Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Radan Skorić

Temporalna logika

Diplomski rad

Zagreb, 7. listopada 2009.

Zahvaljujem se svojem mentoru
na strpljenju i iznimnom trudu
te mojim roditeljima i sestri
na iskrenoj podršci svih ovih godina.

Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Radan Skorić

Temporalna logika

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mladen Vuković

Zagreb, 7. listopada 2009.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Temporalna Logika je specijalna teorija iz familije modalnih logika.

Modalna logika je, neformalno rečeno, klasična logika kojoj su dodani tzv. modalni operatori. Oni na jednostavan način uvode dodatna svojstva u logičke formule, te ovisno o definiciji uvedenih modalnih operatora dobivamo specijalne teorije modalne logike, poput, kao što ćemo vidjeti, temporalne logike.

Usprkos svojoj jednostavnosti, modalna logika se pokazala kao veoma moćan matematički alat za opisivanje i analizu *relacijskih struktura*. Relacijska struktura je neprazni skup nad kojim je definirana jedna ili više relacija. One se prirodno pojavljuju u mnogim granama matematike pa čak i više, kao npr. u lingvistici. Zbog toga modalne logike imaju veliku primjenu.

Kad govorimo o temporalnoj logici, zanimaju nas relacijske strukture u kojima su elementi uređeni u vremenski slijed. Temporalna logika sa bavi analizom izjava poput "Kolnici će biti suhi dok ne padne kiša.", za razliku od klasične logike sudova koja može analizirati samo izjave koje su uvijek točne, te ne može nista reći o gornjem slučaju već samo može analizirati izjave poput "Ako kiša pada slijedi da su kolnici mokri".

Temporalna logika je tako posebnu primjenu našla u *formalnoj verifikaciji* gdje se koristi za izražavanje uvjeta na vremensko ponašanje hardwarea i softwarea.

U ovom tekstu najprije ćemo uvesti pojmove modalne logike nužne za uvođenje temporalne logike, nakon toga ćemo sve analizirati kroz primjenu u temporalnoj logici.

2 Modalna logika i osnovni temporalni jezik

U skladu s napomenama u uvodu počinjemo definiranjem osnova modalnog jezika i završavamo uvođenjem osnovnog temporalnog jezika.

2.1 Osnovni modalni jezik

Kao što je rečeno u uvodu, modalne logike su veoma moćan alat za rad s relacijskim strukturama, te smo neformalno opisali relacijske strukture. Ovdje uvodimo formalnu definiciju:

Definicija 1. Relacijska struktura je n-torka $\mathcal{F}$ čija prva komponenta je neprazni skup W zvan *domena* od $\mathcal{F}$, a čije preostale komponente su relacije nad W. Pretpostavit ćemo da svaka relacijska struktura sadrži barem jednu relaciju.

Sada ćemo formalno uvesti pojam modalnog jezika. Radi lakšeg shvaćanja najprije ćemo definirati osnovni modalni jezik, a zatim ćemo tu definiciju generalizirati na općeniti modalni jezik.

Definicija 2. *Osnovni modalni jezik* je definiran pomoću skupa *propozicionalnih varijabli* Φ čiji elementi se obično označavaju p, q, r, itd., i unarnog modalnog operatora $\diamond$ ("diamond"). Sintaktički ispravna formula ϕ je zadana produkcijskim pravilom:

$$\phi := p|\bot|\neg\phi|\psi \lor \phi| \diamond \phi$$

Pritom je p element skupa Φ .

Slično kao što su egzistencijalni i univerzalni operator duali jedan drugome (u smislu da vrijedi $\forall x\alpha \leftrightarrow \neg\exists x\neg\alpha$), tako i postoji dualni operator $\Box$ ("box") za $\diamond$ koji je definiran kao $\Box\phi := \neg \diamond \neg\phi$.

Očito je da se upotrebom drugačijih modalnih operatora mogu dobiti modalni jezici različiti od *osnovnog*. S tom motivacijom ćemo definirati općeniti modalni jezik.

Definicija 3. *Modalni tip* je uređeni par $\tau = (O, \rho)$ tako da je O neprazni skup, a ρ funkcija iz O u $\mathbb{N}$. Elementi skupa O se nazivaju *modalni operatori*. Koristit ćemo simbole $\triangle$, $\triangle_0, \triangle_1, \ldots$ za označavanje elemenata skupa O. Funkcija ρ svakom operatoru iz O pridružuje konačnu kratnost, tj. broj argumenata koje operator $\triangle$ prima.

Svaki operator $\triangle_i$ ima i svoj dualni operator koji se označava sa ∇_i, tj. $\nabla_i(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ je pokrata za $\neg\triangle_i(\neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n)$.

U skladu s definicijom osnovnog modalnog jezika, *unarne* operatore označavamo sa $\diamond_a$ gdje je a element nekog skupa indeksa. Često pretpostavljamo da je kratnost operatora poznata i ne radimo razliku između τ i O.

2.2 Jezik temporalne logike

Sada smo spremni za definiranje osnovnog jezika temporalne logike.

Osnovni jezik temporalne logike sadrži dva unarna operatora koje označavamo sa $\langle F \rangle$ i $\langle P \rangle$. Pretpostavljena interpretacija formula tipa $\langle F \rangle\phi$ jeste "ϕ će biti istinito u nekom budućem[1] vremenu", a pretpostavljena interpretacija formula tipa $\langle P \rangle\phi$ jeste "ϕ će biti istinito u nekom prošlom[2] vremenu".

Naravno $\langle F \rangle$ i $\langle P \rangle$ imaju i svoje dualne operatore i to, redom, $\langle G \rangle$ i $\langle H \rangle$. $\langle G \rangle$ se čita 'Uvijek će biti[3]', a $\langle H \rangle$ se čita 'Oduvijek je bilo[4]'.

Tradicionalno se, radi jednostavnosti, operatori pišu bez zagrada pa ćemo od sada, uglavnom, pisati F,P,G i H.

[1] *engleski* buduće = Future
[2] *engleski* prošlo = Past
[3] *engleski* će biti = Going to be
[4] *engleski* je bilo = Has been

3 Okviri, modeli i valjanost

3.1 Okviri i modeli

Modalni jezik je prilično apstraktna matematička struktura i kao takav dobiva smisao tek kad se primjeni na neku konkretnu strukturu. Ovo poglavlje se bavi upravo takvim strukturama i primjenom modalne logike na njih. Prvo ćemo definirati *okvir* za osnovni modalni jezik, konkretnu strukturu na kojoj želimo interpretirati formule osnovnog modalnog jezika. Nakon toga ćemo definirati *model*, strukturu koja nam to i omogućuje. Na kraju ćemo te definicije poopćiti za proizvoljne modalne jezike.

Definicija 4. *Okvir* za osnovni modalni jezik je uređeni par $\mathcal{F} = (W, R)$ tako da vrijedi:

(i). W je neprazni skup. Elemente skupa W nazivamo stanja.

(ii). R je binarna relacija na W.

Dakle, okvir za osnovni modalni jezik je jednostavno relacijska struktura sa samo jednom definiranom binarnom relacijom.

Veoma neformalno rečeno, dotičnu binarnu relaciju, u slučaju temporalne logike, možemo zamišljati kao vremenski uređaj točaka u W.

Definicija 5. *Model* za osnovni modalni jezik je uređeni par $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$, gdje je $\mathcal{F}$ okvir za osnovni modalni jezik, a V je funkcija koja svakoj propozicionalnoj varijabli p iz Φ pridružuje V(p), podskup od W. Funkcija V se zove *valuacija*. Za dani model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$, kažemo da je $\mathcal{M}$ *zasnovan* na okviru $\mathcal{F}$, odnosno da je $\mathcal{F}$ okvir koji *utemeljuje* $\mathcal{M}$.

Neformalno rečeno, V(p) promatramo kao skup točaka u kojim je p istinita.

Okvir smo definirali kao relacijsku strukturu sa samo jednom relacijom. Takva struktura nam neće biti dovoljna za sve modalne jezike. Upravo zbog toga uvodimo slijedeću definiciju.

Definicija 6. Neka je τ modalni tip. τ-okvir sadrži:

- neprazni skup W, koji nazivamo domena ili nosač
- te za svaki $n \geq 0$, i svaki n-arni modalni operator $\triangle$ iz τ, $n+1$ mjesnu relaciju $R_{\triangle}$.

Dakle, τ-okvir je opet relacijska struktura, samo ovaj put s fleksibilnijom strukturom i više relacija. Ako τ sadrži samo konačni broj modalnih operatora $\triangle_1, \ldots, \triangle_n$, pišemo $\mathcal{F} = (W, R_{\triangle_1}, \ldots, R_{\triangle_n})$, inače pišemo $\mathcal{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle \in \tau}$ ili $\mathcal{F} = (W, \{R_\triangle | \triangle \in \tau\})$. Takav okvir pretvaramo u model na analogan način kao kod običnog modalnog jezika, dodavanjem *valuacije*. Točnije, τ-model je uređeni par $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ gdje je $\mathcal{F}$ τ-okvir, a V je valuacija s domenom Φ, a kodomenom $\mathcal{P}(W)$, gdje je W domena od $\mathcal{F}$.

U konkretnom primjeru jezika temporalne logike, jedna određena klasa okvira i modela se nameće kao prirodni odabir za promatranje temporalne logike i upravu nju ćemo sada promotriti.

Bidirekcionalni okviri i modeli

Osnovni temporalni jezik ima dva operatora, F i P. Dakle, prema gornjoj definiciji, modeli za njega sadrže skup s dvije binarne relacije definirane nad njim, R_F (Relacija koja "gleda" u budućnost) i R_P (Relacija koja "gleda" u prošlost), koje se redom koriste za interpretiranje F i P operatora. No, zbog pretpostavljene interpretacije F i P operatora, prirodno je da zahtijevamo da R_F i R_P budu međusobno suprotne relacije, tj. da zahtijevamo da osnovni temporalni jezik promatramo samo na okvirima na kojima vrijedi $\forall xy(R_F xy \leftrightarrow R_P yx)$.

Označimo relaciju inverznu relaciji R sa $R^\vee$. Sve okvire oblika $(W, R, R^\vee)$ zvat ćemo *bidirekcionalni okviri*, a sve modele zasnovane na takvim okvirima ćemo zvati *bidirekcionalni modeli*. Tipični primjeri takvih okvira bi bili skupovi cijelih, racionalnih i realnih brojeva sa standardnim uređajima, tj. $((\mathbb{Z}, <, >)$, $(\mathbb{Q}, <, >)$ i $(\mathbb{R}, <, >))$.

Bidirekcionalnim modelima ćemo se još pozabaviti u sljedećem poglavlju, kad definiramo pojam istinitosti formule na modelu.

3.2 Istinitost formula

Očito je da smo okvire i modele uveli kako bi u njima interpretirali modalne logike. Zato je nužno da definiramo pojam istinitosti formule u danom τ-modelu.

Definicija 7. Neka je $\mathcal{M} = (W, R, V)$ model osnovnog modalnog jezika, te $w \in W$ proizvoljno stanje. Sada induktivno definiramo pojam *istinitosti* formule ϕ na $\mathcal{M}$ u stanju w (pišemo: $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$, odnosno $\mathcal{M}, w \nVdash \phi$ ako ne vrijedi $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$) slijedećim pravilima:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}, w \Vdash p & \Leftrightarrow & w \in V(p), p \in \Phi \\
\mathcal{M}, w \nVdash \bot & & \\
\mathcal{M}, w \Vdash \neg\phi & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, w \nVdash \phi \\
\mathcal{M}, w \Vdash \phi \vee \psi & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, w \Vdash \phi \text{ ili } \mathcal{M}, w \Vdash \psi \\
\mathcal{M}, w \Vdash \triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n) & \Leftrightarrow & \text{postoje } v_1, \ldots, v_n \in W \text{ takvi da vrijedi} \\
& & R_\triangle w v_1 \ldots v_n \text{ te za svaki } i \text{ vrijedi } \mathcal{M}, v_i \Vdash \phi_i.
\end{array}$$

Korisno je proširiti definiciju valuacije V s propozicionalnih varijabli na proizvoljne formule tako da $V(\phi)$ označava skup stanja u kojima je ϕ istinita:

$$V(\phi) := \{w | \mathcal{M}, w \Vdash \phi\}.$$

Ovako definiran pojam istinitosti u stanju je veoma *lokalan*. Interpretiramo formule u nekom stanju *unutar* modela i pritom promatramo samo to stanje ili $R_\triangle$ dostiživa stanja. Sada uvodimo malo širi pojam.

Definicija 8. Formula ϕ je *globalno*, odnosno *univerzalno istinita* u modelu $\mathcal{M}$ (pišemo : $\mathcal{M} \Vdash \phi$), ako je istinita u svim stanjima iz $\mathcal{M}$ (tj. ako $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$ za svaki $w \in W$). Formula ϕ je *ispunjiva* u modelu $\mathcal{M}$ ako postoji *barem jedno* stanje iz $\mathcal{M}$ u kojem je ϕ istinita. Formula je *oboriva* u modelu ako je njena negacija ispunjiva.

Interpretacija na bidirekcionalnom modelu

Sjetimo se da smo *bidirekcionalne okvire* definirali kao okvire oblika $(W, R, R^\vee)$, a *bidirekcionalne modele* kao modele zasnovane na takvim okvirima. Sada nas zanima interpretacija formula na takvim okvirima. Očito imamo vrlo konkretan τ-okvir i definicije istinitosti za operatore F i P su, u skladu sa pretpostavljenim tumačenjem tih operatora:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}, w \Vdash F\phi & \Leftrightarrow & \exists s(Rws \wedge \mathcal{M}, s \Vdash \phi) \\
\mathcal{M}, w \Vdash P\phi & \Leftrightarrow & \exists s(R^\vee ws \wedge \mathcal{M}, s \Vdash \phi)
\end{array}$$

.

No, primijetimo da, pošto smo fiksirali drugu relaciju kao inverznu prvoj, ne moramo je niti definirati jer je potpuno određena prvom. Štoviše, uz modificiranu definiciju istinitosti, osnovni temporalni jezik možemo interpretirati na okvirima (W, R) za osnovni modalni jezik:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}, w \Vdash F\phi & \Leftrightarrow & \exists s(Rws \wedge \mathcal{M}, s \Vdash \phi) \\
\mathcal{M}, w \Vdash P\phi & \Leftrightarrow & \exists s(Rsw \wedge \mathcal{M}, s \Vdash \phi).
\end{array}$$

Ovakve definicije sadrže ključna svojstva pretpostavljene semantike: F gleda unaprijed po R, a P gleda unazad po R.

Primjer 1. Razmotrimo definirane pojmove na jednostavnom primjeru. Za okvir ćemo uzeti $(\mathbb{N}, <)$, okvir koji se može shvatiti kao diskretni vremenski tok s početkom. Za skup propozicionalnih varijabli ćemo definirati $\Phi = \{p, o\}$. Da bismo dobili model definirat ćemo valuacije: $V(p) = \{n \in \mathbb{N} | \text{n je prost}\}$ i $V(o) = \{n \in \mathbb{N} | \text{n je neparan}\}$. Promotrimo globalnu istinitost nekoliko formula temporalne logike na upravo definiranom modelu:

- Za formulu Fp vrijedi da u stanju okvira imamo da negdje u budućnosti (tj. na većem broju) postoji stanje u kojem vrijedi p (tj. postoji prosti broj koji je veći). Dakle ova formula je globalno istinita.
- formula Pp je istinita u svugdje osim u 2 i 1 jer ne postoji manji broj koji je prost. Dakle, nije globalno istinita.
- formula $G\neg(p \wedge \neg o)$ vrijedi u svim stanjima $n \geq 2$ jer za sve njihove slijedbenike nije moguće da je broj prost i paran.

3.3 Valjanost formule

Do sada smo promatrali temporalnu logiku, i modalne jezike općenito, kao alate za govorenje o modelima. Promatrali smo ih jedino kroz njihovu interpretaciju u nekom konkretnom modelu. No, ponekad je bitno ignorirati valuacije modela, pa čak i same okvire, da bismo promatrali svojstva jezika i njegovih formula koja su neovisna o odabranom modelu ili čak okviru. Zbog toga uvodimo pojmove valjanosti formule.

Definicija 9. Formula ϕ je *valjana u stanju w iz okvira* $\mathcal{F}$ (pišemo: $\mathcal{F}, w \Vdash \phi$) ako je ϕ istinita na svakom modelu $(\mathcal{F}, V)$ zasnovanom na $\mathcal{F}$. Formula ϕ je *valjana na okviru* $\mathcal{F}$ (pišemo: $\mathcal{F} \Vdash \phi$) ako je valjana u svakom stanju iz $\mathcal{F}$. Formula je *valjana na klasi okvira* F (pišemo: $F \Vdash \phi$) ako je valjana na svakom okviru $\mathcal{F} \in F$. Kažemo da je formula *valjana* ako je valjana na klasi svih okvira (pišemo: $\Vdash \phi$). Skup svih formula koje su valjane na klasi okvira F se naziva *logika* od F. Logiku klase okvira F označavamo sa Λ_F.

Primjer 2. Promotrimo okvire $(\mathbb{Z}, <), (\mathbb{Q}, <), (\mathbb{R}, <)$. Posebno radi ovog primjera definiramo dva operatora koji su skraćenice za druge operatore:

- $E\phi$ je skraćenica za $P\phi \vee \phi \vee F\phi$, a njegovo značenje je da ϕ vrijedi u barem jednom dostiživom stanju (tj., u stanju u kojem evaluiramo formulu ili u stanju koje je u R ili $R^{\vee}$ relaciji s njim).

- $A\phi$ je skraćenica za $H\phi \wedge \phi \wedge G\phi$, a njegovo značenje je da ϕ vrijedi u svim dostiživim stanjima.

Promotrimo koje od slijedećih formula su valjane na zadanim okvirima:

- $GGp \to p$
  Ako definiramo valuaciju $V(p) = \{x|x > 0\}$, tada formula očito ne vrijedi niti u jednom od okvira $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ jer GGp vrijedi u stanju $x = 0$ ali p tada ne vrijedi. Dakle, formula nije valjana na zadanim okvirima.

- $(p \wedge Hp) \to FHp$
  Za $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ ćemo dobiti kontraprimjer ako uzmemo $V(p) = \{x|x \leq 0\}$. Tada će $(p \wedge Hp)$ biti istinito u nuli. No, zato što su $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ gusti skupovi, koliko god malo da se sa F pomaknemo "u budućnost" po relaciji $<$ u stanje $x > 0$ uvijek će postojati pozitivan broj manji od x u kojem ne vrijedi p te u x neće vrijediti Hp. Dakle ova formula ne vrijedi na okvirima $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$.
  No, pokazat ćemo da vrijedi na $(\mathbb{Z}, <)$. Uzmimo proizvoljni $z \in \mathbb{Z}$ i proizvoljnu valuaciju V. Pretpostavimo da vrijedi $(\mathbb{Z}, <, V) \Vdash (p \wedge Hp)$. Tada p vrijedi u stanju z i u svim prethodnicima od z. Promotrimo $z + 1$. Očito p vrijedi u svim prethodnicima od $z + 1$, dakle $(\mathbb{Z}, <, V), z + 1 \Vdash Hp$. Zbog $z < z + 1$ vrijedi $(\mathbb{Z}, <, V), z \Vdash FHp$. Budući da su z i V bili proizvoljni, zaključujemo da je formula valjana na okviru $(\mathbb{Z}, <)$.

- $(Ep \wedge E\neg p \wedge A(p \to Hp) \wedge A(\neg p \to G\neg p)) \to E(Hp \wedge G\neg p)$
  Primijetimo da su zbog linearnosti relacija na zadanim okvirima sva stanja dostiživa iz svih stanja u zadanim okvirima. To efektivno znači da E i A poprimaju jednostavnija značenja. Pošto su sva stanja međusobno dostiživa, E i A više ne ovise o tome u kojem stanju promatramo njihovu istinitost. $E\phi$ jednostavno znači da postoji jedno stanje iz danog okvira u kojem vrijedi ϕ, a $A\phi$ znači da ϕ vrijedi u svim stanjima iz danog okvira.$(\star)$
  Sada ćemo pokazati da je formula valjana na svim zadanim okvirima. Uzmimo proizvoljno stanje $x \in \mathbb{X}$ gdje je $\mathbb{X} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ i proizvoljnu valuaciju V. Pretpostavimo da vrijedi:

  $$(\mathbb{X}, <), x \Vdash (Ep \wedge E\neg p \wedge A(p \to Hp) \wedge A(\neg p \to G\neg p)$$

  Dalje, ako raščlanimo gornju formulu po dijelovima konjukcije i primjenimo zaključivanje označeno sa $\star$, slijedi da vrijedi:

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{X}, <), x \Vdash Ep & \quad - \quad \text{tj. postoji stanje } x_p \in V(p). & (1)\\
(\mathbb{X}, <), x \Vdash E\neg p & \quad - \quad \text{tj. postoji stanje } x_{\neg p} \notin V(p). & (2)\\
(\mathbb{X}, <), x \Vdash A(p \to Hp) & \quad - \quad \text{tj. } x \in V(p) \Rightarrow \{y|y < x\} \subset V(p). & (3)\\
(\mathbb{X}, <), x \Vdash A(p \to G\neg p) & \quad - \quad \text{tj. } x \in V(p) \Rightarrow & \\
& \qquad\qquad \{y|x < y\} \bigcap V(p) = \emptyset. & (4)
\end{aligned}
$$

Iz 3 i 4 slijedi da vrijedi $V(p) < V(p)^C$, tj.

$$(\forall xy; x \in V(p); y \notin V(p))(x < y) \tag{5}$$

Skupovi $V(p)$ i $V(p)^C$ su neprazni (jer sadrze barem x_p, odnosno $x_{\neg p}$) pa zbog $V(p) \bigcup V(p)^C = \mathbb{X}$ i zbog 5 , slijedi da postoji x_0 takav da vrijedi jedno od:

$$
\begin{gathered}
V(p) = \{x \in \mathbb{X}|x \leq x_0\}\\
\text{ili}\\
V(p) = \{x \in \mathbb{X}|x < x_0\}
\end{gathered}
$$

U oba slučaja vrijedi $(\mathbb{X}, <), x_0 \Vdash Hp \wedge G\neg p$. Uz već razjašnjeno značenje operatora E, očito je da to povlači $(\mathbb{X}, <), x \Vdash E(Hp \wedge G\neg p)$. Pošto je x bio proizvoljno odabran vrijedi da je formula valjana na svim zadanim okvirima.
Primijetimo da je jedino svojstvo okvira, koje nam je trebalo za dokazivanje valjanosti formule, linearnost uređaja. Dakle, možemo zaključiti da je formula valjana na svim okvirima čiji je uređaj linearan.

