Nuklearna fizika
- vježbe -

1. Simetrije

Sakurai

Rotacije

- u trodimenzionalnom euklidskom prostoru, rotacija se opisuje realnom, ortogonalnom matricom dimenzije 3x3:

$$\vec{r}\,' = \mathbf{R}\vec{r}$$

- eksplicitan matrični zapis, u granici malih kutova:

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\phi^2}{2} & -\phi & 0 \\ \phi & 1-\dfrac{\phi^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotacije

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\phi^2}{2} & -\phi \\ 0 & \phi & 1-\frac{\phi^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1-\frac{\phi^2}{2} & 0 & \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\phi & 0 & 1-\frac{\phi^2}{2} \end{pmatrix}$$

Rotacije

- trivijalno se pokazuje:

$$R_x(\phi)R_y(\phi) \approx \begin{pmatrix} 1-\frac{\phi^2}{2} & 0 & \phi \\ \phi^2 & 1-\frac{\phi^2}{2} & -\phi \\ -\phi & \phi & 1-\phi^2 \end{pmatrix} \qquad R_y(\phi)R_x(\phi) \approx \begin{pmatrix} 1-\frac{\phi^2}{2} & \phi^2 & \phi \\ 0 & 1-\frac{\phi^2}{2} & -\phi \\ -\phi & \phi & 1-\phi^2 \end{pmatrix}$$

- rotacije oko različitih osi **ne komutiraju** ako **ne** zanemarimo članove s drugom ili višim potencijama u ϕ:

$$R_x(\phi)R_y(\phi) - R_y(\phi)R_x(\phi) \approx \begin{pmatrix} 0 & -\phi^2 & 0 \\ \phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotacije

- dakle:

$$R_x(\phi)R_y(\phi) - R_y(\phi)R_x(\phi) \approx R_z(\phi^2) - 1$$

- "1" se može zapisati kao rotacija oko bilo koje osi za 0° (takav zapis će nam trebati kasnije za povlačenje analogije s algebrom momenta impulsa):

$$R_x(\phi)R_y(\phi) - R_y(\phi)R_x(\phi) \approx R_z(\phi^2) - R_{any}(0)$$

Rotacije u kvantnoj mehanici

- rotaciji, opisanoj matricom *R*, u kvantnoj mehanici se pridružuje operator *D(R)*, tako da vrijedi:

$$\left|\alpha\right\rangle_R = D(R)\left|\alpha\right\rangle$$

$\left|\alpha\right\rangle$ ... stanje prije rotacije

$\left|\alpha\right\rangle_R$ ... stanje poslije rotacije

- *R* – matrica, *D(R)* – operator koji se može reprezentirati matricom
- dimenzija te matrice ovisi o dimenziji *N* prostora stanja $|\alpha>$
- N=2 (spin=1/2) ⇨ *D(R)* se opisuje matricom 2x2
- N=3 (spin=1) ⇨ *D(R)* se opisuje matricom 3x3
- ...

Rotacije u kvantnoj mehanici

Određivanje matrice operatora *D(R)*:

1) infinitezimalni operator može se u QM napisati kao:

$$U_\phi = 1 - iG\varepsilon$$

gdje je G hermitski operator, a ε infinitezimalni pomak

2) za translaciju: $G \to p_x/\hbar$, $\varepsilon \to dx$,

za pomak u vremenu: $G \to H/\hbar$, $\varepsilon \to dt$,

za rotaciju: $G \to J_z/\hbar$, $\varepsilon \to d\phi$.

(J_z-općenit operator momenta impulsa)

3) dakle:

$$D(z, d\phi) = 1 - i\frac{J_z}{\hbar}d\phi$$

4) konačna rotacija:

$$D(z, \phi) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - i\frac{J_z}{\hbar}\frac{\phi}{N}\right)^N = e^{-\frac{iJ_Z\phi}{\hbar}}$$

Rotacije u kvantnoj mehanici

- dakle, svakoj rotaciji (opisanoj matricom *R*) u kvantnoj mehanici se pridružuje operator *D*(*R*) koji ima ista grupna svojstva kao *R*
- budući da vrijedi:

$$R_x(\phi)R_y(\phi)-R_y(\phi)R_x(\phi)\approx R_z(\phi^2)-1$$

za *D*(*R*) dobiva se (zanemarivanjem članova manjih od ϕ^2):

$$\left(1-i\frac{J_x\phi}{\hbar}-\frac{J_x^2\phi^2}{2\hbar^2}\right)\left(1-i\frac{J_y\phi}{\hbar}-\frac{J_y^2\phi^2}{2\hbar^2}\right)-\left(1-i\frac{J_y\phi}{\hbar}-\frac{J_y^2\phi^2}{2\hbar^2}\right)\left(1-i\frac{J_x\phi}{\hbar}-\frac{J_x^2\phi^2}{2\hbar^2}\right)\approx 1-i\frac{J_z\phi^2}{\hbar}-1$$

$$\left(1-i\frac{J_x\phi}{\hbar}-i\frac{J_y\phi}{\hbar}-\frac{J_x^2\phi^2}{2\hbar^2}-\frac{J_y^2\phi^2}{2\hbar^2}-\frac{J_xJ_y\phi^2}{\hbar^2}\right)-\left(1-i\frac{J_y\phi}{\hbar}-i\frac{J_x\phi}{\hbar}-\frac{J_y^2\phi^2}{2\hbar^2}-\frac{J_x^2\phi^2}{2\hbar^2}-\frac{J_yJ_x\phi^2}{\hbar^2}\right)\approx -i\frac{J_z\phi^2}{\hbar}$$

$$\boxed{\begin{gathered}J_xJ_y-J_yJ_x=i\hbar J_z\\ [J_x,J_y]=i\hbar J_z\end{gathered}}$$

Rotacije u kvantnoj mehanici

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$$

$$\varepsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{l} +1 \ldots \text{za parnu permutaciju } i, j, k \\ -1 \ldots \text{za neparnu permutaciju } i, j, k \\ \quad 0 \ldots \text{za bilo koja 2 indeksa } i, j, k \text{ jednaka} \end{array} \right\}$$

- J_k-općenit operator momenta impulsa, *generator rotacije* oko *k*-te osi
- nije definiran kao $r \times p$!

