Matematička analiza 1 i 2

Vjekoslav Kovač

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Skripta predmeta *Matematička analiza 1 i 2* na prijediplomskom studiju *Matematika*
Sveučilište u Zagrebu Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek

Ažurirano: 30. rujna 2026.

Predgovor

Poglavlja 1–3 pokrivaju gradivo predmeta *Matematička analiza 1*, dok poglavlja 4–6 čine gradivo predmeta *Matematička analiza 2* na Sveučilišnom prijediplomskom studiju *Matematika*. Brojni materijali na hrvatskom jeziku obrađuju slično gradivo: knjige [2, 3] daju izvrsnu intuiciju nauštrp logičkog poretka, dok je knjiga [4] vrlo rigorozna i pregledna, ali preteška za prvi susret s matematičkom analizom. Skripta [1] postiže zadovoljavajući kompromis između računskog i egzaktnog aspekta analize te je već mnogo godina korištena kao standardna literatura. Ova je skripta upravo dorađena verzija od [1].

Zagreb, rujan 2026. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Sadržaj

Sadržaj **v**

1. Skupovi i funkcije **1**
1.1. Skupovi i brojevi . . . 1
1.1.1 Prirodni, cijeli i racionalni brojevi . . . 3
1.1.2 Brojevni pravac i realni brojevi . . . 12
1.1.3 Decimalni zapis i aproksimacija . . . 14
1.1.4 Kartezijev produkt i koordinatna ravnina . . . 18
1.2. Funkcije . . . 20
1.2.1 Realne funkcije i njihova svojstva . . . 21
1.2.2 Kompozicija i inverzna funkcija . . . 23
1.2.3 Afine funkcije i pravci . . . 27
1.2.4 Apsolutna vrijednost, udaljenost i pogreške . . . 28
1.2.5 Kvadratne, polinomne i racionalne funkcije . . . 30
1.2.6 Potencije i korijeni . . . 34
1.2.7 Eksponencijalne i logaritamske funkcije . . . 36
1.2.8 Hiperbolne i area funkcije . . . 40
1.2.9 Trigonometrijske i arkus funkcije . . . 43
1.2.10 Elementarne funkcije . . . 49
1.3. Realni brojevi i potpunost . . . 50
1.3.1 Aksiomi polja i pravila računanja . . . 50
1.3.2 Uređaj i računanje s nejednakostima . . . 53
1.3.3 Međe, supremum i infimum . . . 54
1.3.4 Aksiom potpunosti i Arhimedovo svojstvo . . . 55
1.3.5 Uspoređivanje i računanje sa supremumima . . . 58
1.3.6 Ugniježđeni segmenti . . . 59
1.3.7 Postojanje korijena . . . 62
1.3.8 Konstrukcija realne eksponencijalne funkcije . . . 64
1.4. Ekvipotentnost i prebrojivost . . . 68
1.4.1 Jednakobrojnost i uspoređivanje skupova . . . 68
1.4.2 Cantor–Schröder–Bernsteinov teorem . . . 70

1.4.3 Prebrojivi skupovi . . . 73
1.4.4 Parovi prirodnih brojeva i racionalni brojevi . . . 75
1.4.5 Ekvipotentnost intervala . . . 76
1.4.6 Neprebrojivost realnih brojeva . . . 78

2. Nizovi **81**
2.1. Nizovi i podnizovi . . . 81
2.2. Limes realnoga niza . . . 83
2.2.1 Beskonačni limesi . . . 85
2.2.2 Konvergencija monotonih nizova . . . 85
2.3. Operacije s konvergentnim nizovima . . . 86
2.3.1 Uređaj i teorem o sendviču . . . 88
2.3.2 Stolzov teorem i aritmetičke sredine . . . 89
2.4. Primjeri i eksponencijalna funkcija . . . 90
2.4.1 Heronov postupak za računanje kvadratnoga korijena . . . 90
2.4.2 Nizovi korijena . . . 92
2.4.3 Broj e . . . 94
2.4.4 Eksponencijalna funkcija kao limes . . . 98
2.5. Podnizovi, gomilišta i limesi superior i inferior . . . 100
2.5.1 Monotoni i konvergentni podnizovi . . . 100
2.5.2 Gomilišta niza . . . 101
2.5.3 Limes superior i limes inferior . . . 103
2.6. Cauchyjevi nizovi . . . 105
2.7. Kompleksni brojevi i nizovi . . . 108
2.7.1 Polje kompleksnih brojeva . . . 108
2.7.2 Konjugiranje, modul i udaljenost . . . 109
2.7.3 Kompleksna eksponencijalna funkcija . . . 111
2.7.4 Konvergencija kompleksnih nizova . . . 113
2.7.5 Ograničeni kompleksni nizovi i Cauchyjev kriterij . . . 115
2.7.6 Kompleksni geometrijski nizovi . . . 116

3. Limes i neprekidnost funkcije **119**
3.1. Limes funkcije . . . 119
3.1.1 Približavanje točki i definicija limesa . . . 119
3.1.2 Osnovna svojstva i računanje s limesima . . . 121
3.1.3 Jednostrani limesi . . . 123
3.1.4 Beskonačni limesi i limesi u beskonačnosti . . . 124
3.1.5 Limes monotone funkcije u beskonačnosti . . . 126
3.2. Važni primjeri limesa . . . 127
3.2.1 Trigonometrijski limesi . . . 127
3.2.2 Eksponencijalni limesi . . . 129
3.2.3 Usporedba eksponencijalne funkcije i polinoma . . . 131

3.3. Neprekidnost funkcije . . . 132
3.3.1 Osnovni primjeri i vrste ponašanja . . . 133
3.3.2 Lokalna svojstva i operacije . . . 135
3.3.3 Jednostrana neprekidnost i krajevi intervala . . . 137
3.3.4 Neprekidnost osnovnih elementarnih funkcija . . . 138
3.4. Neprekidne funkcije na segmentu . . . 139
3.4.1 Omeđenost i postizanje ekstrema . . . 139
3.4.2 Nultočke i međuvrijednosti . . . 141
3.4.3 Jednoliko neprekidne funkcije . . . 142
3.5. Monotonost i inverzne funkcije . . . 143
3.5.1 Jednostrani limesi monotone funkcije . . . 143
3.5.2 Slika intervala i neprekidnost . . . 145
3.5.3 Neprekidnost inverzne funkcije . . . 145
3.5.4 Korijeni, logaritmi, arcus i area funkcije . . . 147
3.5.5 Prekidi monotone funkcije . . . 149
3.6. Otvoreni i zatvoreni skupovi . . . 150
3.6.1 Relativna otvorenost i neprekidnost . . . 152
3.6.2 Kratak pogled na topologije . . . 153

4. Derivacija funkcije **157**
4.1. Derivacija i lokalna aproksimacija . . . 157
4.1.1 Promjena vrijednosti, brzina i tangenta . . . 157
4.1.2 Definicija i prvi primjeri . . . 158
4.1.3 Linearizacija i neprekidnost . . . 160
4.1.4 Tangenta, normala i predznak derivacije u točki . . . 162
4.2. Računanje derivacija . . . 163
4.2.1 Algebarske operacije . . . 163
4.2.2 Kompozicija i inverzna funkcija . . . 164
4.2.3 Potencije, eksponencijalne i logaritamske funkcije . . . 166
4.2.4 Trigonometrijske i arcus funkcije . . . 167
4.2.5 Hiperbolne i area funkcije . . . 169
4.2.6 Derivacije višeg reda . . . 170
4.3. Teoremi srednje vrijednosti . . . 172
4.3.1 Lokalni ekstremi i Rolleov teorem . . . 172
4.3.2 Lagrangeov teorem . . . 174
4.3.3 Cauchyjev teorem . . . 176
4.3.4 Taylorov teorem i ocjena ostatka . . . 178
4.3.5 Peanov oblik i primjene Taylorova teorema . . . 181
4.3.6 Zadaci . . . 183
4.4. Posljedice teorema srednje vrijednosti . . . 183
4.4.1 Monotonost i derivacija . . . 184
4.4.2 Međuvrijednosti i prekidi derivacije . . . 185

4.4.3 L'Hospitalovo pravilo . . . 186
4.5. Konveksne funkcije . . . 189
4.5.1 Tetive grafa i Jensenova nejednakost . . . 189
4.5.2 Nagibi sekanti i jednostrane derivacije . . . 193
4.5.3 Kriteriji pomoću derivacija i tangenti . . . 197
4.5.4 Infleksija i ispitivanje zakrivljenosti . . . 199
4.6. Ekstremi i asimptote . . . 202
4.6.1 Određivanje lokalnih ekstrema . . . 202
4.6.2 Asimptote . . . 205
4.6.3 Ispitivanje funkcije i crtanje grafa . . . 206
4.7. Interpolacija i Newtonova metoda . . . 207
4.7.1 Lagrangeov interpolacijski polinom . . . 208
4.7.2 Pogreška interpolacije . . . 209
4.7.3 Metoda tangenti . . . 212
4.7.4 Konvergencija Newtonove metode . . . 212
4.7.5 Računanje korijena i provjera točnosti . . . 215

5. Riemannov integral 217
5.1. Darbouxove i Riemannove sume . . . 217
5.1.1 Površina i rad kao motivacija . . . 217
5.1.2 Podjele, sume i profinjenja . . . 218
5.1.3 Definicija integrala i Darbouxov kriterij . . . 220
5.1.4 Zašto Riemannove sume konvergiraju . . . 221
5.1.5 Prvi izračuni iz definicije . . . 223
5.2. Osnovna svojstva integrala . . . 224
5.2.1 Računske operacije i usporedba . . . 224
5.2.2 Podsegmenti i orijentacija . . . 226
5.3. Integrabilne funkcije i skupovi mjere nula . . . 228
5.3.1 Monotone i neprekidne funkcije . . . 228
5.3.2 Konačno mnogo iznimnih točaka . . . 229
5.3.3 Thomaeova funkcija . . . 231
5.3.4 Skupovi mjere nula . . . 232
5.3.5 Lebesgueov kriterij integrabilnosti . . . 234
5.4. Integral i primitivna funkcija . . . 236
5.4.1 Primitivne funkcije i konstanta integriranja . . . 236
5.4.2 Integral s promjenjivom gornjom granicom . . . 237
5.4.3 Integralni teoremi srednje vrijednosti . . . 240
5.4.4 Integrabilnost i postojanje primitivne funkcije . . . 241
5.5. Metode integriranja . . . 242
5.5.1 Osnovna tablica i direktno integriranje . . . 243
5.5.2 Supstitucija ili uvođenje nove varijable . . . 245
5.5.3 Parcijalna integracija i redukcijske formule . . . 248

5.5.4 Integriranje racionalnih funkcija . . . 249
5.5.5 Integralni oblik Taylorova ostatka . . . 252
5.6. Primjene integrala u geometriji . . . 254
5.6.1 Površina ravninskoga lika . . . 254
5.6.2 Volumen rotacijskoga tijela . . . 256
5.6.3 Duljina ravninske krivulje . . . 257
5.6.4 Površina rotacijske plohe . . . 259
5.6.5 Zakrivljenost ravninske krivulje . . . 261
5.7. Nepravi integrali . . . 263
5.7.1 Definicija i osnovni primjeri . . . 264
5.7.2 Kriteriji konvergencije . . . 267
5.7.3 Apsolutna i uvjetna konvergencija . . . 268
5.7.4 Računanje i gama-funkcija . . . 270

6. Redovi **273**
6.1. Red i njegova suma . . . 273
6.1.1 Parcijalne sume i konvergencija . . . 273
6.1.2 Geometrijski red i decimalni zapisi . . . 275
6.1.3 Cauchyjev kriterij i računanje s redovima . . . 276
6.2. Uspoređivanje redova i kriteriji konvergencije . . . 277
6.2.1 Nenegativni članovi i apsolutna konvergencija . . . 277
6.2.2 Alternirajući redovi . . . 279
6.2.3 Kriteriji omjera i korijena . . . 281
6.2.4 Integralni kriterij . . . 283
6.3. Produkti i preuređivanja redova . . . 285
6.3.1 Cauchyjev produkt . . . 286
6.3.2 Promjena redoslijeda članova . . . 288
6.4. Jednolika konvergencija nizova i redova funkcija . . . 291
6.4.1 Konvergencija po točkama i jednolika konvergencija . . . 291
6.4.2 Redovi funkcija i Weierstrassov kriterij . . . 293
6.4.3 Neprekidnost i integriranje jednolikog limesa . . . 294
6.4.4 Deriviranje limesa i reda . . . 297
6.5. Redovi potencija . . . 299
6.5.1 Radijus konvergencije . . . 299
6.5.2 Jednolika konvergencija, deriviranje i integriranje . . . 302
6.5.3 Abelov teorem i prilaz rubu . . . 305
6.6. Taylorovi redovi . . . 308
6.6.1 Taylorov red i funkcija koju predstavlja . . . 308
6.6.2 Eksponencijalna i trigonometrijske funkcije . . . 310
6.6.3 Binomni red . . . 312
6.6.4 Logaritam i inverzne trigonometrijske funkcije . . . 314
6.7. Dvije neočekivane jednakosti . . . 317

6.7.1 Ponašanje u nuli i jednolika konvergencija 317
6.7.2 Izračun integrala pojedinih članova 318
6.7.3 Procjena pogreške i približne vrijednosti 319

Bibliografija **321**

Poglavlje 1

Skupovi i funkcije

1.1. Skupovi i brojevi

U matematičkoj analizi proučavat ćemo brojeve i funkcije. Započnimo jezikom kojim ćemo o tim objektima govoriti, a zatim se prisjetimo kako od prirodnih brojeva dolazimo do cijelih, racionalnih i realnih brojeva. Pritom ćemo razlikovati definicije, svojstva koja uzimamo kao polazište (aksiome) i tvrdnje koje iz tih svojstava dokazujemo (teoreme, propozicije, leme, korolare).

