrijedi* $\mathcal{F} \Vdash A$.

Ako je X neki princip interpretabilnosti tada sa $(X)_{gen}$ označavamo formulu logike drugog reda koja ima svojstvo da za svaki generalizirani Veltmanov okvir $\mathcal{F}$ vrijedi sljedeće:

$$\mathcal{F} \in Char_{gen}(X) \text{ ako i samo ako } \mathcal{F} \models (X)_{gen}.$$

Principi interpretabilnosti $\mathtt{M}$, $\mathtt{P}$, $\mathtt{M}_0$, $\mathtt{W}$ i $\mathtt{W}^*$ definirani su na strani 45. Više detalja o pojedinom principu možete pronaći u Visserovom članku [12]. Ovdje definiramo još nekoliko principa interpretabilnosti.

$$\begin{aligned}
\mathtt{F} &\equiv A \rhd \Diamond A \to \Box(\neg A);\\
\mathtt{KM1} &\equiv A \rhd \Diamond B \to \Box(A \to \Diamond B);\\
\mathtt{KM2} &\equiv A \rhd B \to (\Box(B \to \Diamond C) \to \Box(A \to \Diamond C));\\
\mathtt{KW1} &\equiv A \rhd \Diamond\top \to (\top \rhd \neg A);\\
\mathtt{KW1}^0 &\equiv ((A \land B) \rhd \Diamond A) \to (A \rhd (A \land \neg B)).
\end{aligned}$$

U sljedećoj propoziciji navodimo formule koje određuju karakteristične klase generaliziranih Veltmanovih okvira nekih principa interpretabilnosti.

Propozicija 3.101. *Vrijedi:*

$$(\mathtt{M})_{gen} \quad \equiv \quad uS_wV \ \Rightarrow \ (\exists V' \subseteq V)(uS_wV' \ \& \ (\forall v \in V')(\forall z)(vRz \Rightarrow uRz));$$

$$(\mathtt{P})_{gen} \quad \equiv \quad wRw'RuS_wV \ \Rightarrow \ (\exists V' \subseteq V)(uS_uV');$$

$$(\mathtt{M}_0)_{gen} \quad \equiv \quad wRuRxS_wV \ \Rightarrow \ (\exists V' \subseteq V)(uS_wV' \ \& \ (\forall v \in V')(\forall z)(vRz \Rightarrow uRz));$$

$$(\mathtt{KM1})_{gen} \quad \equiv \quad uS_wV \ \Rightarrow \ (\exists v \in V)(\forall y)(vRy \Rightarrow uRy);$$

Zatim, $Char_{gen}(\mathtt{KM2}) = Char_{gen}(\mathtt{KM1})$ *i* $Char_{gen}(\mathtt{M}) \subseteq Char_{gen}(\mathtt{KM1})$.

Za ilustraciju dokazujemo da formula $(\mathtt{M}_0)_{gen}$ određuje klasu $Char_{gen}(\mathtt{M}_0)$. Pretpostavimo prvo da na generaliziranom Veltmanovom okviru $(W, R, \{S_w : w \in W\})$ nije istinita formula $(\mathtt{M}_0)_{gen}$. Tada postoje svjetovi $w, u, x \in W$ i skup $V \subseteq W[w]$ tako da vrijedi

$$wRuRxS_wV \ \& \ (\forall V' \subseteq V)(uS_wV' \ \Rightarrow \ (\exists v \in V')(\exists z)(vRz \ \& \text{ nije } uRz)) \qquad (*)$$

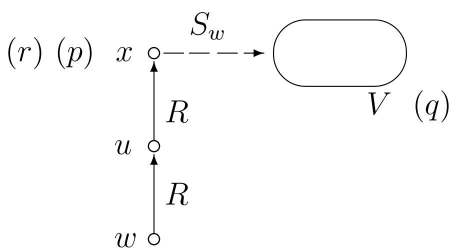
Na okviru $\mathcal{F}$ definiramo relaciju forsiranja $\Vdash$ na sljedeći način:

(i) propozicionalna varijabla p forsirana je samo na svijetu x;

(ii) propozicionalna varijabla q forsirana je samo na elementima skupa V;

(iii) propozicionalna varijabla r forsirana je samo na svijetu x i svim $y \in W$ takvi da je uRy.

Donjom slikom prikazan je taj bitan dio upravo definiranog generaliziranog Veltmanovog modela.



Za ovako definirani model tvrdimo da vrijedi:

a) $w \Vdash p \rhd q$;

b) $w \nVdash (\Diamond p \wedge \Box r) \rhd (q \wedge \Box r)$.

Pošto wRy i $y \Vdash p$ vrijedi samo za $y = x$, te imamo xS_wV i $V \Vdash q$, tvrdnja a) odmah slijedi. Tvrdnja b) je ekvivalentna sa sljedećim iskazom:

$$\exists a(wRa \ \&\ a \Vdash \Diamond p \wedge \Box r \ \&\ \forall U(aS_wU \ \Rightarrow\ (\exists b \in U)(b \nVdash q \wedge \Box r))).$$

Neka je $a = u$. Tada vrijedi wRa & $a \Vdash \Diamond p \wedge \Box r$. Pokažimo sada da za svaki $U \subseteq R[w]$ takav da uS_wU, postoji svijet $b \in U$ za koji vrijedi $b \nVdash q \wedge \Box r$. Imamo dva bitna slučaja:

1. $U \backslash V \neq \emptyset$.
   Tada možemo uzeti $b \in U \backslash V$ proizvoljan. Iz definicije relacije $\Vdash$ slijedi $b \nVdash q$, a tada naravno i $b \nVdash q \wedge \Box r$.

2. $U \setminus V = \emptyset$.
   Tada očito $U \subseteq V$. Iz $(*)$ slijedi $(\exists b \in U)(\exists z)(bRz$ & nije $uRz)$. Iz definicije relacije $\Vdash$ slijedi $b \nVdash \Box r$, a onda i $b \nVdash q \wedge \Box r$.

Dokažimo sada obrat. Neka je sada $\mathcal{F} = (W, R, \{S_w : w \in W\})$ neki generalizirani Veltmanov okvir na kojem je istinita formula $(\mathtt{M}_0)_{gen}$. Neka je, zatim, $\Vdash$ proizvoljna relacija forsiranja na okviru $\mathcal{F}$. Neka je $w \in W$ tako da vrijedi $w \Vdash A \rhd B$. Neka je $u \in W$ tako da vrijedi wRu i $u \Vdash \Diamond A \wedge \Box C$, tj. vrijedi sljedeće:

$$\exists x(uRx \ \&\ x \Vdash A) \ \text{ i } \ \forall z(uRz \ \Rightarrow\ z \Vdash C) \qquad\qquad (**)$$

Sada iz $wRuRx$ i $x \Vdash A$, te $w \Vdash A \rhd B$ slijedi $\exists V(xS_wV \ \&\ V \Vdash B)$. Dakle, $wRuRx$ i xS_wV, pa iz istinitosti formule $(\mathtt{M}_0)_{gen}$ na okviru $\mathcal{F}$ slijedi da postoji $V' \subseteq V$ tako da vrijedi:

$$uS_wV' \ \&\ (\forall v \in V')(\forall z)(vRz \Rightarrow uRz) \qquad\qquad (***)$$

Pokažimo još da vrijedi $V' \Vdash B \ \wedge\ \Box C$. Iz $V' \subseteq V$ i $V \Vdash B$ slijedi $V' \Vdash B$. Neka je $v \in V'$ proizvoljan svijet te neka $z \in W$ takav da vRz. Iz $(***)$ slijedi uRz, a onda iz $(**)$ imamo $z \Vdash C$. Dakle, $v \Vdash \Box C$. Pošto je $v \in V'$ proizvoljan tada vrijedi $V' \Vdash \Box C$. Time smo pokazali $w \Vdash (A \rhd B) \to ((\Diamond A \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C))$. Q.E.D.

Kako bi mogli navesti formulu koje određuje karakterističnu klasu principa $\mathtt{F}$ prvo definiramo dvije relacije. Neka je $(W, R, \{S_w : w \in W\})$ neki generalizirani Veltmanov okvir. Za svaki $w \in W$ definiramo relacije $\overline{R_w}$ i $\overline{S_w}$ ovako:

- za svaki $A \in 2^{R[w]} \setminus \{\emptyset\}$ i $\mathcal{B} \subseteq 2^{R[w]} \setminus \{\emptyset\}$ definiramo:

$$A\overline{S_w}\mathcal{B} \ \text{ ako i samo ako } \ (\forall a \in A)(\exists B \in \mathcal{B})(aS_wB);$$

- za svaki $\mathcal{C} \subseteq 2^{R[w]} \setminus \{\emptyset\}$ i $D \in 2^{R[w]} \setminus \{\emptyset\}$ definiramo:

$$\mathcal{C}\overline{R}_wD \ \text{ ako i samo ako } \ (\forall C \in \mathcal{C})(\forall c \in C)(\exists d \in D)(cRd).$$

Propozicija 3.102. *Vrijedi:* $(\mathtt{F})_{gen} \equiv$ *"za svaki* $w \in W$ *relacija* $\overline{S_w} \circ \overline{R}_w$ *je inverzno dobro fundirana".*

Propozicija 3.103. *Vrijedi:*

$$\begin{array}{lcl} (\mathtt{W})_{gen} & \equiv & (\forall w \in W)(\forall X \subseteq R[w])(\forall Z \subseteq S_w^{-1}[X], Z \neq \emptyset)(\forall z \in Z)(\exists V \subseteq X) \\ & & \big(zS_wV \ \& \ (\forall v \in V)(R[v] \cap Z = \emptyset)\big). \end{array}$$

Napomena 3.104. *Za svaki princip interpretabilnosti* X *sa* $Char(X)$ *označavamo karakterističnu klasu svih Veltmanovih okvira za princip* X*. Iz teorema* 3.10 *slijedi* $Char(\mathtt{M}) = Char(\mathtt{KM1}) = Char(\mathtt{KM2})$ *te formula* $\forall w(S_w \circ R \subseteq R)$ *određuje tu klasu. Zatim, iz navedeng teorema također znamo da formula* $wRzRuS_wz \ \Rightarrow \ uS_zy$ *određuje klasu* $Char(\mathtt{P})$.

Karakteristična klase Veltmanovih okvira principa $\mathtt{W}$, $\mathtt{F}$ *i* $\mathtt{KW1}^0$ *su jednake, te su određene formulom "*$\forall w(S_w \circ R$ *je inverzno dobro fundirana relacija)". (Iz toga, primjerice, slijedi da je logika interpretbilnosti* **IL**$\mathtt{F}$ *nepotpuna u odnosu na Veltmanovu semantiku.)*

Švejdar je odredio svojstvo koje opisuje karakterističnu klasu Veltmanovih okvira principa $\mathtt{KW1} \equiv A \rhd \Diamond\top \to (\top \rhd \neg A)$*. Kako bismo mogli iskazati to svojstvo prvo definiramo neke pojmove. Kažemo da je svijet* x *maksimalan u skupu* X *odnosu na neku relaciju* U *ako ne postoji* $y \in X$ *tako da je* xUy*. Zatim, kažemo da je skup* X *kofinalan u skupu* Y *u odnosu na relaciju* U *ako* $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(yUx)$*. Tada sljedeća formula određuje karakterističnu klasu Veltmanovih okvira principa* $\mathtt{KW1}$*: "za svaki* $w \in W$ *skup svih maksimuma skupa* $R[w]$ *u odnosu na relaciju* $S_w \circ R$ *je kofinalan u* $R[w]$ *u odnosu na relaciju* S_w.