Algebra momenta impulsa

- veza zakona sačuvanja i simetrije (Noetherin teorem, moment impulsa generira rotacije) + infinitezimalna analiza
  ⇨ komutacijske relacije za operator momenta impulsa:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k$$

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

$$J_z | j\, m\rangle = \hbar m | j\, m\rangle$$

- nadalje definiramo:

$$J^+ \equiv J_x + iJ_y$$

$$J^- \equiv J_x - iJ_y$$

Zadatak 1. Dokazati: $\left[J_x, J^2\right] = 0$

Rješenje 1.

$$\left[J_x, J^2\right] = \left[J_x, J_x{}^2\right] + \left[J_x, J_y{}^2\right] + \left[J_x, J_z{}^2\right]$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

$$\left[J_x, J^2\right] = \left[J_x, J_y\right]J_y + J_y\left[J_x, J_y\right] + \left[J_x, J_z\right]J_z + J_z\left[J_x, J_z\right]$$

$$\left[J_x, J^2\right] = i\hbar J_z J_y + J_y(i\hbar J_z) + (-i\hbar J_y)J_z + J_z(-i\hbar J_y)$$

$$\left[J^2, J_x\right] = 0$$

Zadatak 2. Pokazati da je J^- operator poništavanja!

Rješenje 2.

$$J_z J^- | jm\rangle = J_z (J_x - iJ_y) | jm\rangle$$

$$J_z J^- | jm\rangle = (J_z J_x - iJ_z J_y) | jm\rangle$$

(koristimo: $J_z J_y = J_y J_z - i\hbar J_x$ i: $J_z J_x = J_x J_z + i\hbar J_y$)

$$J_z J^- | j\, m\rangle = [(J_x J_z + i\hbar J_y) - i(J_y J_z - i\hbar J_x)] | j\, m\rangle$$

(koristimo: $J_z | j\, m\rangle = \hbar m | j\, m\rangle$)

$$J_z J^- | j\, m\rangle = [(\hbar m J_x + i\hbar J_y) - (i\hbar m J_y - i\hbar J_x)] | j\, m\rangle$$

$$J_z J^- | j\, m\rangle = \hbar(m-1)(J_x - iJ_y) | j\, m\rangle$$

$$J_z J^- | j\, m\rangle = \hbar(m-1) J^- | j\, m\rangle$$

(usporedbom s: $J_z | j\, m-1\rangle = \hbar(m-1) | j\, m-1\rangle$)

$$J^- | j\, m\rangle = c | j\, m-1\rangle$$

c je ovdje neizračunata konstanta

Zadatak za domaću zadaću

- pokazati:

$$\langle j'\, m' | J_{\pm} | \, j\, m \rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar \delta_{j\, j'} \delta_{m'\, m \pm 1}$$

- krenuti od:

$$J^{+} J^{-} = J^{2} - J_{z}^{2} + \hbar J_{z}$$

- koristiti:

$$(J^{-})^{\dagger} = J^{+}$$

- i koristiti rezultat prošlog zadatka:

$$J^{+} | \, j\, m \rangle = c | \, j\, m+1 \rangle$$

- u slučaju problema, pogledati u skoro bilo koju knjigu iz kvantne mehanike (Messiah, Sakurai, ...)

Eulerovi kutovi

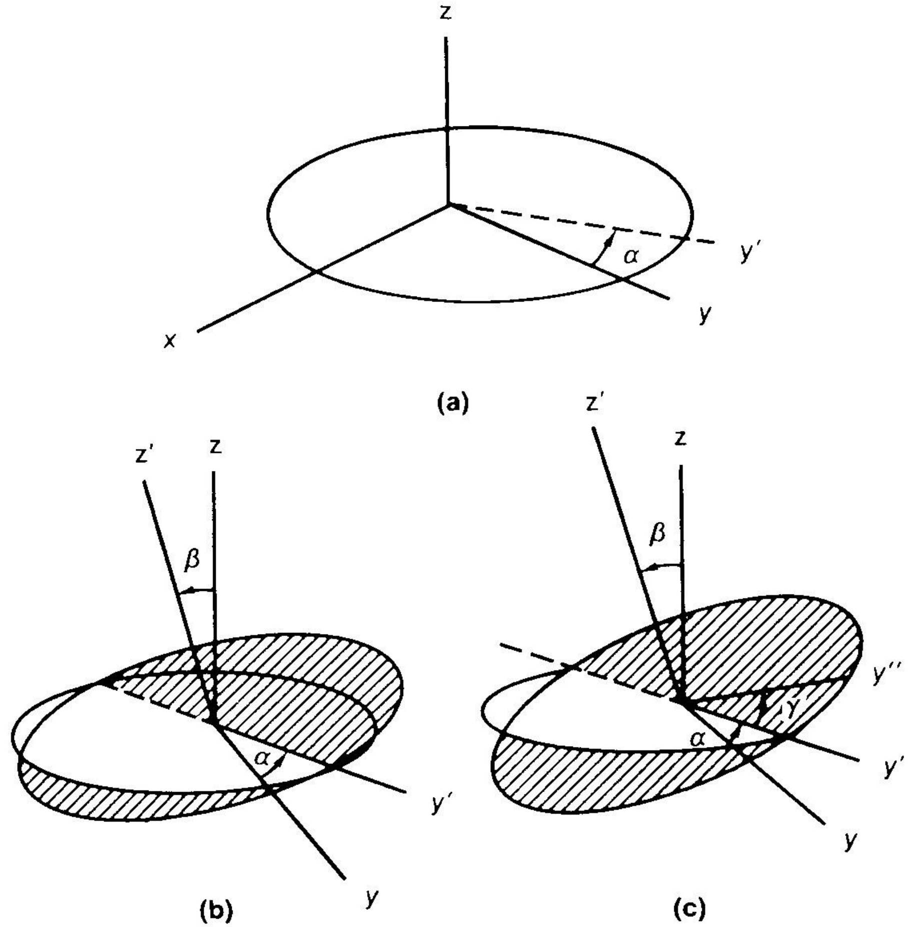
- u klasičnoj mehanici rotiranje tijela se najopćenitije opisuje Eulerovim kutovima α, β, γ:

  1) rotacija oko z-osi za kut α,

  2) rotacija oko nove, y'-osi, za kut β,

  3) rotacija oko nove, z''-osi, za kut γ.