Pojmove *skup* i *element skupa* uzimamo kao osnovne pojmove. Pišemo $a \in A$ ako je a element skupa A, a $a \notin A$ ako nije. Skup možemo zadati nabrajanjem elemenata, primjerice $A = \{2, 3, 5, 7\}$, ili izdvajanjem elemenata nekoga već zadanog skupa koji imaju određeno svojstvo. Tako je

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ je prost broj i } n < 10\}.$$

Redoslijed nabrajanja i ponavljanje elemenata ne mijenjaju skup:

$$\{2, 3, 5, 7\} = \{7, 5, 3, 2, 2\}.$$

Prazan skup, u oznaci $\emptyset$, skup je bez elemenata. Uočimo da $\emptyset$ i $\{\emptyset\}$ nisu isti skup: drugi od njih ima jedan element, a taj je element upravo prazan skup.

Definicija 1.1.1. *Kažemo da je A* podskup *skupa B i pišemo $A \subseteq B$ ako je svaki element skupa A ujedno element skupa B. Skupovi A i B su* jednaki *ako imaju iste elemente, tj. ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$, kažemo da je A* pravi podskup *skupa B i pišemo $A \subset B$.*

Za svaki skup A vrijedi $\emptyset \subseteq A$ i $A \subseteq A$. Prva tvrdnja znači da nema elementa praznoga skupa koji ne bi pripadao skupu A te je očigledno istinita. Valja razlikovati oznake $\in$ i $\subseteq$: primjerice, $2 \in \{2, 3\}$, dok je $\{2\} \subseteq \{2, 3\}$.

Nije uvijek lako provjeriti jednakost skupova. Primjerice, za

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{postoje } a, b, c \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } a^n + b^n = c^n\},$$
$$B = \{1, 2\}$$

znamo da je $A = B$ tek nakon Wilesovog dokaza velikog Fermatovog teorema.

U zapisivanju tvrdnji koristit ćemo *kvantifikatore* $\forall$ ("za svaki") i $\exists$ ("postoji"), a $\exists!$ znači "postoji točno jedan". Veznici $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\implies$ i $\iff$ znače redom "i", "ili", "nije", "ako—onda" i "ako i samo ako". Veznik "ili" (tzv. inkluzivna disjunkcija) uključuje i mogućnost da vrijede obje tvrdnje. Na primjer,

$$A \subseteq B \quad \text{je isto što i} \quad (\forall x \in A)\ x \in B \quad \text{odnosno} \quad (\forall x)(x \in A \implies x \in B),$$

dok je

$$A \neq \emptyset \quad \text{isto što i} \quad (\exists x)\ x \in A.$$

Područje na koje se kvantifikator odnosi mora biti jasno iz zapisa ili konteksta.

Redoslijed kvantifikatora može promijeniti smisao tvrdnje. Tvrdnja

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) \quad m > n$$

je istinita i kaže da za svaki prirodan broj postoji veći prirodan broj, dok bi neistinita tvrdnja

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad m > n$$

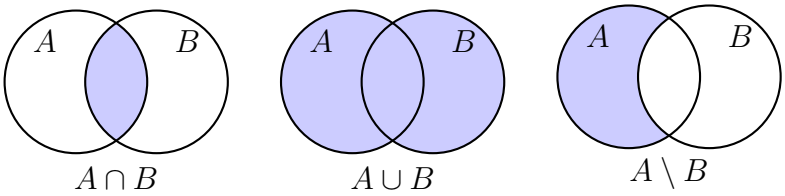
značila da je jedan prirodan broj veći od svih prirodnih brojeva, pa i od samoga sebe.

Definicija 1.1.2. Presjek, unija *i* razlika *skupova A i B definiraju se s*

$$A \cap B := \{x : x \in A \ i\ x \in B\},$$
$$A \cup B := \{x : x \in A \ ili\ x \in B\},$$
$$A \setminus B := \{x : x \in A \ i\ x \notin B\}.$$

Skupovi A i B su disjunktni *ako je $A \cap B = \emptyset$. Skup svih podskupova skupa U zovemo* partitivni skup *od U i označavamo*

$$\mathcal{P}(U) := \{A : A \subseteq U\}.$$



Primjer 1.1.3. Za $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4\}$ imamo

$$A \cap B = \{3\}, \qquad A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad A \setminus B = \{1, 2\}.$$

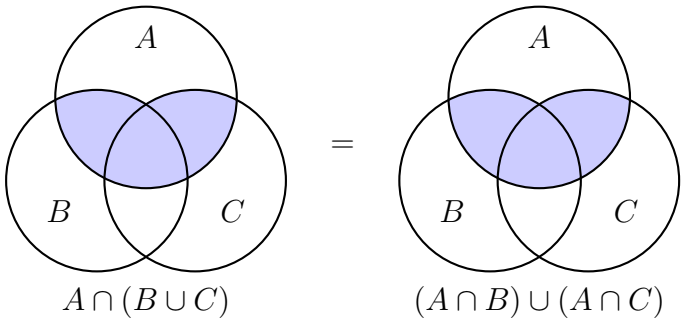
Nadalje,

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Primjer 1.1.4. Za proizvoljne skupove A, B, C vrijedi

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Dokaz. Element x pripada lijevoj strani ako i samo ako pripada skupu A te barem jednom od skupova B i C. To je ekvivalentno tome da pripada barem jednom od skupova $A \cap B$ i $A \cap C$, tj. desnoj strani. Dakle, skupovi imaju iste elemente pa su jednaki. □



Na lijevom dijagramu obojen je dio skupa A koji pripada skupu $B \cup C$, a na desnom unija presjeka $A \cap B$ i $A \cap C$. Obojeni dijelovi su jednaki.

Zadatak 1.1.1. Dokažite identitete

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B).$$

Napišite negacije tvrdnji $(\forall x \in A)\ x \in B$ i $(\exists x \in A)\ x \in B$. Kada je istinita tvrdnja $(\forall x \in \emptyset)\ x \in B$?

1.1.1. Prirodni, cijeli i racionalni brojevi

Skup *prirodnih brojeva* označavamo s $\mathbb{N}$ i pišemo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. U ovoj skripti $0 \notin \mathbb{N}$ te ćemo koristiti oznaku $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Što su uopće prirodni brojevi? Tri točke u zapisu $1, 2, 3, \ldots$ sugeriraju nastavak brojenja, ali same po sebi nisu matematička definicija. Preciznije polazište daju *Peanovi aksiomi*, koje je formulirao Giuseppe Peano 1889. godine. Uz skup $\mathbb{N}$ zadani su njegov element 1 i pridruživanje koje svakom $n \in \mathbb{N}$ dodjeljuje njegov *sljedbenik* $s(n) \in \mathbb{N}$, tako da vrijedi:

(P1) 1 nije sljedbenik nijednoga prirodnog broja;

(P2) iz $s(n) = s(m)$ slijedi $n = m$;

(P3) ako $S \subseteq \mathbb{N}$ sadrži 1 i sa svakim svojim elementom n sadrži i $s(n)$, tada je $S = \mathbb{N}$.

Svojstvo (P2) možemo kratko izreći *injektivnost sljedbenika*. Posljednje svojstvo, (P3), zovemo *aksiom matematičke indukcije* i pregledno ga možemo zapisati:

$$\left.\begin{aligned} S &\subseteq \mathbb{N} \\ 1 &\in S \\ (\forall n)(n \in S &\implies s(n) \in S) \end{aligned}\right\} \implies S = \mathbb{N}.$$

Možemo reći da Peanovi aksiomi opisuju strukturu koju shematski možemo predočiti kao

$$1 \overset{s}{\longmapsto} 2 \overset{s}{\longmapsto} 3 \overset{s}{\longmapsto} 4 \ \cdots$$

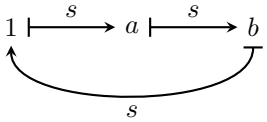
Svaka strelica prikazuje prijelaz s elementa na njegovog sljedbenika. Kako priroda samih elemenata od $\mathbb{N}$ nije važna za aksiome, prirodni brojevi bi isto tako bili i sljedeće strukture:

$$-1 \overset{s}{\longmapsto} -2 \overset{s}{\longmapsto} -3 \overset{s}{\longmapsto} -4 \ \cdots$$
$$1 \overset{s}{\longmapsto} 1.5 \overset{s}{\longmapsto} 2 \overset{s}{\longmapsto} 2.5 \ \cdots$$

koje će poprimiti smisao jednom kada uvedemo oznake $-1, -2, 1.5, 2.5$, itd. Ipak, dogovorimo se da $s(1)$ uvijek označavamo kao 2, potom $s(s(1))$ baš kao 3, $s(s(s(1)))$ pišemo 4, itd., dokle god smo učili "brojiti". Drugim riječima standardno je preimenovati prirodne brojeve tako da počinju $1, 2, 3, 4, \ldots$.

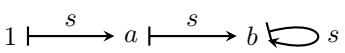
Sljedeće tri strukture pokazuju zašto je potreban svaki od aksioma. U njima skup $\mathbb{N}$ iz aksioma (P1), (P2), (P3) zamjenjujemo skupom X s istaknutim elementom 1 i pridruživanjem $s\colon X \to X$. Svaka struktura zadovoljava točno dva aksioma.

- Vrijede (P2) i (P3), ali ne (P1). Uzmimo $X = \{1, a, b\}$, gdje su $1, a, b$ međusobno različiti, te $s(1) = a$, $s(a) = b$ i $s(b) = 1$.

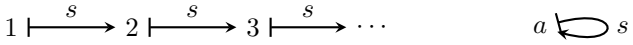
  Različiti elementi imaju različite sljedbenike, pa vrijedi (P2). Svaki podskup koji sadrži 1 i zatvoren je na uzimanje sljedbenika mora sadržavati i a i b, pa vrijedi (P3). Međutim, (P1) ne vrijedi jer je $s(b) = 1$.

- Vrijede (P1) i (P3), ali ne (P2). Uzmimo $X = \{1, a, b\}$, opet s međusobno različitim elementima, te $s(1) = a$, $s(a) = b$ i $s(b) = b$.

  Nijedan element nema sljedbenika 1, pa vrijedi (P1). Kao u prethodnom primjeru, iz 1 uzimanjem sljedbenika dolazimo do svih elemenata, pa vrijedi (P3). Međutim, (P2) ne vrijedi jer je $s(a) = s(b) = b$, premda je $a \neq b$.

- Vrijede (P1) i (P2), ali ne (P3). Uzmimo $X = \mathbb{N} \cup \{a\}$, gdje je $a \notin \mathbb{N}$. Na $\mathbb{N}$ zadržimo uobičajeno pridruživanje sljedbenika, a za dodatni element stavimo $s(a) = a$.



  Nijedan element nema sljedbenika 1, a različiti elementi imaju različite sljedbenike, pa vrijede (P1) i (P2). Međutim, (P3) ne vrijedi: pravi podskup $S = \mathbb{N}$ skupa X sadrži 1 i zatvoren je na uzimanje sljedbenika, ali ne sadrži a.

Da bismo indukcijom dokazali tvrdnju $P(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, dokazujemo *bazu* $P(1)$ i *korak indukcije*: za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ iz tvrdnje $P(n)$ slijedi tvrdnja $P(s(n))$. Tada aksiom (P3) primijenimo na

$$S = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\},$$

tj.

$$S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ je istinita}\}.$$

U koraku indukcije ne pretpostavljamo tvrdnju za sve prirodne brojeve, nego je za jedan proizvoljan broj koristimo da bismo je dokazali za njegov sljedbenik.