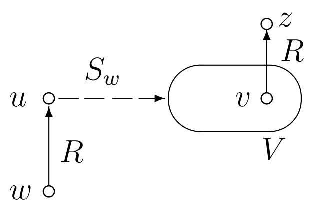
Primjenom Švejdarovih i Visserovih rezultata, te rezultata članka M. Vuković, Notre Dame Jou. Form. Logic, 1999. dobiva se da ne postoje druge implikacije između principa interpretabilnosti osim onih koje su označene na sljedećoj slici:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d] & & M \arrow[dll] \arrow[dr] & & \\
M_0 & W^* \arrow[l] \arrow[d] & & & KM1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl] & KM2 \\
 & W \arrow[rr] & & KW1^\circ \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & & F & & KW1 &
\end{tikzcd}$$

Za ilustraciju u sljedeće dvije propozicije ističemo neke nezavisnosti.

Propozicija 3.105. *Vrijedi* $\mathbf{IL}\mathtt{P} \nvdash \mathtt{KM1}$.

Dokaz. Na sljedećoj slici definiramo jedan generalizirani Veltmanov okvir na kojem je istinita formula $(\mathtt{P})_{gen}$, a nije istinita formula $(\mathtt{KM1})_{gen}$.

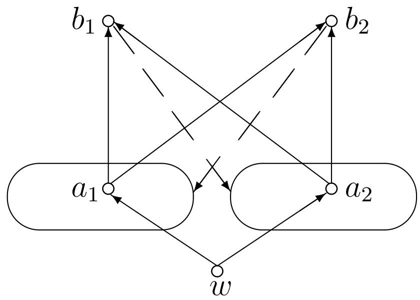


Pokažimo prvo da je na okviru s prethodne slike istinita formula $(\mathtt{P})_{gen}$. U formuli $(\mathtt{P})_{gen}$ prvi dio sadrži uvjet $wRw'Ru$, gdje su w, w' i u proizvoljni svjetovi. Zadani okvir sadrži samo jednu takvu trojku: $wRvRz$. Neka je $Y \subseteq R[w]$ tako da vrijedi zS_wY. Iz definicije okvira očito slijedi $z \in Y$. Tada za $V' = \{z\} \subseteq V$ zbog kvazirefleksivnosti relacije S_v slijedi zS_vV'.

Pokažimo još da na danom okviru nije istinita formula $(\mathtt{KM1})_{gen}$. Iz slike vidimo da vrijedi uS_wV, ali ne postoji $y \in V$ tako da bude ispunjeno $\forall z(yRz \Rightarrow uRz)$ (jer je $V = \{v\}$, te vRz ali nije uRz.) Q.E.D.

Propozicija 3.106. *U sistemu* $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ *nije dokaziv princip* $\mathtt{F}$.

Dokaz. Pomoću grafa definiramo jedan generalizirani Veltmanov okvir na kojem je istinita formula $(\mathtt{M}_0)_{gen}$, a nije istinita formula $(\mathtt{F})_{gen}$. S punim linijama označena je relacija R, a s isprekidanim linijama označena je relacija S_w.



Pokažimo prvo da je na danom okviru istinita formula $(\mathtt{M}_0)_{gen}$. Prvi dio formule $(\mathtt{M}_0)_{gen}$ sadrži uvjet $wRuRx$, gdje su w, u i x proizvoljni svjetovi. Iz tog razloga promatramo sve uređene trojke trojke (x_1, x_2, x_3) za koje vrijedi $x_1Rx_2Rx_3$. Postoje četiri takve trojke: (w, a_1, b_1), (w, a_2, b_2), (w, a_1, b_2) i (w, a_2, b_2).

Neka je $Y_1 \subseteq R[w]$ tako da vrijedi $b_1S_wY_1$. (Tada imamo $wRa_1Rb_1S_wY_1$). U ovom slučaju definiramo $V' = Y_1$. Iz definicije okvira imamo wRa_1Rb_1 a onda vrijedi $a_1S_w\{b_1\}$. Sada iz $a_1S_w\{b_1\}$ i $b_1S_wY_1$ te svojstva kvazitranzitivnosti relacije S_w, slijedi

$a_1 S_w Y_1$, tj. $a_1 S_w V'$. Uočimo još da je očito ispunjen i uvjet $(\forall v \in V')(\forall z)(vRz \Rightarrow uRz)$ iz formule $(\mathtt{M}_0)_{gen}$, jer vrijedi $(\forall y \in Y_1)(\forall z)(yRz \Rightarrow a_1 Rz)$.

Ako je $Y_2 \subseteq R[w]$ tako da vrijedi $b_2 S_w Y_2$ na analogni način kao u prethodnom slučaju može se provjeriti da skup $V' = Y_2$ zadovljava uvjet formule $(\mathtt{M}_0)_{gen}$.

Pokažimo sada da na danom okviru nije istinita formula $(\mathtt{F})_{gen}$. Uočimo da vrijedi:

$$\{b_1\}\ \overline{S_w}\ \{\{a_2\}\}\ \overline{R}_w\ \{b_2\}\ \overline{S_w}\ \{\{a_1\}\}\ \overline{R}_w\ \{b_1\}\ \ldots$$

Dakle, relacija $\overline{S_w} \circ \overline{R}_w$ nije inverzno dobro fundirana. Q.E.D.

Napomena 3.107. *Goris i Joosten su primjenom jedne nove verzije generalizirane Veltmanove semantike u člaku u Log. Jou. IGPL iz 2011. godine dokazali nezavisnost nekih novih principa. Istaknuli su da su uveli novu verziju generalizirane semantike jer nisu uspjeli dokazati nezavisnost primjenom de Jonghove verzije generalizirane semantike.*

Bismulacije generaliziranih Veltmanovih modela

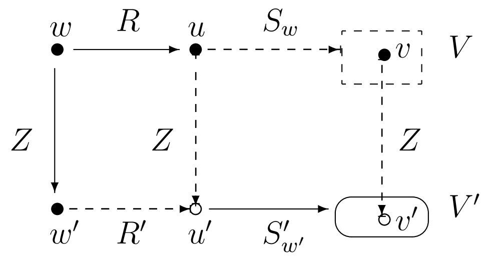
U ovoj točki razmatramo bisimulacije između generaliziranih Veltmanovih modela. Iskazujemo osnovna svojstva kao što su čuvanje istine, te Hennessy–Milnerov teorem.

Definicija 3.108. Bisimulacija između dva generalizirana Veltmanova modela $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', \{S'_w : w \in W'\}, \Vdash)$ *je neprazna binarna relacija* $Z \subseteq W \times W'$ *takva da vrijedi sljedeće:*

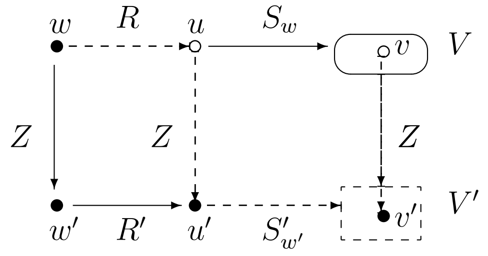
(at) *ako* wZw' *tada za svaku propozicionalnu varijablu* p *vrijedi;*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash p \ \text{ ako i samo ako } \ \mathfrak{M}', w' \Vdash p;$$

(forth) *ako* wZw' *i* wRu, *tada postoji svijet* $u' \in W'$ *takav da* $w'R'u'$, uZu' *i za svaki* $V' \subseteq R'[w']$ *koji ima svojstvo* $u'S'_{w'}V'$ *postoji skup* $V \subseteq R[w]$ *tako da* uS_wV *i za svaki* $v \in V$ *postoji* $v' \in V'$ *takav da* vZv'; *ilustriracija ovog uvjeta slikom, gdje su punom crtom označene relacije čija se egzistencija pretpostavlja, a isprekidanim crtama su označene relacije čija se egzistencija zahtijeva, izgleda ovako:*



(back) *ako wZw' i $w'Ru'$, tada postoji svijet $u \in W$ takav da wRu, uZu' i za svaki $V \subseteq R[w]$ koji ima svojstvo uS_wV postoji skup $V' \subseteq R'[w']$ tako da $u'S'_{w'}V'$ i za svaki $v' \in V'$ postoji $v \in V$ takav da vZv'; upravo formulirani uvjet (back) također odmah ilustriramo slikom:*



U sljedećoj propoziciji iskazujemo da bismulacije između generaliziranih Veltmanovih modela čuvaju istinitost.

Propozicija 3.109. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva generalizirana Veltmanova modela i $w \in W$, $w' \in W'$. Ako je $Z \subseteq W \times W'$ bisimulacija i $(w, w') \in Z$ tada su svjetovi w i w' modalno ekvivalentni.*

U sljedećoj propoziciji ističemo još neka svojstva bisimulacija.

Propozicija 3.110. *Neka su $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ generalizirani Veltmanovi modeli. Tada vrijedi:*

a) *$\{(w, w) : w \in W\}$ je bisimulacija na $\mathfrak{M}$;*

b) *ako je $Z \subseteq W \times W'$ bisimulacija tada je relacija Z^{-1} također bisimulacija;*

c) *ako su $Z \subseteq W \times W'$ i $Z' \subseteq W' \times W''$ bisimulacije tada je relacija $Z \circ Z'$ također bisimulacija.*

d) *ako je $\{Z_i : i \in I\}$ neka familija bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ tada je unija $\bigcup_{i \in I} Z_i$ također bisimulacija. Dakle, uvijek postoji najveća bisimulacija između dva modela.*

Kažemo da je neki generalizirani Veltmanov model $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ **slikovno konačan** ako je za svaki $w \in W$ skup $R[w]$ konačan.

Teorem 3.111 (Hennessy–Milnerov teorem za generalizirane Veltmanove modele). *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', \{S'_w : w \in W'\}, \Vdash)$ dva slikovno konačna generalizirana Veltmanova modela. Ako su svjetovi $w \in W$ i $w' \in W'$ modalno ekvivalentni tada postoji bisimulacija Z tako da wZw'.*

Napomena 3.112. *Bisimulacije generaliziranih Veltmanovih modela sistematski se razmatraju u članku D. Vrgoč, M. Vuković, Log. Jou. IGPL, 2010. Razmatrano je nekoliko vrsta bisimulacija, te je definiran bismulacijski kvocijent generaliziranog Veltmanovog modela.*

Veze između raznih vrsta modela

U ovoj točki razmatramo vezu između običnih i generaliziranih Veltmanovih modela. Većina sadržaja ove točke nalazi se u članku M. Vuković, Mathematical Logic Quarterly, 2008.

Definicija 3.113. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ *Veltmanov model. Za svaki* $w \in W$ *definiramo relaciju* $S'_w \subseteq R[w] \times (\mathcal{P}(R[w]) \setminus \{\emptyset\})$ *ovako:*

$$uS'_wV \quad \textit{ako i samo ako } (\exists v \in V)(uS_wv).$$

Lako je provjeriti da je $(W, R, \{S'_w : w \in W\}, \Vdash)$ generalizirani Veltmanov model. Taj model označavamo sa $gen(\mathfrak{M})$.