  -sve rotacije vrše se u smjeru obrnutom od kazaljke na satu



D-funkcija

- u kvantnoj mehanici rotacija se opisuje s tri nezavisne konstante gibanja – uvodi se tzv. D-funkcija ("D" dolazi od njemačkog izraza za rotaciju: *Drehung*)
- D-funkcija je rotacijska valna funkcija, tj. vlastita funkcija operatora momenta impulsa
- njima se također opisuju transformacije između različitih koordinatnih sistema
- ovisno o području fizike, koriste se razne konvencije što se tiče faze i predzanka (na ovom kolegiju koristit će se standard uveden od Bohra i Mottelsona)...

D-funkcija

- za Eulerove kutove α, β i γ, D-funkcija se definira kao:

$$D(\alpha,\beta,\gamma) \equiv e^{-i\alpha J_{z''}/\hbar} e^{-i\beta J_{y'}/\hbar} e^{-i\gamma J_z/\hbar}$$

- njen efekt na valnu funkciju s kvantnim brojevima *J* i *M* dan je s:

$$\langle J\ M' | D(\alpha,\beta,\gamma) | J\ M \rangle = D^J_{M'M}(\alpha,\beta,\gamma)$$

- dakle:

$$D(\alpha,\beta,\gamma) | J\ M \rangle = \sum_{M'} D^J_{M'M}(\alpha,\beta,\gamma) | J\ M' \rangle$$

- reducirana matrica rotacije definira se ovom relacijom:

$$d^J_{M'M}(\beta) \equiv \langle J\ M' | e^{-i\beta Jy/\hbar} | J\ M \rangle$$

- veza je, dakle, dana s:

$$D^J_{M'M}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha M' + \gamma M)} d^J_{M'M}(\beta)$$

D-funkcija

- ako se neko stanje pri rotaciji transformira ovako:

$$|J\ M\rangle \rightarrow D(R)|J\ M\rangle$$

onda se očekivana vrijednost vektorskog operatora V transformira ovako:

$$\langle J\ M|V_i|J\ M'\rangle \rightarrow \langle J\ M|D^*(R)V_i D(R)|J\ M'\rangle = \sum_i R_{ij}\langle J\ M|V_j|J\ M'\rangle$$

- transformacija tenzorskih operatora?

Wignerove D-matrice

- D-matrice su vlastite funkcije operatora momenta impulsa:

$$J_z D^J_{M\,M'} = M D^J_{M\,M'}$$

$$J^2 D^J_{M\,M'} = J(J+1) D^J_{M\,M'}$$

- drugim riječima, D-funkcija ne mijenja vrijednost *J*:

$$J^2 D(\alpha,\beta,\gamma)\left|J\ M\right\rangle = D(\alpha,\beta,\gamma) J^2 \left|J\ M\right\rangle =$$
$$= J(J+1)\left[D(\alpha,\beta,\gamma)\left|J\ M\right\rangle\right]$$

- $D_{MM'}$ su također koeficijenti reprezentacije grupe rotacija:

$$Y_{JM}(\theta',\phi') = \sum_{M'} D^J_{M'M}(\alpha,\beta,\gamma) Y_{JM'}(\theta,\phi)$$

Svojstva Wignerovih D-matrica

- reducirana matrica rotacije je posve realna i ima svojstva:

$$d^J_{MM'}(\beta) = (-1)^{M-M'} d^J_{M'M}(\beta)$$

$$d^J_{-M'-M}(\beta) = d^J_{M'M}(\beta)$$

$$d^J_{M'M}(\pi-\beta) = (-1)^{J-M'} d^J_{M'M}(\beta)$$

$$\int_{-1}^{1} d^J_{MM'}(\beta)\ d^{J'}_{MM'}(\beta)\, d(\cos\beta) = \frac{2}{2J+1}\delta_{JJ'}$$

- može se pokazati (ali nije trivijalno - vidi Sakurai pp.221-223):

$$d^j_{m'm}(\beta) = \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m)'!}\sum_k \frac{(-1)^k (\cos\frac{\beta}{2})^{2j+m-m'-2k}(\sin\frac{\beta}{2})^{m'-m+2k}}{(j-m'-k)!(j+m-k)!(k+m'-m)!k!}$$

WIGNEROVA formula

Simetričan rotor

- M – projekcija ukupnog impulsa vrtnje J u smjeru osi kvantizacije z (dakle, u laboratorijskom sustavu)
- K – projekcija ukupnog impulsa vrtnje J u intrinsičnom koordinatnom sustavu (os x_3)
  (K u intrinsičnom sustavu ima istu ulogu kao M u laboratorijskom)

- D-matrica je vlastita funkcija operatora J_z, J_3 i J^2:

$$J_z D^J_{M\,K} = M D^J_{M\,K}$$

$$J_3 D^J_{M\,K} = K D^J_{M\,K}$$

$$J^2 D^J_{M\,K} = J(J+1) D^J_{M\,K}$$

D-funkcija

- transformacija pariteta daje (shematski zapis):

$$PD^J_{M\,K} = (-1)^{J+K} D^J_{M\,-K}$$

- proizvoljna D-funkcija nema, dakle, dobro definiran paritet
- konstrukcija valne funkcije dobrog pariteta:

$$\left| J\ M\ K \right\rangle_{rot} = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}}\left[D^J_{M\,K}(\alpha,\beta,\gamma) \pm (-1)^{J+K} D^J_{M\,-K}(\alpha,\beta,\gamma)\right]$$

Primjer 1. Spin 1/2

- produkt operatora rotacije

$$D(\alpha,\beta,\gamma) = D_z(\alpha)D_y(\beta)D_z(\gamma)$$

se u reprezentaciji matricama 2x2 svodi na:

$$e^{-i\sigma_3\alpha/2}e^{-i\sigma_2\beta/2}e^{-i\sigma_3\gamma/2}$$

a to se može raspisati kao

$$\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) \\ e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) \end{pmatrix}$$

Zadatak 3. Vlastita stanja momenta impulsa $|j,m=m_{max}=j\rangle$ zarotirana su za infinitezimalni kut ε oko osi y. Bez upotrebe eksplicitnog izraza za $d^J_{M'M}$, izračunajte vjerojatnost da se novo rotirano stanje nalazi u originalnom stanju do na kvadratične članove u ε.