Indukcijom odmah vidimo da je svaki prirodan broj različit od 1 nečiji sljedbenik: skup koji se sastoji od 1 i svih sljedbenika sadrži 1 i zatvoren je na uzimanje sljedbenika. Prethodnik je jedinstven zbog svojstva (P2).

Načelo rekurzije omogućuje nam da neki postupak zadamo početnom vrijednošću i pravilom za sljedeći korak. To je standardna posljedica Peanovih aksioma čiji opći dokaz ovdje nećemo izvoditi. Za razliku od indukcije, kojom dokazujemo tvrdnje, rekurzijom definiramo objekte. Tako *zbrajanje* na $\mathbb{N}$ zadajemo pravilima

$$a + 1 := s(a), \qquad a + s(b) := s(a + b) \qquad (a, b \in \mathbb{N}). \tag{1.1}$$

Propozicija 1.1.5. *Zbrajanje prirodnih brojeva je asocijativno i komutativno, tj. za sve $a, b, c \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad a + b = b + a.$$

Dokaz. Najprije indukcijom po b dokažimo pomoćne jednakosti

$$1 + b = s(b), \qquad s(a) + b = s(a + b). \tag{1.2}$$

Za $b = 1$ obje slijede iz definicije. Ako je $1 + b = s(b)$, tada je

$$1 + s(b) \overset{(1.1)}{=} s(1 + b) = s(s(b)).$$

Ako je $s(a) + b = s(a + b)$, tada je

$$s(a) + s(b) \overset{(1.1)}{=} s(s(a) + b) = s(s(a + b)) \overset{(1.1)}{=} s(a + s(b)).$$

Time su obje pomoćne jednakosti dokazane.

Asocijativnost dokazujemo indukcijom po c, pri čemu su a i b fiksirani. Za $c = 1$ imamo

$$a + (b + 1) \overset{(1.1)}{=} a + s(b) \overset{(1.1)}{=} s(a + b) \overset{(1.1)}{=} (a + b) + 1.$$

Uz pretpostavku $a + (b + c) = (a + b) + c$ slijedi

$$\begin{aligned} a + (b + s(c)) &\overset{(1.1)}{=} a + s(b + c) \overset{(1.1)}{=} s(a + (b + c)) \\ &= s((a + b) + c) \overset{(1.1)}{=} (a + b) + s(c). \end{aligned}$$

Za komutativnost fiksirajmo a i provedimo indukciju po b. Baza $b = 1$ je

$$a + 1 \overset{(1.1)}{=} s(a) \overset{(1.2)}{=} 1 + a,$$

a korak iz pretpostavke $a + b = b + a$ izvodi

$$a + s(b) \overset{(1.1)}{=} s(a + b) = s(b + a) \overset{(1.2)}{=} s(b) + a. \qquad \square$$

Od sada sljedbenik $s(a)$ možemo pisati i kao $a + 1$.

Množenje prirodnih brojeva definiramo rekurzivno:

$$a \cdot 1 := a, \qquad a \cdot (b + 1) := a \cdot b + a. \tag{1.3}$$

Dakle, ab je zbroj b pribrojnika jednakih a.

Propozicija 1.1.6. *Množenje na $\mathbb{N}$ je asocijativno i komutativno, broj 1 je neutralan za množenje, a množenje je distributivno prema zbrajanju. Za sve $a, b, c \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\begin{gathered} a(bc) = (ab)c, \qquad ab = ba, \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \\ a(b + c) = ab + ac, \qquad (a + b)c = ac + bc. \end{gathered}$$

Dokaz. Jednakost $a \cdot 1 = a$ dio je definicije, a $1 \cdot a = a$ slijedi indukcijom:

$$1 \cdot 1 = 1, \qquad 1 \cdot (a + 1) = 1 \cdot a + 1 = a + 1.$$

Prvu distributivnost dokazujemo indukcijom po c. Za $c = 1$ to je (1.3), a u koraku dobivamo

$$\begin{aligned} a(b + (c + 1)) &= a((b + c) + 1) = a(b + c) + a \\ &= ab + ac + a = ab + a(c + 1). \end{aligned}$$

I drugu distributivnost dokazujemo indukcijom po c. Baza je

$$(a + b) \cdot 1 = a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1,$$

a korak je

$$\begin{aligned}(a+b)(c+1) &= (a+b)c + (a+b)\\ &= ac + bc + a + b = a(c+1) + b(c+1).\end{aligned}$$

Preslagivanje pribrojnika dopušteno je prema propoziciji 1.1.5.

Sada komutativnost dokazujemo indukcijom po b, za fiksiran a. Bazu već imamo, a iz $ab = ba$ slijedi

$$a(b+1) = ab + a = ba + 1 \cdot a = (b+1)a.$$

Konačno, za asocijativnost provedimo indukciju po c. Baza $a(b \cdot 1) = (ab) \cdot 1$ je neposredna, a korak glasi

$$a(b(c+1)) = a(bc+b) = a(bc) + ab = (ab)c + ab = (ab)(c+1). \qquad \square$$

Definicija 1.1.7. *Za $a, b \in \mathbb{N}$ definiramo*

$$a < b \iff (\exists k \in \mathbb{N})\ b = a + k,$$

$$a \leqslant b \iff (a < b \text{ ili } a = b).$$

Ova definicija opisuje usporedbu svih parova prirodnih brojeva. Posebno vrijedi $a < a+1$, ali samo navođenje tih nejednakosti ne bi bilo dovoljno za definiciju relacije $<$.

Propozicija 1.1.8. *Za svaka dva prirodna broja a, b vrijedi točno jedna od tvrdnji $a < b$, $a = b$, $b < a$. Relacija $<$ je tranzitivna.*

Nadalje, svaki neprazan podskup skupa $\mathbb{N}$ ima najmanji element.

Dokaz. Zbroj dvaju prirodnih brojeva uvijek je sljedbenik: to za drugi pribrojnik 1 slijedi iz prve, a za drugi pribrojnik $s(b)$ iz druge jednakosti u (1.1). Zato $1 + b \neq 1$.

Indukcijom po a sada slijedi $a + b \neq a$ za svaki $b \in \mathbb{N}$: iz $s(a) + b = s(a)$ bi zbog (1.2) i injektivnosti sljedbenika slijedilo $a + b = a$. Dakle, nikada nije $a < a$.

Ako je $b = a + k$ i $c = b + l$, tada je $c = a + (k + l)$ pa je $a < c$. Time je dokazana tranzitivnost, a ujedno se isključuje mogućnost da istodobno vrijede $a < b$ i $b < a$.

Preostaje dokazati usporedivost. Indukcijom po b dokazujemo da je svaki $a \in \mathbb{N}$ usporediv s b. Za $b = 1$ ili je $a = 1$, ili je $a = s(c) = 1 + c$ za neki $c \in \mathbb{N}$, pa je $1 < a$.

Pretpostavimo da je svaki a usporediv s b. Ako je $a \leqslant b$, tada je $a < b + 1$. Ako je $b < a$, pišemo $a = b + k$. Za $k = 1$ imamo $a = b + 1$, a za $k = l + 1$ imamo $a = (b + 1) + l$, pa je $b + 1 < a$. To dovršava dokaz usporedivosti.

Trebat će nam i činjenica da iz $a < b + 1$ slijedi $a \leqslant b$. Doista, tada je $b + 1 = a + k$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Ako je $k = 1$, injektivnost sljedbenika daje $a = b$. Ako je $k = l + 1$, tada je

$$s(b) = a + s(l) = s(a + l),$$

pa je $b = a + l$, odnosno $a < b$.

Neka sada neprazan skup $S \subseteq \mathbb{N}$ nema najmanji element. Tada $1 \notin S$. Ako nijedan broj $\leqslant n$ nije u S, ni $n + 1$ ne može biti u S, jer bi tada bio najmanji element skupa S. Indukcijom nijedan prirodan broj nije u S, što proturječi pretpostavci $S \neq \emptyset$. $\square$

Svojstvo iz posljednje tvrdnje zovemo *princip dobrog uređenja*. Ono je koristan oblik indukcijskoga zaključivanja: kada neka tvrdnja ne bi vrijedila za sve prirodne brojeve, postojao bi najmanji protuprimjer.

Zadatak 1.1.2. Dokažite da za $a, b, c \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a + c = b + c \implies a = b,$$

$$a < b \implies a + c < b + c \text{ i } ac < bc.$$

Za prvu tvrdnju provedite indukciju po c, a za ostale upotrijebite definiciju uređaja i distributivnost.

Nakon što su prirodni brojevi zadani aksiomatski, postavlja se pitanje postoji li uopće struktura koja zadovoljava zadane aksiome. Postoje duhoviti načini izgradnje prirodnih brojeva i nule samo iz praznog skupa; najstandardnija konstrukcija je

$$0 := \emptyset, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0, 1\}, \quad 3 := \{0, 1, 2\}, \quad \ldots,$$

tj.

$$s(n) := \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Strogo formalno, taj *model* skupa $\mathbb{N}$ se izgrađuje rekurzivno: naprije stavimo $1 \in \mathbb{N}$; ako smo u $\mathbb{N}$ posljednje stavili n, idući element kojeg stavljamo je $s(n)$ definiran kao gore. Na taj način je automatski zadovoljeno aksiomatsko svojstvo (P3), dok su svojstva (P1) i (P2) vrlo laka za provjeriti pozivajući se na osnovna svojstva skupova.

Prirodni brojevi nisu dovoljni za rješavanje svih jednostavnih jednadžbi. Jednadžba $3 + x = 3$ traži broj 0, a jednadžba $3 + x = 1$ traži negativan broj. Proširenje koje sadrži takva rješenja jest skup *cijelih brojeva*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Preciznije, $\mathbb{Z}$ je skup koji se sastoji od elemenata $\mathbb{N}$, njima pridodanih elemenata $-\mathbb{N}$ pisanih "s minusom" i nule 0. Pišemo $-(-n)$ za broj n te nekada -0 naprosto za 0. Na skupu $\mathbb{Z}$ tek treba definirati zbrajanje, množenje i uređaj na temelju otprije poznatih operacija $+$, $\cdot$ i relacije $<$ na skupu $\mathbb{N}$. Slijede rigorozne definicije.

$$a + b := \begin{cases} a + b & \text{ako su } a, b \in \mathbb{N}, \\ a & \text{ako je } b = 0, \\ b & \text{ako je } a = 0, \\ -((-a) + (-b)) & \text{ako su } -a, -b \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{ako je } a = -b \text{ ili } b = -a, \\ k & \text{ako su } a \in \mathbb{N},\ b \in -\mathbb{N},\ -b < a,\ -b + k = a,\ k \in \mathbb{N} \\ & \text{ili su } a \in -\mathbb{N},\ b \in \mathbb{N},\ -a < b,\ -a + k = b,\ k \in \mathbb{N}, \\ -k & \text{ako su } a \in \mathbb{N},\ b \in -\mathbb{N},\ a < -b,\ a + k = -b,\ k \in \mathbb{N} \\ & \text{ili su } a \in -\mathbb{N},\ b \in \mathbb{N},\ b < -a,\ b + k = -a,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$a \cdot b := \begin{cases} a \cdot b & \text{ako su } a, b \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{ako je } a = 0 \text{ ili } b = 0, \\ (-a) \cdot (-b) & \text{ako su } a, b \in -\mathbb{N}, \\ -((-a) \cdot b) & \text{ako su } a \in -\mathbb{N},\ b \in \mathbb{N}, \\ -(a \cdot (-b)) & \text{ako su } a \in \mathbb{N},\ b \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

$$a < b \iff (\exists k \in \mathbb{N})\ b = a + k$$
$$a \leqslant b \iff (a < b \text{ ili } a = b)$$

Primijetite da su definicije zbrajanja i množenja cijelih brojeva zapravo kompliciranе (makar su logične) pa zato preskačemo mukotrpne detaljne provjere (po svim slučajevima) svojstava $+$, $\cdot$, $<$, poznatih još iz škole. Posebno, zbrajanje i množenje na $\mathbb{Z}$ i dalje imaju svojstva asocijativnosti i komutativnosti, a vrijedi i distributivnost množenja prema zbrajanju. Nadalje, 0 zadovoljava

$$a + 0 = 0 + a = a$$

pa je *neutralan* element, a broj $-a$ je *suprotan* broju a, tj.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Binarna operacija na skupu pravilo je koje svakim dvama elementima toga skupa, uz uzimanje njihova redoslijeda u obzir, pridružuje element istoga skupa. Zbrajanje i množenje primjeri su binarnih operacija.