Prisjetimo se da upravo takvu konstrukciju koristili prilikom dokaza teorema potpunosti sistema **IL** u odnosu na generaliziranu Veltmanovu semantiku (vidi dokaz teorema 3.99 na strani 76). Prirodno se postavlja pitanje vrijedi li za pojedini princip interpretabilnosti X i svaki Veltmanov model $\mathfrak{M}$ sljedeće: ako $\mathfrak{M} \models (X)$ tada $gen(\mathfrak{M}) \models (X)_{gen}$. Prilikom dokaza odlučivosti nekih logika interpretabilnosti dokazat će se da neki principi interpretabilnosti imaju navedeno svojstvo.

Propozicija 3.114. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ *Veltmanov model. Tada za svaku formulu* φ *i svaki svijet* $w \in W$ *vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad gen(\mathfrak{M}), w \Vdash \varphi.$$

Definicija 3.115. *Neka je* $\mathfrak{F} = (W, R, \{S_w : w \in W\})$ *generalizirani Veltmanov okvir. Neka je* W' *skup koji sadrži sve parove oblika* (v, C) *gdje je* $v \in W$ *i* C *je skup uređenih parova* $(x, y) \in W \times W$ *tako da vrijedi:*

a) *ako* xRv *tada* $(x, v) \in C$;

b) *za svaki* $x \in W$ *i svaki* $V \subseteq R[x]$ *takav da* vS_xV *postoji* $V' \subseteq R[x]$ *i* $y \in V'$ *tako da vrijedi* $V \subseteq V'$ *i* $(x, y) \in C$;

c) *ako* $(x, y) \in C$ *tada postoji* $V \subseteq R[x]$ *takav da* vS_xV *i* $y \in V$.

Definiramo relaciju $R' \subseteq W' \times W'$ *ovako:*

$$(w, A)R'(u, B) \quad \textit{ako i samo ako} \quad wRu \ \&\ (\forall x)\big(xRw \Rightarrow (\forall y)((x, y) \in B \Rightarrow (x, y) \in A)\big).$$

Zatim, definiramo relaciju $S'_{(w,A)}$ *za svaki* $(w, A) \in W'$ *ovako:*

$$(u, B)S'_{(w,A)}(v, C) \quad \textit{ako i samo ako} \quad (w, A)R'(u, B)\ \&\ (w, A)R'(v, C)\ \&\ (\forall y)\big((w, y) \in C \Rightarrow (w, y) \in B\big).$$

Uređenu trojku $(W', R', \{S'_{w'} : w' \in W'\})$ *označavamo sa* $of(\mathfrak{F})$.

Propozicija 3.116. *Neka je $\mathfrak{F}$ generalizirani Veltmanov okvir. Tada je $of(\mathfrak{F})$ Veltmanov okvir.*

Definicija 3.117. *Neka je $\mathfrak{N} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ generalizirani Veltmanov model. Označimo s $\mathfrak{F}$ pripadni okvir. Na Veltmanovom okviru $of(\mathfrak{F})$ definiramo relaciju forsiranja $\Vdash$ ovako:*

$$of(\mathfrak{F}), (w, A) \Vdash p \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N}, w \Vdash p,$$

za svaku propozicionalnu varijablu p. Veltmanov model $(of(\mathfrak{F}), \Vdash)$ označavamo sa $o(\mathfrak{N})$.

Propozicija 3.118. *Neka je $\mathfrak{N} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ generalizirani Veltmanov model i $o(\mathfrak{N}) = (W', R', \{S'_{w'} : w' \in W'\}, \Vdash)$. Tada za svaku formulu φ i svaki $(w, A) \in W'$ vrijedi:*

$$\mathfrak{N}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad o(\mathfrak{N}), (w, A) \Vdash \varphi.$$

Dokaz. Tvrdnju propozicije dokazujemo indukcijom po složenosti formule φ. Promatramo samo slučaj u koraku indukcije za modalni operator $\rhd$.

Pretpostavimo prvo da vrijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash \varphi \rhd \psi$. Želimo dokazati da vrijedi sljedeće: $o(\mathfrak{N}), (w, A) \Vdash \varphi \rhd \psi$. U tu svrhu pretpostavimo da imamo $(w, A) R' (u, B)$ i $(u, B) \Vdash \varphi$. Pretpostavka indukcije povlači $\mathfrak{N}, u \Vdash \varphi$. Sada, pretpostavka $w \Vdash \varphi \rhd \psi$ povlači da postoji skup $V_0 \subseteq R[w]$ tako da vrijedi $u S_w V_0$ i $v \Vdash \psi$, za svaki $v \in V_0$. Neka je v_0 proizvoljan element skupa V_0. Definiramo sljedeće skupove:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \{(x, v_0) : x R v_0\} \\
C_1 &= \{(w, y) : (w, y) \in B \ \& \ \exists V' (v_0 S_w V' \ \& \ y \in V')\} \\
C_2 &= \{(x, y) : \neg x R w \ \& \ x \neq w \ \& \ \exists V' (v_0 S_x V' \ \& \ y \in V')\} \\
C_3 &= \{(x, y) : x R w \ \& \ (x, y) \in A \ \& \ \exists V' (v_0 S_x V' \ \& \ y \in V')\}
\end{aligned}$$

Neka je $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Tvrdimo da vrijedi $(v_0, C) \in W'$. Neka je $x \in W$ i $V \subseteq R[x]$ takvi da vrijedi $v_0 S_x V$. Promatramo tri slučajeva.

Prvo pretpostavimo da je $x = w$. Tada imamo $u S_w V_0$, $v_0 S_w V$ i $v S_w \{v\}$ za svaki $v \in V_0 \setminus \{v_0\}$. Kvazitranzitivnost relacije S_w povlači $u S_w (V \cup (V_0 \setminus \{v_0\}))$. Pošto $(u, B) \in W'$ tada postoji skup $V' \supseteq (V \cup (V_0 \setminus \{v_0\}))$ i svijet $y \in V'$ tako da vrijedi $(w, y) \in B$. Time imamo $v_0 S_w V'$, a onda i $(w, y) \in C_1$.

Pretpostavimo sada da $x R w$ ne vrijedi, i $x \neq w$. Tada za svaki $y \in V$ imamo $(x, y) \in C_2$.

Konačno, u trećem slučaju promatramo svjetove x za koje vrijedi $x R w$. Tada $x R w R v_0$ povlači $w S_x \{v_0\}$. Kvazitranzitivnost relacije S_w povlači $w S_x V$. Pošto $(w, A) \in W'$ tada postoji skup $V' \supseteq V$ i svijet $y \in V'$ takvi da $(x, y) \in A$. Činjenice $v_0 S_x V$ i $V \subseteq V' \subseteq R[x]$ te monotonost relacije S_x povlače $v_0 S_x V'$.

Time smo dokazali da vrijedi $(x,y)\in C_3$.

Očito za svaki $(x,y)\in C$ postoji skup $V\subseteq R[x]$ tako da v_0S_xV i $y\in V$. Iz pretpostavke indukcije imamo $(v_0,V)\Vdash\psi$. Očito vrijedi wRv_0. Iz definicije skupa C slijedi:

$$(\forall x)\big(xRw\Rightarrow\ (\forall y)((x,y)\in C\Rightarrow(x,y)\in A)\big)\qquad\text{i}$$

$$(\forall y)\big((w,y)\in C\Rightarrow(w,y)\in B\big).$$

Dakle, vrijedi $(u,B)S'_{(w,A)}(v_0,C)$.

Dokažimo sada obrat. U tu svrhu pretpostavimo $w\nVdash\varphi\rhd\psi$. Tada postoji svijet $u\in W$ takav da wRu i $u\Vdash\varphi$, te vriijedi:

$$(*)\left\{\begin{array}{l}\text{za svaki skup }\ V\subseteq R[w]\ \text{ takav da }\ uS_wV\\ \text{postoji svijet }\ y\in V\ \text{ takav da}\mathfrak{N},\ y\nVdash\psi.\end{array}\right.$$

Neka je (w,A) proizvoljan svijet modela $o(\mathfrak{N})$. Definiramo skupove:

$$\begin{aligned}
B_0 &= \{(x,u): xRu\}\\
B_1 &= \{(w,y): y\nVdash\psi\ \&\ \exists V(uS_wV\ \&\ y\in V)\}\\
B_2 &= \{(x,y): \neg xRw\ \&\ x\neq w\ \&\ \exists V(uS_xV\ \&\ y\in V)\}\\
B_3 &= \{(x,y): xRw\ \&\ (x,y)\in A\ \&\ \exists V(uS_xV\ \&\ y\in V)\}
\end{aligned}$$

Neka je $B=B_0\cup B_1\cup B_2\cup B_3$. Ako $(x,y)\in B$ tada postoji skup V takav da uS_xV i $y\in V$.

Pokažimo da za svaki svijet x i za svaki skup V takav da uS_xV, postoji skup $V'\supseteq V$ i svijet $y\in V'$ tako da vrijedi $(x,y)\in B$. Neka je $x\in W$ i $V\subseteq R[x]$ takvi da uS_xV. Promatramo tri slučaja. Ako $x=w$ tada pretpostavka $(*)$ povlači da postoji $y\in V$ takav da $y\nVdash\psi$. Tada imamo $(w,y)\in B_1$.

Pretpostavimo sada da $x\neq w$ te da ne vrijedi xRw. U tom slučaju za svaki $y\in V$ imamo $(x,y)\in B_2$.

Treći slučaj je xRw. Činjenica $xRwRu$ povlači $wS_x\{u\}$. Kvazitranzitivnost relacije S_w povlači wS_xV. Tada pretpostavka $(w,A)\in W'$ povlači da postoj iskup $V'\supseteq V$ i svijet $y\in V'$ takvi da $(x,y)\in A$. Dakle, imamo $(x,y)\in B_3$. Time smo dokazali da vrijedi $(u,B)\in W'$.

Očito vrijedi:

$$(\forall x)\big(xRw\Rightarrow(\forall y)((x,y)\in B\ \Rightarrow\ (x,y)\in A)\big),$$

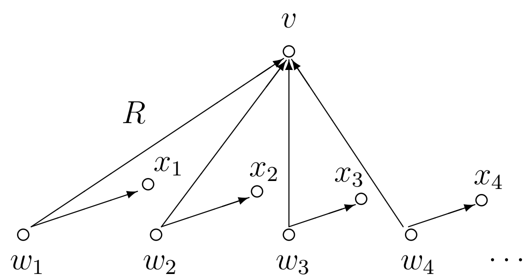
tj. $(w,A)R'(u,B)$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $(u,B)\Vdash\varphi$.

Neka je $(v,C)\in W'$ tako da $(u,B)S'_{(w,A)}(v,C)$. Tada $(u,B)S'_{(w,A)}(v,C)$, tj. $(\forall y)\big((w,y)\in C\rightarrow(w,y)\in B\big)$ povlači $(w,v)\in B$. Iz definicije skupa B tada slijedi $v\nVdash\psi$. Pretpostavka indukcije povlači $(v,C)\nVdash\psi$. Q.E.D.

Pojam slikovno konačnog generaliziranog Veltmanovog modela definirali smo u prethodnoj točki. Zatim, u teoremu 3.111 izrekli smo analogon Hennessy–Milnerovog teorema za generaliziranu Veltmanovu semantiku.

Ako je $\mathfrak{N}$ generalizirani Veltmanov model koji je slikovno konačan tada općenito pripadni Veltmanov model $o(\mathfrak{N})$ ne mora biti slikovno konačan. To ilustrirano u sljedećem primjeru.