Rješenje 3.

Zadatak 3. Vlastita stanja momenta impulsa $|j,m=m_{max}=j\rangle$ zarotirana su za infinitezimalni kut ε oko osi y. Bez upotrebe eksplicitnog izraza za $d^{J}_{M'M}$, izračunajte vjerojatnost da se novo rotirano stanje nalazi u originalnom stanju do na kvadratične članove u ε.

Rješenje 3.

Zarotirano stanje dano je s:

$$\left|j,j\right\rangle_R = R(\varepsilon,\hat{y})\left|j,j\right\rangle = d^{j}(\varepsilon)\left|j,j\right\rangle = \left[\exp\left(-\frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar}\right)\right]\left|j,j\right\rangle =$$

$$= \left[1 - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} + \frac{(-i)^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}J_y^2\right]\left|j,j\right\rangle$$

Zadatak 3. Vlastita stanja momenta impulsa $|j,m=m_{max}=j>$ zarotirana su za infinitezimalni kut ε oko osi y. Bez upotrebe eksplicitnog izraza za $d^J_{M'M}$, izračunajte vjerojatnost da se novo rotirano stanje nalazi u originalnom stanju do na kvadratične članove u ε.

Rješenje 3.

Zarotirano stanje dano je s:

$$\left| j, j\right\rangle_R = R(\varepsilon,\hat{y})\left| j, j\right\rangle = d^{\,j}(\varepsilon)\left| j, j\right\rangle = \left[\exp\left(-\frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar}\right)\right]\left| j, j\right\rangle =$$

$$= \left[1 - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} + \frac{(-i)^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}J_y^2\right]\left| j, j\right\rangle$$

Uvodimo:

$$J_+ = J_x + iJ_y \qquad \Rightarrow J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$$
$$J_- = J_x - iJ_y$$

Rješenje 3.

Dobivamo:

$$|\,j,j\rangle_R=\left[1-\frac{\varepsilon}{2\hbar}(J_+-J_-)+\frac{\varepsilon^2}{8\hbar^2}(J_+-J_-)^2\right]|\,j,j\rangle$$

Koristimo poznate relacije:

$$J_+|\,j,m\rangle=\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,|\,j,m+1\rangle$$

$$J_-|\,j,m\rangle=\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|\,j,m-1\rangle$$

odnosno:

$$J_+|\,j,j\rangle=0$$

$$J_-|\,j,j\rangle=\hbar\sqrt{2j}\,|\,j,j-1\rangle$$

$$\left(J_+-J_-\right)|\,j,j\rangle=-J_-|\,j,j\rangle=-\hbar\sqrt{2j}\,|\,j,j-1\rangle$$

Rješenje 3.

$$\left(J_+ - J_-\right)^2 |\,j, j\rangle = -\hbar\sqrt{2j}\left(J_+ - J_-\right)|\,j, j-1\rangle =$$

$$= -\hbar\sqrt{2j}\left(J_+|\,j, j-1\rangle - J_-|\,j, j-1\rangle\right) =$$

$$= -\hbar^2\sqrt{2j}\left(\sqrt{2j}\,|\,j, j\rangle - \sqrt{2(2j-1)}\,|\,j, j-2\rangle\right)$$

Dobivamo:

$$|\,j, j\rangle_R = |\,j, j\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2j}|\,j, j-1\rangle - \frac{\varepsilon^2}{8}2j|\,j, j\rangle + \frac{\varepsilon^2}{8}2\sqrt{j(2j-1)}|\,j, j-2\rangle =$$

$$= \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}j\right)|\,j, j\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2j}|\,j, j-1\rangle + \frac{\varepsilon^2}{4}\sqrt{j(2j-1)}|\,j, j-2\rangle$$

Dakle, vjerojatnost da rotirano stanje nađemo u originalnom stanju je:

$$\left|\langle j, j|\,j, j\rangle_R\right|^2 = \left|\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}j\right)\right|^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}j + \ldots$$

Zadatak 4. Izračunajte

$$\sum_{m=-j}^{j} \left| d^{j}_{m'm}(\beta) \right|^2 m$$

za svaku vrijednost j . Provjerite rezultat za j =1/2.

Rješenje 4.

$$\sum_{m=-j}^{j} \left| d^{j}_{m'm}(\beta) \right|^2 m = \sum_{m=-j}^{j} m \left| \langle jm | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | jm' \rangle \right|^2 =$$

$$= \sum_{m=-j}^{j} m \langle jm | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | jm' \rangle \langle jm | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | jm' \rangle^* =$$

$$= \sum_{m=-j}^{j} m \langle jm | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | jm' \rangle \langle jm' | e^{iJ_y\beta/\hbar} | jm \rangle =$$

$$= \sum_{m=-j}^{j} \langle jm' | e^{iJ_y\beta/\hbar} m | jm \rangle \langle jm | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | jm' \rangle$$

Rješenje 4.