Definicija 1.1.9. *Skup s binarnom operacijom $+$ zovemo* grupom *ako je operacija asocijativna, postoji neutralni element 0 te svaki element ima suprotni element. Ako je operacija i komutativna, govorimo o* komutativnoj *ili* Abelovoj grupi.

Prema tome, $(\mathbb{Z}, +)$ je komutativna grupa. Za $a, b \in \mathbb{Z}$ jednadžba $a + x = b$ ima jedinstveno rješenje $x = b - a$: dodavanje broja $-a$ objema stranama daje nužno upravo to rješenje, a uvrštavanje pokazuje da ono doista zadovoljava jednadžbu.

Množenje donosi novu poteškoću: jednadžba $2x = 1$ nema cjelobrojno rješenje. To nas vodi do skupa *razlomaka*

$$\left\{ \frac{m}{n} \,:\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nazivnike uvijek možemo uzeti pozitivnima. Ovdje razlomačku crtu shvaćamo naprosto kao vizualno sugestivni razdjelnik dvaju cijelih brojeva; mogli bismo tako pisati i (m, n), ali nam ta notacija ništa ne bi sugerirala. Na skupu razlomaka definiramo relaciju $\sim$ definiranu:

$$\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q} \iff mq = pn.$$

Tako je npr. $1/2 \sim 2/4$. Relacija $\sim$ na skupu razlomaka ima sljedeća svojstva, koja je lako provjeriti. Za sve razlomke a, b, c vrijedi

- $a \sim a$ (refleksivnost);
- $a \sim b$ povlači $b \sim a$ (simetričnost);
- $a \sim b$ i $b \sim c$ povlači $a \sim c$ (tranzitivnost).

Svaku takvu binarnu relaciju na nekom skupu zovemo *relacija ekvivalencije*. Ako $[a]$ označava skup svih elemenata koji su u relaciji s a, tj. tzv. klasu ekvivalencije of a, tada je skup *racionalnih brojeva* definiran kao skup svih klasa razlomaka obzirom na gore definiranu relaciju ekvivalencije, tj.

$$\mathbb{Q} := \left\{ \left[\frac{m}{n}\right] \,:\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cijeli broj m poistovjećujemo s klasom $[m/1]$. Svaki racionalan broj ima jedinstven *skraćeni zapis*, tj. jedinstvenog predstavnika m/n s pozitivnim nazivnikom u kojem brojnik i nazivnik nemaju zajednički pozitivni djelitelj veći od 1. Ovdje koristimo elementarna svojstva djeljivosti cijelih brojeva. Iz $[m/n] = [p/q]$, tj. $mq = pn$ i relativne prostosti m, n slijedi $n \mid q$; ako su i p, q relativno prosti, analogno je $q \mid n$, pa je $n = q$ i $m = p$. Za nulu je skraćeni zapis $0/1$.

Zbrajanje i množenje racionalnih brojeva zadani su formulama

$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{p}{q}\right] := \left[\frac{mq+pn}{nq}\right], \qquad \left[\frac{m}{n}\right] \cdot \left[\frac{p}{q}\right] := \left[\frac{mp}{nq}\right]. \tag{1.4}$$

Valja provjeriti da rezultat ne ovisi o izboru razlomaka koji predstavljaju iste racionalne brojeve. Ako je

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{m'}{n'}\right] \text{ i } \left[\frac{p}{q}\right] = \left[\frac{p'}{q'}\right],$$

tj. $mn' = m'n$ i $pq' = p'q$, onda je

$$(mq+pn)n'q' = (mn')qq' + (pq')nn' = (m'n)qq' + (p'q)nn' = (m'q' + p'n')nq,$$

i

$$mpn'q' = (mn')(pq') = (m'n)(p'q) = m'p'nq,$$

što upravo znači

$$\left[\frac{mq+pn}{nq}\right] = \left[\frac{m'q'+p'n'}{n'q'}\right] \text{ i } \left[\frac{mp}{nq}\right] = \left[\frac{m'p'}{n'q'}\right],$$

tj. to su jednakosti potrebne za dobru definiranost obiju operacija. Ubuduće ćemo klasu $[a]$ obično pisati naprosto pomoću nekog njezinog predstavnika a; neće doći do zabune radi te nepreciznosti. Možemo zamisliti i da smo ekvivalentne razlomke naprosto "poistovjetili".

Svaki nenulti racionalan broj ima *recipročan broj*: za $r = m/n \neq 0$ to je $r^{-1} = n/m$, pri čemu se negativan predznak nazivnika po potrebi prenese u brojnik. Vrijedi $rr^{-1} = 1$. Nula nema recipročan broj jer je $0r = 0 \neq 1$ za svaki r. Zato $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ jest komutativna grupa, ali $(\mathbb{Q}, \cdot)$ nije grupa.

Definicija 1.1.10. *Skup F s operacijama $+$ i $\cdot$ zovemo* poljem *ako je $(F,+)$ komutativna grupa s neutralnim elementom 0, $(F\setminus\{0\},\cdot)$ komutativna grupa s neutralnim elementom $1\neq 0$, te množenje zadovoljava distributivnost prema zbrajanju.*

Pravila (1.4) daju polje $(\mathbb{Q},+,\cdot)$. Asocijativnost, komutativnost i distributivnost provjeravaju se svođenjem razlomaka na zajednički nazivnik i primjenom odgovarajućih svojstava u $\mathbb{Z}$.

U polju je jednadžba $ax=b$ za $a\neq 0$ jednoznačno rješiva i rješenje je $x=a^{-1}b=b/a$. Za $a=0$ jednadžba nema rješenja ako je $b\neq 0$, a ako je $b=0$, svaki x je rješenje.

Definicija 1.1.11. *Relaciju $\preceq$ na skupu X zovemo* parcijalnim uređajem *ako za sve $a,b,c\in X$ vrijedi*

- $a\preceq a$ *(refleksivnost);*
- $a\preceq b$ *i* $b\preceq a$ *povlači* $a=b$ *(antisimetričnost);*
- $a\preceq b$ *i* $b\preceq c$ *povlači* $a\preceq c$ *(tranzitivnost).*

Ako su svaka dva elementa usporediva, tj. $a\preceq b$ ili $b\preceq a$, govorimo o totalnom *ili* linearnom uređaju.

Primjer 1.1.12. Inkluzija $\subseteq$ je parcijalni uređaj na $\mathcal{P}(U)$. Refleksivnost i antisimetričnost slijede iz definicija, a tranzitivnost iz činjenice da svaki element skupa $A\subseteq B\subseteq C$ pripada i skupu C.

Ako U sadrži dva različita elementa u,v, skupovi $\{u\}$ i $\{v\}$ nisu usporedivi, pa ovaj uređaj nije totalan. Pritom sama disjunktnost dvaju skupova ne znači da su neusporedivi: prazan skup disjunktan je sa svakim skupom, ali je i podskup svakoga skupa.

Na $\mathbb{Q}$ definiramo

$$\left[\frac{m}{n}\right]\leqslant\left[\frac{p}{q}\right]\quad\Longleftrightarrow\quad mq\leqslant pn\qquad(n,q\in\mathbb{N}).$$

Pozitivnost nazivnika ovdje je bitna. Definicija ne ovisi o predstavnicima: iz $mn'=m'n$ i $pq'=p'q$ množenjem nejednakosti $mq\leqslant pn$ s $n'q'>0$ i kraćenjem pozitivnog faktora nq dobivamo $m'q'\leqslant p'n'$; vrijedi i obrat.

To je totalni uređaj. Naime, svaki konačan broj razlomaka možemo zapisati s istim pozitivnim nazivnikom, a zatim uspoređivati njihove cijele brojnike. Tako se sva četiri svojstva uređaja svode na odgovarajuća svojstva u $\mathbb{Z}$.

Uređaj je usklađen s računskim operacijama:

$$\begin{aligned} a\leqslant b &\implies a+c\leqslant b+c,\\ a\leqslant b,\ c\geqslant 0 &\implies ac\leqslant bc. \end{aligned}\tag{1.5}$$

Za prvu tvrdnju ponovno uzmemo zajednički pozitivni nazivnik. Za drugu, zapis $c = r/s$ s $r \geqslant 0$, $s > 0$ svodi tvrdnju na množenje nejednakosti cijelih brojeva nenegativnim brojem r. Za $c < 0$ smjer nejednakosti pri množenju se obrće.

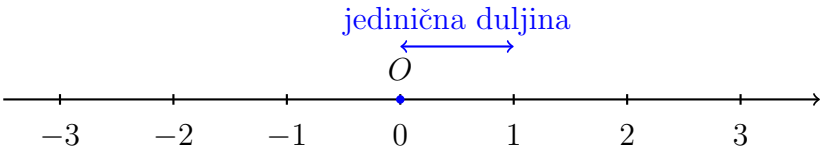
Polje s totalnim uređajem koji zadovoljava (1.5) zovemo *uređenim poljem*. Dakle, $\mathbb{Q}$ je uređeno polje.

Zadatak 1.1.3. Provjerite distributivnost na $\mathbb{Q}$ izravno pomoću (1.4). Dokažite da za racionalne $a < b$ i $c < 0$ vrijedi $ac > bc$.

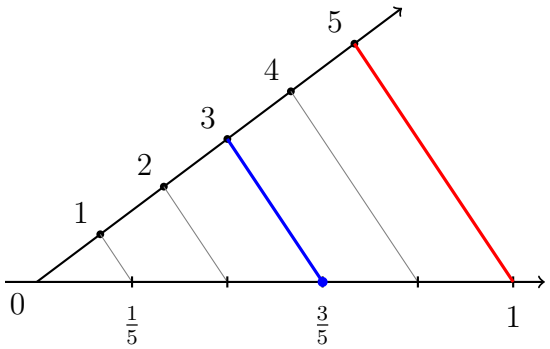
Objasnite zašto tvrdnja da je uređaj na $\mathbb{N}$ dobar ne znači isto što i tvrdnja da je totalan; navedite neprazan podskup skupa $\mathbb{Z}$ koji nema najmanji element.

1.1.2. Brojevni pravac i realni brojevi

Na pravcu odaberimo ishodište O, pozitivan smjer i jediničnu duljinu. Ishodištu pridružujemo broj 0, a uzastopnim nanošenjem jedinične duljine udesno, odnosno ulijevo, prikazujemo pozitivne, odnosno negativne cijele brojeve.



Za prikaz razlomka m/n s $0 < m < n$ jediničnu dužinu podijelimo na n jednakih dijelova i uzmemo njih m. Takva je podjela moguća Talesovom konstrukcijom: na pomoćnom polupravcu nanesemo n jednakih dužina, posljednju točku spojimo s točkom 1, a kroz ostale povučemo paralele toj spojnici. Sličnost trokuta daje tražene omjere.



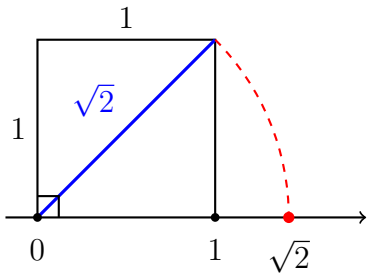
Ostale pozitivne racionalne brojeve prikazujemo dodavanjem cijeloga dijela, a negativne refleksijom s obzirom na ishodište.

Ideja poistevjećivanja brojeva s točkama pravca dolazi još od starih grka, no oni su isprva poznavali samo racionalne brojeve. Na prvi pogled, razlomci se čine dovoljni da bi popunili čitavi brojevni pravac.

Propozicija 1.1.13. *Između svaka dva različita racionalna broja postoji racionalan broj.*

Dokaz. Za $p < q$ broj $r = (p+q)/2$ racionalan je i zadovoljava $p < r < q$. □

Kažemo da je $\mathbb{Q}$ *gust u sebi*. To ipak ne znači da racionalni brojevi popunjavaju cijeli pravac. Pogledajmo dijagonalu kvadrata jedinične stranice: prema Pitagorinu poučku njezina duljina d zadovoljava $d^2 = 2$. Sljedeća tvrdnja pokazuje da ta duljina ne može biti racionalan broj.



Propozicija 1.1.14. *Ne postoji racionalan broj r takav da je $r^2 = 2$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Promjenom predznaka po potrebi možemo uzeti $r > 0$ te pisati $r = m/n$ s relativno prostim prirodnim brojevima m, n. Iz $r^2 = 2$ slijedi $m^2 = 2n^2$, pa je m^2 paran.