Primjer 3.119. *Neka je* $W = \{w_1, w_2, \ldots\} \cup \{x_1, x_2, \ldots\} \cup \{v\}$ *i* $R = \{(w_1, x_1),\ (w_2, x_2),\ \ldots\} \cup \{(w_1, v),\ (w_2, v),\ \ldots\}$. *Relacije* S_w *su najmanje binarne relacije koje zadovoljavaju uvjete iz definicije generaliziranog Veltmanovog modela. Upravo definirai skup* W *i relaciju* R *ilustriramo na sljedećoj slici.*



Lako je provjeriti da je $(W, R, \{S_w : w \in W\})$ *generalizirani Veltmanov okvir. Rekurzivno definiramo niz skupova* (A_n) *ovako:*

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \{(w_i, v) : i = 1, 2, \ldots\} \\
A_{n+1} &= A_n \cup \{(w_{n+1}, x_{n+1})\}
\end{aligned}
$$

Nije teško provjeriti da vrijedi:

a) $(v, A_n) \in of(W)$, *za svaki* n;

b) ako $(w_i, A) \in of(W)$ *tada* $A = \emptyset$;

c) ako $w \neq w_i$ *and* $(w, A) \in of(W)$ *tada* $A \neq \emptyset$;

d) $(w_1, \emptyset) R' (v, A_n)$ *za svaki* n.

Zadnja tvrdnja d) povlači da Veltmanov okvir $of(W)$ *nije slikovno konačan.*

Prethodni primjer implicira da definiramo nešto jači uvjet od slikovne konačnosti.

Definicija 3.120. *Neka je* $\mathfrak{N} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ *generalizirani Veltmanov model. Neka je* $R^{-1}[w] = \{u \in W : uRw\}$, *za svaki* $w \in W$. *Kažemo da je model* $\mathfrak{N}$ **potpuno slikovno konačan** *ako su za svaki* $w \in W$ *skupovi* $R[w]$ *i* $R^{-1}[w]$ *konačni.*

Lema 3.121. *Neka je $\mathfrak{N}$ potpuno slikovno konačan generalizirani Veltmanov model. Tada je Veltmanov model $o(\mathfrak{N})$ slikovno konačan.*

Dokaz. Pokažimo da za svaki $v \in W$ postoji samo konačno mnogo skupova C tako da vrijedi $(v, C) \in o(\mathfrak{N})$. Neka je $v \in W$ i $R^{-1}[v] = \{w_1, \ldots, w_n\}$.

Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ skup $R[w_i]$ je konačan. Dakle, postoji samo konačno mnogo skupova $V \subseteq R[w_i]$ tako da vrijedi $vS_{w_i}V$ (svaki takav skup V je konačan). Označimo sa $V(i)_1, \ldots, V(i)_{m(i)}$ sve skupove V takve da $vS_{w_i}V$. Tada je sljedeći skup očito konačan:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m(i)} \{(w_i, y) \ : \ vS_{w_i}V(i)_j, \ y \in V\}.$$

Ako $(v, C) \in o(\mathfrak{N})$ tada $C \subseteq S$. Q.E.D.

Teorem 3.122. *Neka je $\mathfrak{N}$ potpuno slikovno konačan generalizirani Veltmanov model. Tada vrijedi: $\mathfrak{N} \underline{\leftrightarrow} gen(o(\mathfrak{N}))$.*

Dokaz. Lema 3.121 povlači da je Veltmanov model $o(\mathfrak{N})$ slikovno konačan. Tada je očito i generalirani Veltmanov model $gen(o(\mathfrak{N}))$ slikovno konačan.

Propozicija 3.118 povlači $w \equiv (w, A)$, za svaki $(w, A) \in W'$. Sada iz propozicije 3.114 slijedi $\mathfrak{N}, w \equiv gen(o(\mathfrak{N})), w$. Hennessy–Milnerov teorem, tj. teorem 3.111, povlači $\mathfrak{N} \underline{\leftrightarrow} gen(o(\mathfrak{N}))$. Q.E.D.

Bisimulacije između različitih vrsta modela

A. Visser je 1988. (Utrecht, preprint br. 40) prilikom dokaza potpunosti sistema **IL**P koristio tzv. Friedmanove modele. Dokazao je da za svaki konačan **IL**P–model postoji konačan Friedmanov koji je bisimuliran s njim. Posebno želimo naglasiti da je Visser razmatrao bisimulacije između različitih vrsta modela. Berarducci je 1990. (Jou. Symb. Logic) koristio i tzv. primitivno rekurzivne pojednostavljene Visserove modele, te je također razmatrao bisimulacije između različitih vrsta modela. Mi ovdje razmatramo bisimulacije između običnih i generaliziranih Veltmanovih modela.

Definicija 3.123. *Bisimulacija između generaliziranog Veltmanovog modela $\mathfrak{N} = (W', R', \{S'_w : w \in W'\}, \Vdash)$ i Veltmanovog modela $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ je binarna relacija $Z \subseteq W' \times W$ takva da vrijedi:*

(at) *ako $w'Zw$ tada $\mathfrak{N}, w' \equiv_0 \mathfrak{M}, w \Vdash p$;*

(forth)$_{gen \to o}$ *ako $w'Zw$ i $w'R'u'$ tada postoji svijet $u \in W$ takav da wRu, $u'Zu$ i za svaki $v \in W$ takav da uS_wv postoji $V' \subseteq W'$ takav da $u'S'_{w'}V'$ i $(\forall\ v' \in V')v'zv$;*

(back)$_{gen \to o}$ *ovaj uvjet glasi sasvim analogno kao prethodni, pa ističemo samo glavnu razliku koja dolazi na samom kraju: $(\exists\ v' \in V')v'zv$.*

Propozicija 3.124. *Neka je* $Z \subseteq W' \times W$ *bisimulacija između generaliziranog Veltmanovog modela* $\mathfrak{N}$ *i Veltmanovog modela* $\mathfrak{M}$. *Ako* $w'Zw$ *tada* $\mathfrak{N}, w' \equiv \mathfrak{M}, w$.

Propozicija 3.125. *Neka je* $\{Z_i \subseteq W' \times W : i \in I\}$ *neki skup bisimulacija između generaliziranog Veltmanovog modela* $\mathfrak{N}$ *i Veltmanovog modela* $\mathfrak{M}$. *Tada je relacija* $\bigcup_{i \in I} Z_i$ *također bisimulacija.*

Sada razmatramo bisimulacije između nekog običnog i nekog generaliziranog Veltmanovog modela.

Definicija 3.126. *Bisimulacija između Veltmanovog modela* $\mathfrak{M}$ *i generaliziranog Veltmanovog modela* $\mathfrak{N}$ *je binarna relacija* $\beta \subseteq W \times W'$ *takva da:*

- *(at)* *ako* $w \beta w'$ *tada* $\mathfrak{M}, w \equiv_0 \mathfrak{N}, w' \Vdash p$;
- *(forth)*$_{o \to gen}$ *ako* $w \beta w'$ *i* wRu *tada postoji* $u' \in W'$ *takav da* $w'R'u'$, $u \beta u'$ *i za svaki* V' *takav da* $u'S'_{w'}V'$ *postoji* $v \in W$ *takav da* $uS_w v$ *i* $(\exists\, v' \in V')v\beta v'$;
- *(back)*$_{o \to gen}$ *ovaj uvjet glasi sasvim analogno kao prethodni, pa ističemo samo glavnu razliku koja dolazi na samom kraju:* $(\forall\, v' \in V')v\beta v'$.

Propozicija 3.127. *Neka je* $\beta \subseteq W \times W'$ *bisimulacija između Veltmanovog modela* $\mathfrak{M}$ *i generaliziranog Veltmanovog modela* $\mathfrak{N}$. *Ako* $w \beta w'$ *tada* $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{N}, w'$.

Propozicija 3.128. *Neka je* $\{\beta_i \subseteq W \times W' : i \in I\}$ *neki skup bisimulacija između Veltmanovog modela* $\mathfrak{M}$ *i generaliziranog Veltmanovog modela* $\mathfrak{N}$. *Tada je relacija* $\bigcup_{i \in I} \beta_i$ *također bisimulacija.*

Propozicija 3.129. *Neka je* $\mathfrak{M}$ *Veltmanov model, a* $\mathfrak{N}$ *neki generalizirani Veltmanov model. Neka su* $\beta \subseteq W \times W'$ *i* $Z \subseteq W' \times W$ *bisimulacije. Tada su relacije* β^{-1} *i* Z^{-1} *također bisimulacije. Zatim, relacije* $\beta \circ Z$ *i* $Z \circ \beta$ *su bisimulacije.*

3.6 Van Benthemov teorem za osnovnu modalnu logiku

Sada želimo iskazati jedan od najvažnijih rezultata u vezi bisimulacija. To je van Benthemov teorem karakterizacije koji govori da modalnu logiku možemo promatrati kao fragment logike prvog reda koji je invarijantan na bisimulacije. Prije iskaza van Benthemovog teorema navodimo nekoliko primjera za motivaciju.

Već je bilo istaknuto da za svaki Kripkeov okvir $\mathcal{F} = (W, R)$ vrijedi:

$\mathcal{F} \Vdash \Box p \to \Box\Box p$ ako i samo ako okvir $\mathcal{F}$ je tranzitivan.

To ekvivalentno možemo izreći i ovako:

$$\mathcal{F} \Vdash \Box p \to \Box\Box p \ \text{ ako i samo ako } \ \mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z (xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz),$$

pa možemo reći da je modalnoj formuli $\Box p \to \Box\Box p$ pridružena FO–formula $\forall x \forall y \forall z (xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz)$.

Bilo je istaknuto da modalna formula $\Box p \to p$ određuje refleksivne okvire, pa možemo reći da je modalnoj formuli $\Box p \to p$ pridružena FO–formula $\forall x (xRx)$.

Sada ćemo definirati preslikavanje koje svakoj modalnoj formuli pridružuje neku FO–formulu.

Definicija 3.130. *Neka je $\sigma = \{\rho, =\} \cup \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$, gdje su ρ i $=$ binarni relacijski simboli, a svaki P_i je jednomjesni relacijski simbol. Za svaku individualnu varijablu x definiramo preslikavanje ST_x, koje nazivamo* **standardna translacija***, a koje svakoj modalnoj formuli A pridružuje σ–formulu prvog reda $ST_x(A)$ tako da za sve formule φ i ψ vrijedi:*

$$\begin{aligned}
ST_x(p_i) &\equiv P_i(x), \ \textit{za svaku propozicionalnu varijablu } p_i;\\
ST_x(\bot) &\equiv x \neq x;\\
ST_x(\neg\varphi) &\equiv \neg ST_x(\varphi);\\
ST_x(\varphi \vee \psi) &\equiv ST_x(\varphi) \vee ST_x(\psi);\\
ST_x(\Diamond\varphi) &\equiv \exists y(\rho(x,y) \wedge ST_y(\varphi)),\\
&\quad \textit{gdje je } y \textit{ varijabla koju još nismo koristili u translaciji.}
\end{aligned}$$

Nije teško provjeriti da vrijedi:

$$ST_x(\Box\varphi) \equiv \forall y(\rho(x,y) \to ST_y(\varphi)),$$

gdje je y neka varijabla koju još nismo koristili u translaciji.