$$\sum_{m=-j}^{j} \left| d^{j}_{m'm}(\beta) \right|^2 m = \langle jm' | e^{iJ_y\beta/\hbar} \left(\sum_{m=-j}^{j} m | jm \rangle \langle jm | \right) e^{-iJ_y\beta/\hbar} | jm' \rangle =$$

$$= \frac{1}{\hbar} \langle jm' | e^{iJ_y\beta/\hbar} J_z e^{-iJ_y\beta/\hbar} | jm' \rangle =$$

$$= \frac{1}{\hbar} \langle jm' | D^*(\beta,\hat{y}) J_z D(\beta,\hat{y}) | jm' \rangle$$

S druge strane vrijedi:

$$D^*(\beta,\hat{y}) J_z D(\beta,\hat{y}) = \sum_j R_{zj}(\beta,\hat{y}) J_j$$

$$R(\beta,\hat{y}) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Rješenje 4.

$$\sum_{m=-j}^{j}\left|d^{j}_{m'm}(\beta)\right|^2 m=\frac{1}{\hbar}\left[-\sin\beta\left\langle jm'\right|J_x\left|jm'\right\rangle+\cos\beta\left\langle jm'\right|J_z\left|jm'\right\rangle\right]=$$

$$=\frac{1}{\hbar}\left[-\sin\beta\left\langle jm'\right|\frac{J_+ + J_-}{2i}\left|jm'\right\rangle+\hbar m'\cos\beta\right]=$$

$$=m'\cos\beta$$

Za j =1/2 vrijedi:

$$d^{1/2}_{m'm}(\beta)=\begin{pmatrix}\cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2)\\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2)\end{pmatrix}$$

a) za m' =1/2

$$\sum_{m=-1/2}^{1/2}\left|d^{1/2}_{1/2\,m}(\beta)\right|^2 m=-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\cos\beta=m'\cos\beta$$

Rješenje 4.

b) za $m' = -1/2$

$$\sum_{m=-1/2}^{1/2} \left| d_{-1/2\,m}^{1/2}(\beta) \right|^2 m = -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2}\cos\beta = m'\cos\beta$$

Zadatak 5. Izračunati: $d^{1}_{m\,m'}(\beta)$

Rješenje 5.

- za J=1 moramo korisiti matričnu reprezentaciju dimenzije 3x3
- za reducirane Wignerove matrice trebamo samo J_y, zato koristimo:

$$J_y = \frac{(J^+ - J^-)}{2i}$$

- koristimo:

$$\langle j'\,m' | J_\pm | j\,m \rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar\,\delta_{j\,j'}\delta_{m'\,m\pm 1}$$

- da bi dobili:

$$J_y^{(j=1)} = \left(\frac{\hbar}{2}\right) \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} m=1 & m=0 & m=-1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m'=1 \\ m'=0 \\ m'=-1 \end{array} \end{array}$$

Zadatak 5. Izračunati: $d^{1}_{m\,m'}(\beta)$

Rješenje 5.

- primjer: m=0 i m'=1

$$\langle 1\,1 | J_{\pm} | 1\,0 \rangle = \sqrt{(1 \mp 0)(1 \pm 0 + 1)}\hbar \delta_{11} \delta_{1\,0\pm1}$$

$$\langle 1\,1 | J_{+} | 1\,0 \rangle = \sqrt{(1 - 0)(1 + 0 + 1)}\hbar \delta_{11} \delta_{1\,0+1} = \sqrt{2}\hbar$$

$$\langle 1\,1 | J_{-} | 1\,0 \rangle = \sqrt{(1 + 0)(1 - 0 + 1)}\hbar \delta_{11} \delta_{1\,0-1} = 0$$

$$J_y = \frac{(J^{+} - J^{-})}{2i} = \frac{\sqrt{2}\hbar - 0}{2i} = -i\sqrt{2}\,\frac{\hbar}{2}$$

Zadatak 5. Izračunati: $d^{1}_{m\,m'}(\beta)$

Rješenje 5.

- sljedeći korak: razvoj u red $e^{-iJ_y\beta/\hbar}$

$$e^{-iJ_y\beta/\hbar} = 1 - \frac{iJ_y\beta}{\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^3 + \dots$$

$$\left[J_y^{(j=1)}\right]^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zadatak 5. Izračunati: $d^{1}_{m\,m'}(\beta)$

Rješenje 5.

$$\left[J_y^{(j=1)}\right]^{3}=\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\left(\frac{\hbar}{2}\right)\begin{pmatrix}0 & -i\sqrt{2} & 0\\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2}\\ 0 & i\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{3}\begin{pmatrix}0 & -i4\sqrt{2} & 0\\ i4\sqrt{2} & 0 & -i4\sqrt{2}\\ 0 & i4\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\hbar^{2}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\begin{pmatrix}0 & -i\sqrt{2} & 0\\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2}\\ 0 & i\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}=\hbar^{2}J_y^{(j=1)}$$

Zadatak 5. **Izračunati:** $d^{1}_{m\,m'}(\beta)$

Rješenje 5.

$$e^{-iJ_y\beta/\hbar}=1-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}+\frac{1}{2!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^4+\ldots=$$

$$=1-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}+\frac{1}{2!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^2-\frac{1}{3!}\frac{J_y(i\beta)^3}{\hbar}+\frac{1}{4!}\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(i\beta)^4+\ldots=$$

$$=1-\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\left(i\beta+\frac{(i\beta)^3}{3!}+\ldots\right)+\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2\left(\frac{(i\beta)^2}{2!}+\frac{(i\beta)^4}{4!}+\ldots\right)=$$

$$=1-i\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\sin\beta+\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(\cos\beta-1)$$

Zadatak 5. Izračunati: $d^1_{m\,m'}(\beta)$

Rješenje 5.

$$d^1(\beta) = 1 - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\sin\beta + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\left(\cos\beta - 1\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\beta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{pmatrix}$$

Zbrajanje dva momenta impulsa

- zbrajamo dva operatora momenta impulsa $(\hat{j}_1, \hat{j}_2)$ koji zadovoljavaju uobičajene komutacijske relacije (u različitim potprostorima):

$$\hat{J} = \hat{j}_1 + \hat{j}_2$$

$$[j_{1i}, j_{1j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk} j_{1k}$$

$$[j_{2i}, j_{2j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk} j_{2k}$$

- za bilo koji par operatora iz različitih potprostora vrijedi:

$$[j_{1i}, j_{2j}] = 0$$

- važno - sumirani moment impulsa zadovoljava iste komutacijske relacije:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k$$