3.4 Međusobna nedefinabilnost operatora F i P

Kao logično pitanje nameće se, da li je nužno da imamo oba operatora, F i P, tj. da li možemo F ili P definirati jedan preko drugog pa da tako eliminiramo jedan operator i dokaze provodimo samo s jednim modalnim operatorom.

Pažljivijim razmatranjem definicija operatora F i P zaključujemo da ne možemo, jer ipak F pristupa stanjima koja su R dostiživa iz fiksnog $w \in W$, a P pristupa stanjima koja su $R^\vee$ dostiživa iz w. Ako F ne može pristupiti onim valuacijama propozicionalnih varijabli kojima P pristupa radi određivanja istinitosti na modelu, kako ga onda može zamijeniti? Situacija je, naravno, analogna ako F i P zamijene mjesta.

U sljedećem primjeru i formalno dokazujemo da se operator F ne može definirati pomoću operatora P.

Primjer 3. Pretpostavimo da se F može definirati pomoću P.
Promotrimo veoma jednostavan okvir $\mathcal{F} = (W, R)$, $W = \{1, 2, 3\}$, a $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$. Neka je V proizvoljna valuacija.
Promotrimo istinitost formule Fp u stanju 2. Ona se svodi na:

$$\mathcal{M}, 2 \Vdash Fp \Leftrightarrow 3 \in V(p)$$

Ako izrazimo Fp preko P onda ćemo dobiti formulu ϕ koja neće u sebi sadržavati modalni operator F. Pretpostavimo da za valuaciju V vrijedi $\mathcal{M}, 2 \Vdash Fp$ (analogno je ako Fp nije istinito u 2). Tada očito mora vrijediti $\mathcal{M}, 2 \Vdash \phi$. No, ta formula je potpuno određena s restrikcijom valuacije V na $\{1, 2\}$, tj. sa skupom $V(p) \bigcap \{1, 2\}$.

Definirajmo valuaciju V' tako da se poklapa sa V na $\{1, 2\}$ ali ne sadrži 3. Tada očito *ne vrijedi* $\mathcal{M}, 2 \Vdash Fp$ ali ϕ ne ovisi o valuaciji od p u 3 te još uvijek *vrijedi* $\mathcal{M}, 2 \Vdash \phi$ što je kontradikcija.

Iz ovoga zaključujemo da operator F nije definabilan pomoću operatora P. Analogan je primjer da P nije definabilan pomoću F.

3.5 Generirani i opći okviri

U ovom poglavlju uvodimo neke dodatne pojmove vezane za pojam *okvira*. Ti pojmovi će se pokazati veoma važni za dokaz nekih teorema.

Kada promatramo formule na nekom podskupu svih stanja nekog okvira, često nam nije potreban cijeli okvir. Dapače, ponekad je i nužno da promatramo što manji okvir koji ipak sadrži stanja koja nas zanimaju. Upravo u tu svrhu uvodimo slijedeću definiciju.

Definicija 10. Za τ-okvir $\mathcal{F}' = (W', R'_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ kažemo da je *podokvir* okvira $\mathcal{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ ako je W' podskup od W i ako za svaki $\triangle \in \tau$ vrijedi $R'_\triangle = R_\triangle|_{W'}$.

Za $\mathcal{F}'$ kažemo da je *generirani podokvir* od $\mathcal{F}$ ako je podokvir od $\mathcal{F}$ i ako za svaki $\triangle \in \tau$ vrijedi da $u \in W'$ i $R_\triangle uu_1 \dots u_n$ povlači $u_1, \dots, u_n \in W'$.

Neka je X podskup skupa W. Neka je W' najmanji podskup skupa W koji sadrži X i zadovoljava uvjete *generiranog podokvira.* Tada generirani podokvir zasnovan na W' zovemo *podokvir generiran skupom* X, a označavamo s $\mathcal{F}_X$. Ako je X skup koji se sastoji od samo jednog stanja w, tada pišemo $\mathcal{F}_w$ i kažemo da je $\mathcal{F}_w$ *podokvir generiran sa* w, odnosno podokvir generiran iz točke.

Prilikom ograničavanja našeg promatranja na podokvir bitno nam je da je istinitost formula u stanjima podokvira očuvana. To ne vrijedi općenito za podokvire, no slijedeći teorem nam govori da to vrijedi za *generirane podokvire.*

Teorem 1. *Neka je $\mathcal{F}'$ generirani podokvir okvira $\mathcal{F}$, a ϕ proizvoljna formula. Tada $\mathcal{F} \Vdash \phi$ povlači $\mathcal{F}' \Vdash \phi$.*

Dokaz. Neka je ϕ proizvoljna formula tako da vrijedi $\mathcal{F} \Vdash \phi$. Dalje, neka je V' proizvoljna valuacija na $\mathcal{F}'$. Primjetimo da je, zbog $W' \subseteq W$, V' ujedno i valuacija na $\mathcal{F}$. Dalje neka je $w \in W'$ proizvoljno stanje. Sada dokazujemo da vrijedi $(\mathcal{F}', V'), w \Vdash \phi$.

Dokaz se provodi indukcijom po složenosti formule ϕ. Budući da je w ujedno i stanje okvira $\mathcal{F}$, baza indukcije i slučaj za bulovske operatore trivijalno vrijede.

Preostaje modalni slučaj pa pretpostavimo da je $\phi = \triangle(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ za neki $\triangle \in \tau$. Vrijedi $\mathcal{F} \Vdash \phi$ pa specijalno vrijedi $(\mathcal{F}, V'), w \Vdash \phi$. Po definiciji, to znači da postoje stanja $v_1, \ldots, v_n$ takva da vrijedi $R_\triangle w v_1 \ldots v_n$ i da za svaki i vrijedi $(\mathcal{F}, V'), v_i \Vdash \psi_i$. Dalje, $R_\triangle w v_1 \ldots v_n$ povlači da stanja $v_1, \ldots, v_n$ pripadaju i generiranom podokviru $\mathcal{F}'$. Prema pretpostavci indukcije, za svaki i vrijedi $(\mathcal{F}', V'), v_i \Vdash \psi_i$ iz čega slijedi da vrijedi $(\mathcal{F}', V'), w \Vdash \phi$.

Kako su w i V' bili proizvoljni, slijedi $\mathcal{F}' \Vdash \phi$. Q.E.D.

Okrenimo se sada drugom dijelu ovog podnaslova, općim okvirima, i promotrimo prvo motivaciju koja će nas navesti na njihovu definiciju. Kada promatramo neki model imamo jednu fiksiranu valuaciju, a kada promatramo okvir ustvari promatramo skup svih mogućih valuacija. No, ponekad nam je potrebno nešto između tih dviju krajnosti. Zanimaju nas okviri zajedno sa skupom dopustivih valuacija. I upravo je to motivacija iza definicije općih okvira. Definirat ćemo okvir zajedno sa skupom dopustivih valuacija. No, taj skup mora i zadovoljavati neka svojstva. Naime, želimo da bude zatvoren na skupovne operacije koje odgovaraju određenim veznicima modalne logike. Za propozicionalne veznike situacija je jasna. Osnovni veznici disjunkcije i negacije odgovaraju skupovnim operacijama unije i komplementa. Zaista, ako na primjer promotrimo u kojim je sve stanjima istinita formula $p \vee q$ vidimo da je istinita upravo u skupu stanja $V(p) \bigcup V(q)$. Slično je i s negacijom. Ostali propozicionalni veznici se mogu zapisati u obliku disjunkcije i negacije pa ih ne moramo niti promatrati. No što je sa modalnim operatorima? Koje skupovne operacije pripadaju njima?

Promotrimo tu operaciju za operator F i označimo je s m_F. Želimo da za svaki model (W, R, V) i proizvoljnu formulu ϕ vrijedi[5]:

$$V(F\phi) = m_F(V(\phi)) \tag{6}$$

[5]pritom, samo u ovom slučaju, radi jednostavnijeg zapisa, funkciju V shvaćamo kao funkciju koja i formulama, a ne samo propozicionalnim varijablama, pridružuje skup stanja u kojima su istinite

Funkcija koja zadovoljava to svojstvo je $m_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$, koja je definirana s

$$m_F(X) = \{w \in W : \exists x \in X \text{ takav da } wRx\} . \tag{7}$$

Zaista, promotrimo sva stanja u kojima vrijedi neka formula ϕ i skup tih stanja označimo sa X. Tada je skup stanja u kojima vrijedi $F\phi$ upravo skup stanja w za koja vrijedi wRx za neko $x \in X$. Analogno vrijedi za operator P, samo zamijenimo relaciju R s inverznom relacijom.

Sada ćemo definirati modalnu projekciju i opći okvir za proizvoljni modalni tip τ.

Definicija 11. Neka je $\mathcal{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle \in \tau}$ τ-okvir. Tada za svaki $\triangle \in \tau$ definiramo modalnu projekciju $m_\triangle$ kao funkciju na partitivnom skupu od skupa W sa:

$$\begin{aligned} m_\triangle(X_1, \ldots, X_n) &= \{w \in W \mid \text{postoje } w_1, \ldots, w_n \in W \text{ takvi da} \\ &\quad R_\triangle w w_1 \ldots w_n \text{ i } w_i \in X_i \text{ za svaki } i.\} \end{aligned}$$

Definicija 12. Opći okvir je par $(\mathcal{F}, A)$, gdje je $\mathcal{F}$ τ-okvir, a A je neprazan podskup partitivnog skupa od W koji je zatvoren za sljedeće operacije:

(i). uniju: ako su $X, Y \in A$ tada je i $X \cup Y \in A$

(ii). komplement: ako je $X \in A$ tada je $W \setminus X \in A$

(iii). za svaki $\triangle \in \tau$, operaciju $m_\triangle$: ako je $X \in A$ tada $m_\triangle(X) \in A$

4 Bisimulacije

4.1 Ograničeni morfizmi

U matematici općenito, morfizmi ili preslikavanja koja čuvaju strukturu su veoma važna. Ona nam omogućuju da promatranje svojstava objekata svedemo na promatranje manjeg broja klasa ekvivalencije, odnosno objekata između kojih postoji takvo preslikavanje koje čuva strukturu. Iz istih razloga promatramo preslikavanja između modela.

Definicija 13. Neka je τ modalni tip i neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ τ-modeli. *Homomorfizam* f sa $\mathcal{M}$ na $\mathcal{M}'$ (pišemo $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$) je funkcija $f : W \to W'$ sa slijedećim svojstvima:

- Za svaku propozicionalnu varijablu p i svaki element w iz W, ako je $w \in V(p)$ onda vrijedi $f(w) \in V'(p)$.
- Za svaki $n > 0$ i svaki n-arni $\triangle \in \tau$, te za svaku $(n+1)$-torku $(w_0, \dots, w_n)$ iz $\mathcal{M}$, ako $(w_0, \dots, w_n) \in R_\triangle$ tada $(f(w_0), \dots, f(w_n)) \in R'_\triangle$.

Dakle homomorfizam je preslikavanje koje čuva relacijske veze unutar okvira i istinitost propozicionalnih varijabli. No, da li homomorfizmi čuvaju istinitost formula? Pokazat ćemo da ne čuvaju slijedećim veoma jednostavnim primjerom.

Primjer 4. Promotrimo dva bidirekcionalna modela $\mathcal{M} = (W, R, V)$ i $\mathcal{M}' = (W', R', V')$. Neka je $W = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ i $V(p) = \{1, 2\}$, gdje je p jedna fiksirana propozicionalna varijabla. S druge strane neka je $W' = W$, $V'(p) = V(p)$, ali $R' = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$. Neka je f identiteta na skupu W. Očito je f homomorfizam jer čuva valuaciju i relacijske veze. Jedina razlika između dva modela je u tome što je R' tranzitivna relacija. No promotrimo efekt na istinitost jednostavne formule, Gp :

$$\begin{aligned} \text{Vrijedi } \mathcal{M}, 1 &\Vdash Gp, \text{ jer je p istinito u } \mathit{2}. \\ \text{Ne vrijedi } \mathcal{M}', 1 &\Vdash Gp, \text{ jer p nije istinito u } \mathit{3}. \end{aligned} \tag{8}$$

Dakle, vidimo da homorfizmi ne čuvaju istinitost formula. Primijetimo da bi gornji primjer vrijedio čak i ako bi homomorfizme ojačali do ekvivalencije na prvom uvjetu.

Naravno, prva ideja bi bila da oba uvjeta ojačamo do ekvivalencije, no pokazuje se da je to prejaki uvjet. Možemo proći s blažim uvjetima. Točnije, za čuvanje istinitosti formula dovoljni su nam *ograničeni morfizmi.*

Definicija 14. Neka je τ modalni tip i neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ τ-modeli. Preslikavanje $f : \mathcal{M} = (W, R_{\triangle\in\tau}, V) \to \mathcal{M}' = (W', R'_{\triangle\in\tau}, V')$ je *ograničeni morfizam* ako zadovoljava slijedeće uvjete:

- w i $f(w)$ zadovoljavaju iste propozicionalne varijable.
- Za svaki operator $\triangle$ iz τ, ako $R_\triangle wv_1 \dots v_n$ tada $R'_\triangle f(w)f(v_1)\dots f(v_n)$.
- Ako vrijedi $R'_\triangle f(w)v'_1 \dots v'_n$ tada postoje $v_1 \dots v_n$ takvi da $R_\triangle wv_1 \dots v_n$ i da je $f(v_i) = v'_i$ $(1 \le i \le n)$.

Sada ćemo pokazati da ograničeni morfizmi zaista čuvaju istinitost formula:

Teorem 2. *Neka je τ modalni tip i neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ τ-modeli. Neka je $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ ograničeni morfizam. Tada, za svaku modalnu formulu ϕ i svaki element w iz $\mathcal{M}$ vrijedi $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$ ako i samo ako $\mathcal{M}', f(w) \Vdash \phi$. Drugim riječima: ograničeni morfizmi čuvaju istinitost modalnih formula.*

Dokaz. Dokaz se provodi indukcijom po složenosti formule ϕ.

Osnovni korak i slučajevi za bulovske veznike se rutinski pokazuju pa ćemo se koncentrirati na slučajeve u kojima je ϕ oblika $\triangle(\psi_1, \dots, \psi_n)$, $\triangle \in \tau$. Tada su formule ψ_i manje duljine od ϕ pa po pretpostavci indukcije tvrdnja teorema vrijedi za njih. Fiksirajmo proizvoljni $\triangle \in \tau$ kratnosti n.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$. Tada postoje stanja $v_1 \dots v_n$, takva da $R_\triangle wv_1 \dots v_n$ i za svaki i, $\mathcal{M}, v_i \Vdash \psi_i$. Po pretpostavci indukcije vrijedi za svaki i, $\mathcal{M}', f(v_i) \Vdash \psi_i$. Dalje, budući da iz definicije *ograničenog homomorfizma* slijedi $R'_\triangle f(w)f(v_1)\dots f(v_n)$, zaključujemo $\mathcal{M}', f(w) \Vdash \phi$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{M}', f(w) \Vdash \phi$. Dakle, postoje $v'_1, \dots, v'_n \in \mathcal{M}'$ takvi da je $R'_\triangle f(w)v'_1 \dots v'_n$ i vrijedi za svaki i, $\mathcal{M}', v'_i \Vdash \psi_i$. Sada iz definicije *ograničenog homomorfizma* slijedi da postoje stanja $v_i, \dots, v_n \in \mathcal{M}$ takva da je $R_\triangle wv_1 \dots v_n$ i da je $\forall i, f(v_i) = v'_i$. Sada upotrijebimo pretpostavku indukcije i dobijemo $\mathcal{M}, v_i \Vdash \psi_i$ za svaki i, pa iz toga slijedi $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$. Q.E.D.

4.2 Bisimulacije

Kao što smo vidjeli u definiciji *ograničenog morfizma*, da bi se očuvala istinitost formula na dva modela koja su u nekoj relaciji, neformalno govoreći, bitne su dvije stvari. Najprije je bitno da stanja koja su u relaciji zadovoljavaju iste propozicionalne varijable. Dalje je bitno da su i sva druga stanja dostiživa iz njih u nekakvoj relaciji.

Taj veoma neformalno opisani uvjet se kod ograničenih morfizama formalno postiže stavljanjem uvjeta na funkciju koja preslikava stanja jednog modela u stanja drugog. No, prirodno se javlja želja da tu upotrebu funkcije zamijenimo nekakvim općenitijim matematičkim alatom, poput relacije. Sada se već gotovo nameće definicija *bisimulacije*.

Definicija 15. Neka je τ modalni tip i neka su $\mathcal{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$ i $\mathcal{M}' = (W', R'_\triangle, V')_{\triangle\in\tau}$ τ-modeli. Neprazna binarna relacija $Z \subseteq W \times W'$ se naziva *bisimulacija* između $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ (pišemo: $Z : \mathcal{M} \underline{\leftrightarrow} \mathcal{M}'$) ako su zadovoljeni slijedeći uvjeti:

(i). Ako je wZw' tada w i w' zadovoljavaju iste propozicionalne varijable.

(ii). Ako je wZw' i $R_\triangle wv_1 \dots v_n$ tada postoje $v'_1, \dots, v'_n \in W'$ takvi da je $R'_\triangle w'v'_1 \dots v'_n$ i za svaki i vrijedi $(1 \leq i \leq n) v_i Z v'_i$. (tzv. *forth* uvjet)

(iii). Ako je wZw' i $R'_\triangle w'v'_1 \dots v'_n$ tada postoje $v_1, \dots, v_n \in W$ takvi da je $R_\triangle wv_1 \dots v_n$ i za svaki i vrijedi $(1 \leq i \leq n) v_i Z v'_i$. (tzv. *back* uvjet)

Ako postoji neka bisimulacija između modela $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ pišemo $\mathcal{M} \underline{\leftrightarrow} \mathcal{M}'$. Ako postoji neka bisimulacija koja stavlja u relaciju stanje w iz $\mathcal{M}$ i stanje w' iz $\mathcal{M}'$ kažemo da su w i w' *bisimilarni* i pišemo $\mathcal{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathcal{M}', w'$. Ako je iz konteksta jasno o kojim modelima se radi, ponekad ćemo pisati $w \underline{\leftrightarrow} w'$.

Kao što je vidljivo, bisimulacije su generalizacija ograničenih morfizama u smislu da je umjesto funkcije upotrijebljena relacija između dva modela. No da bi to zaista bilo tako, važno je provjeriti da li bisimulacije čuvaju istinitost modalnih formula. Slijedeći teorem pokazuje da upravo to i vrijedi.

Teorem 3. *Neka je τ modalni tip, a neka su $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ τ-modeli. Tada za svaki $w \in W$ i $w' \in W'$, iz $w \underline{\leftrightarrow} w'$ slijedi da w i w' ispunjavaju isti skup formula. Drugim riječima, bisimulacije čuvaju istinitost modalnih formula.*

Dokaz. Dokaz se provodi indukcijom po složenosti proizvoljne formule ϕ. Slučaj kad se ϕ sastoji iz jedne propozicionalne varijable slijedi direktno iz točke (i) definicije 15. Slučaj kad je ϕ jednako $\perp$ ovisi samo o promatranoj logici i ispunjivost je ista na svim modelima. Slučaj sa bulovskim veznicima slijedi direktno iz pretpostavke indukcije.

Za formule oblika $\triangle(\psi_1, \dots, \psi_n)$ vrijedi $\mathcal{M}, v \Vdash \triangle(\psi_1, \dots, \psi_n)$ ako i samo ako postoje stanja $v_1, \dots, v_n$ takva da $R_\triangle wv_1 \dots v_n$ i za svaki i vrijedi $\mathcal{M}, v_i \Vdash \psi_i$. Budući da $w \underline{\leftrightarrow} w'$, prema točki (ii) definicije 15 slijedi da postoje stanja $v'_1, \dots, v'_n$ takva da $R'_\triangle w'v'_1 \dots v'_n$ i za svaki i vrijedi $v \underline{\leftrightarrow} v'_i$. Prema pretpostavci indukcije to povlači da za svaki i vrijedi $\mathcal{M}', v'_i \Vdash \psi_i$ iz čega slijedi $\mathcal{M}', w' \Vdash \triangle(\psi_1, \dots, \psi_n)$. Obrnuti slučaj se dokazuje analogno, uz upotrebu točke (iii) definicije 15. Q.E.D.

Rezultat prijašnjeg teorema je veoma bitan jer se može upotrijebiti za mnoge rezultate koji govore o očuvanju istinitosti formula. Demonstrirat ćemo to upotrebom upravo dokazanog teorema da bismo dobili jedan rezultat koji će nam kasnije trebati. Najprije ćemo definirati pojam disjunktnih unija modela, a zatim ćemo dokazati da je istinitost formula očuvana prilikom spajanja modela u disjunktnu uniju.