Svaki Kripkeov model $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ možemo promatrati kao neku σ–strukturu čiji je nosač skup W, relacijski simbol ρ interpretiran je relacijom dostiživosti R, a svaki unarni relacijski simbol P_i interpretiran je skupom $\{x \in W : \mathfrak{M}, x \Vdash p_i\}$ (p_i je propozicionalna varijabla).

Propozicija 3.131. *Za svaki Kripkeov model* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *i svijet* $w \in W$, *te svaku modalnu formulu* φ *i varijablu* x *vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \models ST_x(\varphi)[w],$$

gdje smo sa $\mathfrak{M} \models ST_x(\varphi)[w]$ *označili istinitost formule* $ST_x(\varphi)$ *na* σ*–strukturi* $\mathfrak{M}$ *pri čemu je varijabla* x *valuirana sa* w.

Očuvanje istinitosti primjenom standardne translacije može se iskoristiti kako bi se svojstva logike prvog reda jednostavno dokazala i za modalnu logiku.

Primjer 3.132. *Za logiku prvog reda vrijedi teorem kompaktnosti:*

> *ako za svaki konačan podskup skupa formula* S *postoji model, tada i za skup* S *postoji model.*

Dokažimo da i za modalnu logiku vrijedi teorem kompaktnosti. Neka je Σ *neki skup modalnih formula tako da za svaki konačan podskup* Σ' *od* Σ *postoji model. Neka je* $S = \{ST_x(\varphi) : \varphi \in \Sigma\}$. *Neka je* S' *proizvoljan konačan podskup od* S. *Tada postoje formule* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \Sigma$ *tako da vrijedi* $S' = \{ST_x(\varphi_1), \ldots ST_x(\varphi_k)\}$. *Po pretpostavci za konačan podskup* $\{\varphi_1, \ldots \varphi_k\}$ *od* Σ *postoji Kripkeov model* $\mathfrak{M}$ *i svijet* w *u tom modelu tako da vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k.$$

Iz prethodne propozicije slijedi da vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models [ST_x(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge ST_x(\varphi_k)][w].$$

Tim smo dokazali da za konačan podskup S' *od* S *postoji model. Iz teorema kompaktnosti za logiku prvog reda slijedi da postoji i model za* S. *Primjenom prethodne propozicije slijedi da je to model za skup modalnih formula* Σ.

Na sasvim analogni način može se dokazati da za modalnu logiku vrijedi analogon Löwenheim–Skolemovog teorema "na dolje".

Važno je istaknuti da teorem kompaktnosti ne vrijedi za logiku dokazivosti **GL** i za logiku interpretabilnosti **IL** u jednom posebnom željenom obliku. Odnosno, postoji skup modalnih formula Σ koji ima svojstvo da za svaki konačna podskup od Σ postoji **GL**–model (tranzitivan i inverzno dobro fundiran), ali za Σ ne postoji **GL**–model.

Napomena 3.133. *Osnovna modalna logika ima svojstvo konačnosti modela (eng. finite model property; kratko: fmp). No, taj rezultat ne možemo "prenijeti" na logiku prvog reda. Problem je u tome što za ispunjivu formulu* A *logike prvog reda ne mora postojati modalna formula* φ *tako da vrijedi:* $ST_x(\varphi) \Leftrightarrow A$ *(to će slijediti iz van Benthemovog teorema koji malo kasnije iskazujemo).*

Uostalom, logika prvog reda nema svojstvo fmp jer postoje formule koje su ispunjive ali za njih ne postoji konačan model.

Prirodno se postavlja sljedeće pitanje:

> *je li svaka formula logike prvog reda logički ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule?*

Odgovor na prethodno pitanje je negativan. Primjerice, formula $\rho(x, x)$ logike prvog reda nije logički ekvivalentna standardnoj translaciji niti jedne modalne formule (vidi knjigu [2]).

Sada ćemo iskazati van Benthemov teorem karakterizacije kojim je određen fragment logike prvog reda čije su formule ekvivalentne standardnoj translaciji neke modalne formule. Prije samog iskaza teorema definiramo još neke pojmove.

Ako je $\mathfrak{M}$ neki Kripkeov model i w neki svijet tog modela, tada uređeni par $(\mathfrak{M}, w)$ nazivamo **točkovni model**.

Definicija 3.134. *Kažemo da je neka σ–***formula** *$A(x)$* **invarijantna za bisimulacije** *ako za svaka dva točkovna modela $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ vrijedi da $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$ povlači sljedeću ekvivalenciju:*

$$\mathfrak{M} \models A(x)[w] \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}' \models A(x)[w'].$$

Teorem 3.135 (van Benthemov teorem karakterizacije)**.**
Neka je $A(x)$ neka σ–formula. Tada postoji modalna formula φ tako da vrijedi $ST_x(\varphi) \Leftrightarrow A(x)$ ako i samo ako formula $A(x)$ je invarijantna za bisimulacije.

Za dokaz prethodnog teorema koriste se pojmovi i alati teorije modela kao što su ultrafiltri, ultraprodukti i saturirani modeli. Analogon van Benthemovog teorema karakterizacije za logike interpretabilnosti biti će dokazan kasnije. No, za tu verziju teorema dokaz se ne može provesti na analogni način kao za osnovnu modalnu logiku. Namjera nam je ukazati na glavne probleme.

U tu svrhu navest ćemo osnovne pojmove i rezultate u vezi ultrafiltera i ultraprodukata.

Ultrafiltri i ultraprodukti

Sve detalje, kao i dokaze možete vidjeti u nastavnom materijalu [14]. Prvo dajemo primjere koji ističu još jednu motivaciju za uvođenje ultraprodukata.

Primjer 3.136. Kartezijev produkt familije grupa je grupa.
Skicirajmo dokaz te tvrdnje. Neka je $\{(G_i, \circ_i) : i \in I\}$ familija grupa. Označimo:

$$G = \prod_{i \in I} G_i = \{f \mid f : I \to \cup_{i \in I} G_i, \quad \textit{za svaki} \ \ i \in I \ \ \textit{vrijedi} \ f(i) \in G_i\}$$

Zatim, neka je $\circ$ binarna operacija na G definirana sa $(f \circ g)(i) = f(i) \circ_i g(i)$. Lako je provjeriti da je za sve $f, g \in G$ funkcija $f \circ g$ ponovno element od G, te da je $(G, \circ)$ grupa. To znači da je Kartezijev produkt proizvoljne familije grupa ponovno grupa.

Primjer 3.137. Kartezijev produkt polja općenito nije polje.
Kako bi dokazali tu tvrdnju definirajmo prvo Kartezijev produkt polja. Neka je $I \neq \emptyset$, *te za svaki* $i \in I$ *neka je* $F_i = (A_i, +_i, \cdot_i, 0_i, 1_i)$ *polje. Označimo* $A = \prod_{i \in I} A_i$. *Redom definiramo:*

a) funkciju $0 : I \to \cup A_i$ *sa* $0(i) = 0_i$;

b) funkciju $1 : I \to \cup A_i$ *sa* $1(i) = 1_i$;

c) funkcije $+$ *i* $\cdot$ *sa:*

$$(f+g) : I \to \cup_{i \in I} A_i, \quad (f+g)(i) = f(i) +_i g(i)$$

$$(f \cdot g) : I \to \cup_{i \in I}, \quad (f \cdot g)(i) = f(i) \cdot_i g(i).$$

Uz tako definirane operacije Kartezijev produkt polja općenito nije polje. Npr. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *nije polje, jer uređeni parovi* $(0,1)$ *i* $(1,0)$ *različiti su od nule, ali* $(0,1) \cdot (1,0) = 0$.

Na sasvim analogni način može se pokazati da Kartezijev produkt linearno uređenih skupova općenito nije linearno uređen. Kako riješiti istaknute probleme? Ideja je jednostavna. Na Kartezijevom produktu $\prod_{i \in I} A_i$ definiramo posebnu relaciju ekvivalencije, te promatramo pripadni kvocijenti skup.

Definicija 3.138. *Neka je* $I \neq \emptyset$. *Za* $U \subseteq \mathcal{P}(I)$ *kažemo da je* **ultrafiltar** *nad skupom* I *ako vrijedi:*

a) $I \in U$;

b) ako su $X, Y \in U$ *tada* $X \cap Y \in U$ *(zatvorenost na konačne presjeke);*

c) ako $X \in U$ *te* $X \subseteq Z \subseteq I$ *tada je* $Z \in U$ *(zatvorenost za nadskupe);*

d) $U \neq \mathcal{P}(I)$;

e) za svaki $X \subseteq I$ *vrijedi:*

$$X \in U \text{ ako i samo ako } I \setminus X \notin U.$$

U vezi ultrafiltara posebno je važan **teorem o ultrafiltru** koji kaže da se svaki pravi filtar može proširiti do ultrafiltra. Navedeni teorem se obično dokazuje primjenom Zornove leme.

Koristeći pojam ultrafiltara sada ćemo definirati pojam ultraprodukta. Prvo ćemo definirati pojam ultraprodukta familije skupova, a nakon toga pojam ultraprodukta familije proizvoljnih struktura iste signature.

Definicija 3.139. *Neka je* $\{M_i : i \in I\}$ *proizvoljna familija skupova, te* U *proizvoljan ultrafiltar nad* I. *Na Kartezijevom produktu familije skupova* $\{M_i : i \in I\}$, *tj. na skupu*

$$\prod_{i\in I} M_i = \{f \mid f : I \to \cup_{i\in I} M_i \ \text{ tako da je za svaki } \ i \in I \ \text{ ispunjeno } \ f(i) \in M_i\}$$

definiramo binarnu relaciju $\sim$ *ovako:*

$$f \sim g \quad \text{ako i samo ako} \quad \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U.$$

Lako je pokazati da je relacija $\sim$ *jedna relacija ekvivalencije. Za* $f \in \prod_{i\in I} M_i$ *sa* f_U *označavamo pripadnu klasu ekvivalencije. Skup svih klasa ekvivalencije nazivamo* **ultraprodukt familije skupova** $\{M_i : i \in I\}$, *te ga označavamo sa* $\prod\limits_U M_i$.

Definicija 3.140. *Neka je* σ *proizvoljna signatura, te neka je* $\{\mathfrak{M}_i = (M_i, \varphi_i) : i \in I\}$ *neka familija* σ*–struktura. Neka je* U *proizvoljan ultrafiltar nad skupom* I. *Definiramo* σ*–strukturu* $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ *na sljedeći način:*

a) $M = \prod\limits_U M_i$

b) za relacijski simbol $R^n \in \sigma$ *definiramo:*
$((f_1)_U, \ldots, (f_n)_U) \in \varphi(R)$ *ako i samo ako*
$\{i : (f_1(i), \ldots, f_n(i)) \in \varphi_i(R)\} \in U$

c) za funkcijski simbol $f^n \in \sigma$ *definiramo:*
$$\varphi(f^n)((f_1)_U, \ldots, (f_n)_U) = \Big(i \mapsto \varphi_i(f^n)(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \Big)_U$$

d) za konstantski simbol $c \in \sigma$ *definiramo* $\varphi(c) = \Big(i \mapsto \varphi_i(c)\Big)_U$

Upravo definirana struktura se naziva **ultraprodukt familije struktura** $\{\mathfrak{M} : i \in I\}$ *i označavamo je sa* $\prod\limits_U \mathfrak{M}_i$.