Zbrajanje dva momenta impulsa

- mogića su dva izbora baze čitavog sistema:
  - $j_1^2, j_2^2, j_{1z}, j_{2z}$
  - J^2, j_1^2, j_2^2, J_z
- unitarna transformacija koja povezuje dvije baze:

Clebsch-Gordanov problem

$$\left| j_1\, m_1\;\; j_2\, m_2 \right\rangle \equiv \left| j_1\, m_1 \right\rangle \left| j_2\, m_2 \right\rangle$$

$$\Rightarrow$$

$$\left| J\, M \right\rangle \equiv \left| j_1\, j_2\, J\, M \right\rangle$$

Zbrajanje dva momenta impulsa

$$\left| J\ M \right\rangle \equiv \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left\langle j_1\ m_1\ j_2\ m_2 \middle| J\ M \right\rangle \left| j_1\ m_1\ j_2\ m_2 \right\rangle$$

Clebsch-Gordanovi koeficijenti

- standardni izbor faze:

$$\left\langle j_1\ j_1\ j_2\ j_2 \middle| J\ J \right\rangle \geq 0 \ \textbf{(i realni)}$$

- obrat:

$$\left| j_1\ m_1\ j_2\ m_2 \right\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^{J} \left\langle j_1\ m_1\ j_2\ m_2 \middle| J\ M \right\rangle \left| J\ M \right\rangle$$

Clebsch-Gordanovi koeficijenti

- svojstva:

1) za $m_1 + m_2 \neq M$ ⇨ $\langle j_1\, m_1\; j_2\, m_2 | J\, M \rangle = 0$

2) također za: $J < |j_1 - j_2|$ **ili** $J > j_1 + j_2$

3) $\langle j\, m\, 0\, 0 | j\, m \rangle = 1$

4) $\langle j_1\, j_1\; j_2\, j_2 | j_1 + j_2\;\, j_1 + j_2 \rangle = 1$

5) $$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1\, m_1\; j_2\, m_2 | J\, M \rangle \langle j_1\, m_1\; j_2\, m_2 | J'\, M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$$

6) $$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle j_1\, m_1\; j_2\, m_2 | J\, M \rangle \langle j_1\, m_1'\; j_2\, m_2' | J\, M \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

3j-simboli

- definicija:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \equiv \frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}} \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 | J\, M \rangle$$

- svojstva:

1) $$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Zadatak 6. Krećući od definicije 3j-simbola "prevedite" svojstva 1)-3) na Clebsch-Gordanove koeficijente

Rješenje 6. (uzimamo $j_3=J$, $m_3=-M$)

1) ⇨

$$\frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}}\left\langle j_1\, m_1\; j_2\, m_2 \middle| J\, M\right\rangle = \frac{(-1)^{J-j_1-m_2}}{\sqrt{2j_2+1}}\left\langle J\, -M\; j_1\, m_1 \middle| j_2\, -m_2\right\rangle$$

$$\left\langle j_1\, m_1\; j_2\, m_2 \middle| J\, M\right\rangle = (-1)^{J+j_2-m_1}\frac{\sqrt{2J+1}}{\sqrt{2j_2+1}}\left\langle J\, -M\; j_1\, m_1 \middle| j_2\, -m_2\right\rangle$$

2) ⇨

$$\frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}}\left\langle j_1\, m_1\; j_2\, m_2 \middle| J\, M\right\rangle = (-1)^{j_1+j_2+J}\frac{(-1)^{j_2-j_1+M}}{\sqrt{2J+1}}\left\langle j_2\, m_2\; j_1\, m_1 \middle| J\, M\right\rangle$$

$$\left\langle j_1\, m_1\; j_2\, m_2 \middle| J\, M\right\rangle = (-1)^{j_1+j_2+J}\left\langle j_2\, m_2\; j_1\, m_1 \middle| J\, M\right\rangle$$

Zadatak 6. Krećući od definicije 3j-simbola "prevedite" svojstva 1)-3) na Clebsch-Gordanove koeficijente

Rješenje 6. (uzimamo $j_3=J$, $m_3=-M$)

3) ⇨

$$\frac{(-1)^{j_1-j_2-M}}{\sqrt{2J+1}}\left\langle j_1 -m_1\ j_2 -m_2 \middle| J -M\right\rangle = (-1)^{j_1+j_2+J}\frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}}\left\langle j_1\ m_1\ j_2\ m_2 \middle| J\ M\right\rangle$$

$$\left\langle j_1\ m_1\ j_2\ m_2 \middle| J\ M\right\rangle = (-1)^{j_1+j_2+J}\left\langle j_1 -m_1\ j_2 -m_2 \middle| J -M\right\rangle$$

Zadatak 7. Pokažite:

$$\langle j_1\, m_1\ j_2\, m_2 | J\, M\rangle = (-1)^{-J+j_2-m_1}\sqrt{\frac{2J+1}{2j_2+1}}\langle j_1\, -m_1\ J\, M | j_2\, m_2\rangle$$

Rješenje 7.