Definicija 16. Za disjunktne τ-modele $\mathcal{M}_i = (W_i, R_{\triangle i}, V_i)_{\triangle\in\tau}(i \in I)$ istog modalnog tipa τ, njihova *disjunktna unija* je model $\biguplus_i \mathcal{M}_i = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$ takav da je W unija svih skupova W_i, $R_\triangle$ je unija relacija $R_{\triangle i}$, a za svaku propozicionalnu varijablu p, $V(p) = \bigcup_{i\in I} V_i(p)$.

Teorem 4. *Neka je τ modalni tip i neka su $\mathcal{M}_i(i \in I)$ disjunktni τ-modeli. Tada za svako i, za svako stanje w iz $\mathcal{M}_i$, vrijedi: $\mathcal{M}_i, w$ i $\biguplus_i \mathcal{M}_i, w$ ispunjavaju isti skup formula. Drugim riječima, disjunktne unije čuvaju istinitost formula.*

Dokaz. Definirajmo relaciju Z između $\mathcal{M}_i$ i $\biguplus_i \mathcal{M}_i$ kao $Z = \{(w, w)|w \in \mathcal{M}_i\}$. Ako pokažemo da je Z bisimulacija, dokaz će slijediti direktno iz dokaza teorema 3. Točka (i) iz definicije 15 je trivijalno zadovoljena. Promotrimo točke (ii) i (iii). Svaki $R_\triangle$-korak u $\mathcal{M}_i$ je reproduciran u $\biguplus_i \mathcal{M}_i$, a zbog disjunktnosti modela u uniji, svaki $R_\triangle$-korak u $\biguplus_i \mathcal{M}_i$ koji je krenuo iz stanja koje se nalazi u $\mathcal{M}_i$ nužno potječe od odgovarajućeg $R_\triangle$ koraka iz $\mathcal{M}_i$. Dakle, Z je bisimulacija. Q.E.D.

Bisimulacije i osnovni temporalni jezik.

Već smo prije odlučili da ćemo temporalni jezik promatrati na bidirekcionalnim okvirima i modelima tipa (W, R, V) u kojima je implicitno dodana relacija $R^\vee$ inverzna relaciji R. Zbog toga nam treba i pojam bisimulacije koja uzima u obzir i $R^\vee$ relaciju. Definiramo *temporalnu bisimulaciju* između modela (W, R, V) i (W', R', V') kao bisimulaciju za τ-tip osnovnog temporalnog jezika koja zadovoljava i slijedeća dva uvjeta:

- Ako je wZw' i Rvw, onda postoji $v' \in \mathcal{M}$ takav da vZv' i $R'v'w'$.
- Ako je wZw' i $R'v'w'$, onda postoji $v \in \mathcal{M}$ takav da vZv'i Rvw.

To je naravno samo posebni zapis uobičajene definicije bisimulacije, zapisan na ovaj način da bi se naglasila priroda bidirekcionalnih okvira.

5 K_t logika

U ovom poglavlju ćemo preciznije definirati što je to *temporalna logika*. Definirat ćemo normalne modalne logike. To su logike koje zadovoljavaju neka svojstva zatvorenosti. Vidjet ćemo da se normalne modalne logike mogu definirati *semantički* i *sintaktički*. Definirat ćemo temporalnu logiku na oba načina i pokazati da smo u oba slučaja dobili istu logiku, temporalnu logiku koju ćemo označiti sa K_t.

Na kraju ćemo se pozabaviti nekim istaknutim formulama temporalne logike, tzv. formulama koje su kanonske za određeno svojstvo. Također ćemo promotriti i neke ograničavajuće rezultate, logike koje se čine razumno definirane, a ipak imaju neka nepoželjna svojstva.

5.1 Normalne modalne logike

Pretpostavimo da nas zanima određena klasa okvira F i skup Λ_F svih formula valjanih na F. Postavlja se pitanje postoje li mehanizmi koji bi opisali postupak generiranja Λ_F. Odgovor na to pitanje je sadržan u konceptu *normalne modalne logike*.

Jednostavno rečeno, normalna modalna logika je skup formula koje zadovoljavaju određene sintaktičke uvjete. Da bismo pokazali kakve uvjete, najprije ćemo definirati aksiomatski sustav K i K-dokaz. Budući da su ti sustavi veoma važni da definiranje normalne modalne logike, najprije ćemo ih definirati i objasniti za jednostavniji slučaj osnovnog modalnog jezika te tek potom proširiti definiciju na proizvoljni modalni tip τ.

Definicija 17. *K-dokaz* je konačni niz formula od kojih je svaka ili *aksiom* ili je dobivena iz prethodnih formula u nizu primjenom jednog od *pravila izvoda*. Aksiomi od K su *sve instance propozicionalnih tautologija* uz dodatak slijedećih formula:

(K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

(Dual) $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$.

Pravila izvoda za K su:

- *Modus ponens*: iz ϕ i $\phi \to \psi$ slijedi ψ.
- *Uniformna supstitucija*: iz ϕ, slijedi θ, gdje je θ dobivena iz ϕ uniformnom zamjenom propozicionalnih varijabli u ϕ proizvoljnim formulama.
- *Generalizacija*: iz ϕ, slijedi $\Box\phi$.

Napomena. Tautologije mogu sadržavati modalitete. Na primjer, $\diamond q \vee \neg \diamond q$ je primjer tautologije jer ima istu formu kao i $p \vee \neg p$.

Sada, kada smo definirali pojam K-dokaza za osnovni modalni jezik, i kad je jasna ideja i namjera iza K-dokaza, proširit ćemo definiciju na proizvoljne modalne tipove. Definicija je potpuno analogna prijašnjoj definiciji samo je zbog prirode modalnih tipova, tehnički kompliciranija.

Definicija 18. Neka je τ modalni tip. K-dokaz i K sustav za τ modalni tip je analogan K-dokazu s time da se (K) aksiom zamjenjuje skupom aksioma $K^i_\triangledown$, za svaki dualni operator $\triangledown$ i svaki i takav da $1 \leq i \leq \rho(\triangledown)$. Aksiom (Dual) se zamjenjuje skupom aksioma $Dual_\triangledown$, za svaki dualni operator $\triangledown$:

$$(K^i_\triangledown)\ \triangledown(r_1, \ldots, p \to q, \ldots, r_{\rho(\triangledown)}) \to$$
$$(\triangledown(r_1, \ldots, p, \ldots, r_{\rho(\triangledown)}) \to \triangledown(r_1, \ldots, q, \ldots, r_{\rho(\triangledown)}))$$

$$(\mathrm{Dual})\ \triangle(r_1, \ldots, r_{\rho(\triangledown)}) \leftrightarrow \neg\triangledown(\neg r_1, \ldots, \neg r_{\rho(\triangledown)}).$$

Modus ponens i uniformna supstitucija ne mijenjaju definiciju, ali generalizacija poprima novi oblik. Za operator $\triangledown$, pravilo generalizacije je dano s:

$$\frac{\phi}{\triangledown(\perp, \ldots, \phi, \ldots, \perp)},$$

tj. za svaki operator $\triangledown$ postoji n pravila generalizacije, po jedno za svako od njegovih n parametara.

Sada je vjerojatno već jasno kako ćemo definiratu normalnu modalnu logiku.

Definicija 19. Fiksirajmo proizvoljni modalni jezik modalnog tipa τ. *Modalna logika* u tom jeziku je skup formula koje sadrže sve tautologije te je zatvorena na primjenu modus ponensa i uniformne supstitucije. Modalna logika je *normalna* ako sadrži sve aksiome K aksiomatskog sustava za modalni tip τ te je zatvorena na primjenu svih pravila izvoda K-dokaza za modalni tip τ.

Primjer 5. Definirajmo $\Lambda_S = \{\phi | \mathcal{O} \Vdash \phi$, za svaku strukturu $\mathcal{O} \in S\}$, gdje je S neka klasa okvira ili općih okvira. Tada je Λ_S modalna logika.

Λ_S svakako sadrži sve propozicionalne tautologije. Da bi smo se uvjerili da je Λ_S modalna logika, dovoljno je uvjeriti se da je zatvorena na modus ponens i uniformnu supstituciju. U daljnjem dokazu ćemo pretpostaviti da je S klasa općih okvira. Tu pretpostavku možemo napraviti zato što je okvir ujedno i opći okvir čiji skup dopustivih valuacija je upravo cijeli partitivni skup.

Da bismo pokazali da je Λ_S zatvorena na modus ponens, uzmimo proizvoljne formule ϕ i ψ i pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{O} \Vdash \phi$ i $\mathcal{O} \Vdash \phi \to \psi$ za svaki $\mathcal{O} \in S$. Pretpostavimo sada da postoji $\mathcal{O}' \in S$ takav da $\mathcal{O}' \nVdash \psi$. Tada postoji neki model $\mathcal{M}$ zasnovan na $\mathcal{O}'$ i stanje $w \in \mathcal{O}'$ takvo da vrijedi $\mathcal{M}, w \nVdash \psi$. No, ujedno vrijedi i $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$ i $\mathcal{M}, w \Vdash \phi \to \psi$ što je u kontradikciji sa $\mathcal{M} \nVdash \psi$ pa zaključujemo da je Λ_S zatvorena na modus ponens.

Da bi smo dokazali da je Λ_S zatvorena na uniformnu supstituciju uzmimo proizvoljne formule θ i ϕ. Formulu θ' dobivamo uniformnom zamjenom svih pojavljivanja propozicionalne varijable p u formuli θ s formulom ϕ. Želimo pokazati da θ' pripada Λ_S. Dokaz provodimo indukcijom po duljini zamjenske formule ϕ:

- Za bazu indukcije pretpostavimo da je ϕ oblika q, $\top$ ili $\bot$, gdje je q proizvoljna propozicionalna varijabla. Budući da θ vrijedi za svaku dopustivu valuciju varijable p, vrijedi i za valuacije u kojima je p svuda istinita, nigdje istinita, ili istinita upravo u stanjima u kojima je q istinita. Dakle, u baznom slučaju supstitucija čuva istinitost.

- Pretpostavimo sada da je Λ_S zatvorena na uniformnu supstituciju gdje je duljina zamjenske formule manja od n. Tada je ϕ oblika $\psi_1 \wedge \psi_2$ ili $\neg\psi$, odnosno $\triangle\psi$ za svaki $\triangle \in \tau$. Budući se primarno bavimo osnovnim temporalnim jezikom, pretpostaviti ćemo da je $\triangle$ unarni modalni operator. Operatori više kratnosti samo tehnički kompliciraju dokaz a nisu nam posebno zanimljivi. Formule ψ, ψ_1 i ψ_2 su duljine manje od n. Promotrimo slučaj $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Promotrimo posebno dva moguća podslučaja:

  (i). Formule ψ_1 i ψ_2 su obje duljine jedan. Slučaj u kojem su ψ_1 ili ψ_2 jednaki $\bot$ ili $\top$ nisu zanimljivi jer svode formulu ϕ na formulu duljine jedan. Pretpostavimo dakle da su te formule jednake nekim propozicionalnim varijablama, nazovimo ih p_1 i p_2. Dakle pretpostavili smo da je $\phi = p_1 \wedge p_2$. Ako uzmemo proizvoljni model zasnovan na nekom $\mathcal{O} \in S$ sa valuacijom V tada je skup stanja u kojima je ϕ istinita upravo $V(p_1) \bigcap V(p_2)$. Kako je θ valjana na svim modelima s dopustivim valuacijama varijable p, a skup dopustivih valuacija je zatvoren na presjeke, tako je posebno θ valjana na svim valuacijama od p koje ujedno odgovaraju svim mogućim skupovima stanja u kojima je ϕ istinita na nekom modelu. Dakle, u specijalnom slučaju u kojem su ψ_1 i ψ_2 duljine jedan, Λ_S je zatvorena na uniformnu supstituciju sa zamjenskom formulom $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$.

(ii). Od formula ψ_1 i ψ_2 je barem jedna duljine veće od jedan. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je to upravo ψ_2. Tada ćemo jednu uniformnu supstituciju zamijeniti s dvije ekvivalentne gdje obje obavljaju supstituciju sa zamjenskom formulom duljine manje od n. Uvedimo najprije novu propozicionalnu varijablu koja se ne pojavljuje u nijednoj od formula ϕ, θ, ψ_1 ili ψ_2 i označimo ju sa q. Tada najprije dobijemo θ'' tako da u θ supstituiramo $\psi_2 \wedge q$ na mjesto p, a zatim dobijemo θ' tako da u θ'' supstituiramo ψ_2 na mjesto q. Time smo dobili formulu koja je identična formuli koju bismo dobili supstitucijom ϕ u θ na mjesto p, ali smo koristili zamjenske formule duljine manje od n pa po pretpostavci indukcije θ' pripada Λ_S.

Dakle, korak indukcije vrijedi za ϕ oblika $\psi_1 \wedge \psi_2$. Dokaz za ostale oblike formule ϕ se provodi analogno, samo u razmatranju prvog podslučaja koristimo zatvorenost skupa dopustivih valuacija na komplemente i modalne projekcije.

Dakle, pokazali smo da je Λ_S zaista modalna logika.

Čitanjem definicije 19 možemo primijetiti da normalna modalna logika nije ograničena samo na aksiome K sustava. Naravno, u definiciji je namjerno ostavljena mogućnost dodavanja aksioma. To nam je često potrebno ako želimo promatrati manji skup, preciznije definiranih, modalnih logika. Često želimo promatrati normalne modalne logike kojima smo dodali neki skup formula koje također želimo zvati aksiomima. Zato uvodimo slijedeću definiciju.

Definicija 20. Neka je τ modalni tip i neka je Γ skup τ-formula. Definiramo $K_\tau\Gamma$, normalnu modalnu logiku *aksiomatiziranu* (odnosno *generiranu*) sa Γ, kao najmanju modalnu τ-logiku koja sadrži sve formule iz Γ. Formule iz Γ se nazivaju aksiomi logike, a Γ se naziva *aksiomatizacija* logike $K_\tau\Gamma$. Normalna modalna logika generirana praznim skupom se označava sa K_τ.

Važnost gornje definicije će postati jasnija kada budemo definirali *normalnu temporalnu logiku* i njene dodatne aksiome.

5.2 Potpunost

Često se nalazimo u situaciji u kojoj promatramo neki skup formula i jednu izdvojenu formulu i zanima nas da li istinitost izdvojene formule slijedi iz istinosti skupa formula. Obično nam je to važno jer znači da analizom skupa formula možemo doći do zaključka o izdvojenoj formuli. Upravo takav odnos između skupa formula i neke pojedinčne formule opisuje pojam *lokalne semantičke posljedice.*

Definicija 21. *(Lokalna semantička posljedica)* Neka je τ modalni tip, i neka je S neka klasa struktura tipa τ (klasa modela ili okvira). Neka je Σ skup formula, a ϕ formula iz jezika modalnog tipa τ. Kažemo da je ϕ *lokalna semantička posljedica* od Σ nad S (pišemo: $\Sigma \Vdash_S \phi$) ako za svaki model $\mathcal{M}$ iz S, i sva stanja w iz $\mathcal{M}$, imamo da $\mathcal{M}, w \Vdash \Sigma$ povlači $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$.

Dakle, lokalna semantička posljedica ϕ od Σ jednostavno govori da istinitost od Σ u nekom stanju iz modela povlači istinitost od ϕ.
Lokalnu semantičku posljedicu smo definirali jer nam je potrebna za definiranje jednog posebnog svojstva neke klase okvira: *jake potpunosti.* No, prije moramo definirati još jedan pojam:

Definicija 22. Neka je Λ *modalna logika* i neka je $\phi \in \Lambda$ formula. Tada kažemo da je ϕ teorem logike Λ i pišemo $\vdash_\Lambda \phi$. Neka je Γ skup formula, tada kažemo da je ϕ izvediva iz Γ u logici Λ ako postoje $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ takvi da vrijedi $\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \phi$. To označavamo sa $\Gamma \vdash_\Lambda \phi$.

Ako pažljivo promotrimo definicije 21 i 22 primijetit ćemo da zapravo govore o veoma sličnim pojmovima. Prva govori o tome da istinitost skupa formula povlači istinitost određene promatrane formule. Druga pak govori o izvedivosti formule iz skupa formula. Intuitivno promatrano, željeli bismo da ta dva pojma imaju isto značenje. Upravo o takvom poželjnom svojstvu modalnih logika govori slijedeća definicija.

Definicija 23. Neka je S klasa okvira (ili modela). Logika Λ je *jako potpuna* u odnosu na S ako za bilo koji skup formula $\Gamma \bigcup \{\phi\}$ imamo da $\Gamma \Vdash_S \phi$ povlači $\Gamma \vdash_\Lambda \phi$.

Logika Λ je *slabo potpuna* s obzirom na S ako za svaku formulu ϕ vrijedi da $\Vdash_S \phi$ povlači $\vdash_\Lambda \phi$.

Logika Λ je jako (slabo) potpuna s obzirom na samo jednu strukturu σ ako je jako (slabo) potpuna s obzirom na $\{\sigma\}$.

Dakle, logika je strogo potpuna za klasu okvira, ako lokalna semantička posljedica na klasi okvira povlači izvedivost u logici. Također primijetimo da je slaba potpunost poseban slučaj jake potpunosti u kojoj je Γ prazan skup, pa jaka potpunost povlači slabu potpunost.

Na prvi pogled se čini da će biti veoma teško dokazivati jaku potpunost neke logike u odnosu na klasu struktura jer se traži da provjeru svojstva iz definicije provedemo za svaki okvir ili model iz klase. No slijedeća definicija i jednostavni teorem nam daju često korišteni rezultat za dokaz *jake potpunosti.*

Definicija 24. Skup formula Γ je Λ-*konzistentan* ako $\perp$ (laž) nije izvediva iz Γ u Λ. Skup formula je Λ-*inkonzistentan* ako je $\perp$ izvediva.

Teorem 5. *Logika Λ je jako potpuna za klasu struktura S ako i samo ako je svaki Λ-konzistentni skup formula ispunjiv na nekoj strukturi $\mathcal{O} \in S$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da Λ nije jako potpuna za S. Tada postoji skup formula $\Gamma \bigcup \{\phi\}$ takav da $\Gamma \Vdash_S \phi$ ali $\Gamma \not\vdash_\Lambda \phi$. Tada je $\Gamma \bigcup \{\neg\phi\}$ Λ-konzistentan skup formula koji nije ispunjiv niti na jednoj strukturi iz S.

Za obrnuti smjer pretpostavimo da postoji Λ-konzistentni skup Γ koji nije ispunjiv niti na jednoj strukturi $\mathcal{O} \in S$. Tada za svaku formulu ϕ trivijalno vrijedi $\Gamma \Vdash_S \phi$. Specijalno vrijedi i $\Gamma \Vdash_S \perp$. Budući da je Λ jako potpuna za S, to povlači $\Gamma \vdash_\Lambda \perp$. No to je nemoguće jer je Γ Λ-konzistentan skup. Q.E.D.

5.3 Kanonski modeli

Ako promatramo neku logiku Λ i njene Λ-konzistentne skupove postavlja se prirodno pitanje: *da li možemo konstruirati model u kojem će svaki Λ-konzistentan skup biti ispunjiv?*

Ovdje predstavljamo uvjerljivo najvažniji odgovor na takvo pitanje: izgradimo modele iz *maksimalnog konzistentnog skupa formula*, da budemo točniji, sagradimo *kanonske modele*. Upravo se slijedeća definicija bavi maksimalnim konzistentnim skupom formula.

Definicija 25. Skup formula Γ je *maksimalno Λ-konzistentan* ako je Γ Λ-konzistentan, i ako je svaki skup formula, koji je pravi nadskup od Γ, Λ-inkonzistentan. Ako je Γ maksimalan Λ-konzistentan skup formula, kažemo da je Λ-MCS[6]).

Budući da su Λ-MCS-ovi tako važni, dokažimo prvo neka njihova svojstva:

Teorem 6. (Svojstva MCS-ova) *Ako je Λ logika i Γ je Λ-MCS tada vrijedi:*

(i). Γ *je zatvorena na* modus ponens*, točnije:* ϕ, $\phi \to \psi \in \Gamma$ *povlači* $\psi \in \Gamma$*;*

(ii). $\Lambda \subseteq \Gamma$*;*

(iii). *za sve formule* ϕ*:* $\phi \in \Gamma$ *ili* $\neg\phi \in \Gamma$*;*

(iv). *za sve formule* ϕ, ψ*:* $\phi \vee \psi \in \Gamma$ *ako i samo ako* $\phi \in \Gamma$ *ili* $\psi \in \Gamma$.

[6]engleski *M*aximal *C*onsistent *S*et - maksimalan konzistentan skup

Dokaz. (U ostatku dokaza se podrazumijeva da $\vdash$ označava $\vdash_\Lambda$) Prije dokaza po točkama dokažimo jedno jednostavno svojstvo. Neka je ϕ proizvoljna formula za koju vrijedi $\Gamma \vdash \phi$. Kada bi također vrijedilo $\Gamma \vdash \neg\phi$ vrijedilo bi i $\Gamma \vdash \phi \wedge \neg\phi$, tj. $\Gamma \vdash \bot$. Budući da je Γ konzistentan skup, to je nemoguće. Dakle, $\Gamma \nvdash \neg\phi$. Iz toga slijedi da je $\Gamma \bigcup \{\phi\}$ konzistentan skup. No tada iz maksimalnosti od Γ slijedi $\phi \in \Gamma$. Da sumiramo: $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \phi \in \Gamma$. Sad ćemo lako dokazati točke dokaza.

(i). Iz $\phi \to \psi \in \Gamma$ trivijalno slijedi $\Gamma \vdash \phi \to \psi$. No $\phi \in \Gamma$ pa prema definiciji to upravo znači da je ψ izvediva iz Γ. Iz toga, prema već dokazanom, slijedi $\psi \in \Gamma$.