Ako su sve strukture $\mathfrak{M}_i$ *međusobno jednake, tj.* $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}$, *za svaki* $i \in I$, *tada pripadni ultraprodukt nazivamo* **ultrapotencija** *strukture* $\mathfrak{N}$.

Teorem 3.141. *(Łosov osnovni teorem o ultraproduktima)*
Neka je $I \neq \emptyset$, $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ *proizvoljna familija* σ*–struktura i* U *proizvoljan ultrafiltar nad* I. *Tada za svaku zatvorenu formulu* F *vrijedi:*

$$\prod_U \mathfrak{M}_i \models F \quad \text{ako i samo ako} \quad \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models F\} \in U.$$

Iz Łosovog teorema slijedi da je ultraprodukt proizvoljne familije polja ponovno polje (nad proizvoljnim ultrafiltrom). Zatim, iz Łosovog teorema jednostavno slijedi da je ultraprodukt familije linearno uređenih skupova ponovo linearno uređen skup.

U dokazu van Benthemovog teorema za osnovnu modalnu logiku posebno je značajna činjenica koja govori da je ultraprodukt nad prebrojivo nepotpunim ultrafiltrom jedna ω_1–saturirana struktura. No, dokaz analogne tvrdnje za Veltmanovu semantiku čini se vrlo složen. Argumetni za to su dani u članku M. Vuković, *A Note on Ultraproducts of Veltman Models*, Glasnik matematički 46(66) (2011), 7–10. Ovdje navodimo osnovne rezultate iz tog članka.

Definicija 3.142. *Za ultrafiltar U kažemo da je prebrojivo potpun ako za svaki niz skupova (A_n) iz U vrijedi $\cap A_n \in U$.*

Propozicija 3.143. *Ultraprodukt familije Veltmanovih modela nad prebrojivo potpunim ultrafiltrom je Veltmanov model.*

Kako bi se mogla definirati standardnu translacija logike interpretabilnosti pretpostavljamo da signatura σ sadrži i jedan tromjesni relacijski simbol S, te uz prije navedene uvjete još dodajemo sljedeći:

$$ST_x(\varphi \rhd \psi) \equiv \forall y(\rho(x,y) \wedge ST_y(\varphi) \to \exists z(S(x,y,z) \wedge ST_z(\psi))).$$

Lako je vidjeti da za ovako proširenu standardnu translaciju vrijedi tvrdnja o očuvanju istinitosti. To iskazujemo u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.144. *Neka je $\mathfrak{M}$ Veltmanov model, w neki svijet tog modela i φ neka formula logike interpretabilnosti. Tada vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \models ST_x(\varphi)[w].$$

Primjenom prethodne propozicije lako je dobiti sljedeći analogon Łosovog teorema za Veltmanovu semantiku.

Korolar 3.145. *Neka je $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ neka familija Veltmanovih modela. Neka je U neki prebrojivo potpuni ultrafiltar nad skupom I i φ neka formula logike interpretabilnosti. Tada za svaku izbornu funkciju $f \in \prod_{i \in I} W_i$ vrijedi:*

$$\prod_U \mathfrak{M}_i, f_U \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \{i \in I : \mathfrak{M}_i, f(i) \Vdash \varphi\} \in U.$$

Korolar 3.146. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ neki Veltmanov model, $w \in W$ i U neki prebrojivo potpun ultrafiltar nad nekim nepraznim skupom I. Neka je $f_w : I \to W$ konstantna funkcija definirana sa $f_w(i) = w$. Tada za svaku formulu φ logike interpretabilnosti vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \prod_U \mathfrak{M}, (f_w)_U \Vdash \varphi.$$

3.7 Teorem karakterizacije za logiku interpretabilnosti

Karakteristična formula

Podsjetimo se da je u točki o bisimulacijskim igrama iskazan je sljedeći teorem:

Teorem 3.147. *Pretpostavimo da je skup propozicionalnih varijabli konačan. Neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ točkovni modeli. Tada su za svaki $n \in \mathbb{N}$ ekvivalentne sljedeće tvrdnje:*

a) postoji n–bisimulacija između $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$;

b) igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri u n poteza s početkom u $(\mathfrak{M}, w; \mathfrak{M}', w')$;

c) $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ su n–modalno ekvivalentni;

d) $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi^n_{(\mathfrak{M},w)}$.

Formulu $\chi^n_{(\mathfrak{M},w)}$ zovemo *karakteristična formula* stupnja n i definiramo je rekurzivno ovako:

$$\chi^0_{(\mathfrak{M},w)} \equiv \Big(\bigwedge_{p \text{ t.d. } w \Vdash p} p \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{p \text{ t.d. } w \nVdash p} \neg p \Big);$$

$$\chi^{n+1}_{(\mathfrak{M},w)} \equiv \chi^0_{(\mathfrak{M},w)} \wedge \Big(\bigwedge_{u \in W, wRu} \Diamond \chi^n_{(\mathfrak{M},u)} \Big) \wedge \Box \Big(\bigvee_{u \in W, wRu} \chi^n_{(\mathfrak{M},u)} \Big).$$

U nastavku ćemo umjesto $\chi^n_{(\mathfrak{M},w)}$ pisati χ^n_w, jer je iz konteksta uvijek jasno o kojem modelu se radi.

Napomena 3.148. *Indukcijom se lako dokazuje da, ako je skup propozicionalnih varijabli konačan, onda postoji postoji samo konačno mnogo, do na ekvivalenciju, modalnih formula stupnja najviše n. Stoga su konjunkcije i disjunkcije iz definicije karakteristične formule konačne.*

Ekvivalencija (1) $\Leftrightarrow$ (2) dokazuje se rutinskom indukcijom i opravdava definiciju n-bisimuliranosti preko postojanja pobjedničke strategije.

Tvrdnja (4) je tehnički korak za dokaz ključne ekvivalencije (2) $\Leftrightarrow$ (3). Indukcijom se lako dokazuje (2) $\Rightarrow$ (3), a trivijalno je (3) $\Rightarrow$ (4), jer je očito $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi^n_w$. Opet, jednostavnom indukcijom se dokazuje (4) $\Rightarrow$ (2).

Prethodni teorem je polazna točka alternativnog dokaza van Benthemovog teorema karakterizaciju, u kojem se ne koriste ultrafilteri, ultraprodukti i saturirani modeli. Ovim ćemo ilustrirati i metodu dokazivanja analogona van Benthemovog teorema za logike interpretabilnosti, kod kojih zbog poteškoća naznačenih na prethodnom predavanju ne znamo dokazati postojanje saturiranih modela.

Skicirajmo alternativni dokaz van Benthemovog teorema karakterizacije. Treba dokazati da je dana formula prvog reda, koja je invarijantna na bisimulacije, ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule. Najprije uočimo da iz prethodnog teorema odmah slijedi analogna tvrdnja za n–bisimulacije.

Propozicija 3.149. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je σ signatura standardnih translacija modalnih formula. Neka je $F(x)$ neka σ–formula invarijantna na n–bisimulacije, tj. ako su točkovni $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ n–bisimulirani, onda vrijedi sljedeća ekvivalencija: $\mathfrak{M} \models F(x)[w]$ ako i samo ako $\mathfrak{M}' \models F(x)[w]$.*

Tada je $F(x)$ ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule.

Dokaz. Promotrimo skup propozicionalnih varijabli koje odgovaraju unarnim relacijskim simbolima iz formule $F(x)$. Stavimo $\chi = \bigvee \chi_w^n$, gdje je disjunkcija po svim točkovnim modelima $(\mathfrak{M}, w)$ takvim da je $\mathfrak{M} \models F(x)[w]$. Iz napomene 3.148 slijedi da je navedena disjunkcija konačna.

Preostaje dokazati da je $F(x)$ ekvivalentna $ST_x(\chi)$. Neka $\mathfrak{M} \models F(x)[w]$. Kako je $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi_w^n$, to je $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$. To znači da vrijedi $\mathfrak{M} \models ST_x(\chi)[w]$.

Obratno, neka $\mathfrak{M} \models ST_x(\chi)[w]$, tj. $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi$. Tada postoji točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ takav da je $\mathfrak{M}' \models F(x)[w]$ i $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi_{w'}^n$. Iz prethodnog teorema tada slijedi da su točkovni modeli $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ n–bisimulirani. Iz pretpostavke propozicije slijedi $\mathfrak{M} \models F(x)[w]$. Q.E.D.

Za dokaz van Benthemovog teorema preostaje dokazati (nije trivijalno!): ako je $F(x)$ invarijantna na bisimulacije, onda je invarijantna na n–bisimulacije za neki n. Tim dijelom dokaza nećemo se baviti.

Karakteristična formula za logiku interpretabilnosti

Podsjetimo se, na ranijim predavanjima definirane su bisimulacijske igre na Veltmanovim modelima. Definiran je i pojam n–bisimulacije među Veltmanovim modelima i iskazana propozicija po kojoj je postojanje n–bisimulacije ekvivalentno postojanju pobjedničke strategije igrača II u bisimulacijskoj igri u n poteza.

Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ Veltmanovi modeli i neka su w i w' po jedan svijet svakog od tih modela. U nastavku kažemo da su w i w' n–**bisimulirani** ako igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri u n poteza s početkom u $(\mathfrak{M}, w; \mathfrak{M}', w')$.

Želimo dokazati sljedeći analogon teorema 3.147 za logiku interpretabilnosti.

Teorem 3.150. *Pretpostavimo da je skup propozicionalnih varijabli konačan. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ Veltmanovi modeli i neka su w i w' po jedan svijet svakog od tih modela. T ada su za svaki $n \in \mathbb{N}$ ekvivalentne sljedeće tvrdnje:*

a) svjetovi w i w' su n–bisimulirani;

b) svjetovi w i w' su n-modalno ekvivalentni;

c) $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi_w^n$.

Drugim riječima, želimo definirati karakterističnu formulu χ_w^n koja bi nam omogućila dokaz da su tvrdnje (1) i (2) ekvivalentne. Pritom, (1) $\Rightarrow$ (2) se jednostavno dokazuje indukcijom, te je samo obrat problematičan. Podsjetimo se koraka u rekurzivnoj definiciji karakteristične formule za osnovni modalni jezik:

$$\chi_w^{n+1} = \chi_w^0 \wedge \Big(\bigwedge_{u \in W, wRu} \Diamond \chi_u^n \Big) \wedge \Box \Big(\bigvee_{u \in W, wRu} \chi_u^n \Big).$$

U slučaju logike interpretabilnosti χ_w^0 i dalje će biti konjunkcija svih propozicionalnih varijabli p istinitih u w i svih $\neg p$ za one propozicionalne varijable p koje nisu istinite u w. Također, napomena 3.148 vrijedi i za jezik logike interpretabilnosti.

Drugim dijelom formule želimo izraziti u jeziku logike interpretabilnosti da u igri s $n+1$ poteza igrač II uvijek ima odgovor na prvi potez igrača I, ako je taj potez u modelu $\mathfrak{M}$, tako da u ostalih n poteza igrač II ima pobjedničku strategiju tj. da za svaki u takav da je wRu (postoji u' takav da je $w'R'u'$ i $u' \Vdash \chi_u^n$ i za svaki v' takav da je $u'S'_{w'}v'$) postoji v takav da je uS_wv i $v' \Vdash \chi_v^n$. $(*)$

Dio napisan u zagradama odnosi se na model $\mathfrak{M}'$, a ima obrnute kvantifikatore nego interpretacija modalnog operatora $\rhd$. Koristit ćemo nestandardnu pokratu $A \lhd B = \neg(A \rhd \neg B)$. Uočimo da vrijedi: $w \Vdash A \lhd B$ ako i samo ako postoji u takav da je wRu i $u \Vdash A$ i za svaki v takav da je uS_wv vrijedi $v \Vdash B$.