3) ⇨ $$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+J}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ -m_1 & -m_2 & M \end{pmatrix}$$

2) ⇨ $$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ -m_1 & -m_2 & M \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+J}\begin{pmatrix} j_1 & J & j_2 \\ -m_1 & M & -m_2 \end{pmatrix}$$

⇨ $$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & J & j_2 \\ -m_1 & M & -m_2 \end{pmatrix}$$

def ⇨

$$\frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}}\langle j_1\, m_1\ j_2\, m_2 | J\, M\rangle = \frac{(-1)^{j_1-J+m_2}}{\sqrt{2j_2+1}}\langle j_1\, -m_1\ J\, M | j_2\, m_2\rangle$$

Zadatak 7. **Pokažite:**

$$\left\langle j_1\, m_1\; j_2\, m_2 \middle| J\, M \right\rangle = (-1)^{-J+j_2-m_1} \sqrt{\frac{2J+1}{2j_2+1}} \left\langle j_1 -m_1\; J\, M \middle| j_2\, m_2 \right\rangle$$

Rješenje 7.

$$\left\langle j_1\, m_1\; j_2\, m_2 \middle| J\, M \right\rangle = (-1)^{j_1-J+m_2-(j_1-j_2+M)} \frac{\sqrt{2J+1}}{\sqrt{2j_2+1}} \left\langle j_1 -m_1\; J\, M \middle| j_2\, m_2 \right\rangle$$

uz $m_1 + m_2 = M$

$$\Rightarrow \quad \left\langle j_1\, m_1\; j_2\, m_2 \middle| J\, M \right\rangle = (-1)^{-J+j_2-m_1} \frac{\sqrt{2J+1}}{\sqrt{2j_2+1}} \left\langle j_1 -m_1\; J\, M \middle| j_2\, m_2 \right\rangle$$

3j-simboli

- daljnja svojstva (relacije ortogonalnosti):

4)

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix}=\frac{1}{2j_3+1}\delta_{j_3 j_3'}\delta_{m_3 m_3'}$$

5)

$$\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_{m_3=-j_3}^{j_3}(2j_3+1)\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3 \end{pmatrix}=\delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$$

3j-simboli

- specijalni slučajevi:

1) $m_1 = j_1$ i $m_2 = j_2$ $\Rightarrow$ $M = j_1 + j_2$ i $J = j_1 + j_2$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2 & -(j_1 + j_2) \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 + j_1 + j_2}}{\sqrt{2(j_1 + j_2) + 1}} \left\langle j_1 \; j_1 \; j_2 \; j_2 \middle| j_1 + j_2 \; j_1 + j_2 \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(j_1 + j_2) + 1}}$$

2) $\left. \begin{matrix} j_1 = j \text{ i } j_2 = 0 \\ m_1 = m \text{ i } m_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ $M = m$ i $J = j$

$$\begin{pmatrix} j & 0 & j \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j-0+m}}{\sqrt{2j+1}} \left\langle j \, m \, 0 \, 0 \middle| j \, m \right\rangle = \frac{(-1)^{j+m}}{\sqrt{2j+1}}$$

Racahova formula za 3j-simbole

- općenita formula za bilo koji 3j-koeficijent:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = (-1)^{a-b-f}\sqrt{\Delta(a,b,c)}\sqrt{(a+d)!(a-d)!(b+e)!(b-e)!(c+f)!(c-f)!}\,\cdot$$

$$\cdot\sum_t \frac{(-1)^t}{t!(c-b+t+d)!(c-a+t-e)!(a+b-c-t)!(a-t-d)!(b-t+e)!}$$

$$\Delta(a,b,c) \equiv \frac{(a+b-c)!(b+c-a)!(c+a-b)!}{(a+b+c+1)!}$$

Zadatak 8. Izračunati: $\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix}$

Rješenje 8.

- mora biti: $m = m'$
- $a = j,\ \ b = 1,\ \ c = j,\ \ d = -m,\ \ e = 0,\ \ f = m$
- $$\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} = (-1)^{j-1-m}\sqrt{\Delta(j,1,j)}\sqrt{(j-m)!(j+m)!(j+m)!(j-m)!}\cdot$$
$$\cdot\sum_t \frac{(-1)^t}{t!(j-1+t-m)!t!(1-t)!(j-t+m)!(1-t)!}$$
- mogući t-ovi: $t \geq 0$ i $1-t \geq 0 \ \Rightarrow\ t = 0,1$
- $$\Delta(j,1,j) \equiv \frac{1!1!(2j-1)!}{(2j+2)!}$$
- $$\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} = (-1)^{j-1-m}\sqrt{\frac{(2j-1)!}{(2j+2)!}}(j-m)!(j+m)!\left[\frac{1}{(j-m-1)!(j+m)!} - \frac{1}{(j-m)!(j+m-1)!}\right]$$

Zadatak 8. Izračunati: $\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix}$

Rješenje 8.

$$\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} = (-1)^{j-1-m}\sqrt{\frac{(2j-1)!}{(2j-1)!2j(2j+1)(2j+2)}(j-m)!(j+m)!}\left[\frac{j-m-(j+m)}{(j-m)!(j+m)!}\right] =$$

$$= (-1)^{j-1-m}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{j(2j+1)(j+1)}}(-2m) =$$

$$= (-1)^{j-m}\frac{m}{\sqrt{j(2j+1)(j+1)}}$$

$$\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} = (-1)^{j-m}\frac{m}{\sqrt{j(2j+1)(j+1)}}\delta_{mm'}$$

Zbrajanje tri momenta impulsa

$$\hat{J} = \hat{j}_1 + \hat{j}_2 + \hat{j}_3$$

$$\left| j_1\, m_1\ j_2\, m_2\ j_3\, m_3 \right\rangle$$

- moguća su tri izbora baze čitavog sistema, ovisno o redoslijedu zbrajanja:
  - $\hat{J} = (\hat{j}_1 + \hat{j}_2) + \hat{j}_3 = \hat{j}_{12} + \hat{j}_3$
  - $\hat{J} = \hat{j}_1 + (\hat{j}_2 + \hat{j}_3) = \hat{j}_1 + \hat{j}_{23}$
  - $\hat{J} = (\hat{j}_1 + \hat{j}_3) + \hat{j}_2 = \hat{j}_{13} + \hat{j}_2$