Kvadrat neparnoga broja $2k+1$, gdje je $k \in \mathbb{N}_0$, neparan je jer

$$(2k+1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Zato je m paran, tj. $m = 2l$ za neki $l \in \mathbb{N}$. Uvrštavanjem slijedi $4l^2 = 2n^2$, odnosno $n^2 = 2l^2$, pa je i n paran.

Dakle, m i n imaju zajednički djelitelj 2, protivno izboru skraćenog zapisa. □

Ovo je bio *dokaz kontradikcijom*: iz pretpostavke suprotne tvrdnji koju dokazujemo, zajedno s već poznatim činjenicama, izveli smo proturječje. Time smo isključili tu pretpostavku.

Skup *realnih brojeva* označavamo s $\mathbb{R}$. To je uređeno polje koje sadrži $\mathbb{Q}$, a njegove brojeve geometrijski prikazujemo točkama brojevnoga pravca. U ovom uvodnom odjeljku realne brojeve i njihova osnovna računska svojstva uzimamo kao poznate iz škole ili pak geometrijski evidentne s pravca. Kasnije nam više neće biti prihvatljivo toliko se pozivati na geometrijski zor i poželjet ćemo realne brojeve opisati aksiomatski.

Realne brojeve koji nisu racionalni zovemo *iracionalnima*; njihov je skup $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Pozitivni realni broj čiji je kvadrat 2 označavamo sa $\sqrt{2}$. On je jedinstven: iz $0 < u < v$ slijedi

$$v^2 - u^2 = (v-u)(v+u) > 0.$$

Njegovo postojanje zasad prihvaćamo, motivirani geometrijskom konstrukcijom; propozicija 1.1.14 dokazuje njegovu iracionalnost, a ne njegovo postojanje. O postojanju još i ne možemo rigorozno pričati dok nismo naveli aksiome od $\mathbb{R}$.

Slika brojevnoga pravca daje geometrijsku predodžbu, ali nije konstrukcija realnih brojeva ni dokaz svih njihovih svojstava. Sustavno uvođenje realnih brojeva zahtijeva još svojstvo *potpunosti*, koje ćemo obraditi zasebno. Iz njega se može dokazati i postojanje $\sqrt{2}$.

U sljedećem pododjeljku izričito ćemo navesti još jedno svojstvo realnih brojeva koje nam treba za aproksimaciju. Tako razlikujemo pretpostavke o $\mathbb{R}$ od njihovih posljedica koje ovdje dokazujemo.

Vrijede prave inkluzije

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

jer je npr.

$$-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

1.1.3. Decimalni zapis i aproksimacija

Definicija 1.1.15. *Kažemo da broj ima* konačan decimalni zapis *ako je oblika*

$$d = \frac{k}{10^n}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ekvivalentno, može se zapisati kao

$$d = \pm \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \right),$$

pri čemu je $a_0 \in \mathbb{N}_0$ i $a_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ za $1 \leqslant j \leqslant n$. Za $n = 0$ suma decimalnih mjesta je prazna, pa dobivamo cijeli broj.

Takav zapis obično pišemo pomoću decimalne točke, primjerice

$$3.125 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}.$$

Uvjet $a_0 \in \mathbb{N}_0$ dopušta i brojeve između 0 i 1 te sam broj 0. Svaki broj s konačnim decimalnim zapisom racionalan je, ali obrat ne vrijedi.

Propozicija 1.1.16. *Neka je m/n skraćeni razlomak s $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Broj m/n ima konačan decimalni zapis ako i samo ako je*

$$n = 2^\alpha 5^\beta \qquad \text{za neke } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz. Ako je $m/n = k/10^r$, onda $m10^r = kn$. Kako su m i n relativno prosti, n dijeli $10^r = 2^r 5^r$. Prema jedinstvenosti rastava prirodnoga broja na proste faktore, jedini mogući prosti faktori od n jesu 2 i 5. Za $n = 1$ uzimamo $\alpha = \beta = 0$.

Obratno, neka je $n = 2^\alpha 5^\beta$ i stavimo $r = \max\{\alpha, \beta\}$. Tada

$$\frac{m}{n} = \frac{m\,2^{r-\alpha}5^{r-\beta}}{10^r},$$

pa broj ima konačan decimalni zapis. □

Primjer 1.1.17. Brojevi $3/8 = 0.375$ i $7/20 = 0.35$ imaju konačan decimalni zapis, a broj $1/3$ ga nema. Bitan je nazivnik nakon kraćenja: primjerice, $3/6 = 1/2 = 0.5$.

Za realan broj t njegova je *apsolutna vrijednost* definirana s

$$|t| := \begin{cases} t, & t \geqslant 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$$

Izraz $|x - d|$ mjeri udaljenost brojeva x i d na brojevnom pravcu.

Za približno računanje važno je sljedeće pitanje: možemo li svaki realan broj aproksimirati brojem s konačnim decimalnim zapisom uz proizvoljno malu pogrešku?

Trebat će nam *Arhimedovo svojstvo* realnih brojeva:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) \quad x < n. \tag{1.6}$$

To svojstvo u ovom uvodu prihvaćamo bez dokaza; kasnije se može izvesti iz potpunosti od $\mathbb{R}$. Ono nije posljedica samo aksioma uređenog polja.

Geometrijski to svojstvo kaže da se dovoljno mnogim uzastopnim nanošenjima jedinične dužine može prijeći bilo koja unaprijed zadana točka pravca. I po tome vidimo da su stari grci brojeve shvaćali geometrijski. Općenitije, za $h > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $nh > x$: dovoljno je primijeniti (1.6) na x/h.

Lema 1.1.18. *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji točno jedan $k \in \mathbb{Z}$ takav da je*

$$k \leqslant x < k + 1.$$

Taj broj zovemo najvećim cijelom *broja x i označavamo $\lfloor x \rfloor$.*

Dokaz. Najprije neka je $x \geqslant 0$. Prema (1.6) skup

$$\{n \in \mathbb{N} : x < n\}$$

neprazan je, pa prema propoziciji 1.1.8 ima najmanji element n. Ako je $n = 1$, onda je $0 \leqslant x < 1$. Ako je $n > 1$, minimalnost daje $n - 1 \leqslant x < n$. U oba slučaja možemo uzeti $k = n - 1$.

Za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$ odaberimo $M \in \mathbb{N}$ takav da je $M > -x$. Tada je $x + M > 0$, pa već dokazani slučaj daje cijeli j za koji je

$$j \leqslant x + M < j + 1.$$

Broj $k = j - M$ ima traženo svojstvo.

Ako bi ga imala dva cijela broja $k < l$, tada bi bilo

$$k + 1 \leqslant l \leqslant x < k + 1,$$

što je proturječje. Zato je k jedinstven. □

Primjerice, $\lfloor 2.7 \rfloor = 2$, ali $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$. Najveće cijelo negativnog broja općenito ne dobivamo brisanjem znamenaka iza decimalne točke.

Teorem 1.1.19. *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaki $n \in \mathbb{N}_0$ postoji broj d_n s konačnim decimalnim zapisom takav da je*

$$d_n \leqslant x < d_n + 10^{-n}. \tag{1.7}$$

Posebno, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji takav broj d za koji je $|x - d| < \varepsilon$.

Dokaz. Primijenimo lemu 1.1.18 na $10^n x$ i stavimo

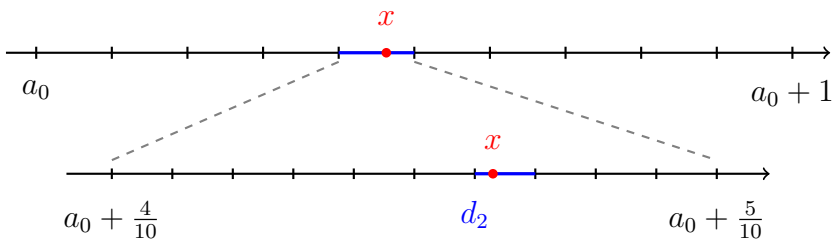
$$k_n := \lfloor 10^n x \rfloor, \qquad d_n := \frac{k_n}{10^n}.$$

Iz $k_n \leqslant 10^n x < k_n + 1$ dijeljenjem s $10^n > 0$ dobivamo (1.7).

Za zadani $\varepsilon > 0$ odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > 1/\varepsilon$. Indukcijom lako provjeravamo $10^n \geqslant n + 1$, pa je $10^{-n} < \varepsilon$. Stoga vrijedi

$$0 \leqslant x - d_n < 10^{-n} < \varepsilon.$$ □

Primijetimo da dokaz ne koristi limes niza niti beskonačne sume, koje uostalom još nismo ni obradili. On za svaku unaprijed zadanu točnost daje konačan broj koraka dovoljan za postizanje te točnosti.



Slika prikazuje prve dvije podjele na deset dijelova za broj čije su prve dvije decimalne znamenke 4 i 6. Svaki put zadržavamo dio koji sadrži x; lijevi kraj je uključen, a desni nije.

Za $x \geqslant 0$ aproksimacije iz dokaza doista nastaju dodavanjem decimalnih znamenaka. Stavimo $a_0 = k_0$ i

$$a_n := k_n - 10k_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Iz

$$k_{n-1} \leqslant 10^{n-1} x < k_{n-1} + 1$$

slijedi

$$10k_{n-1} \leqslant 10^n x < 10k_{n-1} + 10,$$

pa je

$$10k_{n-1} \leqslant k_n \leqslant 10k_{n-1} + 9.$$

Dakle, $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, a uzastopnim uvrštavanjem dobivamo

$$d_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}. \tag{1.8}$$

Tako svakom nenegativnom realnom broju pridružujemo beskonačan decimalni zapis

$$a_0.a_1a_2a_3\ldots.$$

Za negativan x najprije zapisujemo $-x > 0$, a zatim stavljamo minus ispred cijeloga zapisa. Za takav zapis odsijecanjem znamenaka dobivamo aproksimaciju "prema nuli", koja se može razlikovati od donje aproksimacije d_n iz teorema.

Smisao beskonačnoga decimalnog zapisa treba precizirati. Kažemo da znamenke a_0, a_1, a_2, ... predstavljaju nenegativan broj x ako njihove konačne vrijednosti (1.8) zadovoljavaju

$$0 \leqslant x - d_n \leqslant 10^{-n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{1.9}$$

Ako iste znamenke predstavljaju x i y, oba broja leže između d_n i $d_n + 10^{-n}$, pa je $|x-y| \leqslant 10^{-n}$ za svaki n. Kad bi bilo $x \neq y$, mogli bismo odabrati n s $10^{-n} < |x-y|$, što je proturječje. Zato jedan zapis predstavlja najviše jedan broj.

Obratno, jedan broj može imati dva zapisa. Na primjer,

$$1.000\ldots = 0.999\ldots,$$

jer je konačna vrijednost zapisa s n devetki jednaka $1 - 10^{-n}$. Prema tome, obje strane predstavljaju broj 1 u smislu (1.9). Algoritam s najvećim cijelom za broj 1 odabire prvi zapis.

Za tvrdnju da *svaki proizvoljno zadani* beskonačan niz decimalnih znamenaka predstavlja realan broj potrebno je svojstvo potpunosti $\mathbb{R}$ kojeg ćemo kasnije obraditi; tu tvrdnju nismo koristili u dokazu aproksimacije.

Korolar 1.1.20. *Između svaka dva realna broja $a < b$ nalazi se racionalan broj.*

Dokaz. Odaberimo n tako da je $10^{-n} < b - a$ te stavimo

$$k = \lfloor 10^n a \rfloor + 1, \qquad q = \frac{k}{10^n}.$$

Tada je

$$a < q \leqslant a + 10^{-n} < b,$$

a $q \in \mathbb{Q}$. □

Kažemo da je $\mathbb{Q}$ *gust u* $\mathbb{R}$. Ova je tvrdnja jača od prethodno dokazane gustoće $\mathbb{Q}$ u sebi, jer krajevi a, b sada mogu biti i iracionalni. Dokaz zapravo pokazuje da su već brojevi s konačnim decimalnim zapisom gusti u $\mathbb{R}$.

Zadatak 1.1.4. Za $n \in \mathbb{N}_0$ definirajmo

$$r_n = 10^{-n} \left\lfloor 10^n x + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Dokažite da je

$$|x - r_n| \leqslant \frac{1}{2}\, 10^{-n}.$$

Usporedite r_2 i d_2 iz teorema 1.1.19 za $x = 2.718$ i za $x = -2.718$. Opišite razliku između ovakvog zaokruživanja i aproksimacije odozdo. (Zapravo se kod pravog zaokruživanja standardno koristi "najmanje cijelo" u gornjoj formuli.)