(ii). Neka je $\lambda \in \Lambda$ proizvoljna formula. Tada $\vdash \lambda$ pa specijalno vrijedi $\Gamma \vdash \lambda$. No iz toga slijedi $\lambda \in \Gamma$. Zbog proizvoljnog odabira formule λ zaključujemo da vrijedi $\Lambda \subseteq \Gamma$.

(iii). Za proizvoljnu formulu ϕ postoje dva slučaja, ili je izvediva iz Γ ili nije izvediva. Ako je izvediva tada smo vidjeli da vrijedi $\phi \in \Gamma$ pa smo gotovi. Ako pak nije izvediva tada je $\Gamma \bigcup \{\neg\phi\}$ konzistentan skup. No tada zbog maksimalnosti od Γ mora vrijediti $\neg\phi \in \Gamma$.

(iv). Neka vrijedi $\phi \in \Gamma$ ili $\psi \in \Gamma$. Promotrimo slučaj kada je $\phi \in \Gamma$. Slučaj $\psi \in \Gamma$ dokazuje se sasvim analogno. Primjetimo da je $\phi \to \phi \vee \psi$ propozicionalna tautologija pa pripada skupu Γ. Sada primjenom točke (i) ovog dokaza slijedi $\phi \vee \psi \in \Gamma$.

Za obrat, neka je $\phi \vee \psi \in \Gamma$ i pretpostavimo $\phi \notin \Gamma$ i $\psi \notin \Gamma$. Tada zbog točke (iii) ovog dokaza slijedi $\neg\phi \in \Gamma$ i $\neg\psi \in \Gamma$. Sada dajemo jedan izvod za $\bot$ iz skupa Γ.

1.		$\neg\phi \to (\neg\psi \to (\neg\phi \wedge \neg\psi))$	(propozicionalna tautologija)
2.	$\Gamma \vdash$	$\neg\psi \to (\neg\phi \wedge \neg\psi)$	(modus ponens)
3.	$\Gamma \vdash$	$\neg\phi \wedge \neg\psi$	(modus ponens)
4.		$\neg\phi \wedge \neg\psi \to \neg(\phi \vee \psi)$	(propozicionalna tautologija)
5.	$\Gamma \vdash$	$\neg(\phi \vee \psi)$	(modus ponens)
6.	$\Gamma \vdash$	$\neg(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \psi)$	
7.	$\Gamma \vdash$	$\bot$	

Došli smo do $\Gamma \vdash \bot$ no to je u kontradikciji sa konzistentnošću skupa Γ. Zaključujemo da je početna pretpostavka pogrešna, odnosno da vrijedi $\phi \in \Gamma$ ili $\psi \in \Gamma$.

Q.E.D.

Da bi smo dobili model u kojem ce svaki Λ konzistentan skup biti ispunjiv gradimo specijalan model, *kanonski model*, čija su stanja MCS-ovi promatrane logike. Dakle, kanonski model se zapravo gradi iz maksimalno konzistentnih skupova formula.

Kanonski model za posebnu, normalnu, temporalnu logiku K_t će biti definiran u slijedećem poglavlju.

5.4 Minimalna i K_t temporalna logika

U ovom poglavlju bavimo se pitanjem što je zapravo temporalna logika, tj. možemo li formalizirati koncept temporalne logike. Vođeni tom idejom, kao prvi važni korak uvodimo slijedeću definiciju:

Definicija 26. *Minimalna temporalna logika* Λ_{F_t} je $\{\phi | F_t \Vdash \phi\}$, gdje je F_t klasa svih bidirekcionalnih okvira.

Dakle, definirali smo da se minimalna temporalna logika sastoji upravo od klase svih formula valjanih na klasi svih bidirekcionalnih okvira. S obzirom na naš interes u promatranju temporalne logike na okvirima, ovaj izbor definicije je veoma razuman. No, da li možemo aksiomatizirati Λ_{F_t}? Da bismo odgovorili na to pitanje uvodimo pojam *normalne temporalne logike* koja će nam dati odgovor na to pitanje čim pokažemo da ona generira upravo formule u Λ_{F_t}.

Definicija 27. *Normalna temporalna logika* Λ je normalna modalna logika (u osnovnom temporalnom jeziku) koja sadrži $p \to GPp$ i $p \to HFp$ (aksiomi obrata). Najmanju normalnu temporalnu logiku označavamo K_t. Obično normalne temporalne logike nazivamo *logikama vremena*.

Vrijedi naglasiti aksiome K-sustava za osnovni temporalni jezik. K- aksiomi su $G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$ i $H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$, a Dualni aksiomi su $Fp \leftrightarrow \neg G \neg p$ i $Pp \leftrightarrow \neg H \neg p$.

Odmah definiramo i kanonski model za K_t, ključnu strukturu za daljnje promatranje normalnih temporalnih (tj. vremenskih) logika:

Definicija 28. *Kanonski model za vremensku logiku* Λ je struktura $\mathcal{M}^\Lambda = (T^\Lambda, \{R_P^\Lambda, R_F^\Lambda\}, V^\Lambda)$ tako da :

(i). T^Λ je skup svih Λ-MCS-ova.

(ii). R_P^Λ je binarna relacija na T^Λ definirana sa: $R_P^\Lambda ts$ ako za sve formule ϕ, $\phi \in s$ povlači $P\phi \in t$.

(iii). R_F^Λ je binarna relacija na T^Λ definirana sa: $R_F^\Lambda ts$ ako za sve formule ϕ, $\phi \in s$ povlači $F\phi \in t$.

(iv). V^Λ je valuacija definirana sa $V^\Lambda(p) = \{t \in T^\Lambda | p \in t\}$.

Dakle, kanonski model se izgrađuje iz skupa svih Λ-MCS-ova, a svaki element domene modela je upravo jedan Λ-MCS.

Kao što vidimo, kanonski model je konsturiran na dosta apstraktan način. Budući da su mu stanja skupovi formula, imamo zanimljivo svojstvo da su formule logike ujedno i elementi elemenata domene. Zbog takve konstrukcije, kanonski model posjeduje neka zanimljiva svojstva.

Lema 1. *Za proizvoljne $w, v \in T^\Lambda$, vrijedi $R_P^\Lambda wv$ ako i samo ako za svaku formulu ψ, $H\psi \in w$ povlači $\psi \in v$. (Analogna tvrdnja vrijedi i za operator F)*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da vrijedi $R_P^\Lambda wv$, te $\psi \notin v$. Budući da je v MCS mora vrijediti $\neg\psi \in v$, a to po definiciji znači da vrijedi $P\neg\psi \in w$. Zbog konzistentnosti tada vrijedi $\neg P\neg\psi \notin w$, tj. $H\psi \notin w$. Dokažimo sada obrat. Neka je $\psi \in v$ proizvoljna formula. Tada redom vrijedi:

$$\psi \in v \Rightarrow \neg\psi \notin v \Rightarrow H\neg\psi \notin w \Rightarrow \neg P\neg(\neg\psi) \notin w \Rightarrow \neg P\psi \notin w \Rightarrow P\psi \in w\ . \tag{9}$$

Primijetimo da smo dobili da za svaku formulu ψ, činjenica $\psi \in v$ povlači $P\psi \in w$, što je upravo definicija za $R_P^\Lambda wv$. Time je dokazan i obrat.

Dokaz za operator F je analogan. Q.E.D.

Prethodna lema nam govori da smo razumno definirali kanonski model, tj. da zaista posjeduje neka svojstva koja bi intuitivno očekivali. Drugim riječima, relacije R_P^Λ i R_F^Λ su upravo onakve kakve nam trebaju. Još treba provjeriti da postoji dovoljno MCS-ova koji su u relaciji. No za to će nam trebati slijedeća lema koja govori o proširenju Λ-konzistentnog skupa formula na Λ-MCS.

Lema 2. (Lindenbaumova lema) *Neka je Γ neki Λ-konzistentan skup formula. Tada postoji Λ-MCS Γ^+ takav da $\Gamma \subseteq \Gamma^+$.*

Dokaz. Neka je $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ niz koji sadrži sve formule logike Λ (ima ih prebrojivo mnogo). Definiramo Γ^+ kao uniju rastućeg lanca Λ-konzistentnih skupova, na slijedeći način:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \Gamma \\
\Gamma_{n+1} &= \begin{cases} \Gamma_n \bigcup \{\phi_n\} & \text{, ako je ovo } K_t \text{ konzistentno} \\ \Gamma_n \bigcup \{\neg\phi_n\} & \text{, inače} \end{cases} \\
\Gamma^+ &= \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n\ .
\end{aligned}$$

Sada ćemo dokazati da je Γ^+ zaista Λ-MCS. Kao prvo primijetimo da je zbog odabira ϕ_n u svakom koraku Γ_n zaista Λ-konzistentan skup za svaki n. Dalje, ako uzmemo proizvoljnu formulu ϕ ona će se nalaziti negdje u numeriranom lancu svih formula pa je ili ϕ ili $\neg\phi$ element Γ^+. No kada bi se i ϕ i $\neg\phi$ nalazili u Γ^+ mogli bi naći dovoljno veliki n tako da i ϕ i $\neg\phi$ pripadaju skupu Γ_n. No pošto je Γ_n Λ-konzistentni skup to je nemoguće. Dakle, za svaku formulu ϕ vrijedi da točno jedna od ϕ i $\neg\phi$ pripada skupu Γ^+. Uzmimo sada proizvoljnu formulu ϕ takvu da $\Gamma^+ \vdash_\Lambda \phi$. Po definiciji to znači da postoje $\psi_1, \ldots, \psi_m$ iz Γ^+ takvi da $\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m) \to \phi$. Kada bi vrijedilo $\neg\phi \in \Gamma^+$ postojao bi neki $\Gamma_{n'}$ koji sadrži $\neg\phi, \psi_1, \ldots, \psi_m$. No tada bi vrijedilo $\Gamma_{n'} \vdash \neg\phi \wedge \phi$ što je nemoguće jer je $\Gamma_{n'}$ Λ-konzistentan skup. Dakle, mora vrijediti da $\Gamma^+ \vdash \phi$ povlači $\phi \in \Gamma^+$. Sada je jasno da kada bi vrijedilo $\Gamma^+ \vdash \bot$ bi vrijedilo $\bot \in \Gamma$, odnosno $\bot \in \Gamma_n$ za neko n što je nemoguće. Drugim riječima Γ^+ je Λ-konzistentan skup.

Za kraj primijetimo da za svaku formulu ϕ vrijedi da $\phi \notin \Gamma^+$ povlači $\neg\phi \in \Gamma^+$. Dakle, ako skupu Γ^+ dodamo bilo koju formulu koju već ne sadrži, postat će Λ-inkonzistentan skup. Dakle, Γ^+ je zaista Λ-MCS. Q.E.D.

Sada smo spremni da dokažemo lemu o egzistenciji.

Lema 3. (Lema o egzistenciji) *Za svako stanje $w \in T^\Lambda$ za koje vrijedi $P\phi \in w$, postoji stanje $v \in T^\Lambda$ takvo da $R_P^\Lambda wv$ i $\phi \in v$. (Analogna tvrdnja vrijedi za operator F)*

Dokaz. Pretpostavimo $P\phi \in w$. Konstruirat ćemo stanje $v \in T^\Lambda$ takvo da $R_P^\Lambda wv$ i $\phi \in v$. Neka je $v' = \{\phi\} \bigcup \{\psi | H\psi \in w\}$. Pokažimo da je v' konzistentan skup.

Pretpostavimo da nije. Tada postoje formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$ takve da $\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \neg\phi$. Dalje, iz pravila generalizacije i K-aksioma slijedi $\vdash_\Lambda H(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to H\neg\phi$. Kako je $(H\psi_1 \wedge \cdots \wedge H\psi_n) \to H(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$ teorem svake normalne temporalne logike, slijedi $\vdash_\Lambda (H\psi_1 \wedge \cdots \wedge H\psi_n) \to H\neg\phi$. Skup v' smo definirali tako da $H\psi_1, \ldots, H\psi_n \in w$, a w je kao MCS zatvoren na konjukciju pa vrijedi $(H\psi_1 \wedge \cdots \wedge H\psi_n) \in w$. Primjenom pravila izvoda *modus ponens* i svojstva MCS-ova dokazanog u teoremu 6, slijedi $H\neg\phi \in w$, tj. po dualnosti operatora, $\neg P\phi \in w$. No, to je nemoguće jer je w MCS koji sadrži $P\phi$. Dakle, dobili smo kontradikciju i pokazali da je v' konzistentan skup.

Sada definiramo v kao Λ-MCS proširenje od v', čije postojanje nam garantira Lindenbaumova lema. Po konstrukciji vrijedi $\phi \in v$, te za svaku formulu ψ, $H\psi \in w$ povlači $\psi \in v$. Dakle, prema lemi 1 slijedi $R_P^\Lambda wv$.

Dokaz za F je analogan. Q.E.D.

Teorem 7. *Za svaki vremensku logiku Λ i formulu ϕ vrijedi $\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash \phi$ ako i samo ako $\phi \in w$.*

Dokaz. Dokaz se provodi indukcijom po složenosti od ϕ. Baza indukcije slijedi iz definicije od V^Λ.

Za korak indukcije bulovski slučajevi se dokazuju iz definicije istinitosti pa ih ovdje preskačemo i koncentriramo se na modalitete. Dokaz provodimo samo za P jer je za operator F analogan. Dokažimo prvo jedan smjer. U tu svrhu pišemo sljedeći niz implikacija:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash P\phi &\Leftrightarrow \exists v \left(R_P^\Lambda wv \wedge \mathcal{M}^\Lambda, v \Vdash \phi\right) \\ &\Leftrightarrow \exists v \left(R_P^\Lambda wv \wedge \phi \in v\right) \text{ (Pretpostavka indukcije)} \\ &\Rightarrow P\phi \in w \text{ (Po definiciji od } R_P^\Lambda \text{).} \end{aligned}$$

Za dokaz u obrnutom smjeru, prema ekvivalencijama u gornjem dokazu, dovoljno je naći stanje v takvo da vrijedi $R_P^\Lambda wv \wedge \phi \in v$, no lema o postojanju (Lema 3) govori upravo o postojanju takvog stanja te je time i obrnuti smjer dokazan.

Dokaz za F je analogan. Q.E.D.

Budući da temporalne logike promatramo na bidirekcionalnim modelima, željeli bismo da je takav i kanonski model. Pokazuje se da je kanonski model zaista bidirekcionalan.

Teorem 8. *Za svaku vremensku logiku Λ, $R_P^\Lambda ts$ povlači $R_F^\Lambda st$ i $R_F^\Lambda ts$ povlači $R_P^\Lambda st$.*

Dokaz. Dokažimo da $R_P^\Lambda ts$ povlači $R_F^\Lambda st$.
Uzmimo proizvoljni $\psi \in t$. Da bismo dobili $R_F^\Lambda st$ trebamo, po definiciji, pokazati da $\psi \in t$ povlači $F\psi \in s$. Dokaz slijedi iz K-aksiom i aksioma vremenskih logika te primjenom pravila izvoda K-dokaza.

Najprije iz aksioma obrata primjenom pravila uniformne supstitucije dobijemo da je $\psi \to HF\psi$ teorem vremenske logike Λ. Iz $\psi \in t$ i upravo dobivenog teorema dobijemo da vrijedi $HF\psi \in t$. Kada prema dualnom aksiomu raspišemo operator H u terminima operatora P dobijemo da vrijedi $\neg P(\neg F\psi)$. Drugim riječima, za svaki $w \in T^\Lambda$ takav da vrijedi $R_P^\Lambda tw$, imamo $F\psi \in w$. Budući da po pretpostavci imamo $R_P^\Lambda ts$, tada specijalno vrijedi $F\psi \in s$. To, zbog odabira formule ψ, povlači $R_F^\Lambda st$. Dakle, dokazali smo da $R_P^\Lambda ts$ povlači $R_F^\Lambda st$.

Obratna tvrdnja, tj. da $R_F^\Lambda ts$ povlači $R_P^\Lambda st$, se dokazuje na analogan način. Q.E.D.

Sada smo spremni dokazati veoma bitan teorem koji će nam dati sintaktičku karakterizaciju minimalne temporalne logike, teorem potpunosti:

Teorem 9. *K_t je jako potpuna s obzirom na klasu svih bidirekcionalnih okvira, i $K_t = \Lambda_{F_t}$.*

Dokaz. Pokažimo najprije da je K_t jako potpuna s obzirom na svoj kanonski model. Želimo dokazati da za svaki skup formula Γ i formulu ϕ u logici K_t vrijedi da $\Gamma \Vdash_{K_t} \phi$ povlači $\Gamma \vdash_{K_t} \phi$.

Primijetimo da je dovoljno promatrati samo K_t-konzistentne skupove. Naime ako bi postojao neki K_t-inkonzistentan skup Γ tako da postoji $w \in \mathcal{M}^{K_t}$ takav da $\mathcal{M}^{K_t}, w \Vdash \Gamma$ tada bi također, za isti w vrijedilo $\mathcal{M}^{K_t}, w \Vdash \perp$ što je nemoguće pa Γ nije ispunjiva na $\mathcal{M}^{K_t}$. Iz toga trivijalno slijedi da su sve formule lokalne semantičke posljedice od Γ, ali isto tako je i svaka formula trivijalno izvediva iz Γ, pa su takvi skupovi formula nebitni za jaku potpunost.

Dakle, uzmimo proizvoljni K_t-konzistentan skup Γ i primjenom Lindenbaumove leme ga proširimo do K_t-MCSa Γ^+. Zbog definicije od W^{K_t} slijedi $\Gamma^+ \in \mathcal{M}^{K_t}$. Zbog teorema 7 slijedi $\mathcal{M}^{K_t}, \Gamma^+ \Vdash \Gamma$. Dakle, pokazali smo da je svaki K_t konzistentan skup ispunjiv na kanonskom modelu. Sada prema teoremu 5 slijedi da je K_t jako potpuna za singularnu klasu modela koja sadrži samo kanonski model, tj. K_t je jako potpuna za kanonski model.

Budući da je u teoremu 8 pokazano da je kanonski model baziran na bidirekcionalnom okviru, a upravo smo pokazali da je svaki K_t-konzistentan skup formula ispunjiv na kanonskom modelu opet iz teorema 5 slijedi da je K_t jako potpuno s obzirom na klasu svih bidirekcionalnih okvira.

Također, prisjetimo se da jaka potpunost povlači slabu potpunost pa iz gornjeg rezultata i definicije slabe potpunosti direktno slijedi $\Lambda_{F_t} \subseteq K_t$.

Kao što smo vidjeli u dokazu teorema 8 aksiomi obrata povlače da je okvir koji utemeljuje model logike koja sadrži aksiome obrata *bidirekcionalan.* Iz toga očito slijedi da je $K_t \subseteq \Lambda_{F_t}$. Dakle $K_t = \Lambda_{F_t}$. Q.E.D.

Da zaključimo, upravo smo dokazali da je K_t jako potpuna logika koja točno generira formule minimalne temporalne logike. Time smo aksiomatizirali minimalnu temporalnu logiku i opisali ju jednostavnim sintaktičkim uvjetima. Taj važni rezlutat je podloga za mnoga daljnja promatranja temporalne logike.

5.5 Kanonska svojstva

Do sada smo definirali kanonske modele, no termin *kanonski* ima i puno širu primjenu, baziranu na već definiranom terminu *kanonski model.* Uvodimo definiciju za kanonsku formulu i logiku.

Definicija 29. Formula ϕ je *kanonska* ako za svaku normalnu logiku Λ, $\phi \in \Lambda$ povlači da je ϕ valjana na kanonskom okviru od Λ. Normalna logika Λ je *kanonska* ako je njen kanonski okvir zaista okvir za Λ. (Tj., Λ je kanonska ako za sve ϕ takve da $\vdash_\Lambda \phi$, vrijedi da je ϕ valjana na kanonskom okviru od Λ.)

Što je još vaznije, termin *kanonski* možemo proširiti na semantička svojstva logika.

Definicija 30. *(Kanonska svojstva)* Neka je ϕ formula i P neko svojstvo. Ako svaki kanonski okvir za bilo koju normalnu logiku Λ koja sadrži formulu ϕ ima svojstvo P, tada je ϕ *kanonska za P.*

Oboružani definicijom kanonskih svojstava, i s definiranom i aksiomatiziranom logikom K_t, imamo temelje za pomniju analizu semantičkih svojstava temporalne logike, odnosno analize aksiomatskih proširenja logike K_t. Ako promatramo vremensku logiku u neformalnom svijetlu stvarnih vremenskih fenomena koje bi htjeli modelirati, vidimo da će nas zanimati *gusti* i *totalno uređeni* okviri. Pritom ćemo se ograničiti na slijedeće pitanje: Kako se temporalna logika *gustih neograničenih slabo linearnih okvira* može aksiomatizirati?

Počnimo sa definicijom prikladne klase okvira.

Definicija 31. Za bidirekcionalni okvir (T, R) kažemo da je:

(i). *gust* (eng. **D**ense) ako postoji točka između svake dvije točke koje su u relaciji, odnosno, formalno zapisano, $\forall xy(Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \land Rzy))$.

(ii). *neograničen s desna* ako svaka točka ima sljedbenika.

(iii). *neograničen s lijeva* ako svaka točka ima prethodnika.

(iv). *neograničen* (eng. **U**nbound) ako je neograničen i s lijeva i s desna.

(v). *totalan* ako su svake dvije točke ili jednake ili su u nekoj relaciji, odnosno, formalno zapisano, $\forall xy(Rxy \lor x = y \lor Ryx)$.

(vi). *slabo linearan* (eng. **W**eak **T**otal **O**rder) ako je totalan i tranzitivan.

Okvir sa svim navedenim svojstvima se zove DUWTO-okvir.

Da bismo našli poželjno aksiomatsko proširenje K_t logike prvo trebamo odrediti modalne formule koje su kanonske za svojstva iz definicije. Za tri svojstva je prilično jednostavno identificirati kanonske formule.