Sada je jasno da $(*)$ vrijedi ako i samo ako

$$w' \Vdash \bigwedge_{u \in W, wRu} \left(\chi_u^n \lhd \bigvee_{v \in W, uS_wv} \chi_v^n \right).$$

Obratno, trećim dijelom formule želimo izraziti da igrač II uvijek ima odgovor na prvi potez igrača I, ako je taj potez u modelu $\mathfrak{M}'$ tj. da za svaki u' takav da je $w'R'u'$ (postoji u takav da je wRu i $u' \Vdash \chi_u^n$ i za svaki v takav da je uS_wv) postoji v' takav da je $u'S'_{w'}v'$ i $v' \Vdash \chi_v^n$. $(**)$

Ovo je teže izraziti u jeziku logike interpretabilnosti kao formulu koja vrijedi u w' jer je kvantifikacija po svjetovima modela $\mathfrak{M}$ ugnježđena u dijelu napisanom u zagradama. Koristit ćemo oznake $R[w] = \{u \in W : wRu\}$ i $S_w[u] = \{v \in W : uS_wv\}$. Uočimo da $(**)$ možemo izreći na sljedeći način: za svaki u' takav da je $w'R'u'$ vrijedi

$$u' \Vdash \bigvee_{u \in R[w]} \left(\chi_u^n \wedge \bigwedge_{v \in S_w[u]} \exists v' \in S'_{w'}[u'] (v' \Vdash \chi_v^n) \right).$$

Koristeći distributivnost disjunkcije prema konjunkciji, dobivamo

$$u' \Vdash \bigwedge_{\substack{T \subseteq R[w], \\ f \in \prod_{u \in R[w] \setminus T} S_w[u]}} \left(\bigvee_{u \in T} \chi_u^n \vee \bigvee_{u \in R[w] \setminus T} \exists v' \in S'_{w'}[u'] (v' \Vdash \chi_{f(u)}^n) \right).$$

Sada, komutiranjem univerzalnog kvantifikatora s konjunkcijom, te egzistencijalnog s disjunkcijom, dobivamo da je $(**)$ ekvivalentno s

$$w' \Vdash \bigwedge_{\substack{T\subseteq R[w],\\ f\in\prod_{u\in R[w]\setminus T} S_w[u]}} \left(\neg \bigvee_{u\in T} \chi_u^n \rhd \bigvee_{u\in R[w]\setminus T} \chi_{f(u)}^n\right).$$

Dakle, korak rekurzije u definiciji karakteristične formule je

$$\chi_w^{n+1} = \chi_w^0 \wedge \bigwedge_{u\in R[w]} \left(\chi_u^n \lhd \bigvee_{v\in S_w[u]} \chi_v^n\right) \wedge \bigwedge_{\substack{T\subseteq R[w],\\ f\in\prod_{u\in R[w]\setminus T} S_w[u]}} \left(\neg \bigvee_{u\in T} \chi_u^n \rhd \bigvee_{u\in R[w]\setminus T} \chi_{f(u)}^n\right).$$

Ovim razmatranjem ujedno je i dokazano (3) $\Rightarrow$ (1), dok (2) $\Rightarrow$ (3) trivijalno slijedi iz $w \Vdash \chi_w^n$, što se lako dokazuje indukcijom.

Dokaz sljedeće propozicije je potpuno analogan dokazu propozicije 3.149.

Propozicija 3.151. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je σ signatura standardnih translacija formula jezika logike interpretabilnosti. Neka je $F(x)$ jedna σ–formula invarijantna na n–bisimulacije među Veltmanovim modelima. Tada je formula $F(x)$ ekvivalentna standardnoj translaciji neke formule jezika logike interpretabilnosti na Veltmanovim modelima.*

Slično dokazu van Benthemovog teorema za osnovni modalni jezik preostaje dokazati sljedeće: ako je formula $F(x)$ invarijantna na bisimulacije među Veltmanovim modelima, onda je invarijantna na n–bisimulacije među Veltmanovim modelima za neki n. Taj dio dokaza temelji se na tehnikama iz članka A. Dawar, M. Otto, Modal characterization theorems over special classes of frames (*Annals of Pure and Applied Logic* 2009), a ovdje ga ispuštamo.

U članku T. Perkov, M. Vuković, A bisimulation characterization for interpretability logic (*Logic Journal of the IGPL* 2014) dokazali smo sljedeći analogon van Benthemovog teorema.

Teorem 3.152. *Neka je σ signatura standardnih translacija formula jezika logike interpretabilnosti. Neka je $F(x)$ neka σ–formula. Tada je formula $F(x)$ ekvivalentna standardnoj translaciji neke formule jezika logike interpretabilnosti na Veltmanovim modelima ako i samo ako je invarijantna na bisimulacije među Veltmanovim modelima.*

3.8 Filtracije i odlučivost

Filtracije Kripkeovih modela

Neka je $\mathfrak{M}$ Kripkeov model i Γ skup formula zatvoren na potformule. Za svjetove $w, u \in W$ definiramo $w \sim_\Gamma u$ ako za sve $F \in \Gamma$ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash F$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, u \Vdash F$.

Očito je $\sim_\Gamma$ relacija ekvivalencije na skupu W. Za svaki svijet $w \in W$ sa $[w]_\Gamma$ označavamo pripadnu klasu ekvivalencije.

Označimo $W_\Gamma = \{[w]_\Gamma : w \in W\}$. Uočimo: ako je Γ konačan, onda je W_Γ konačan. Na W_Γ možemo na prirodan način definirati relaciju forsiranja: za sve propozicionalne varijable $p \in \Gamma$ stavimo $[w]_\Gamma \Vdash p$ ako i samo ako $w \Vdash p$, a za $p \notin \Gamma$ stavimo $[w]_\Gamma \nVdash p$. Očito definicija ne ovisi o izboru reprezentanta.

Kažemo da je model $\widetilde{\mathfrak{M}} = (W_\Gamma, \widetilde{R}, \Vdash)$ **filtracija** modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na Γ ako za svaku formulu $F \in \Gamma$ i za svaki $w \in W$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash F$ ako i samo ako $\widetilde{\mathfrak{M}}, [w]_\Gamma \Vdash F$.

Pitanje: kako definirati $\widetilde{R}$ tako da ovo vrijedi? Nećemo dati jednoznačan odgovor, nego uvjete koje $\widetilde{R}$ treba zadovoljavati.

Lema 3.153 (o filtraciji)**.**
Neka je $\mathfrak{M}$ model, Γ skup formula zatvoren na potformule, te W_Γ i $\Vdash$ na W_Γ definirani kao malo prije. Neka je $\widetilde{R} \subseteq W_\Gamma \times W_\Gamma$ relacija tako da vrijedi:

(MIN) za sve $w, u \in W$, ako je wRu, onda je $[w]_\Gamma \widetilde{R} [u]_\Gamma$;

(MAX) za sve $w, u \in W$ takve da je $[w]_\Gamma \widetilde{R} [u]_\Gamma$ i za sve $\Diamond A \in \Gamma$ vrijedi: ako $\mathfrak{M}, u \Vdash A$, onda $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond A$.

Tada je $\widetilde{\mathfrak{M}} = (W_\Gamma, \widetilde{R}, \Vdash)$ filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na Γ.

Tvrdnja leme se lako dokaže indukcijom po složenosti formule $F \in \Gamma$.

Uočimo da još nije dokazana egzistencija filtracije za proizvoljan Kripkeov model.

Neka je $\mathfrak{M}$ Kripkeov model i Γ skup formula zatvoren na potformule. Definiramo sljedeće relacije na skupu W_Γ:

- $R_\Gamma^{min} = \{([w]_\Gamma, [u]_\Gamma) : wRu\}$;
- stavimo $[w]_\Gamma R_\Gamma^{max} [u]_\Gamma$ ako i samo ako za svaku formulu $\Diamond A \in \Gamma$ takvu da $\mathfrak{M}, u \Vdash A$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond A$.

Uočimo da je $R_\Gamma^{min} \subseteq R_\Gamma^{max}$. Zaista, neka je $[w]_\Gamma R_\Gamma^{min} [u]_\Gamma$ i neka je $\Diamond A \in \Gamma$ tako da $\mathfrak{M}, u \Vdash A$. T reba dokazati $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond A$. Kako je $[w]_\Gamma R_\Gamma^{min} [u]_\Gamma$, to postoje $w' \in [w]_\Gamma$ i $u' \in [u]_\Gamma$ takvi da je $w' R u'$. Sada zbog $u' \in [u]_\Gamma$ imamo $u \sim_\Gamma u'$ i stoga $\mathfrak{M}, u' \Vdash A$. Dakle, $\mathfrak{M}, w' \Vdash \Diamond A$. Kako je $w' \in [w]_\Gamma$, to je $w \sim_\Gamma w'$ i stoga $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond A$, što je i trebalo dokazati.

Lema 3.154. *Neka je $\mathfrak{M}$ model, Γ skup formula zatvoren na potformule, te skup W_Γ i $\Vdash$ relacija forsiranja na W_Γ definirani kao malo prije. Tada za svaku relaciju $\widetilde{R}$ takvu da je $R_\Gamma^{min} \subseteq \widetilde{R} \subseteq R_\Gamma^{max}$ vrijedi da je $\widetilde{\mathfrak{M}} = (W_\Gamma, \widetilde{R}, \Vdash)$ filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na Γ.*

Dokaz. Prema lemi o filtraciji dovoljno je dokazati da $\widetilde{R}$ zadovoljava uvjete (MIN) i (MAX). Neka su $w, u \in W$ takvi da vrijedi wRu. Iz definicije relacije R_Γ^{min} tada slijedi $[w]_\Gamma R_\Gamma^{min} [u]_\Gamma$. Kako je $R_\Gamma^{min} \subseteq \widetilde{R}$, to je $[w]_\Gamma \widetilde{R} [u]_\Gamma$, dakle vrijedi (MIN).

Neka je sada $[w]_\Gamma \widetilde{R} [u]_\Gamma$ i neka je $\Diamond A \in \Gamma$ tako da $\mathfrak{M}, u \Vdash A$. Kako je $\widetilde{R} \subseteq R_\Gamma^{max}$, to je $[w]_\Gamma R_\Gamma^{max} [u]_\Gamma$. Iz definicije relacije R_Γ^{max} slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash A$, dakle vrijedi (MAX). Q.E.D.

Teorem 3.155 (svojstvo konačnih modela)**.** *Neka je F ispunjiva modalna formula. Tada postoji konačan model $\mathfrak{M}$ i $w \in W$ tako da je $\mathfrak{M}, w \Vdash F$.*

Štoviše, postoji Kripkeov model $\mathfrak{M}$ s najviše 2^m svjetova, gdje je m broj svih potformula formule F.

Dokaz. Neka je $(\mathfrak{N}, u)$ točkovni model takav da je $\mathfrak{N}, u \Vdash F$ i neka je Γ skup svih potformula formule F. Neka je $\mathfrak{M}$ filtracija modela $\mathfrak{N}$ u odnosu na Γ. Stavimo $w = [u]_\Gamma$. Tada model $\mathfrak{M}$ ima najviše 2^m svjetova (jer Γ ima 2^m podskupova, pa $\sim_\Gamma$ može imati najviše 2^m klasa ekvivalencije) i vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash F$. Q.E.D.