Zadatak 1.1.5. Dokažite da između svaka dva realna broja postoji i iracionalan broj.

Uputa: Za $a < b$ primijenite korolar 1.1.20 na $a - \sqrt{2}$ i $b - \sqrt{2}$ te dobivenom racionalnom broju pribrojite $\sqrt{2}$.

1.1.4. Kartezijev produkt i koordinatna ravnina

U skupu redoslijed elemenata nije bitan. Kada redoslijed želimo sačuvati, koristimo *uređeni par* (a, b), čija je prva komponenta a, a druga b. Njegovo osnovno svojstvo jest

$$(a, b) = (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \text{ i } b = d.$$

Posebno, $(a, b) = (b, a)$ vrijedi ako i samo ako je $a = b$. Zato uređeni par ne smijemo poistovjetiti s dvočlanim skupom $\{a, b\}$, niti zahtijevati da njegove komponente budu različite. (Već su nam razlomci m/n bili "egzotično" pisani uređeni parovi (m, n), premda o njima obično ne razmišljamo tako.)

Sasvim usput napomenimo da su matematičari razmišljali kako izgraditi uređeni par samo koristeći skupovne operacije. Kuratowski je predložio definiciju

$$(a, b) := \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}.$$

Ipak, primijetimo da je ona krajnje nepraktična za daljnju izgradnju brojevnih struktura. Uređeni par možemo tako definirati, ali nikada o njemu ne razmišljamo na taj način!

Definicija 1.1.21. Kartezijev produkt *skupova A i B jest skup*

$$A \times B := \{(a, b) \,:\, a \in A,\ b \in B\}.$$

Posebno, pišemo $A^2 := A \times A$.

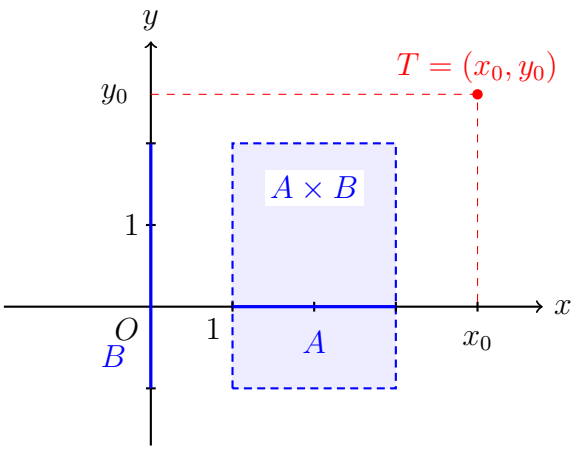
Primjer 1.1.22. Ako je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{u, v, w\}$, tada je

$$A \times B = \{(1, u), (1, v), (1, w), (2, u), (2, v), (2, w)\}.$$

Za $A \times B$ prvu komponentu biramo iz A, a drugu iz B; u skupu $B \times A$ uloge su obrnute. Ako je barem jedan od skupova prazan, njihov je Kartezijev produkt prazan.

U ravnini odaberimo dva međusobno okomita brojevna pravca s istim ishodištem O i jednakom jediničnom duljinom. Nazivamo ih *koordinatnim osima*: vodoravna je x-os ili *os apscisa*, a okomita y-os ili *os ordinata*.

Svakoj točki T pridružujemo uređeni par (x_0, y_0) tako da kroz T povučemo paralele koordinatnim osima. Broj x_0 očitavamo na x-osi, a y_0 na y-osi. Obratno, svaki uređeni par realnih brojeva određuje jedinstvenu točku kao sjecište pravca paralelnog y-osi kroz $(x_0, 0)$ i pravca paralelnog x-osi kroz $(0, y_0)$.



Ravninu s odabranim koordinatnim sustavom tako poistovjećujemo sa skupom

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Na slici je osim točke T prikazan i produkt $A \times B$, gdje je

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x \leqslant 3\}, \qquad B = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leqslant y \leqslant 2\}.$$

To je pravokutnik zajedno sa svojim rubom. Ovaj će nam prikaz uskoro omogućiti da funkciju realne varijable predočimo njezinim grafom.

Zadatak 1.1.6. Za skupove A, B, C dokažite

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

Nacrtajte skupove $\{0, 1\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ i $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Kada je $A \times B = \emptyset$?

Koordinatizaciju ravnine zasad opet treba prihvatiti prvenstveno na temelju geometrijskog zora.

1.2. Funkcije

Mnoge pojave opisujemo tako da jednoj veličini pridružujemo drugu: vremenu položaj tijela, duljini stranice površinu kvadrata, a broju njegovu apsolutnu vrijednost. Zajednička je značajka takvih pridruživanja da svakom dopuštenom argumentu pripada točno jedna vrijednost. Tu ćemo ideju sada precizirati, a potom proučiti osnovne primjere funkcija.

Definicija 1.2.1. *Neka su D i K skupovi.* Funkcija $f\colon D \to K$ *određena je skupom D, skupom K i pravilom koje svakom elementu $x \in D$ pridružuje točno jedan element $f(x) \in K$. Skup D zovemo* domenom *ili* područjem definicije*, a skup K* kodomenom *funkcije f. Element x zovemo* argumentom*, a $f(x)$* vrijednošću *funkcije u x, odnosno* slikom *elementa x.*

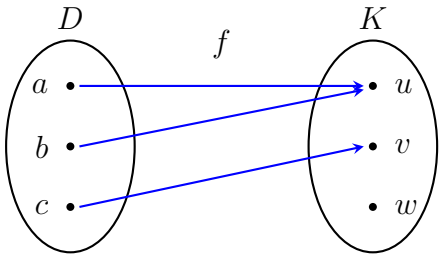
Slika funkcije *jest skup*

$$\mathcal{R}_f = f(D) := \{f(x) \,:\, x \in D\} \subseteq K,$$

a njezin graf *jest skup*

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \,:\, x \in D\} \subseteq D \times K.$$

Pravilo pridruživanja ne mora biti zadano formulom. Možemo ga opisati riječima, tablicom ili dijagramom. Važno je da svakom argumentu pripada točno jedna vrijednost.



$f(D) = \{u, v\} \subset K$

Funkciju možemo zadati domenom D, kodomenom K i grafom $\Gamma \subseteq D \times K$ koji zadovoljava

$$(\forall x \in D)(\exists! y \in K) \quad (x, y) \in \Gamma.$$

U teoriji skupova se funkcija rigorozno definira (također kao skup) upravo tako da se poistovjećuje sa svojim grafom, ali to ovdje nećemo raditi.

Kodomena i slika funkcije nisu isti pojam. Na prikazanom dijagramu w pripada kodomeni, ali nije vrijednost funkcije. Slično, funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ima kodomenu $\mathbb{R}$, a slika joj je skup nenegativnih realnih brojeva. Postojanje kvadratnoga korijena, koje nam ovdje daje svaki nenegativan broj kao kvadrat, podrobnije ćemo razmotriti u mnogo kasnijem pododjeljku o korijenima.

Domena i kodomena dio su podataka kojima je funkcija zadana. Zapamtimo da su funkcije $f\colon D \to K$ i $g\colon D' \to K'$ *jednake* ako i samo ako su im jednake domene (tj. $D = D'$), kodomene (tj. $K = K'$) i pravila pridruživanja. Promijenimo li samo kodomenu, graf može ostati isti, ali prema toj konvenciji dobivamo drugu funkciju.

U definiciji nismo zahtijevali da skupovi budu neprazni. Za svaki skup K postoji točno jedna funkcija $\emptyset \to K$: njezin je graf prazan skup. Funkcija iz nepraznoga skupa u $\emptyset$ ne postoji, jer nijednom argumentu ne bismo mogli pridružiti vrijednost. U primjerima realnih funkcija uglavnom ćemo promatrati neprazne domene.

Definicija 1.2.2. *Neka je $f\colon D \to K$ i $D' \subseteq D$.* Restrikcija *ili* suženje *funkcije f na D' jest funkcija*

$$f|_{D'}\colon D' \to K, \qquad f|_{D'}(x) := f(x) \quad (x \in D').$$

Kažemo i da je f proširenje *funkcije $f|_{D'}$.*

Restrikcija zadržava kodomenu. Ako uz suženje domene želimo promijeniti i kodomenu, to ćemo izričito navesti. Primjerice, za $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,4,9\}$, $f(x) = x^2$, restrikcija na $\{1,2\}$ i dalje ima kodomenu $\{1,4,9\}$, premda joj je slika $\{1,4\}$.

1.2.1. Realne funkcije i njihova svojstva

Funkciju čija je domena podskup od $\mathbb{R}$, a vrijednosti realni brojevi, zovemo *realnom funkcijom realne varijable*. Najčešće ćemo pisati $f\colon D \to \mathbb{R}$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}$.

Za realne brojeve $a < b$ koristit ćemo oznake

$$\langle a,b\rangle := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \qquad [a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$[a,b\rangle := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, \qquad \langle a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}.$$

To su redom otvoreni, zatvoreni i dva poluotvorena intervala. Zatvoreni interval $[a,b]$ zovemo i *segmentom*. Nadalje,

$$\langle a,+\infty\rangle := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \qquad \langle -\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\},$$

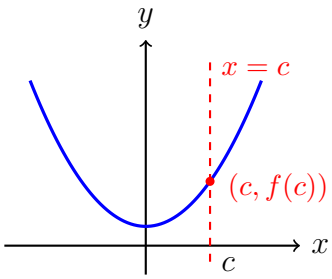
a analogno definiramo ostale neograničene intervale (geometrijski gledano polupravce). Simboli $-\infty$ i $+\infty$ ovdje nisu realni brojevi niti uključeni krajevi. Općenito, skup $I \subseteq \mathbb{R}$ zovemo *intervalom* ako sa svaka svoja dva elementa sadrži i sve realne brojeve između njih. Po toj definiciji intervali su i $\mathbb{R}$, jednočlani skupovi i $\emptyset$.

Ako je funkcija f zadana realnim algebarskim izrazom, a domena nije posebno navedena, njezinom *prirodnom domenom* ili *prirodnim područjem definicije* $\mathcal{D}_f$ zovemo najveći skup realnih argumenata za koje taj izraz ima smisla kao realan broj. Primjerice, izraz

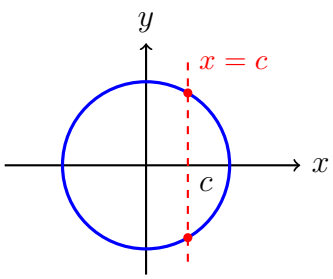
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

definiran je upravo za $x \neq -1, 1$ pa je prirodna domena $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Isti se izraz može upotrebljavati i na manjoj, unaprijed zadanoj domeni.

Graf realne funkcije nalazi se u ravnini. Za svaki $c \in D$ vertikalni pravac $x = c$ siječe graf u točno jednoj točki, i to u $(c, f(c))$; za $c \notin D$ nema sjecišta. To je *test okomitih pravaca*. Uvjet "najviše jedno sjecište" dovoljan je kada domenu tek određujemo kao skup prvih koordinata točaka zadanoga grafa. Na grafu vidimo domenu i sliku funkcije, ali iz njega ne možemo odrediti je li za kodomenu odabran i neki veći skup.



graf funkcije
točno jedno sjecište



nije graf funkcije $x \mapsto y$
dva sjecišta za isti c

Definicija 1.2.3. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$. Za funkciju $f\colon D \to \mathbb{R}$ kažemo da je*

(a) rastuća *ako $x_1 < x_2$ povlači $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;*

(b) strogo rastuća *ako $x_1 < x_2$ povlači $f(x_1) < f(x_2)$;*

(c) padajuća *ako $x_1 < x_2$ povlači $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;*

(d) strogo padajuća *ako $x_1 < x_2$ povlači $f(x_1) > f(x_2)$,*

pri čemu se svaki uvjet zahtijeva za sve $x_1, x_2 \in D$. Rastuće i padajuće funkcije zajednički zovemo monotonima*, a strogo rastuće i strogo padajuće* strogo monotonima.

Za rastuću funkciju upotrebljava se i naziv *neopadajuća*, a za padajuću naziv *nerastuća*. Pridjev "strogo" zato ne smijemo izostavljati kada je bitan: konstantna funkcija istodobno je rastuća i padajuća, ali na domeni s barem dva elementa nije strogo monotona.

Primjer 1.2.4. Funkcija $f(x) = x^2$ strogo raste na $[0, +\infty\rangle$ jer za $0 \leqslant u < v$ vrijedi $v^2 - u^2 = (v-u)(v+u) > 0$. Na $\langle -\infty, 0]$ strogo pada, a na cijeloj domeni $\mathbb{R}$ nije monotona.