Lema 4. *Formula $FFp \rightarrow Fp$ je kanonska za tranzitivnost.*

Dokaz. Neka je Λ bilo koja vremenska logika koja sadrži $FFp \rightarrow Fp$. Neka je (T^Λ, R^Λ) njen kanonski okvir i uzmimo proizvoljne točke $w, v, u \in T$ takve da vrijedi Rwv i Rvu. Neka je $\phi \in u$ proizvoljna formula. Tada Rvu povlači $F\phi \in v$ po definiciji. Također po definiciji $F\phi \in v$ i Rwv povlače $FF\phi \in w$, te upravo iz aksioma $FFp \rightarrow Fp$ primjenom pravila *uniformne supstitucije* i *modus ponens* slijedi $F\phi \in w$. Zbog proizvoljnog odabira formule ϕ, po definiciji slijedi Rwu, a iz proizvoljnog odabira točaka w,v i u slijedi tranzitivnost od (T^Λ, R^Λ). Dakle, $FFp \rightarrow Fp$ je kanonska za tranzitivnost. Q.E.D.

Aksiom $FFp \rightarrow Fp$ se tradicionalno označava sa **(4)**.

Lema 5. *Formula $Gp \rightarrow Fp$ je kanonska za neograničenost s desna.*

Dokaz. Neka je Λ bilo koja vremenska logika koja sadrži $Gp \rightarrow Fp$. Neka je (T^Λ, R^Λ) njen kanonski okvir i uzmimo proizvoljnu točku $w \in T$. Svakako je $\top \in \Lambda$ pa primjenom generalizacije slijedi $G\top \in \Lambda$. Primijenimo *uniformnu supstituciju* i *modus ponens* te dobijemo $F\top \in w$. Prema lemi o postojanju postoji stanje v takvo da Rwv. Zbor proizvoljnog odabira točke w slijedi da je (T^Λ, R^Λ) neograničen s desna te je $Gp \rightarrow Fp$ kanonska za neograničenost s desna. Q.E.D.

Aksiom $Gp \rightarrow Fp$ se tradicionalno označava sa $\mathbf{(}D_r\mathbf{)}$.

Lema 6. *Formula $Hp \to Pp$ je kanonska za neograničenost s lijeva.*

Dokaz. Potpuno analogno dokazu za neograničenost sa desna slijedi da je $Hp \to Pp$ kanonska za neograničenost sa lijeva. Q.E.D.

Aksiom $Hp \to Pp$ se tradicionalno označava sa (D_l).

Budući da dokaz kanonskog svojstva formule za gustoću nije trivijalan vrijedi ga posebno izdvojiti.

Lema 7. *Formula $Fp \to FFp$ je kanonska za gustoću.*

Dokaz. Neka je Λ bilo koja vremenska logika koja sadrži $Fp \to FFp$. Neka je (T^Λ, R^Λ) njen kanonski okvir i uzmimo proizvoljne točke $t, t' \in T^\Lambda$ takve da $R^\Lambda tt'$. Trebamo pokazati da postoji Λ-MCS s takav da $R^\Lambda ts$ i da $R^\Lambda st'$. Kada bismo mogli pokazati da je $\{\phi | G\phi \in t\} \bigcup \{F\psi | \psi \in t'\}$ konzistentan skup formula imali bismo traženi rezultat jer bi bilo koji MCS koji proširuje taj skup bio adekvatan izbor za s.

Pretpostavimo suprotno, da navedeni skup nije konzistentan. Tada postoji konačno mnogo formula $\phi_1, \ldots, \phi_m, \psi_1, \ldots, \psi_n$ iz tog skupa tako da vrijedi:

$$\vdash_\Lambda (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_m \wedge F\psi_1 \wedge \cdots \wedge F\psi_n) \to \perp \tag{10}$$

.

Definirajmo $\hat{\phi}$ kao pokratu za $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_m$ i $\hat{\psi}$ za $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$. Primijetimo da vrijedi $\hat{\psi} \in t'$.

Dalje, zbog $\vdash_\Lambda F\hat{\psi} \to F\psi_1 \wedge \cdots \wedge F\psi_n$ vrijedi $\vdash_\Lambda \hat{\phi} \wedge F\hat{\psi} \to \perp$, odnosno $\vdash_\Lambda \hat{\phi} \to \neg F\hat{\psi}$ i konačno pravilom generalizacije $\vdash_\Lambda G\hat{\phi} \to G\neg F\hat{\psi}$. Zato jer je $G\phi_1, \ldots, G\phi_m \in t$, vrijedi $G\hat{\phi} \in t$, odnosno(*modus ponens*) $G\neg F\hat{\psi} \in t$ te zbog konzistentnosti od t $\neg G\neg F\hat{\psi} \notin t$. To je upravo $FF\hat{\psi} \notin t$. No to povlači da $F\hat{\psi} \notin t$ jer, primjenom uniformne supstitucije na promatrani aksiom, imamo $F\hat{\psi} \to FF\hat{\psi} \in t$. No to je kontradikcija jer je $\hat{\psi} \in t'$ i $R^\Lambda tt'$ pa mora vrijediti $F\hat{\psi} \in t$. Došli smo do kontradikcije i zaključujemo da je $\{\phi | G\phi \in t\} \bigcup \{F\psi | \psi \in t'\}$ konzistentan skup. Q.E.D.

Aksiom $Fp \to FFp$ se tradicionalno označava sa **(Den)**.

Još jedino preostaje totalnost, ali ovdje naš dosadašnji pristup nije više dovoljan. Primijetimo da niti jedna formula vremenske logike ne može definirati totalnost. Zaista, ako uzmemo dva disjunktna okvira tako da je svaki pojedinačno totalan i napravimo disjunktnu uniju, modalna (i temporalna) valjanost formula će biti očuvana kao direktna posljedica teorema 4. Pretpostavimo da postoji formula koja je kanonska za totalnost. Tada bi ta formula bila valjana na tako konstruiranom okviru no taj okvir očito nije totalan. Dapače, kanonski okviri mogu biti sastavljeni iz disjunktnih podokvira generiranih iz točaka. Takvi kanonski okviri neće biti totalni. Ukratko, da bismo dobili željeni rezultat o potpunosti, moramo sagraditi model sa svojstvom za koje niti jedna modalna formula nije kanonska. To je problem koji se često javlja prilikom dokazivanja semantički dobivenih rezultata.

U danom slučaju totalnosti, malo drukčiji pristup vodi do riješenja. Prvo se moramo riješiti moguće zablude. Do sada smo uvijek koristili cijeli kanonski model, ali to nije nužno. Model generiran iz točke je dovoljan. To slijedi iz činjenice da ako $\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash \Gamma$ onda za $\mathcal{O}$, podmodel od $\mathcal{M}^\Lambda$ generiran sa w, vrijedi $\mathcal{O}^\Lambda, w \Vdash \Gamma$[7].

Ograničavanjem na modele generirane točkama povećali smo skup svojstava koje možemo definirati temporalnom formulom. Posebno, možemo definirati totalnost na modelima generiranim iz točke. Za to će nam trebati kanonske formule za svojstva "nema grananja na desno", odnosno, formalno zapisano:

$$\forall xyz[(Rzx \wedge Rzy) \Rightarrow (Rxy \vee x = y \vee Ryx)] \tag{11}$$

i za "nema grananja na lijevo", odnosno formalno zapisano:

$$\forall xyz[(Rxz \wedge Ryz) \Rightarrow (Rxy \vee x = y \vee Ryx)] \ . \tag{12}$$

Sada ćemo dokazati dvije leme koje govore upravo o formulama koje su kanonske za ta svojstva.

Lema 8. *Formula* $(Fp \wedge Fq) \rightarrow F(p \wedge Fq) \vee F(p \wedge q) \vee F(q \wedge Fp)$ *je kanonska za "nema grananja na desno".*

Dokaz. Neka je Λ bilo koja vremenska logika koja sadrži $(Fp \wedge Fq) \rightarrow F(p \wedge Fq) \vee F(p \wedge q) \vee F(q \wedge Fp)$ i neka je (T^Λ, R^Λ) njen kanonski okvir. Uzmimo proizvoljne $x, y, z \in T$ takve da vrijedi $Rzx \wedge Rzy$.

Ako uzmemo proizvoljne formule ϕ i ψ takve da $\phi \in x$ i $\psi \in y$ tada zbog $Rzx \wedge Rzy$ vrijedi $F\phi \wedge F\psi \in z$. Primjenom pravila uniformne supstitucije i modus ponens na formulu iz iskaza teorema dobijemo da vrijedi $F(\phi \wedge F\psi) \vee F(\phi \wedge \psi) \vee F(\psi \wedge F\phi) \in x$. Sada ćemo pokazati da svaki element te disjunkcije redom povlači Rxy, $x = y$ i Ryx.

(i). Pretpostavimo da vrijedi $F(\phi \wedge F\psi) \in z$. Prema lemi o postojanju slijedi da postoji stanje $v \in T^\Lambda$ takvo da Rzv i da vrijedi $\phi \wedge F\psi \in v$. Posebno vrijedi $\phi \in v$. Budući da je $\phi \in x$ proizvoljno odabrana, slijedi $x \subseteq v$ no pošto su i x i v Λ-MCS nije moguće $x \subsetneqq v$ pa mora vrijediti $x = v$. Dalje, zbog $\phi \wedge F\psi \in v$ vrijedi $F\psi \in v$ no $\psi \in y$ je bila proizvoljna formula. Dakle, prema definiciji vrijedi Rxy.

(ii). Pretpostavimo sada da vrijedi $F(\phi \wedge \psi) \in z$. Kao i u (i) zaključujemo da vrijedi $\phi \wedge \psi \in x$, a specijalno vrijedi $\psi \in x$. Kako je $\psi \in y$ proizvoljno odabrana slijedi $y \subseteq x$ no oba skupa su Λ-MCSovi pa mora vrijediti $x = y$.

(iii). Pretpostavimo da vrijedi $F(\psi \wedge F\phi) \in z$. Analogno zaključivanju u točki (i) zaključujemo da vrijedi Ryx.

[7] vidi teorem 1

Budući da će barem jedan od elemenata disjunkcije biti istinit na z zaključujemo da je $(Fp \wedge Fq) \rightarrow F(p \wedge Fq) \vee F(p \wedge q) \vee F(q \wedge Fp)$ zaista kanonska za "nema grananja na desno". Q.E.D.

Aksiom $(Fp \wedge Fq) \rightarrow F(p \wedge Fq) \vee F(p \wedge q) \vee F(q \wedge Fp)$ se tradicionalno označava sa **(.3r)**.

Dokaz slijedeće leme je sasvim analogan dokazu prethodne leme.

Lema 9. *Formula* $(Pp \wedge Pq) \rightarrow P(p \wedge Pq) \vee P(p \wedge q) \vee P(q \wedge Pp)$ *je kanonska za "nema grananja na lijevo".*

Aksiom $(Pp \wedge Pq) \rightarrow P(p \wedge Pq) \vee P(p \wedge q) \vee P(q \wedge Pp)$ se tradicionalno označava sa **(.3l)**.

Okvir koji nema grananja na lijevo, a niti na desno, nazivat ćemo *okvir bez grananja.*

Lema 10. *Svaki totalni okvir* (T, R) *je okvir bez grananja. Nadalje, ako je* R *tranzitivna i bez grananja i* $t \in T$, *tada je podokvir od (T,R) generiran sa t totalan.*

Dokaz. Kao što smo definirali, "nema grananja na desno" se formalno zapisaju formulom prvog reda:

$$\forall xyz[(Rzx \wedge Rzy) \Rightarrow (Rxy \vee x = y \vee Ryx)] \ . \tag{13}$$

No, desna strana te implikacije je upravo totalnost što znači da na totalnom okviru relacija uvijek vrijedi. Analogno vrijedi za "Nema grananja na lijevo".

Za dokaz drugog dijela leme uzmimo proizvoljne točke x i y različite od t (za t je očito) i pokušajmo dokazati da vrijedi $Rxy \vee x = y \vee Ryx$. Budući da je okvir generiran iz točke t, a R tranzitivna relacija, slijedi da za svaki $x \in T$ vrijedi $Rtx \vee Rxt$. Iz toga slijedi da odnos između t, x i y možemo svesti na četiri moguća slučaja. Sada navodime sve slučajeve i odmah pokazujemo da iz svakog slučaja slijedi $Rxy \vee x = y \vee Ryx$:

(i). $Rtx \wedge Rty$ - Budući da vrijedi svojstvo "nema grananja na desno" direktno slijedi $Rxy \vee x = y \vee Ryx$.

(ii). $Rxt \wedge Ryt$ - Budući da vrijedi svojstvo "nema grananja na lijevo" direktno slijedi $Rxy \vee x = y \vee Ryx$.

(iii). $Rxt \wedge Rty$ - Budući da je R tranzitivna relacija vrijedi da $Rxt \wedge Rty$ povlači Rxy.

(iv). $Rtx \wedge Ryt$ - Budući da je R tranzitivna relacija vrijedi da $Ryt \wedge Rtx$ povlači Ryx.

Q.E.D.

Sada smo spremni definirati vremensku logiku koja objedinjuje sve kanonske formule spomenute u ovom poglavlju i dokazati da upravo ona daje odgovor na pitanje postavljeno na početku poglavlja: Kako se temporalna logika *gustih neograničenih slabo linearnih okvira* može aksiomatizirati?

Definicija 32. Neka je K_tQ najmanja vremenska logika koja sadrži sljedeće formule:

(4)	$FFp \to Fp$
(D_r)	$Gp \to Fp$
(D_l)	$Gp \to Pp$
(Den)	$Fp \to FFp$
(.3r)	$(Fp \wedge Fq) \to F(p \wedge Fq) \vee F(p \wedge q) \vee F(q \wedge Fp)$
(.3l)	$(Pp \wedge Pq) \to P(p \wedge Pq) \vee P(p \wedge q) \vee P(q \wedge Pp)$

Teorem 10. *K_tQ je jako potpuna s obzirom na klasu DUWTO-okvira.*

Dokaz. Ako je Γ neki K_tQ konzistentan skup formula, proširimo ga do K_tQ-MCSa Γ^+. Neka je $\mathcal{M}$ kanonski model za K_tQ, i neka je $\mathcal{O}$ podmodel od $\mathcal{M}$ generiran sa Γ^+. Tada vrijedi $\mathcal{O}, \Gamma^+ \Vdash \Gamma$. Nadalje, okvir koji utemeljuje $\mathcal{O}$ je DUWTO okvir kao što i želimo. Zaista, budući da K_tQ sadrži kanonske aksiome za tranzitivnost, neograničenost i gustoću, i $\mathcal{M}$ ima ta svojstva pa ih tako i $\mathcal{O}$ ima. I na kraju, budući da su (.3l) i (.3r) kanonski za "nema grananja", $\mathcal{M}$ nema grananja, a okvir koji utemeljuje $\mathcal{O}$ je totalan.

Q.E.D.

5.6 Nepotpunost

Do sada smo promatrali logike za koje je dokaz potpunosti preko kanonskog okvira uspijevao. No, ta metoda nemože uvijek donijeti rezultate. Na primjer, ne mora svaka normalna logika biti kanonska. Dapače, nije svaka normalna logika zaista logika neke klase okvira. U ovom poglavlju dat ćemo odgovor na pitanje: *Da li je svaka normalna logika slabo potpuna s obzirom na neku glasu okvira?* Definirat ćemo jednu posebnu temporalnu logika za koju ćemo pokazati da je konzistentna, ali nepotpuna.

Definicija 33. Neka je Λ normalna modalna logika. Λ je (okvirno-)potpuna ako postoji klasa okvira F takva da $\Lambda = \Lambda_F$, a inače kažemo da je (okvirno-)nepotpuna.

Sada ćemo demonstrirati postojanje nepotpunih logika u osnovnom temporalnom jeziku. Najprije ćemo definirati vremensku logiku K_tTho i pokazati da je konzistentna. Zatim ćemo pokazati da niti jedan okvir za K_tTho ne može validirati takozvani McKinsey aksiom (njegova inačica u temporalnoj logici je $GF\phi \to FG\phi$). U tom trenutku uvest ćemo K_tThoM logiku, najmanju logiku koja sadrži K_tTho i McKinsey aksiom. Intuitivno bi nam se moglo učiniti da je K_tThoM inkonzistenta logika, no, iznenađujuće, K_tThoM je konzistentna te nije vremenska logika niti jedne klase okvira. Na kraju ćemo to dokazati pomoću općih okvira.

Definiramo K_tTho kao vremensku logiku generiranu slijedećim aksiomima:

$$(Fp \wedge Fq) \to F(p \wedge Fq) \vee F(p \wedge q) \vee F(q \wedge Fp) \quad (.3\mathrm{r}) \tag{14}$$

$$Gp \to Fp \quad (D_r) \tag{15}$$

$$H(Hp \to p) \to Hp \quad (L_l) \tag{16}$$

Kao što smo pokazali u prošloj točki, prva dva aksioma su kanonske formule za jednostvna svojstva (nema grananja na desno i neograničenost sa desna). Treća formula je Löbov aksiom zapisan u terminima operatora H. Svojstvo svih instanci Löbovog aksioma je da su valjane na točno onim okvirima koji su tranzitivni i ne sadrže beskonačno silazeće puteve[8]. U slijedećoj lemi ćemo i dokazati to svojstvo za Löbov aksiom u terminima operatora H.

Lema 11. *Aksiom $H(Hp \to p) \to Hp$ je valjan na okviru $\mathcal{F} = (W, R)$ ako i samo ako je $\mathcal{F}$ tranzitivan i dobro fundiran.*

Dokaz. Uzmimo prvo da je $\mathcal{F}$ tranzitivan i dobro fundiran i pretpostavimo da aksiom $H(Hp \to p) \to Hp$ nije valjan na $\mathcal{F}$.

Tada postoji valuacija V i stanje $w \in W$ takvo da $(\mathcal{F}, V), w \not\Vdash H(Hp \to p) \to Hp$. Drugim riječima, vrijedi $w \Vdash H(Hp \to p)$, ali $w \not\Vdash Hp$ pa postoji stanje w_1 takvo da vrijedi $w_1 R w$ i $w_1 \not\Vdash p$. Zbog $w \Vdash H(Hp \to p)$ slijedi da je formula $Hp \to p$ valjana na svim prethodnicima od w pa tako i na w_1. No tada iz $w_1 \not\Vdash p$ slijedi $w_1 \not\Vdash Hp$. Ponavljanjem istog slijeda zaključivanja nalazimo stanje w_2 takvo da vrijedi $w_2 R w_1$ i $w_2 \not\Vdash p$. Budući da je R tranzitivna relacija, vrijedi $w_2 R w$ pa opet istim slijedom zaključivanja slijedi $w_2 \not\Vdash Hp$. Ponavljanjem tog postupka možemo konstruirati beskonačni silazeći put $\ldots w_3 R w_2 R w_1 R w$. No takvi putevi na $\mathcal{F}$ ne postoje. Dakle, aksiom $H(Hp \to p) \to Hp$ je valjan na $\mathcal{F}$.

Da bismo dokazali obrat, prvo ćemo promotriti okvire koji nisu tranzitivni, a zatim okvire koji su tranzitivni ali nisu dobro fundirani. U oba slučaja ćemo naći valuaciju V i stanje w takvo da $(\mathcal{F}, V), w \not\Vdash H(Hp \to p) \to Hp$. Time ćemo pokazati da Löbov aksiom ne može biti valjan na okvirima koji nisu tranzitivni i dobro fundirani i time će dokaz biti gotov.

Dakle, pretpostavimo prvo da okvir $\mathcal{F}$ nije tranzitivan. Tada postoje stanja w_1, w_2 i w_3 takva da vrijedi $w_1 R w_2$ i $w_2 R w_3$, ali ne vrijedi $w_1 R w_3$. Definirajmo valuaciju V sa $V(p) = W \setminus \{w_1, w_2\}$. Tada je formula $Hp \to p$ istinita u svim stanjima osim možda u w_1. Dakle, sigurno je istinita u svim prethodnicima od w_3 pa vrijedi $(\mathcal{F}, V), w_3 \Vdash H(Hp \to p)$. No, zbog $w_2 \not\Vdash p$ očito Hp nije istinita u w_3. Drugim riječima, Löbov aksiom nije valjan u stanju w_3 s valuacijom V.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{F}$ tranzitivan, ali nije dobro fundiran. Drugim

[8] drugim riječima, dobro su fundirani

riječima, $\mathcal{F}$ je tranzitivan okvir koji sadrži bekonačni silazeći niz $\dots w_2 R w_1 R w_0$. Iskoristit ćemo postojanje takvog niza da bismo definirali valuaciju V:

$$V(p) = W \setminus \{x \in W | \text{postoji beskonačni silazeći put koji počinje u x}\} \tag{17}$$

Sada ćemo pokazati da je pod takvom valuacijom formula $Hp \to p$ istinita svuda. Za stanja u kojima je p istinita to trivijalno vrijedi, pa promotrimo proizvoljno stanje w u kojem p nije istinita. To znači da postoji beskonačni silazeći put koji počinje u w. Svaki od elemenata tog puta je prethodnik od w i možemo ga promatrati kao početak ostatka tog puta. Prema tome, p nije istinita u svakom od elemenata tog puta. Sad je jasno da ni Hp nije istinita u w, iz čega pak slijedi da je $Hp \to p$ istinita u w. Dakle $Hp \to p$ je istinita svuda, a onda je posebno i $H(Hp \to p)$ istinita svuda. No Hp nije istinita u w_0 pa ni Löbov aksiom nije istinit u w_0. Q.E.D.