Zbrajanje tri momenta impulsa

- tri baze su međusobno povezane, npr.:

$$\left| j_1 \; j_{23} \; J' \, M' \right\rangle = \sum_{j_{12}} \left\langle j_{12} \; j_3 \; J \; M \middle| j_1 \; j_{23} \; J' \, M' \right\rangle \cdot \left| j_{12} \; j_3 \; J \; M \right\rangle$$

$$\left\langle j_{12} \; j_3 \; J \; M \middle| j_1 \; j_{23} \; J' \, M' \right\rangle \equiv \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}\, W(j_1 \; j_2 \; J \; j_3; j_{12} \; j_{23})\,\delta_{JJ'}\delta_{MM'} =$$

$$\equiv (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} \delta_{JJ'}\delta_{MM'}$$

- W je “Racahov W-koeficijent”, a vitičasta zagrada označava “Wignerov 6j-simbol” (ili koeficijent)
- 6j-koeficijent se mogu raspisati preko 3j-koeficijenata (netrivijalno, po potrebi pogledati Supek II, str. 629)

Sferični tenzorski operatori

- sferičnim tenzorskim operatorom T_q^k ranga k zovemo skup $2k+1$ veličina koje se pri rotaciji koordinatnog sustava transformiraju ovako:

$$T'^k_q = D(\alpha,\beta,\gamma) T_q^k D^\dagger(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{q'=-k}^{k} T_{q'}^k D_{q'q}^k(\alpha,\beta,\gamma)$$

- osnovna razlika u odnosu na npr. Kartezijeve tenzore je u njihovoj ireducibilnosti
- raspisujući gornji izraz za infinitezimalne rotacije, može se pokazati (vidi npr. Sakurai, str. 236):

1) $[J_z, T_q^k] = \hbar q T_q^k$

2) $[J_\pm, T_q^k] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\, T_{q\pm 1}^k$

- ova dva izraza ponekad se koriste i kao definicija sferičnih tenzorskih operatora (vidi Greiner, str. 162)

Wigner-Eckartov teorem

- matrični elementi sferičnog tenzorskog operatora u bazi momenta impulsa mogu se uvijek napisati kao:

$$\langle \alpha', j' m' | T_q^k | \alpha, j m \rangle = \langle j m k q | j' m' \rangle \frac{\langle \alpha', j' \| T^k \| \alpha, j \rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

gdje je s dvostrukom crtom označen "reducirani" matrični element koji je <u>neovisan</u> o "magnetskim" kvantnim brojevima *m*, *m′* i *q*

- prvi član – orijentacija sistema s obzirom na *z*-os (geometrija + simetrija!)
- smisao teorema: za neku vrijednost *m*, *m′* i *q* izračunati reducirani matrični element i zatim ga koristiti za računanje matričnih elemenata za svaki *m*, *m′* i *q*

Wigner-Eckartov teorem

$$J_0^1 = J_z \quad , \quad J_{\pm 1}^1 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} J_\pm$$

- primjer: $T_q^k = J_m^1$ i $j'' = j'$

$$\langle \alpha', j'\, m' | J_m^1 | \alpha'', j'\, m'' \rangle = \langle j'\, m''\, 1\, m | j'\, m' \rangle \frac{\langle \alpha', j' \| J^1 \| \alpha'', j' \rangle}{\sqrt{2j'+1}}$$

- biramo: $m = 0$
- znajući: $\langle \alpha', j'\, m' | J_0^1 | \alpha'', j'\, m'' \rangle = m' \delta_{\alpha'\alpha''} \delta_{m'm''}$
- i:

$$\langle j'\, m''\, 1\, 0 | j'\, m' \rangle = (-1)^{j'-1+m'} \sqrt{2j'+1} \begin{pmatrix} j' & 1 & j' \\ m'' & 0 & -m' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j' & 1 & j' \\ -m'' & 0 & m' \end{pmatrix} = (-1)^{j'-m'} \frac{m'}{\sqrt{j'(2j'+1)(j'+1)}} \delta_{m''m'}$$

$$\langle j'\, m''\, 1\, 0 | j'\, m' \rangle = \delta_{m'm''} \frac{m'}{\sqrt{j'(j'+1)}}$$

Wigner-Eckartov teorem

- primjer: $T_q^k = J_m^1$ i $j'' = j'$

$$\langle \alpha', j' \| J^1 \| \alpha'', j' \rangle = m' \delta_{\alpha'\alpha''} \delta_{m'm''} \frac{\sqrt{j'(j'+1)}}{m' \delta_{m'm''}} \sqrt{2j'+1} =$$

$$= \delta_{\alpha'\alpha''} \sqrt{j'(j'+1)(2j'+1)}$$

$$\langle \alpha', j'm' | J_m^1 | \alpha'', j'm'' \rangle = \langle j'm''1m | j'm' \rangle \frac{\langle \alpha', j' \| J^1 \| \alpha'', j' \rangle}{\sqrt{2j'+1}} =$$

$$= \langle j'm''1m | j'm' \rangle \delta_{\alpha'\alpha''} \frac{\sqrt{j'(j'+1)(2j'+1)}}{\sqrt{2j'+1}} =$$

$$= \delta_{\alpha'\alpha''} \langle j'm''1m | j'm' \rangle \sqrt{j'(j'+1)}$$

Projekcijski teorem

- specijalan slučaj Wigner-Eckartovog teorema za vektorske operatore (za slučaj j'=j):

$$\langle \alpha', j\, m' | V_q | \alpha, j\, m \rangle = \frac{\langle \alpha', j\, m | \hat{\jmath} \cdot \hat{\mathrm{V}} | \alpha, j\, m \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle j\, m' | J_q | j\, m \rangle$$

- primjer: magnetski dipolni moment μ neparne jezgre
  - $\hat{V} = \hat{\mu} = \hat{\mu}_l + \hat{\mu}_s = g_l \mu_N \hat{l} + g_s \mu_N \hat{s}$
  - $$\langle j\, m' | \mu_z | j\, m \rangle = \frac{\langle j\, m' | \hat{\jmath} \cdot \hat{\mu} | j\, m \rangle}{j(j+1)} \langle j\, m' | j_z | j\, m \rangle = \frac{m \langle j\, m' | \hat{\jmath} \cdot \hat{\mu} | j\, m \rangle}{j(j+1)}$$

... ⇨ Schmidtove granice