Ni monotonost na svakom od dijelova domene ne mora dati monotonost na njihovoj uniji. Funkcija $g(x) = 1/x$ strogo pada na svakom od intervala $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty\rangle$, jer je za $u < v$ istoga predznaka

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v-u}{uv} > 0.$$

Ipak, ona nije padajuća na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: imamo $-1 < 1$, ali $g(-1) < g(1)$.

Definicija 1.2.5. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ simetričan s obzirom na 0, tj. $x \in D$ povlači $-x \in D$. Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ je* parna *ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki $x \in D$, a* neparna *ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in D$.*

Graf parne funkcije simetričan je s obzirom na y-os, a graf neparne funkcije centralno simetričan s obzirom na ishodište. Primjerice, $x \mapsto x^2$ je parna, a $x \mapsto x^3$ neparna funkcija. Ako je f neparna i $0 \in D$, tada je $f(0) = -f(0)$, pa je $f(0) = 0$. Uvjet simetričnosti domene potreban je da bi izrazi $f(x)$ i $f(-x)$ uopće bili istodobno definirani.

Definicija 1.2.6. *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ je* omeđena *ako postoji $M \geqslant 0$ takav da je $|f(x)| \leqslant M$ za svaki $x \in D$. Kažemo da f u točki $x_0 \in D$ postiže* minimum *na D ako je $f(x_0) \leqslant f(x)$ za svaki $x \in D$; za* maksimum *tražimo $f(x_0) \geqslant f(x)$ za svaki $x \in D$.*

Zadatak 1.2.1. Pokažite da je funkcija na simetričnoj domeni istodobno parna i neparna ako i samo ako je svuda jednaka nuli. Za proizvoljnu funkciju f na takvoj domeni provjerite da su

$$f_{\mathrm{p}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad f_{\mathrm{n}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

redom parna i neparna funkcija te da je $f = f_{\mathrm{p}} + f_{\mathrm{n}}$.

Zadatak 1.2.2. Može li se svaka funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prikazati kao zbroj rastuće i padajuće funkcije? Obrazložite.

Zadatak 1.2.3.* Može li se svaka funkcija $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ prikazati kao zbroj dviju injekcija? Može li se svaka funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prikazati kao zbroj dviju injekcija? Obrazložite. *Napomena:* za rješenje ovog zadatka potrebno je znanje naprednije teorije skupova.

1.2.2. Kompozicija i inverzna funkcija

Definicija 1.2.7. *Neka su $f\colon D \to K$ i $g\colon D' \to K'$ funkcije za koje je $\mathcal{R}_f \subseteq D'$.* Kompozicija *funkcija f i g jest funkcija*

$$g \circ f\colon D \to K', \qquad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

U izrazu $g \circ f$ najprije primjenjujemo f, a zatim g. Ako uvjet $\mathcal{R}_f \subseteq D'$ nije ispunjen, formula $g(f(x))$ još uvijek može zadati funkciju na manjoj domeni

$$\{x \in D \,:\, f(x) \in D'\}.$$

Tada zapravo komponiramo g s restrikcijom funkcije f na gornji skup.

Propozicija 1.2.8. *Neka su $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ i $h\colon C \to D$. Tada je kompozicija asocijativna:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Ako je $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ identiteta, $\mathrm{id}_A(x) = x$, tada za svaku $f\colon A \to B$ vrijedi

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \qquad \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Dokaz. Obje kompozicije u prvoj jednakosti imaju domenu A i kodomenu D. Za svaki $x \in A$ vrijedi

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))) = ((h \circ g) \circ f)(x),$$

pa su funkcije jednake. Preostale tvrdnje slijede iz $f(\mathrm{id}_A(x)) = f(x)$ i $\mathrm{id}_B(f(x)) = f(x)$. □

Primjer 1.2.9. Kompozicija općenito nije komutativna. Za $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^2$, imamo

$$(g \circ f)(x) = (2x+1)^2, \qquad (f \circ g)(x) = 2x^2 + 1.$$

Primjerice, u $x = 1$ vrijednosti su redom 9 i 3. Ponekad je definirana samo jedna od dviju kompozicija, pa bez provjere domena nije smisleno ni pitati jesu li jednake.

Za realne funkcije f, g na zajedničkoj domeni D definiramo i zbroj, razliku i produkt po točkama:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Kvocijent f/g definiran je samo na $\{x \in D : g(x) \neq 0\}$. Ako se polazne domene razlikuju, za ove operacije najprije uzmemo njihov presjek.

Definicija 1.2.10. *Funkcija $f\colon D \to K$ je*

(a) injekcija *ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$, tj., ekvivalentno, $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$;*

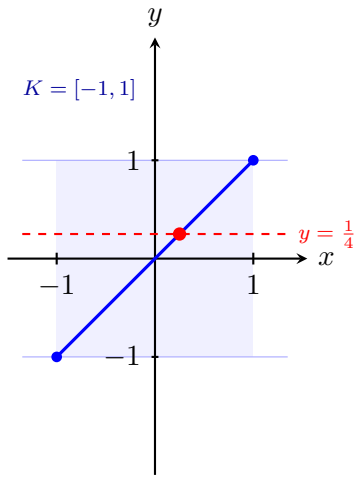
(b) surjekcija *ako je $\mathcal{R}_f = K$, tj. $(\forall y \in K)(\exists x \in D)\ f(x) = y$;*

(c) bijekcija *ako je istodobno injekcija i surjekcija.*

Dakle, f je bijekcija ako i samo ako za svaki $y \in K$ postoji točno jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$.

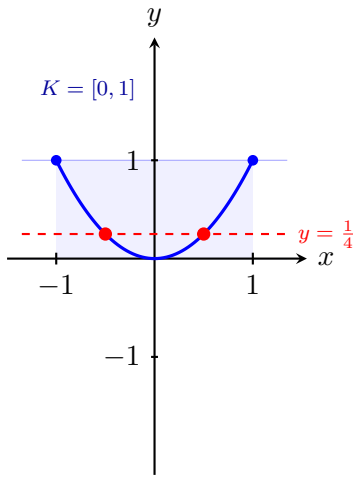
Na grafu realne funkcije injektivnost znači da svaki vodoravni pravac siječe graf u najviše jednoj točki. Surjektivnost na zadanu kodomenu $K \subseteq \mathbb{R}$ znači da za svaki $y \in K$ postoji barem jedno sjecište s pravcem te visine. Promjenom kodomene u $\mathcal{R}_f$ uvijek dobivamo surjekciju, ali time ne mijenjamo injektivnost.

$f\colon [-1,1] \to [-1,1], \quad f(x) = x$



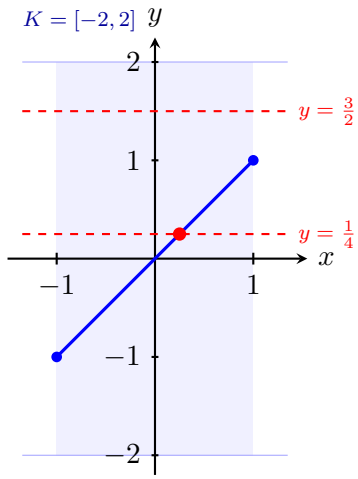
Injekcija i surjekcija
Svaki pravac $y = b$, $b \in K$, ima točno jedno sjecište.

$g\colon [-1,1] \to [0,1], \quad g(x) = x^2$



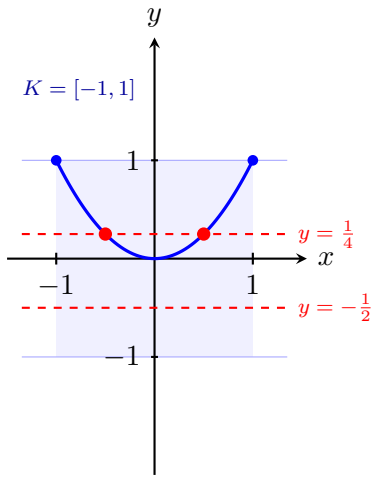
Surjekcija, nije injekcija
Svaka visina iz K je dosegnuta; pravac $y = \frac{1}{4}$ ima dva sjecišta.

$h\colon [-1,1] \to [-2,2], \quad h(x) = x$



Injekcija, nije surjekcija
Svaki vodoravni pravac ima najviše jedno sjecište; za $y = \frac{3}{2} \in K$ nema sjecišta.

$k\colon [-1,1] \to [-1,1], \quad k(x) = x^2$



Nije injekcija ni surjekcija
Za $y = \frac{1}{4}$ postoje dva sjecišta, a za $y = -\frac{1}{2} \in K$ nema sjecišta.

Definicija 1.2.11. *Za funkciju $f\colon D \to K$ kažemo da ima* inverznu funkciju *ako postoji $g\colon K \to D$ takva da je*

$$g \circ f = \mathrm{id}_D, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_K\,.$$

Takvu funkciju označavamo s f^{-1}.

Teorem 1.2.12. *Funkcija ima inverznu funkciju ako i samo ako je bijekcija. Inverzna funkcija, kada postoji, jedinstvena je.*

Dokaz. Neka $f\colon D \to K$ ima inverz g. Iz $f(x_1) = f(x_2)$ primjenom g dobivamo $x_1 = x_2$, pa je f injekcija. Za svaki $y \in K$ element $x = g(y)$ zadovoljava $f(x) = y$, pa je f surjekcija.

Obratno, ako je f bijekcija, svakom $y \in K$ pridružimo jedinstveni $x \in D$ za koji je $f(x) = y$ i označimo ga s $g(y)$. Time je zadana funkcija $g\colon K \to D$. Za $x \in D$ jedinstveni original od $f(x)$ jest upravo x, pa je $g(f(x)) = x$; iz definicije imamo i $f(g(y)) = y$ za svaki $y \in K$. Zato je g inverz od f.

Ako su g_1, g_2 dva inverza, tada za svaki $y \in K$ vrijedi

$$g_1(y) = g_1(f(g_2(y))) = g_2(y),$$

pa je $g_1 = g_2$. □

Propozicija 1.2.13. *Strogo monotona funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}$, injektivna je. Ako za kodomenu uzmemo $\mathcal{R}_f$, njezin inverz $f^{-1}\colon \mathcal{R}_f \to D$ također je strogo monoton (jednako rastući ili padajući kao f).*

Dokaz. Za $x_1 \neq x_2$ jedan je argument strogo manji od drugoga, pa stroga monotonost daje različite funkcijske vrijednosti. To dokazuje injektivnost, a surjektivnost na $f(D)$ vrijedi po definiciji slike.

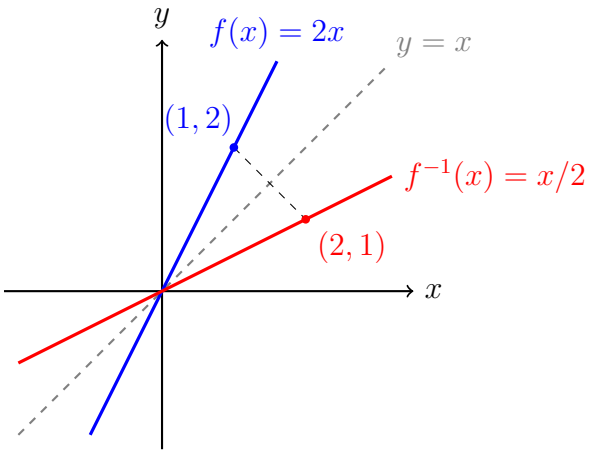
Neka je f strogo rastuća, $y_1 < y_2$ u $f(D)$ i $x_i = f^{-1}(y_i)$. Kad bi bilo $x_1 \geqslant x_2$, imali bismo $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$, što je proturječje. Zato je $x_1 < x_2$. Ako je f strogo padajuća, pretpostavka $x_1 \leqslant x_2$ na isti način daje $y_1 \geqslant y_2$, pa mora biti $x_1 > x_2$. □

Stroga monotonost jamči inverz *na slici funkcije*; ne dokazuje da je slika jednaka nekoj unaprijed željenoj kodomeni.

Graf inverza dobiva se zamjenom koordinata:

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(f(x), x) \,:\, x \in D\}.$$

Geometrijski, to je zrcaljenje grafa Γ_f s obzirom na pravac $y = x$, koji raspolavlja prvi i treći kvadrant.



Zadatak 1.2.4. Pokažite da je inverz bijekcije također bijekcija te da vrijedi $(f^{-1})^{-1} = f$. Za bijekcije $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ dokažite

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Navedite primjer injektivne funkcije $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja nije strogo monotona. *Uputa za posljednji dio:* zamijenite vrijednosti identitete u dvjema različitim točkama, a u ostalim točkama zadržite $f(x) = x$.