Primijetimo da dobro fundirani okviri ne mogu sadržavati refleksivne točke. Budući da su sva tri aksioma: (.3r), (D_r) i (L_l), valjana na okviru prirodnih brojeva sa standardnim relacijama ($<$ i $>$), K_tTho je konzistentna. Ako je (T, R) okvir za K_tTho i $t \in T$, tada je $\{u \in T | Rtu\}$ desno neograničen strogo totalno uređen skup.

Dalje, neka je K_tThoM najmanja vremenska logika koja sadrži K_tTho i McKinsey aksiom $(GFp \to FGp)$. Koji okviri pripadaju ovako obogaćenoj logici? Odgovor je niti jedan, ili drukčije rečeno, K_tThoM definira praznu klasu okvira. Da bi smo to pokazali najprije trebamo uvesti koncept kofinalnosti.

Definicija 34. Neka je $(U, <)$ totalno uređen skup i $S \subseteq U$. S je kofinalan u U ako za svaki $u \in U$ postoji $s \in S$ takav da $u < s$.

Primjeri kofinalnih skupova su skupovi parnih i neparnih brojeva u skupu prirodnih brojeva.

Lema 12. *Neka je $\mathcal{T}$ bilo koji okvir za K_tTho. Tada $\mathcal{T} \not\Vdash GFp \to FGp$.*

Dokaz. Neka je $t \in \mathcal{T}$ proizvoljna točka, $U = \{u \in T | Rtu\}$, te neka je $<$ restrikcija od R na U. Budući da su svi K_tTho aksiomi valjani na $\mathcal{T}$ tada je $(U, <)$ s desna neograničen totalno uređen skup. Kad bismo dokazali da postoji neprazni pravi podskup S takav da su S i $U \setminus S$ kofinalni u U tada bi lema vrijedila. Naime, bilo bi dovoljno definirati valuaciju V na $\mathcal{T}$ sa $V(p) = S$. Zaista, tada bi za svako stanje postojalo jedno veće stanje kojem je p istinita i jedno veće stanje u kojem p nije istinita. Drugim riječima formula Fp bi bila valjana svuda, a formula Gp nigdje. Iz toga je očito da bi formula GFp bila valjana svuda, a FGp nigdje te bi tada za svako stanje t vrijedilo $(\mathcal{T}, V), t \not\Vdash GFp \to FGp$.

Da bi smo pokazali da postoji pravi podskup S takav da su S i $U \setminus S$ kofinalni u U, uzmimo ordinal κ koji je veći od U. Transfinitnom indukcijom ćemo definirati niz parova skupova $(R_\alpha, S_\alpha)_{\alpha \leq \kappa}$ takvi da $R_\kappa \bigcap S_\kappa = \emptyset$ i da su R_κ i S_κ kofinalni u U. Definicija glasi:

(i). Za $\alpha = 0$ uzimamo neke točke r_0 i s_0 iz U takve da $r_0 < s_0$ i definiramo $R_0 = \{r_0\}$ i $S_0 = \{s_0\}$.

(ii). Ako je α ordinal slijedbenik oblika $\beta + 1$, tada razlikujemo dva slučaja:

(a) ako je R_β ili S_β kofinalan, onda definiramo $R_\alpha = R_\beta$ i $S_\alpha = S_\beta$,

(b) ako ni R_β ni S_β nisu kofinalni, uzmemo neku gornju ogradu r_β od S_β, uzmemo s_β veće od r_β i definiramo $R_\alpha = R_\beta \bigcup \{r_\beta\}$ i $S_\alpha = S_\beta \bigcup \{s_\beta\}$

(iii). Ako je α granični ordinal, definiramo $R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ i $S_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta$

Sada ćemo tranfinitnom indukcijom pokazati da za svaki $\alpha \leq \kappa$ vrijedi $R_\alpha \bigcap S_\alpha = \emptyset$ i da je svaka gornja ograda za S_α ujedno i gornja ograda za R_α. Za R_0 i S_0 tvrdnja očito vrijedi. Uzmimo sada proizvoljni negranični ordinal oblika $\alpha + 1$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za α. Prema opisanoj konstrukciji skupova, moguća su dva slučaja. Prvi slučaj je kad imamo $R_{\alpha+1} = R_\alpha$ i $S_{\alpha+1} = S_\alpha$. Tvrdnja tada očito vrijedi. U drugom slučaju odabiremo r_α, gornju ogradu od S_α. Prema pretpostavci indukcije r_α je ujedno i gornja ograda od R_α. Kako je sada s_α odabran tako da vrijedi $s_\alpha > r_\alpha$, očito su r_α i s_α različiti te kao gornje ograde obaju skupova ne pripadaju niti jednom od R_α i S_α. Sada je jasno da vrijedi $(R_\alpha \bigcup \{r_\alpha\}) \bigcap (R_\alpha \bigcup \{s_\alpha\}) = \emptyset$ i da je svaka gornja ograda za $S_{\alpha+1}$ veća od s_α pa je veća i od r_α, a time je i gornja ograda od $R_{\alpha+1}$. Promotrimo sada granični ordinal β i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $\alpha < \beta$. Pretpostavimo da postoji $u \in U$ takav da se nalazi u presjeku R_β i S_β. Primijetimo da svi R-skupovi i svi S-skupovi formiraju rastući niz skupova. To znači da postoji $\alpha_0 < \beta$ takav da $u \in R_{\alpha_0}$ i $u \in S_{\alpha_0}$, no to je suprotno pretpostavci indukcije. Promotrimo sada s_β, proizvoljnu gornju među za S_β. Tada je s_β ujedno i gornja međa za sve S_α, gdje je $\alpha < \beta$. No, po pretpostavci indukcije s_β je tada ujedno i gornja međa za sve R_α, gdje je $\alpha < \beta$. To znači da je s_β gornja međa od R_β. Tvrdnja sada slijedi primjenom transfinitne indukcije.

Još samo preostaje pokazati kofinalnost od R_κ i S_κ. U tu svrhu pretpostavimo da nisu kofinalni i definiramo preslikavanje $r : \kappa \to U$ definirano sa $r(\alpha) = r_\alpha$ gdje je r_α preuzeto iz konstrukcije $(R_\alpha, S_\alpha)_{\alpha \leq \kappa}$ niza parova skupova. Budući da R_κ i S_κ po pretpostavci nisu kofinalni slijedi da niti R_β, S_β nisu kofinalni za svaki $\beta \leq \kappa$. To znači da se korak (ii)(a) nikad ne primjenjuje u konstrukciji, te je r_α dobro definirano za svaki negranični ordinal $\alpha \leq \kappa$. No za granični ordinal α možemo modificirati funkciju r tako da definiramo r' koja se poklapa sa r na skupu prirodnih brojeva, a za svaki β oblika $\alpha + n$ gdje je α granični ordinal, a $n \in N \bigcup \{0\}$, definiramo $r'(\beta) = r(\beta+1) = r_{\beta+1}$. Time smo proširili r i na granične ordinale i zadržali sva svojstva iz konstrukcije. Dakle imamo totalno preslikavanje $r' : \kappa \to U$.

Dalje, uzmimo proizvoljne, različite $\alpha, \beta \in \kappa$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $\alpha < \beta$. Radi jednostavnosti pretpostavimo da se preslikavaju u r_α i r_β iako se u nekim slučajevima preslikavaju u $r_{\alpha+1}$ i $r_{\beta+1}$.

Razlika u dokazu bez te pretpostavke je samo tehnička i nepotrebno komplicira iskaz. Tada je po konstrukciji $r_\alpha < s_\alpha$, no $s_\alpha \in S_\beta$, a r_β je gornja ograda od S_β. Iz toga slijedi $r_\alpha < r_\beta$, a specijalno $r_\alpha \neq r_\beta$. Zbog proizvoljnosti od α i β slijedi da je r' i injektivno preslikavanje. No iz toga slijedi da je κ skup koji je manji ili jednak U što je u kontradikciji sa odabirom κ. Došli smo do kontradikcije i zaključujemo da su R_κ i S_κ kofinalni. Q.E.D.

Pokazali smo da K_tThoM definira praznu klasu okvira. Čini se da je i potpuna u odnosu na tu klasu, tj. da je K_tThoM nekonzistentna logika. No, kao što ćemo vidjeti u slijedećem teoremu, to nije slučaj.

Teorem 11. *K_tThoM je konzistentna i nepotpuna.*

Dokaz. Neka je okvir $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$ skup prirodnih brojeva sa standardnim uređajem. Neka je A skup konačnih i kofinitnih[9] podskupova od $\mathbb{N}$. Pokažimo da je A zatvoren na skupovne operacije i modalne projekcije.

Slučaj za skupovne operacije lako slijedi iz činjenice da je komplement kofinitnog konačan i obrnuto, pa ćemo se koncentrirati na modalnu projekciju. Uzmimo prvo proizvoljni skup $X \in A$ i promatramo prvo djelovanje funkcije m_F na njega:

$$m_F(X) = \{n \in \mathbb{N} | \exists x \in X \text{ takav da } n < x\} \ . \tag{18}$$

Ako je X konačan, ima maksimalni element te su svi elementi iz $m_F(X)$ manji od njega. Drugim riječima $m_F(X)$ je konačan. Ako je X beskonačan, tada je $m_F(X) = \mathbb{N}$, a $\mathbb{N}$ je kofinitan skup. Promotrimo sada djelovanje od m_P:

$$m_P(X) = \{n \in \mathbb{N} | \exists x \in X \text{ takav da } x < n\} \ . \tag{19}$$

U ovom slučaju je još jednostavnije. Naime svaki podskup od $\mathbb{N}$ ima minimalni element i svi elementi iz $m_P(X)$ su veći od njega, a elementi iz komplementa su manji ili jednaki njemu. Drugim riječima $m_P(X)$ je konfinitan za svaki $X \subset \mathbb{N}$.

Dakle, $(\mathbb{N}, <, A)$ je *generalni okvir*. Budući da su svi K_tTho aksiomi valjani na $\mathcal{N}$, valjani su i na generalnom okviru zasnovanom na njemu.

Promotrimo još M aksiom. Neka je V valuacija dopustiva za skup A i $n \in \mathbb{N}$ proizvoljna točka. Ako vrijedi $(\mathcal{N}, V), n \Vdash GFp$, tada $V(p)$ mora biti kofinitan skup. U protivnom bi $V(p)$ bio konačan skup i postojala bi m, gornja ograda za $V(p)$, točka u kojoj očito ne vrijedi GFp. Budući da je $V(p)$ kofinitan, postoji k takav da za svaki $l > k$ vrijedi $l \in V(p)$. No to znači da $(\mathcal{N}, V), n \Vdash FGp$ pa vrijedi M aksiom, kao što smo i htjeli pokazati. Dakle, svi aksiomi su valjani i K_tThoM sadrži podskup svih formula valjanih na $(\mathbb{N}, <, A)$. Kao što smo vidjeli u primjeru 5, takav skup formula je modalna logika, i to konzistentna logika. Kako je svaka logika sadržana u konzistentnoj logici i sama konzistentna, zaključujemo da je K_tThoM konzistentna.

Dalje po Lemi 12, K_tThoM nije logika niti jedne neprazne klase okvira, ali je

[9] skupova čiji je komplement konačan

konzistentna, pa nije niti logika prazne klase okvira. Dakle, nije logika niti jedne klase okvira, tj. nepotpuna je. Q.E.D.

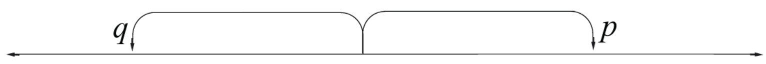
6 Operatori since i until

U ovom poglavlju promotrit ćemo jedno često korišteno proširenje osnovnog temporalnog jezika. Definirat ćemo operatore *since* i *until* i tako proširiti osnovni temporalni jezik. Pokazat ćemo da smo takvim proširenjem dobili pravo proširenje ekspresivnosti nad osnovnim temporalnim jezikom.

Operatori definirani u ovom poglavlju su uglavnom motivirani potrebom za formalnim opisivanjem ponašanja računalnih sustava. Dakle, temporalni jezik koji ćemo definirati je proizašao direktno iz praktične primjene pa je kao takav veoma često korišten.

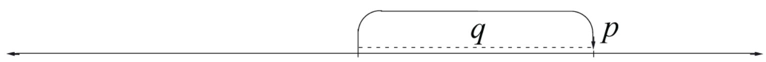
6.1 Definicija operatora since i until

Do sada smo promatrali samo temporalne operatore F i P. Pomoću njih možemo izraziti tvrdnje poput "Nešto će se dogoditi" i "Nešto se dogodilo".



Pq, Fp

No ponekad nam to nije dovoljno. Na primjer, želimo izraziti tvrdnje poput "Nešto dobro će se dogoditi i do tada se ništa loše neće dogoditi". Ili, malo općenitije rečeno, tvrdnje oblika "Dogodit će se p, a do tada će vrijediti q":



U (p,q)

Potreba za izražavanjem upravo takvih tvrdnji je bila motivacija za definiranje *until* operatora U. Istinitost operatora U interpretiramo na slijedeći način:

$t \Vdash \; U(\phi, \psi)$ ako i samo ako
postoji $v > t$ takav da $v \Vdash \phi$ i za svaki s takav da $t < s < v$ vrijedi $s \Vdash \psi$.

Operator suprotan operatoru U je *since* operator S:

$t \Vdash \; S(\phi, \psi)$ako i samo ako
postoji $v < t$ takav da $v \Vdash \phi$ i za svaki s takav da $v < s < t$ vrijedi $s \Vdash \psi$.

Skup S, U-*formula* se izgrađuje iz skupa Φ propozicionalnih varijabli, uobičajenih bulovskih veznika, i *binarnih modalnih operatora* S i U. *Zrcalna slika* formule ϕ se dobije simultanom zamjenom svih pojavljivanja U sa S i S sa U.

S, U-formule interpretiramo na okvirima oblika $\mathcal{F} = (T, <)$. gdje T zovemo skupom vremenskih točaka, a $<$ je binarna relacija na T. U gleda unaprijed po $<$, a S unazad. Naravno, takav $\mathcal{F}$ je opet bidirekcionalan okvir poput svih okvira koje smo koristili za interpretaciju temporalnih logika. No, promijenili smo notaciju zato da bismo naglasili da nas kod S, U-formula primarno zanimaju oni okviri kod kojih je relacija zapravo potpuna u Dedekindovom smislu. O tome će biti više riječi u daljnjem tekstu. Također, da bismo naglasili interes za temporalnu interpretaciju S, U-formula, takve okvire ćemo često zvati *vremenskim tokovima.*

Prirodno se postavlja pitanje: *U kakvom je odnosu jezik S, U-formula naspram osnovnog temporalnog jezika?* Kao prvo, primijetimo da se operatori F i P mogu definirati pomoću operatora S i U. Zaista, vidimo da vrijedi $F\phi = U(\phi, \top)$ i $P\phi = S(\phi, \top)$. Dakle, jezik sa S i U operatorima je barem toliko ekspresivan poput osvnovnog temporalnog jezika. Ali veoma je važno pitanje da li je strogo ekspresivniji? Ako odgovor nije potvrdan, daljnje proučavanje nema smisla. Srećom pokazat ćemo da je zaista strogo ekspresivniji. Da bi smo to pokazali, trebamo naći okvir s dvije valuacije takve da se slažu u valjanosti svih F i P formula, ali ih se može razlikovati pomoću S i U formula. Takav primjer je dosta lako naći za proizvoljni okvir pa ćemo se odmah koncentrirati na dosta složeniji ali i znatno važniji problem dokaza da ta dva jezika nisu ekvivalentna čak i na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa standardnom relacijom $<$. Prvo ćemo dokazati jedan specifični rezultat o modelima na $(\mathbb{R}, <)$ u osnovnom temporalnom jeziku koji ćemo upotrijebiti da bismo dokazali i samu tvrdnju o neekvivalentnosti ta dva jezika.

Lema 13. *Neka je V proizvoljna valuacija na $(\mathbb{R}, <)$ i $\mathcal{P}$ proizvoljni skup propozicionalnih varijabli. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija sa slijedećim svojstvima:*

1. *$f(V(p)) = V(p)$ za svaki $p \in \mathcal{P}$ (očuvanje istinitosti propozicionalnih varijabli)*

2. *$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (stroga monotonost).*

Označimo sa $\mathcal{M}$ model $((\mathbb{R}, <), V)$. Tada za svaku formulu ϕ u osnovnom temporalnom jeziku i za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$(\mathcal{M}, x \Vdash \phi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, f(x) \Vdash \phi). \tag{20}$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po složenosti formule ϕ.

Za složenost $n = 0$ imamo $\phi \in \mathcal{P} \bigcup \{\perp\}$ i tvrdnja očito vrijedi zbog prvog uvjeta na funkciju f.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve formule složenosti manje od n. Promatramo četiri moguća oblika formule ϕ:

(i). $\phi = A \wedge B$

A i B su složenosti manje od n pa na njih možemo primijeniti pretpostavku indukcije. Redom imamo niz implikacija:

$$(\mathcal{M}, x \Vdash \phi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, x \Vdash A \wedge B) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, x \Vdash A) \wedge (\mathcal{M}, x \Vdash B) \Leftrightarrow^{P.I.}$$
$$(\mathcal{M}, f(x) \Vdash A) \wedge (\mathcal{M}, f(x) \Vdash B) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, f(x) \Vdash A \wedge B) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, f(x) \Vdash \phi)$$

(ii). $\phi = \neg A$

A je složenosti $n-1$ pa možemo primijeniti pretpostavku indukcije:

$$(\mathcal{M}, x \Vdash \neg A) \Leftrightarrow \neg(\mathcal{M}, x \Vdash A) \Leftrightarrow^{P.I.} \neg(\mathcal{M}, f(x) \Vdash A) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, f(x) \Vdash \neg A)$$

(iii). $\phi = FA$

$\mathcal{M}, x \Vdash FA$ je ekvivalentno sa time da postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $t > x$ i $\mathcal{M}, t \Vdash A$. No A je složenosti $n-1$ pa vrijedi $\mathcal{M}, f(t) \Vdash A$. No, primijetimo da zbog drugog uvjeta na funkciju f vrijedi $f(t) > f(x)$. Te dvije tvrdnje su ekvivalentne sa $\mathcal{M}, f(x) \Vdash FA$.

(iv). $\phi = PA$

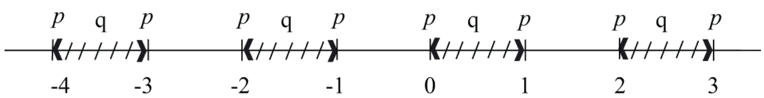
Dokaz se provodi analogno kao u slučaju operatora F.

Q.E.D.

Teorem 12. *U se ne može definirati na* $(\mathbb{R}, <)$ *pomoću* F *i* P*.*

Dokaz. Definirat ćemo dva modela koji će biti ekvivalentni na svim formulama u jeziku koji koristi samo operatore F i P, ali će ih se moći razlikovati pomoću operatora U.

Uzmimo skup od samo dvije propozicionalne varijable, p i q. I neka su valuacije V_1 i V_2 definirane sa $V_1(p) = \mathbb{Z}$, $V_1(q) = \{r | \exists k \in \mathbb{Z} \text{ takav da } 2k < r < 2k+1\}$ i $V_2(p) = \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, $V_2(q) = V_1(q)$. Sada definiramo dva modela, $\mathcal{M}_1 = ((\mathbb{R}, <), V_1)$ i $\mathcal{M}_2 = ((\mathbb{R}, <), V_2)$. Skica valuacije V_1 je vidljiva na slici, a V_2 se razlikuje jedino u stanju 1:



Prema definiciji operatora U vrijedi $\mathcal{M}_1, 0 \Vdash U(p,q)$, ali ne vrijedi $\mathcal{M}_2, 0 \Vdash U(p,q)$. Iz toga vidimo da se ovi modeli razlikuju ako imamo operator U. Ostaje pokazati da su ekvivalentni za operatore F i P. U tu svrhu prvo ćemo dokazati nekoliko pomoćnih tvrdnji.

Ideja je da pokažemo da je istinitost formula ekvivalentna u oba modela u svim točkama osim u stanju 1. Time ćemo pokazati da ne postoji formula u F i P koja bi ovisila o istinitosti varijable p u stanju 1. Budući da smo našli formulu sa U koja ima takvo svojstvo, slijedit će da U ne možemo definirati pomoću operatora F i P.

Najprije ćemo pokazati da na modelu $\mathcal{M}_1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, za svaki $k \in \mathbb{Z}$ i za svaku formulu ϕ vrijedi:

$$(\mathcal{M}_1, x \Vdash \phi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}_1, x + 2k \Vdash \phi). \tag{21}$$

Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ neka je $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f_k(x) = x + 2k$. Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ funkcija f_k zadovoljava uvjete leme 13. Dakle, primjenom leme, slijedi (21).

Pokažimo sada da za svaki $x \in [1, \frac{3}{2}]$ vrijedi:

$$(\mathcal{M}_2, x \Vdash \phi) \Leftrightarrow \left(\mathcal{M}_2, \frac{5}{4} + \frac{x-1}{2} \Vdash \phi\right). \tag{22}$$

Da bi smo to pokazali definirajmo funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{5}{4} + \frac{x-1}{2} & , x \in [1, \frac{3}{2}] \\ x & , x \notin [1, \frac{3}{2}] \end{cases} \tag{23}$$

Budući da se valuacija propozicionalnih varijabli ne mijenja unutar skupa $[1, \frac{3}{2}]$ i funkcija g zadovoljava uvjete leme 13, tvrdnja slijedi. Primijetimo da je $g(1) = \frac{5}{4}$.

Sada imamo sve šta nam treba da bi smo indukcijom po složenosti od ϕ dokazali da za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ vrijedi:

$$(\mathcal{M}_1, x \Vdash \phi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}_2, x \Vdash \phi). \tag{24}$$

Baza indukcije slijedi direktno iz definicija valuacija V_1 i V_2. Korak za bulovske slučajeve je trivijalan i analogan onome u dokazu leme 13 pa ćemo ga ovdje izostaviti. Koncentrirat ćemo se na modalni slučaj.