Napomena 3.156. *Kako bismo dokazivali svojstvo konačnih modela u odnosu na neke klase modela s nekim istaknutim svojstvima pomoću filtracija, potrebno je da na filtraciji ta svojstva budu očuvana. Lako je dokazati da npr. R_Γ^{min} čuva simetričnost, tj. ako je R simetrična, onda je i R_Γ^{min} simetrična. No, to ne vrijedi npr. za tranzitivnost. Nejednoznačnost filtracije koristimo kako bismo pogodno definirali $\widetilde{R}$ radi očuvanja željenog svojstva relacije dostiživosti R. Što se tiče tranzitivnosti, definiramo relaciju R^t na W_Γ tako da stavimo $[w]_\Gamma R^t [u]_\Gamma$ ako i samo ako za sve $\Diamond A \in \Gamma$ takve da je $\mathfrak{M}, u \Vdash A \vee \Diamond A$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond A$. Nije teško dokazati: ako je R tranzitivna, onda je $(W_\Gamma, R^t, \Vdash)$ filtracija i R^t je tranzitivna.*

Filtracije generaliziranih Veltmanovih modela

Osim zatvorenosti na potformule, od skupa formula u ovoj točki zahtijevamo još neka svojstva. Kažemo da je skup formula Γ logike interpretabilnosti **adekvatan** ako je zatvoren na potformule i vrijedi:

a) ako je $A \in \Gamma$ onda je $\sim A \in \Gamma$;

b) $\bot \rhd \bot \in \Gamma$;

c) za sve formule A i B za koje postoji formula C tako da je $A \rhd C \in \Gamma$ ili $C \rhd A \in \Gamma$, te ako postoji formula D tako da je $B \rhd D \in \Gamma$ ili $D \rhd B \in \Gamma$, onda je i $A \rhd B \in \Gamma$.

Očito je svaka formula sadržana u konačnom adekvatnom skupu formula.

U ovoj točki ćemo smatrati da je jedini modalni operator u jeziku $\rhd$, dok su $\Diamond$ i $\Box$ definirani kao pokrate na sljedeći način: $\Diamond A = \neg(A \rhd \bot)$, $\Box A = \sim\Diamond\sim A$, tj. $\Box A = \sim A \rhd \bot$.

Lako se vidi da za adekvatni skup formula Γ vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} A \rhd B \in \Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \Diamond A, \Diamond B \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow \quad \Box\sim A, \Box\sim B \in \Gamma \quad \text{(pod uvjetom da } \Gamma \text{ ne sadrži} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dvostruko negirane formule).} \end{aligned}$$

Neka je $\mathfrak{M}$ generalizirani Veltmanov model i $\sim\, \subseteq\, \sim_\Gamma$ relacija ekvivalencije na W. Klasu ekvivalencije čiji reprezentant je w označavamo s $[w]$. Neka je $\widetilde{W} = \{[w] : w \in$

$W\}$. **Filtracija Veltmanovog modela** $\mathfrak{M}$ u odnosu na skup formula Γ i relaciju $\sim$ je generalizirani Veltmanov model $\widetilde{\mathfrak{M}} = (\widetilde{W}, \widetilde{R}, \{\widetilde{S}_{[w]} : [w] \in \widetilde{W}\}, \Vdash)$ takav da za sve $w \in W$ i $F \in \Gamma$ vrijedi: $w \Vdash F$ ako i samo ako $[w] \Vdash F$.

Teorem 3.157. *Neka je $\mathfrak{M}$ generalizirani Veltmanov model, Γ adekvatan skup formula i $\sim$ najveća bisimulacija na $\mathfrak{M}$. Redom definiramo sljedeće:*

a) $\widetilde{R} = \{([w],[u]) : wRu$ *i postoji* $\Box A \in \Gamma$ *tako da* $w \nVdash \Box A$ *i* $u \Vdash \Box A\}$;

b) $[u]\widetilde{S}_{[w]}\widetilde{V}$ *ako i samo ako* $[w]\widetilde{R}[u]$, $\widetilde{V} \subseteq \widetilde{R}[[w]]$ *i za sve* $w' \in [w]$ *i* $u' \in [u]$ *takve da je* $w'Ru'$ *i postoji* $V' \subseteq \widetilde{V}$ *takav da je* $u'S_{w'}V'$;

c) za svaku propozicionalnu varijablu $p \in \Gamma$ *definiramo* $[w] \Vdash p$ *ako i samo ako* $w \Vdash p$, *te definiramo* $[w] \nVdash q$ *za svaku propozicionalnu varijablu* $q \notin \Gamma$.

Tada je $\widetilde{\mathfrak{M}} = (\widetilde{W}, \widetilde{R}, \{\widetilde{S}_{[w]} : [w] \in \widetilde{W}\}, \Vdash)$ *filtracija generaliziranog Veltmanovog modela* $\mathfrak{M}$ *u odnosu na* Γ *i* $\sim$.

Dokaz. Treba dokazati da je $\widetilde{\mathfrak{M}}$ generalizirani Veltmanov model, te da je filtracija. Detalji se mogu vidjeti u članku T. Perkov, M. Vuković, Filtrations of generalized Veltman models, *Mathematical Logic Quarterly* 2016. Q.E.D.

Svojstvo konačnih modela u odnosu na generaliziranu semantiku

Sasvim analogno definiciji n–bisimulacije među Veltmanovim modelima, mogu se definirati n–bisimulacije među generaliziranim Veltmanovim modelima. Lako se dokazuje da su n–bisimulirani svjetovi ujedno i n–modalno ekvivalentni, te da vrijedi i obrat, pod uvjetom da imamo samo konačno mnogo propozicionalnih varijabli.

Teorem 3.158. *Logika interpretabilnosti ima svojstvo konačnih modela u odnosu na generalizirane Veltmanove modele.*

Dokaz. Neka je A ispunjiva formula, $\mathfrak{M}$ generalizirani Veltmanov model i w_0 svijet tako da $\mathfrak{M}, w_0 \Vdash A$. Neka je Γ konačan adekvatan skup formula takav da je $A \in \Gamma$. Neka je $\widetilde{\mathfrak{M}}$ filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na Γ i relaciju $\sim$ iz prethodnog teorema. Tada vrijedi $\widetilde{\mathfrak{M}}, [w_0] \Vdash A$.

Neka je m broj formula oblika $\Box B$ koje pripadaju skupu Γ. Nije teško dokazati da tada $\widetilde{R}$–lanac može imati najviše $m+1$ element (detalji su u članku u T. Perkov, M. Vuković, MLQ 2016).

Slijedi da su dva svijeta u $\widetilde{\mathfrak{M}}$ bisimulirani ako i samo su m–bisimulirani ako i samo ako su m–modalno ekvivalentni u odnosu na formule koje sadrže samo one propozicionalne varijable koje se pojavljuju u F.

Dakle, najveća bisimulacija na $\widetilde{\mathfrak{M}}$ generira samo konačno mnogo klasa ekvivalencije. Dakle, filtracija modela $\widetilde{\mathfrak{M}}$ u odnosu na skup formula Γ i relaciju $\sim$, gdje je $\sim$ najveća bisimulacija na $\widetilde{\mathfrak{M}}$, jest konačan generalizirani Veltmanov model takav da je F ispunjena u klasi ekvivalencije čiji reprezentant je $[w_0]$. Q.E.D.

Napomena 3.159. *U članku u MLQ dokazali smo svojstvo konačnih modela u odnosu na generaliziranu semantiku i za sisteme* $\mathbf{IL}\mathtt{M}$ *i* $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$*. Za to je potrebno samo još dokazati da su na filtraciji očuvana karakteristična svojstva generaliziranih Veltmanovih modela za te sisteme. U članku koji je još na recenziji (T. Perkov, M. Vuković, L. Mikec, Decidability of interpretability logics* $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ *and* $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$*) isto smo napravili i za* $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$*. Pritom je bilo potrebno utvrditi i karakterističnu klasu generaliziranih Veltmanovih modela za* $\mathbf{IL}\mathtt{W}$*. Detalje ispuštamo.*

Odlučivost pomoću svojstva konačnih modela

Samo ćemo skicirati standardni argument u dokazu odlučivosti pomoću svojstva konačnih modela. S obzirom da smo dokazali svojstvo konačnih modela u odnosu na generaliziranu semantiku, potrebna nam je i potpunost u odnosu na tu semantiku, koju nije teško dokazati koristeći potpunost u odnosu na Veltmanovu semantiku.

Propozicija 3.160. *Za sisteme* $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ *i* $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$ *vrijedi adekvatnost i potpunost u odnosu na odgovarajuće karakteristične klase generaliziranih Veltmanovih modela.*

Sada se odlučivost sistema $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ dokazuje koristeći sljedeće lako dokazive činjenice:

a) skup teorema sistema $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ je rekurzivno prebrojiv;

b) skup (do na izomorfizam) konačnih generaliziranih Veltmanovih modela iz karakteristične klase za $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ je rekurzivno prebrojiv.

To znači da postoji algoritam koji simultano enumerira teoreme sistema $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ i uspoređuje ih s danom formulom A i konačne generalizirane Veltmanove modele karakteristične klase, na kojima testira istinitost formule $\neg A$.

Zbog svojstva konačnih modela algoritam će u konačno mnogo koraka ili naći generalizirani Veltmanov model karakteristične klase u kojem je ispunjena $\neg A$ ili utvrditi da je A teorem sistema $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$.

Sasvim analogno se argumentira i u slučaju sistema $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$.

Bibliografija

[1] M. Aiello, I. E. Pratt–Hartmann, J. van Benthem, *Handbook od Spatial Logic*, Springer, 2007.

[2] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic,* Cambridge University Press, 2001.

[3] P. Blackburn, J. van Benthem, F. Wolter, *Handbook of Modal Logic*, Elsevier, 2007.

[4] G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, 1996.

[5] E. Goris, J.J. Joosten, Modal matters in interpretability logics, preprint, ILLC Amsterdam, 2004.

[6] E. Goris, J.J. Joosten, Modal matters in interpretability logics, *Logic Journal of the IGPL*, **16**, 371–412, 2008.

[7] E. Goris, J.J. Joosten, Self provers and Σ_1 sentences, *Logic Journal of the IGPL*, **18**, 1–21, 2010.

[8] E. Goris, J.J. Joosten, A new principle in the interpretability logic of all reasonable arithmetical theories, *Logic Journal of the IGPL*, **19**, 1–17, 2011.

[9] G. Japaridze, D.H.J. de Jongh, The logic of provability, In *Handbook of Proof Theory*, S.R. Buss, ed., pp. 475–546. Elsevier, 1998.

[10] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Chapman&Hall, 1997.

[11] M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, PWS Publishing Company, 1996.

[12] A. Visser, An overview of interpretability logic. In *Advances in modal logic, Volume 1*, M. Kracht et al. eds., pp. 307–359, CSLI Publications, 1998.

[13] M. Vuković, *Matematička logika*, Element, 2009.

[14] M. Vuković, *Primijenjena logika*, nastavni materijali za poslijediplomski kolegij, PMF–MO, Zagreb, 2011.
https://www.math.pmf.unizg.hr/hr/publication-croatian-vukovic

Indeks