Pretpostavimo dakle da je ϕ oblika FA. Pokažimo prvo da $(\mathcal{M}_1, x \Vdash \phi)$ povlači $(\mathcal{M}_2, x \Vdash \phi)$. Iz $\mathcal{M}_1, x \Vdash FA$ slijedi da postoji $t > x$ takav da vrijedi $\mathcal{M}_1, t \Vdash A$. Sada imamo dva slučaja:

1. $t = 1$

$$(\mathcal{M}_1, 1 \Vdash A) \Leftrightarrow (\mathcal{M}_1, 3 \Vdash A) \overset{\text{Pretp.Ind.}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{M}_2, 3 \Vdash A)$$

Budući da je $3 > 1 > x$ slijedi da vrijedi $(\mathcal{M}_2, x \Vdash FA)$

2. $t \neq 1$

$$(\mathcal{M}_1, t \Vdash A) \overset{\text{Pretp.Ind.}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{M}_2, t \Vdash A) \Leftrightarrow (\mathcal{M}_2, x \Vdash FA)$$

Pokažimo sada da vrijedi $(\mathcal{M}_2, x \Vdash \phi) \Rightarrow (\mathcal{M}_1, x \Vdash \phi)$. Iz $\mathcal{M}_2, x \Vdash FA$ slijedi da postoji $t > x$ takav da vrijedi $\mathcal{M}_2, t \Vdash A$. Sada opet imamo dva slučaja:

1. $t = 1$

$$(\mathcal{M}_2, 1 \Vdash A) \Leftrightarrow (\mathcal{M}_2, \frac{5}{4} \Vdash A) \overset{\text{Pretp.Ind.}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{M}_1, \frac{5}{4} \Vdash A)$$

Budući da je $\frac{5}{4} > 1 > x$ slijedi da vrijedi $(\mathcal{M}_2, x \Vdash FA)$

2. $t \neq 1$

$$(\mathcal{M}_2, t \Vdash A) \overset{\text{Pretp.Ind.}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{M}_1, t \Vdash A) \Leftrightarrow (\mathcal{M}_1, x \Vdash FA)$$

Jos je preostalo promotriti korak indukcije za slučaj $\phi = PA$. Za to je dovoljno primijetiti da funkcija $g' = g - 2$ također zadovoljava uvjete leme 13. Budući da je pod njom $g'(1) = -\frac{3}{4}$ imamo $(\mathcal{M}_2, 1 \Vdash \phi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}_2, -\frac{3}{4} \Vdash \phi)$. Koristeći takav "skok u prošlost", dokaz za slučaj operatora P se provodi analogno dokazu za slučaj operatora F. Q.E.D.

Da rezimiramo, pokazali smo da novo uvedeni operatori S i U mogu definirati operatore F i P, ali da obrat ne vrijedi. Dakle, novo definirani jezik *since* i *until* operatora je strogo ekspresivniji od osnovnog temporalnog jezika. U daljnjem tekstu proučićemo koliko je zapravo ekspresivan jezik sa operatorima S i U.

6.2 Ekspresivna potpunost

Jedno veoma bitno svojstvo modalnih logika o kojem do sada nismo eksplicitno pisali, a opet se provlači u pozadini cjelokupne dosadašnje diskusije, te se povremeno pojavljuje u definicijama i iskazima, je veza modalnih logika i klasičnih logika prvog i drugog reda[10]. Naime, svaka formula modalne logike odgovara nekoj formuli logike drugog reda. Što je još zanimljivije, formule modalne logike često odgovaraju čak i formulama logike prvog reda. Iako to nismo naglasili, time smo se intenzivno bavili u poglavlju 5.5, kada smo razmatrali kanonska svojstva. To poglavlje ujedno i sadrži neke veoma zanimljive primjere ekvivalentnosti modalnih formula formulama određene logike prvog reda. U skladu s tom temom, u daljnjem tekstu se podrazumijeva određeno predznanje o osnovnim pojmovima teorije logika prvog reda[11].

Naravno, kada govorimo o formulama logike prvog ili drugog reda koje su ekvivalentne nekoj modalnoj formuli, te formule moraju "živjeti" u nekom konkretnom jeziku logike prvog ili drugog reda. Takav jezik nazivamo *jezikom korespondencije*. Neka je Φ skup propozicionalnih varijabli i neka je $\mathcal{L}^1_<(\Phi)$, ili jednostavno $\mathcal{L}^1_<$, jezik prvog reda s unarnim predikatnim simbolima koji odgovaraju propozicionalnim varijablama iz Φ i s binarnim relacijskim simbolima $=$ i $<$. Sa $\mathcal{L}^1_<(x)$ ćemo označavati skup $\mathcal{L}^1_<$ formula s jednom slobodnom varijablom x. Ovo je ujedno i standardni *jezik korespondencije* za osnovni temporalni jezik. Primjetimo da je model za modalni jezik ujedno i model za jezik korespondencije. Naime on sadrži upravo ono šta model za logiku prvog reda treba. Sadrži skup stanja i interpretacije binarnih relacija $<$ i $=$ te interpretacije predikatnih simbola. U tom smislu ćemo ponekad model za modalni jezik promatrati kao model za $\mathcal{L}^1_<$.

Neka je K klasa modela, ML modalni, odnosno temporalni jezik, a $\mathcal{L}$ klasični jezik. Tada kažemo da je ML *ekspresivno potpun na* K, ako svaka $\mathcal{L}^1_<(x)$ formula ima svoj ekvivalent u modalnom jeziku ML. Kao što je već intuitivno jasno, ekspresivna potpunost određenog modalnog jezika nad klasičnim je veoma bitan rezultat jer omogućava slobodno prebacivanje problema iz domene klasičnih u modalne

[10]detaljnije u [1], str. 83

[11]Točnije, koristit ćemo konvenciju označavanja kao u [2]

jezike i obrnuto. Time se i mnoga dobra svojstva modalnog jezika prenose na klasični. Proučavanje ekspresivne potpunosti je veoma važno u kontekstu temporalnog jezika s operatorima since i until zbog toga što je on ekspresivno potpun za klasu svih tokova vremena koji su potpuni u Dedekindovom smislu, koje ćemo ubrzo definirati. Nadalje, definirati ćemo još bogatiji temporalni jezik koji će biti potpun za klasu svih linearnih tokova vremena.

Za vremenski tok kažemo da je *potpun u Dedekindovom smislu* ako svaki podskup koji je odozgo omeđen ima najmanju gornju među, odnosno supremum. Standardni primjeri su $(\mathbb{R}, <)$ i $(\mathbb{N}, <)$. Vremenski tok je *dobro uređen* ako svaki neprazni skup ima najmanji element.

Kao što smo i prije spomenuli definirat ćemo dva dodatna operatora koji će zajedno s operatorima S i U činiti temporalni jezik koji je potpun nad klasom svih linearnih tokova vremena. Dotični operatori nose ime *"Stavi veznici"*, no za njihovo definiranje nam najprije treba pojam procjepa.

Definicija 35. Procjep u okviru $\mathcal{F} = (T, <)$ je pravi podskup $g \subset T$ koji je zatvoren na dolje (odnosno, za svaki $t \in g$ i $s < t$ vrijedi $s \in g$) i koji nema supremum.

Intuitivno govoreći, to je skup koji nema jasni završetak, nema točku u kojoj završava niti ima točku koja mu ne pripada a opet ga "dodiruje". Primjer takvog skupa je $\langle -\infty, \pi] \bigcap \mathbb{Q}$ u skupu $\mathbb{Q}$. Na tom primjeru možemo vidjeti kakav problem takvi skupovi stvaraju operatorima S i U. Naime, oba operatora u definiciji imaju fiksirano stanje u kojem vrijedi određena finalna formula. No, kod procjepa, jedna formula može prestati vrijediti, a druga formula može početi vrijediti proizvoljno brzo nakon toga bez da postoji određeno stanje u kojem se to dogodilo. Zbog toga uvodimo *Stavi veznike.* Oni su u stvari analogoni operatorima S i U posebno "dizajnirani" da "pokriju" specijalni slučaj procjepa.

Definicija 36. Stavi veznik $U'(\phi, \psi)$ je istinit u stanju t ako vrijedi slijedeće:

(i). postoji stanje s i procjep g tako da $t \in g$ i $s \notin g$.

(ii). ψ vrijedi između t i g.

(iii). ϕ vrijedi izeđu s i g.

(iv). $\neg\psi$ vrijedi proizvoljno brzo nakon g.

Gornja neformalna definicija je drugog reda jer kvantificiramo po procjepima, odnosno skupovima. Definicija prvog reda za operator U' glasi:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, t \Vdash U'(\phi, \psi) \Leftrightarrow \quad & \exists s > t(\\ & \quad \forall x \in < t, s > ((\mathcal{M}, x \Vdash \phi \vee \mathcal{M}, x \Vdash \psi) \\ & \quad\quad \wedge(\mathcal{M}, x \Vdash \psi \Rightarrow \forall y \in < t, x > (\mathcal{M}, y \Vdash \psi)) \\ & \quad\quad \wedge(\mathcal{M}, x \Vdash \phi \Rightarrow \forall y \in < x, s > (\mathcal{M}, y \Vdash \phi))) \\ & \quad \wedge \forall x, y \in < t, s > (\mathcal{M}, x \Vdash \psi \wedge \mathcal{M}, y \Vdash \phi \Rightarrow \\ & \quad\quad \exists z \in < x, y](\mathcal{M}, z \Vdash \neg\psi))).\end{aligned} \tag{25}$$

Definicija $S'(\phi, \psi)$ je analogna definiciji $U'(\phi, \psi)$.

Sada bez dokaza navodimo teorem o ekspresivnoj potpunosti U, S logike kao i logike obogaćene Stavi veznicima. Sam dokaz je prekompliciran da bi smo ga ovdje iznosili, a originalni dokaz se nalazi u [3].

Teorem 13. ***(Espresivna potpunost)***

(i). Logika sa operatorima U, S je ekspresivno potpuna u odnosu na klasu svih vremenskih tokova koji su potpuni u Dedekind smislu.

(ii). Logika sa operatorima U, S, U', S' je ekspresivno potpuna u odnosu na klasu svih linearnih vremenskih tokova.

6.3 Aksiomatizacija logike sa since i until

U ovom poglavlju uvodimo skup aksioma i pomoću njih definiramo tri različita aksiomatska sustava te dokazujemo neke bitne rezultate potpunosti. U slijedećoj definiciji uvodimo naš skup aksioma i nakon toga neformalno iznosimo motivacije za njihov odabir.

Definicija 37. Definiramo slijedeći niz formula kao aksiome i navodimo njihove oznake koje ćemo upotrebljavati u daljnjem tekstu:

(A1a)	$G(p \to q) \to (U(p, r) \to U(q, r))$
(A2a)	$G(p \to q) \to (U(r, p) \to U(r, q))$
(A3a)	$p \wedge U(q, r) \to U(q \wedge S(p, r), r)$
(A4a)	$U(p, q) \wedge \neg U(p, r) \to U(q \wedge \neg r, q)$
(A5a)	$U(p, q) \to U(p, q \wedge U(p, q))$
(A6a)	$U(q \wedge U(p, q), q) \to U(p, q)$
(A7a)	$U(p, q) \wedge U(r, s) \to U(p \wedge r, q \wedge s) \vee U(p \wedge s, q \wedge s) \vee U(q \wedge r, q \wedge s)$
(Aib)	zrcalne slike (A1a)-(A7a)
(D)	$(F\top \to U(\top, \bot)) \wedge (P\top \to S(\top, \bot))$
(L)	$H\bot \vee PH\bot$
(W)	$Fp \to U(p, \neg p)$
(N)	$D \wedge L \wedge F\top$

Aksiome (A1a) i (A2a) možemo promatrati kao ekvivalente već poznatom aksiomu distribucije, odnosno K aksiomu $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$. (A3a) iskazuje činjenicu da su operatori S i U međusobno suprotni, u smislu da "skok" sa U "u budućnost" ima i suprotni skok sa S. Aksiomi (A4a) i (A5a) povezuju sadašnje i buduće stanje, odnosno rubna stanja intervala koji zadovoljava operator until, sa među stanjima i obrnuto. (A6a) iskazuje tranzitivnost vremenskog toka, te je konceptualno sličan aksiomu (4) s kojim smo se susreli u poglavlju 5.5. (A7a) je pak konceptualno sličan aksiomima (.3r) i (.3l) iz istog poglavlja, a povlači linearnost vremenskog toka. Svojstva preostalih aksioma (D), (L), (W) i (N) ćemo detaljnije promotriti budući da su njihova svojstva malo složenija i upravo će se u njima razlikovati tri različita aksiomatska sustava koje ćemo uvesti.

Definicija 38. Neka je $\mathcal{F}$ linearni vremenski tok i neka je $t \in \mathcal{F}$ proizvoljno stanje.

Za točku $t' > t$ kažemo da je *slijedbenik* od t ako ne postoji $x \in \mathcal{F}$ takav da vrijedi $t < x < t'$. Analogno se definira pojam *prethodnika.*

Za $\mathcal{F}$ kažemo da je *diskretno uređen* ako za svaki $t \in \mathcal{F}$ vrijedi da ako postoji neki $s > t$ tada t ima slijedbenika i ako postoji neki $p < t$ tada t ima prethodnika.

Lema 14. *Neka je $\mathcal{F}$ linearni vremenski tok. Tada vrijedi:*

(i). $\mathcal{F} \Vdash D$ ako i samo ako je $\mathcal{F}$ diskretno uređen.

(ii). $\mathcal{F} \Vdash W \wedge L$ ako i samo ako je $\mathcal{F}$ dobro uređen.

(iii). $\mathcal{F} \Vdash W \wedge N$ ako i samo ako je $\mathcal{F} \cong (\mathbb{N}, <)$.

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju (i). Pretpostavimo najprije da je $\mathcal{F}$ diskretno uređen. Uzmimo proizvoljni $t \in \mathcal{F}$ i pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash F\top$. Želimo pokazati da tada nužno vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash U(\top, \bot)$. Iz $\mathcal{F}, t \Vdash F\top$ slijedi da postoji $s > t$ takav da $\mathcal{F}, s \Vdash \top$. Naravno $\top$ je istinito u svakom stanju tako da se taj zaključak jednostavno svodi na to da postoji $s > t$. Budući da je $\mathcal{F}$ diskretno uređen, postoji slijedbenik t'. Trivijalno vrijedi $\mathcal{F}, t' \Vdash \top$, a budući da ne postoji stanje x takvo da vrijedi $t < x < t'$, trivijalno vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash U(\top, \bot)$. Dakle, vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash F\top \to U(\top, \bot)$. Na, analogan način, promatranjem prethodnika od t zaključujemo da vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash P\top \to S(\top, \bot)$. Dakle, vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash D$. Zbog proizvoljnog odabira stanja t, vrijedi $\mathcal{F} \Vdash D$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $\mathcal{F} \Vdash D$ i pokažimo da to povlači diskretnu uređenost od $\mathcal{F}$. U tu svrhu uzmimo proizvoljni $t \in \mathcal{F}$ i pretpostavimo da postoji $s > t$. Tada trivijalno vrijedi $\mathcal{F}, s \Vdash \top$ iz čega slijedi $\mathcal{F}, t \Vdash F\top$. Zbog $\mathcal{F}, t \Vdash D$ primjenom prve konjukcije u D slijedi $\mathcal{F}, t \Vdash U(\top, \bot)$. Raspisom definicije istinitosti operatora U vidimo da to znači da postoji $x > t$ takav da $\mathcal{F}, x \Vdash \top$ i za svaki r takav da $t < r < x$ vrijedi $\mathcal{F}, r \Vdash \bot$. No, $\bot$ nikada ne može biti istinito pa takav r ne postoji. Drugim riječima, x je upravo slijedbenik od t. Na analogni način, upotrebom druge konjukcije u D, dokazujemo postojanje prethodnika od t. Dakle, $\mathcal{F}$ je diskretno uređen.

Sada ćemo dokazati dio (ii). Pretpostavimo prvo da je $\mathcal{F}$ dobro uređen i uzmimo proizvoljni $t \in \mathcal{F}$. Definirajmo skup $A = \{s | s \in \mathcal{F},\ s < t\}$. Tada imamo dva moguća slučaja:

(i). $A = \emptyset$
Tada vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash H\bot$, a onda i $\mathcal{F}, t \Vdash L$.

(ii). $A \neq \emptyset$
Tada, zbog dobre uređenosti od $\mathcal{F}$, skup A ima najmanji element. Označimo ga s a. Primijetimo da je $<$ tranzitivna relacija pa bi svaki element manji

od a ujedno bio i manji od t pa bi pripadao skupu A. No, a je odabran kao najmanji element skupa A pa zaključujemo da nema elementa manjeg od a. Iz toga slijedi da vrijedi $\mathcal{F}, a \Vdash H\bot$. Tada, zbog $a < t$, vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash PH\bot$.

Dakle, svakako vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash H\bot \vee PH\bot$, odnosno $\mathcal{F}, t \Vdash L$. Pokažimo sada da iz dobre uređenosti slijedi $\mathcal{F}, t \Vdash Fp \to U(p, \neg p)$. Pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash Fp$. Definirajmo skup $P = \{s | s > t \text{ i } \mathcal{F}, s \Vdash p\}$. Neka je s_0 najmanji element skupa P. Tada za svaki r takav da $t < r < s_0$ vrijedi $\mathcal{F}, r \Vdash \neg p$, odnosno, vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash U(p, \neg p)$. Dakle vrijedi $\mathcal{F}, t \Vdash Fp \to U(p, \neg p)$, odnosno $\mathcal{F}, t \Vdash W$. Zajedno sa već dokazanim, imamo $\mathcal{F}, t \Vdash W \wedge L$. Zbog proizvoljnog odabira stanja t, vrijedi $\mathcal{F} \Vdash W \wedge L$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $\mathcal{F} \Vdash W \wedge L$ i da $\mathcal{F}$ nije dobro uređen. Tada postoji neprazni podskup $A \subseteq \mathcal{F}$ takav da nema najmanjeg elementa, odnosno, za svaki $a \in A$ postoji $a' \in A$ takav da $a' < a$. Da bi smo došli do kontradikcije, dovoljno je pronaći jedan model i jedno stanje u kojem $W \wedge L$ neće biti istinito. U tu svrhu, definirajmo valuaciju V sa $V(p) = A$ i pomoću nje definirajmo model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$. Uzmimo sada proizvoljni $a \in A$. Najprije primijetimo da u niti jednom stanju iz A neće vrijediti $H\bot$ jer sva imaju prethodnike. Budući da vrijedi $\mathcal{M}, a \Vdash H\bot \vee PH\bot$, očito mora vrijediti $\mathcal{M}, a \Vdash PH\bot$. Drugim riječima, postoji stanje $x \in \mathcal{F}$ takvo da $x < a$ i da vrijedi $\mathcal{M}, x \Vdash H\bot$. No, $H\bot$ ne vrijedi niti u jednom stanju iz A pa x nije sadržan u A. Dapače, ne postoji element iz $\mathcal{F}$ koji je manji od x. To, zbog linearnosti od $\mathcal{F}$, povlači da je x manji od svakog elementa iz $\mathcal{F}$ različitog od njega samog. Dalje, mora vrijediti $\mathcal{M}, x \Vdash W$, odnosno $\mathcal{M}, x \Vdash Fp \to U(p, \neg p)$. Budući da je $a > x$, a po definiciji od $V(P)$ vrijedi $\mathcal{M}, a \Vdash p$, imamo $\mathcal{M}, x \Vdash Fp$. Dalje primjenom pravila izvoda modus ponens, imamo $\mathcal{M}, x \Vdash U(p, \neg p)$. To po definiciji znači da postoji stanje $y > x$ takvo da $\mathcal{M}, y \Vdash p$ i za svaki r takav da $x < r < y$ vrijedi $\mathcal{M}, r \Vdash \neg p$. No, zbog definicije od $V(p)$, y nužno pripada skupu A što znači da postoji $y' \in A$ takav da $y' < y$. Kako je x manje od svakog drugog stanja, tako je i $x < y'$. No, $\mathcal{M}, y' \Vdash p$ što je u kontradikciji sa odabirom stanja y. Dakle, $\mathcal{F}$ je dobro uređen.

Još preostaje dokazati dio (iii). Pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{F} \Vdash W \wedge N$. Iz već dokazanih dijelova (i) i (ii) vidimo da to povlači da je $\mathcal{F}$ diskretno i dobro uređen. Jedini još nerazjašnjeni dio formule je $\mathcal{F} \Vdash F\top$. On je ekvivalentan tome da za svako stanje iz $\mathcal{F}$ postoji veće stanje, odnosno da je $\mathcal{F}$ neograničen odozgo. Dakle, $\mathcal{F}$ je linearno, diskretno i dobro uređen skup koji je neograničen odozgo. Bijekcija u $(\mathbb{N}, <)$ se sada definira induktivno. Definiramo skup $N_0 = \mathcal{F}$. Budući da je skup dobro uređen, ima najmanji element, označimo ga sa n_0. Sada induktivno definiramo skupove $N_i = N_{i-1} \setminus \{n_{i-1}\}$ i njihove pripadne najmanje elemente n_i, za svaki $i > 0$. Sada definiramo funkciju $f : \mathcal{F} \to \tau$ sa $f(n_i) = i$ za svaki $i \in \tau$, gdje je τ ordinal kardinalnosti jednake $\mathcal{F}$. Zbog neomeđenosti odozgo, τ je neograničeni ordinal pa vrijedi $\tau \geq \omega$. Sada treba provjeriti da li je možda strogo veći. No, ako je strogo veći tada τ sadrži barem jedan granični ordinal, ω. No to se kosi sa diskretnom uređenošću, budući da postoji element iz τ manji od ω, ali ω nema prethodnika. Dakle $\tau = \omega$, a f je izomorfizam iz $\mathcal{F}$ u $(\mathbb{N}, <)$.

Iz gornjeg razjašnjenja svojstava sa kojima su ekivalentni aksiomi W i N, jasno je da su aksiomi W i N valjani na $(\mathbb{N}, <)$. Q.E.D.

Nakon što smo dokazali svojstva glavnih aksioma, imamo sve što nam je potrebno da bismo definirali tri sistema aksioma: **B**, **BW**, **BN**. Skup **B** aksioma se sastoji od svih propozicionalnih tautologija, (A1a)-(A7a) i (A1b)-(A7b). **BW** proiširuje **B** sa W, a **BN** proširuje **BW** sa N. Sva tri sustava imaju *modus ponens*, *temporalnu generalizaciju* i *uniformnu supstituciju* kao pravila izvoda:

(MP) Ako vrijedi $\vdash \phi$ i $\vdash \phi \to \psi$, tada vrijedi $\vdash \psi$.
(TG) Ako vrijedi $\vdash \phi$, tada vrijedi $\vdash G\phi$ i $\vdash H\phi$.
(SUB) Ako vrijedi $\vdash \phi$, tada vrijedi $\vdash [\psi/p]\phi$.

Model $\mathcal{M}$ zovemo **X**-model ako vrijedi $\mathcal{M} \Vdash \phi$ za sve **X**-teoreme ϕ, gdje je $\mathbf{X} \in \{\mathbf{B}, \mathbf{BW}, \mathbf{BN}\}$. Sa $\Sigma \Vdash_B \phi$ ćemo označavati da je formula ϕ logička semantička posljedica od skupa formula Σ nad klasom svih **B**-modela.

Sada bez dokaza iznosimo slijedeći rezultat o potpunosti **B** aksiomatskog sustava koji će nam biti potreban u nekim daljnjim dokazima.

Teorem 14. *Za sve skupove S, U formula Σ i za proizvoljnu formulu ϕ vrijedi: $\Sigma \vdash_B \phi$ ako i samo ako $\Sigma \Vdash_B \phi$.*

Daljnji cilj nam je dokazati neke rezultate potpunosti za upravo uvedene sustave aksioma. Također želimo okrakterizirati neke **X**-modele određenim jednostavnim svojstvima. Pritom će nam od posebnog interesa biti dobra uređenost. No, dobra uređenost je svojstvo koje je u svojoj prirodi drugog reda jer zahtijeva kvantifikaciju po svim podskupovima skupa stanja. No, za naše potrebe biti će nam dovoljno i malo oslabljena verzija tog svojstva, naime biti će nam dovoljan pojam *definabilne dobre uređenosti*. To je svojstvo koje kaže da je svaki skup za koji postoji formula prvog reda koja ga opisuje, dobro uređen. Nakon toga ćemo pokazati da su definabilno dobro uređeni modeli dovoljno slični dobro uređenim modelima.

Definicija 39. Neka je α formula prvog reda iz $\mathcal{L}^1_<(x)$, $\mathcal{M} = (T, <, V)$ model za $\mathcal{L}^1_<$. Neka je X_α skup definiran sa α, tj. $X_\alpha = \{t \in T | \alpha[t]$ je istinito na $\mathcal{M}\}$. Tada za $\mathcal{M}$ kažemo da je *definabilno dobro uređen* ako za sve $\alpha(x) \in \mathcal{L}^1_<$, skup X_α ima najmanji element.

Sada ćemo definirati pojam koji formalno opisuje kada su dva modela dovoljno slična. Za to će nam prvo trebati pojam kvantifikatorskog ranga logike prvog reda.

Definicija 40. Neka je F logika prvog reda, a $\alpha \in F$ proizvoljna formula. Sa $q(\alpha)$ označimo kvantifikatorski rang formule α. Sada induktivno definiramo kvantifikatorski rang proizvoljne formule:

(i). $q(\alpha) = 0$, ako je α atomarna formula (ii). $q(\neg\alpha) = q(\alpha)$

(iii). $q(\alpha \vee \beta) = q(\alpha \wedge \beta) = q(\alpha \to \beta) = max\{q(\alpha), q(\beta)\}$

(iv). $q(\forall x\alpha) = q(\exists x\alpha) = q(\alpha) + 1$

Definicija 41. Za dva $\mathcal{L}^1_<$-modela $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ kažemo da su *n-ekvivalentni*, a označavamo $\mathcal{M}_1 \equiv^n_{FOL} \mathcal{M}_2$, ako za sve $\alpha \in \mathcal{L}^1_<$ kvantifikatorskog ranga najviše n vrijedi da je α istinita na $\mathcal{M}_1$ ako i samo ako je istinita na $\mathcal{M}_2$.

Sada nam preostaje dokaz ključnog rezultata o adekvatnoj sličnosti definabilno dobro uređenih i dobro uređenih modela. Prije same leme koja se bavi sličnošću, dokazat ćemo par pomoćnih lema.

Napomena. U daljnjem tekstu ćemo pretpostaviti da je naš skup propozicionalnih varijabli Φ konačan. Ovo je više tehničko ograničenje koje je moguće ukloniti, ali pojednostavljuje neke od argumenata u dokazima koji slijede.

Lema 15. *U logici prvog reda s konačnim brojem nelogičkih simbola postoji konačni broj ne-ekvivalentnih formula oblika $\alpha(x, y)$ s kvantifikatorskim rangom n.*

Dokaz. Budući da su kvantifikatori $\alpha(x, y)$ dubine n, imamo točno n vezanih varijabli. Slobodnih varijabli imamo točno dvije, x i y. Dakle, u formuli se javlja konačno mnogo varijabli, $n + 2$. Promotrimo sada koliko mogućih različitih instanci atomarnih formula se može pojaviti u $\alpha(x, y)$. Budući da se u formuli pojavljuje konačno mnogo različitih varijabli i logika sadrži konačno mnogo nelogičkih simbola, skup različitih atomarnih formula koje se mogu pojaviti kao podformule u $\alpha(x, y)$ je konačan. U $\mathcal{L}^1_<$ to su isključivo formule oblika $x < y$, $x = y$ i $P(x)$ gdje je P unarna relacija koja odgovara nekoj propozicionalnoj varijabli. Dalje, primijetimo da različitih kombinacija kvantifikatora ima također konačno jer su fiksne dubine, n. Promotrimo ekvivalentne formule oblika $\alpha(x, y)$ koje sadrže identičnu kombinaciju kvantifikacija. Za istu kombinaciju valuacija, odnosno istinitosti atomarnih formula, moraju imati istu valuaciju, odnosno istinitost. Dakle, ne-ekvivalentne formule moraju za barem jednu kombinaciju istinitosti atomarnih formula imati različitu istinitost cijele formule. No to znači da je broj ne-ekvivalentnih formula ograničen brojem razlicitih kvnatifikacija kao i brojem različitih kombinacija valuacija atomarnih formula. No, budući da se u formuli pojavljuje konačan broj varijabli i logika ima konačan broj nelogičkih simbola, oba broja su konačna pa je i broj ne-ekvivalentnih formula oblika $\alpha(x, y)$ sa dubinom kvantifikatora n konačan. Q.E.D.

Definicija 42. Leksikografska suma $\mathcal{M} = \sum_{i \in \lambda} \mathcal{M}_i$ je disjunktna unija struktura koja je uređena sa uređajem $\prec$ koji je definiran tako da ako uzmemo dva stanja $x \in \mathcal{M}_i$ i $y \in \mathcal{M}_j$, vrijedi:

$$x \prec y \Leftrightarrow \begin{cases} x <_i y & , i = j \\ i < j & , i \neq j \end{cases}$$

Lema 16. *Neka je $\mathcal{M}_i$, $i \in \lambda$ gdje je λ ordinal, kolekcija struktura takva da je svaki $\mathcal{M}_i$ dobro uređen i n-ekvivalentan nekoj strukturi S_i. Tada je leksikografska suma $\sum_{i\in\lambda} \mathcal{M}_i$ dobro uređena i n-ekvivalentna $\sum_{i\in\lambda} S_i$.*

Dokaz. Pokažimo najprije da je leksikografska suma dobro uređenih skupova i dalje dobro uređena. Zaista, budući da su ordinalni brojevi dobro uređeni i svaki od $<_i$ je dobar uređaj, slijedi da je i $\prec$ dobar uređaj. Dakle, $\sum_{i\in\lambda} \mathcal{M}_i$ je dobro uređena struktura.

Pokažimo sada da je $\mathcal{M}$ n-ekvivalentna sumi $S = \sum_{i\in\lambda} S_i$. Uzmimo u tu svrhu proizvoljnu formulu α dubine kvantifikatora n. Pretpostavimo prvo da je α istinita na $\mathcal{M}$. To znači da je istinita za svaku valuaciju v. No tada je specijalno istinita i za sve restrikcije valuacija na određenu strukturu $\mathcal{M}_i$, odnosno valuacija oblika $v_i = v|_{\mathcal{M}_i}$. Prema tome α je istinita i na svakoj strukturi $\mathcal{M}_i$. No to povlači da je ujedno istinita i na svakoj strukturi S_i. To znači da je α istinita na svakoj strukturi S_i za svaku moguću valuaciju. Budući da se svaka valuacija na S može prikazati kao unija svojih restrikcija na strukture S_i, α je istinita i za svaku moguću valuaciju na S. Analogno se pokazuje da istinitost na S povlači istinitost na $\mathcal{M}$. Q.E.D.

Lema 17. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je svaki definabilno dobro uređeni linearni model n-ekvivalentan dobro uređenom modelu.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{M} = (T, <, V)$ definabilno dobro uređeni linearni model. Za $a, b \in T$ takve da $b < a$, definiramo $[b, a) = \{t \in T | b \leq t < a\}$, i $(\infty, a) = \{t \in T | t < a\}$. Naravno, takve skupove možemo promatrati kao linearne $\mathcal{L}^1_<$ podmodele s relacijom i valuacijom induciranom iz $\mathcal{M}$. Dalje definiramo

$$Z = \{a \in T | \text{za svaki } b < a,\ [b, a) \text{ ima dobro uređeni n-ekvivalent}\}.$$

Prema lemi 15 postoji samo konačno mnogo formula oblika $\alpha(x, y)$ s dubinom kvantifikatora najviše n, označimo ih s $\alpha_1(x, y), \ldots, \alpha_m(x, y)$. Neka su $\beta_1(x, y), \ldots, \beta_k(x, y) \in \{\alpha_1(x, y), \ldots \alpha_m(x, y)\}$ takvi da ako je $\beta_i(x, y)[a, b]$ istinito na $\mathcal{M}$ tada $[b, a)$ ima dobro uređeni n-ekvivalent. Tada je Z definiran s formulom

$$\alpha(x) = \forall y \left(y \leq x \rightarrow \bigvee_{i \leq k} \beta(x, y) \right)$$

.

Dakle, Z je definabilan skup, a kao posljedica toga je i $T \setminus Z$, odnosno komplement od Z u $\mathcal{M}$, definabilan. Sada ćemo pokazati da je $T \setminus Z$ prazan. Pretpostavimo suprotno. Tada $T \setminus Z$ mora imati najmanji element a, jer je $\mathcal{M}$ definabilno dobro uređen. Sada ćemo promotriti tri moguća slučaja i vidjeti da svaki vodi na kontradikciju:

(i). a je prvi element od T.
Budući da ne postoji niti jedan element $b \in T$ koji je manji od njega, a trivijalno zadovoljava uvjete skupa Z pa mu pripada, no to je u kontradikciji s odabirom od a.

(ii). a ima neposrednog prethodnika.
Označimo neposrednog prethodnika od a sa a'. Budući da je a najmanji element od $T\backslash Z$, mora vrijediti $a' \in Z$. Budući da je a' neposredni prethodnik, za svaki $b < a$ vrijedi $b \leq a'$. No sada je jasno da za svaki $b < a$ vrijedi $[b, a) = [b, a') \bigcup [a', a)$. Skup $[b, a')$ ima dobro uređeni n-ekvivalent, a $[a', a)$ je skup od jednog elementa pa je trivijalno dobro uređen. Sada prema lemi 16 slijedi da $[b, a)$ ima dobro uređeni n-ekvivalent. Kako to vrijedi za svaki $b < a$, slijedi da a pripada skupu Z, što je kontradikcija.

(iii). Postoji uzlazni niz $(b_\xi)_{\xi<\lambda}$ koji je kofinalan[12] u [b,a) i takav da $b_0 = b$. Drugim riječima, vrijedi $b_0 = b$, za svaki $i < j$ vrijedi $b_i < b_j$ i za svaki $c \in [b, a)$ postoji $b_i > c$.
Budući da je a minimalni element od $T\backslash Z$, svi b_ξ su u Z. Dalje, prema definiciji od Z, slijedi da svaki interval $[b_\xi, b_{\xi+1})$ ima dobro uređeni n-ekvivalent $\mathcal{M}_\xi$. Prema lemi 16, leksikografska suma $\sum_{\xi<\lambda} \mathcal{M}_\xi$ je dobro uređena i n-ekvivalentna [b,a). Ali tada vrijedi $a \in Z$ što je kontradikcija.

Dakle, $T \setminus Z = \emptyset$, odnosno $Z = T$ i svaki interval $[b, a)$u T ima n-ekvivalentni dobro uređeni model. Opet prema lemi 16 slijedi da $\mathcal{M}$ ima dobro uređeni n-ekvivalent. Q.E.D.

Sada imamo sve preliminarne rezultate potrebne da bismo okarakterizirali neke od **X**-modela i logika. Krajnji rezultat će biti karakterizacija temporalne logike prirodnih brojeva sa standardnim uređajem.

Teorem 15. *Svaki linearni* **BW***-model je definabilno dobro uređen.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{M}$ linearni model za **BW**. Dokazat ćemo da svaki neprazni $\mathcal{L}^1_<$-definabilni podskup skupa T ima najmanji element. Dokaz ćemo provesti na malo zaobilazan način, pomoću Stavi veznika S' i U'.

Neka je X neprazni $\mathcal{L}^1_<$-definabilni podskup od T. Prema teoremu 13 slijedi da postoji formula ϕ u jeziku sa operatorima S, U, S', U' koja definira skup X. Ako dokažemo da ϕ u stvari pripada podjeziku sa S i U, time ćemo dokazati teorem jer ćemo moći upotrijebiti istinitost W i L aksioma da pokažemo da mora postojati najmanji element u X.

Dovoljno je pokazati da je svaka formula u jeziku sa S, U, S', U' ekvivalentna nekoj S, U formuli nad $\mathcal{M}$. To ćemo pokazati indukcijom po složenosti formule. Jedini netrivijalni slučaj je korak indukcije u slučaju kad je formula oblika $U'(\phi, \psi)$, odnosno analogna verzija s operatorom S'. Pritom formule ϕ i ψ prema pretpostavci indukcije imaju ekvivalentne formule u podjeziku sa S i U. Pretpostavimo dakle da za neki t vrijedi $\mathcal{M}, t \Vdash U'(\phi, \psi)$. Tada postoji procjep g, veći od t, takav da je (i) ψ istinito u svakom stanju između t i g, i da je (ii) $\neg\psi$ istinito proizvoljno brzo nakon g. Dalje, (i) povlači da vrijedi $\mathcal{M}, t \Vdash F\psi$, pa

[12]Podsjetimo se da smo kofinalnost definirali u definiciji 34.

zbog istinitosti aksioma W na $\mathcal{M}$ slijeda da vrijedi $\mathcal{M}, t \Vdash U(\neg\psi, \psi)$. Ali to je u kontradikciji sa (ii). Dakle, slučaj $\mathcal{M}, t \Vdash U'(\phi, \psi)$ se ne može pojaviti. Analogno se dokazuje za S'. Q.E.D.

Teorem 16. **BW** *je slabo potpuna u odnosu na klasu svih dobro uređenih vremenskih tokova.*

Dokaz. Neka je ϕ **BW**-konzistentna formula. Konstruirajmo maksimalni **BW**-konzistentni skup Δ takav da $\phi \in \Delta$. Budući da **BW** proširuje **B**, Δ je također **B**-konzistentan. Prema teoremu 14, postoji linearni model $\mathcal{M} = (T, <, V)$ u kojem je Δ ispunjiv. Očito je za svaku S, U formulu ψ, formula $HW(\psi) \wedge W(\psi) \wedge GW(\psi)$ sadržana u Δ, gdje je $W(\psi)$ instanca W aksioma sa supstituiranom formulom ψ. Dakle, $\mathcal{M}$ je ujedno i **BW**-model pa je prema teoremu 15 i dobro uređen.

Dalje, neka je α ekvivalent formule ϕ u *jeziku korespondencije* $\mathcal{L}^1_<$. α je konačna formula i neka je njena dubina kvantifikatora n. Tada prema lemi 17 postoji dobro uređeni model $\mathcal{M}'$ koji je $n+1$ ekvivalentan modelu $\mathcal{M}$. No tada je formula $\exists x \alpha(x)$ istinita na $\mathcal{M}'$. No to znači da je ϕ istinita u nekom stanju x modela $\mathcal{M}'$ koji je dobro uređeni vremenski tok i time je teorem dokazan. Q.E.D.

Korištenjem upravo dokazanog teorema 16 lako ćemo doći do daljnjeg rezultata potpunosti, za temporalnu logiku prirodnih brojeva.

Teorem 17. **BN** *je slabo potpuna u odnosu na model* $(\mathbb{N}, <)$.

Dokaz. Neka je ϕ proizvoljna **BN**-konzistentna formula. Budući da **BN** proširuje **BW** sa aksiomom N, formula $N \to \phi$ je konzistentna u aksiomatskom sustavu **BW**. Primijetimo da je $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$ dobro uređeni vremenski tok pa je prema teoremu 16 **BW** slabo potpuna za $\mathcal{N}$. To znači da $\Vdash_{\mathcal{N}} N \to \phi$ povlači $\vdash_{\mathbf{BW}} N \to \phi$. No aksiom N je valjan na $\mathcal{N}$ pa je $\Vdash_{\mathcal{N}} N \to \phi$ ekvivalentno sa $\Vdash_{\mathcal{N}} \phi$. Opet primjenom činjenica da **BN** proširuje **BW** aksiomom N, slijedi da je $\vdash_{\mathbf{BW}} N \to \phi$ ekvivalentno sa $\vdash_{\mathbf{BN}} \phi$ pa slijedi tvrdnja teorema. Q.E.D.

Time završavamo našu diskusiju operatora *since* i *until*. Uveli smo S i U operatore, pozabavili smo se njihovom ekspresivnošću i na kraju uveli neke S, U aksiomatske sustave te ih povezali s dobro uređenim vremenskim tokovima, te sa skupom prirodnih brojeva. Time smo ilustrirali značajnost tog važnog proširenja osnovnog temporalnog jezika.

7 Zaključak

Osvrnimo se na kraju s dubljim razumijevanjem na pitanje postavljeno na početku rada: *Što je to temporalna logika?* Kao i na početku, znamo da je temporalna logika zapravo formalizacija našeg viđenja logike toka vremena. No sada znamo šta to točno znači. Temporalna logika je posebna modalna logika koja pruža mogućnost izražavanja "dvosmjernih" svojstava relacijske strukture.

Osnovni temporalni jezik se veoma malo razlikuje od osnovnog modalnog jezika. Jednostavno rečeno, on osnovnom modalnom jeziku dodaje mogućnost "gledanja" u oba smjera relacijske strukture. No to je već dovoljno da dobije znatno veću moć izražavanja. Naravno, dvosmjerne relacijske strukture veoma precizno formaliziraju naše intuitivno shvaćanje vremena. Zbog toga je i tako bitan rezultat dokaza potpunosti K_t logike čime smo u stvari aksiomatizirali osnovnu temporalnu logiku. Takav rezultat otvara vrata formalnom i samim time znatno robusnijem zapisu mnogih kompleksnih praktičnih svojstava i problema sustava koje promatramo. Pritom je bitna činjenica da radimo upravo u domeni modalnih jezika jer lokalna interpretacija modalnih formula pruža jednostavniji način intuitivnog shvaćanja samih formula s kojima baratamo. Formule u temporalnom jeziku je puno lakše formirati i interpretirati nego ekvivalentne formule u jeziku logike prvog reda upravo zbog te intuitivne bliskosti lokalne interpretacije formula.

Na kraju smo se pozabavili veoma bitnim proširenjem temporalne logike s operatorima since i until. Operator until je zbog svoje prirodne upotrebe u opisu svojstava računalnih sustava postao vjerojatno najupotrijebljavaniji modalni operator uopće. Tim više je bitan i rezultat o ekspresivnoj potpunosti logika sa S i U operatorima čime smo na neki način zaokružili priču od modalnim logikama kao podskupovima logika prvog reda. Uvedeni aksiomatski sustavi i rezultati vezani za njih pružaju temelje daljnjem razvoju i primjeni takve proširene temporalne logike.

U ovom radu su prezentirani ne samo bitni fundamentalni rezultati temporalne logike, nego i mnogi rezultati modalne logike općenito, te kao takav može poslužiti kao uvod u modalnu logiku s naglaskom na temporalnu logiku i motivacija za daljnji rad[13].

[13] za daljnje teme može poslužiti [4]

Literatura

[1] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema, *Modal Logic* (Springer-Verlag, 2003).

[2] M. Vuković, *Matematička logika 1, skripta* (PMF - Matematički odjel Zagreb, 2006).

[3] H. Kamp, *Tense Logic and the Theory of Linear Order*, PhD thesis, University of California, Los Angeles, 1968.

[4] Y. Venema, *Temporal Logic* (Institute of Logic, Language and Information, University of Amsterdam, 1998).