1.2.3. Afine funkcije i pravci

Definicija 1.2.14. *Funkciju* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadanu formulom*

$$f(x) = kx + l, \qquad k, l \in \mathbb{R},$$

zovemo afinom funkcijom. *Broj* k *njezin je* koeficijent smjera, *a* l slobodni član.

U srednjoškolskoj se nastavi ove funkcije često nazivaju linearnima. U linearnoj algebri naziv *linearna funkcija* rezerviran je za slučaj $l = 0$. Graf afine funkcije je pravac koji siječe y-os u točki $(0, l)$; broj l je ordinata te točke. Za $x_1 < x_2$ imamo

$$f(x_2) - f(x_1) = k(x_2 - x_1).$$

Zato je funkcija strogo rastuća za $k > 0$, strogo padajuća za $k < 0$, a konstantna za $k = 0$. Za $k \neq 0$ ona je bijekcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s inverzom $f^{-1}(y) = (y - l)/k$.

Zadatak 1.2.5. Neka su $f(x) = kx + l$ i $g(x) = mx + n$, gdje je $km \neq 0$. Provjerite formulu

$$(f \circ g)(x) = kmx + kn + l.$$

Dokažite da sve afine funkcije s nenultim koeficijentom smjera čine grupu za kompoziciju, s neutralnim elementom $x \mapsto x$. Grupa nije komutativna: usporedite kompozicije funkcija $x \mapsto 2x$ i $x \mapsto x + 1$ u oba redoslijeda. Dokažite da funkcije $x \mapsto kx$, $k \neq 0$, čine komutativnu podgrupu, tj. podskup zatvoren na kompoziciju i uzimanje inverza koji sadrži neutralni element i na kojem je kompozicija komutativna.

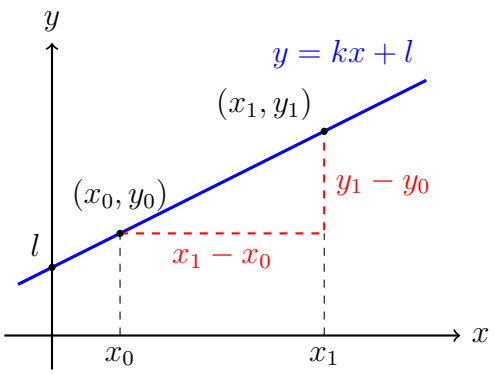
Pravac koeficijenta smjera k koji prolazi točkom (x_0, y_0) ima jednadžbu

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Ako su zadane dvije različite točke (x_0, y_0) i (x_1, y_1) s $x_0 \neq x_1$, uvrštavanje druge točke daje

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Ako je $x_0 = x_1$, pravac kroz te dvije točke ima jednadžbu $x = x_0$. Takav vertikalni pravac nije graf realne funkcije realne varijable: jednoj apscisi pripada više ordinata.



Ako pravac siječe koordinatne osi u točkama $(m, 0)$ i $(0, n)$, gdje su $m, n \neq 0$, njegova je jednadžba

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

To je *segmentni oblik* jednadžbe pravca. Uvjeti $m, n \neq 0$ nužni su za ovaj zapis; njime ne možemo opisati pravac kroz ishodište ni pravac paralelan nekoj osi.

1.2.4. Apsolutna vrijednost, udaljenost i pogreške

Prisjetimo se definicije apsolutne vrijednosti:

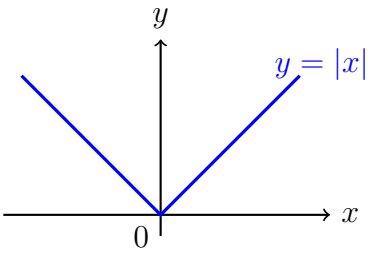
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

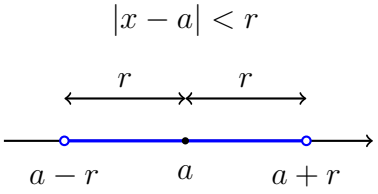
Iz nje odmah slijedi $|x| \geqslant 0$, $|x| = 0 \iff x = 0$, $|-x| = |x|$ i $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. Za $r \geqslant 0$ vrijedi

$$|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r,$$

a za $r > 0$ analogno je $|x| < r \iff -r < x < r$. Udaljenost realnih brojeva x i y mjerimo brojem $|x - y|$. Tako je za $r > 0$

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r.$$





Teorem 1.2.15. *Za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|, \tag{1.10}$$
$$|ab| = |a|\,|b|, \tag{1.11}$$
$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a-b|. \tag{1.12}$$

Prvu nejednakost zovemo nejednakošću trokuta*, a treću* obrnutom nejednakošću trokuta*.*

Dokaz. Zbrajanjem $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ i $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$ dobivamo

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|,$$

što je ekvivalentno nejednakosti (1.10).

Prema definiciji je $|t|^2 = t^2$ za svaki realan t. Zato nenegativni brojevi $u = |ab|$ i $v = |a|\,|b|$ imaju jednake kvadrate. Iz $(u-v)(u+v) = 0$ slijedi $u = v$: ako je $u + v = 0$, oba su broja nula, a inače možemo kratiti $u + v$. Time smo dokazali (1.11).

Konačno, po nejednakosti trokuta imamo

$$|a| = |(a-b) + b| \leqslant |a-b| + |b|,$$

odnosno $|a| - |b| \leqslant |a-b|$. Zamjena uloga a i b daje $|b| - |a| \leqslant |b-a| = |a-b|$, pa je

$$-|a-b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a-b|.$$

To je upravo (1.12). □

Naziv nejednakosti trokuta možemo objasniti udaljenostima: za $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|.$$

Put od x do z preko y ne može biti kraći od njihove izravne udaljenosti.

Zadatak 1.2.6. Indukcijom dokažite da za $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j|.$$

Dokažite i da je $|a/b| = |a|/|b|$ za $b \neq 0$. Kada u (1.10) vrijedi jednakost?

Definicija 1.2.16. *Ako broj $a \in \mathbb{R}$ zamjenjujemo aproksimacijom $a' \in \mathbb{R}$, broj $|a - a'|$ zovemo* apsolutnom pogreškom*. Za $a \neq 0$ broj*

$$\frac{|a-a'|}{|a|}$$

zovemo relativnom pogreškom*.*

Relativna pogreška uspoređuje pogrešku s veličinom točne vrijednosti. Na primjer, zamjena 100 brojem 100.1 ima apsolutnu pogrešku 0.1, a relativnu 0.001. Za točnu vrijednost $a = 0$ relativna pogreška po ovoj definiciji nije definirana. Kada a nije poznat, u praksi se koriste procjene pogreške; to ne mijenja njezinu definiciju.

Propozicija 1.2.17. *Neka su a', b' aproksimacije realnih brojeva a, b i neka je*

$$|a - a'| \leqslant \varepsilon_1, \qquad |b - b'| \leqslant \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geqslant 0.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned} |(a + b) - (a' + b')| &\leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ |(a - b) - (a' - b')| &\leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ |ab - a'b'| &\leqslant |a'|\varepsilon_2 + |b'|\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Dokaz. Označimo $e_1 = a - a'$ i $e_2 = b - b'$. Za zbroj i razliku tvrdnja slijedi iz $|e_1 \pm e_2| \leqslant |e_1| + |e_2|$. Za produkt koristimo identitet

$$ab - a'b' = (a' + e_1)(b' + e_2) - a'b' = a'e_2 + b'e_1 + e_1e_2$$

te teorem 1.2.15:

$$|ab - a'b'| \leqslant |a'|\,|e_2| + |b'|\,|e_1| + |e_1|\,|e_2| \leqslant |a'|\varepsilon_2 + |b'|\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2. \qquad \square$$

Ovo su gornje ograde pogrešaka, a ne tvrdnje o njihovim točnim veličinama. Pogreške se mogu i poništiti: za $a = b = 1$, $a' = 1.01$ i $b' = 0.99$ zbroj aproksimacija jednak je točnom zbroju. Veliki faktori mogu povećati utjecaj apsolutnih pogrešaka na produkt, ali iz toga ne slijedi da se pogreška nužno povećava pri svakoj računskoj operaciji. U ovim procjenama same operacije s a', b' izvodimo točno; njihovo dodatno zaokruživanje donosi nove pogreške.

1.2.5. Kvadratne, polinomne i racionalne funkcije

Definicija 1.2.18. *Funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

zovemo kvadratnom funkcijom.

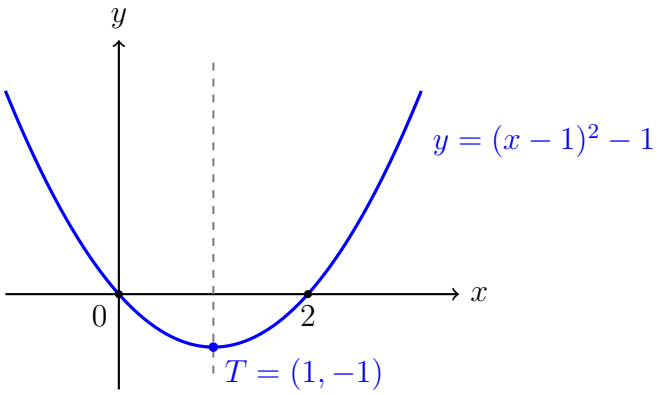
Nadopunjavanjem do potpunoga kvadrata dobivamo

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}, \qquad D = b^2 - 4ac. \tag{1.13}$$

Broj D zovemo *diskriminantom*. Graf je *parabola*, simetrična s obzirom na pravac $x = -b/(2a)$, s tjemenom

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right).$$

Za $a > 0$ funkcija ima najmanju vrijednost $-D/(4a)$, a za $a < 0$ najveću; u oba slučaja ona se postiže jedino za $x = -b/(2a)$. To slijedi izravno iz $(x + b/(2a))^2 \geqslant 0$, uz jednakost samo kada je izraz u zagradi jednak nuli.



Iz (1.13) slijedi da je $f(x) = 0$ ekvivalentno s $(2ax + b)^2 = D$. Ako je $D < 0$, nema realnih nultočaka. Ako je $D = 0$, jedina je nultočka $-b/(2a)$, a ako je $D > 0$, postoje dvije različite realne nultočke

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Ovdje koristimo školski poznato postojanje kvadratnog korijena: za svaki $D \geqslant 0$ postoji jedinstven broj $\sqrt{D} \geqslant 0$ čiji je kvadrat jednak D. Formula za nultočke posljedica je toga svojstva, a ne njegov dokaz.

Definicija 1.2.19. Polinom *s realnim koeficijentima izraz je*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Pridruženu funkciju $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zovemo* polinomnom funkcijom. *Ako je* $a_n \neq 0$, *onda je* $n \in \mathbb{N}_0$ stupanj *polinoma i pišemo* $\deg P = n$. *Ako su svi koeficijenti nula, dobivamo* nulpolinom. *U ovoj skripti nulpolinomu ne dodjeljujemo stupanj.*

Prema tome, nenulte konstante imaju stupanj 0. Pri računanju s polinomima zbrajamo koeficijente jednakih potencija, a množimo distributivno. Za nenulte polinome P, Q vrijedi

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q, \tag{1.14}$$

jer je vodeći koeficijent produkta jednak produktu njihovih nenultih vodećih koeficijenata.

Teorem 1.2.20 (Dijeljenje polinoma)**.** *Za polinome* P, Q, *gdje* Q *nije nulpolinom, postoje jedinstveni polinomi* S, R *takvi da je*

$$P = QS + R, \qquad R = 0 \text{ } \textit{ili} \text{ } \deg R < \deg Q.$$

Polinom S *zovemo* kvocijentom, *a* R ostatkom.

Dokaz. Ako je $P = 0$ ili $\deg P < \deg Q$, uzimamo $S = 0$ i $R = P$. Inače neka su $n = \deg P$, $m = \deg Q$, a a_n, b_m njihovi vodeći koeficijenti. Oduzimanjem

$$P_1 = P - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} Q$$

poništavamo član stupnja n. Zato je $P_1 = 0$ ili $\deg P_1 < n$. Ako P_1 još nema stupanj manji od m, ponovimo isti postupak. Stupanj se u svakom koraku strogo smanjuje, pa nakon konačno mnogo koraka dobivamo ostatak R traženoga oblika. Zbroj svih pritom izdvojenih monoma čini S, a zbrajanje oduzetih jednakosti daje $P = QS + R$.

Ako je i $P = Q\widetilde{S} + \widetilde{R}$ uz isti uvjet na ostatak, onda je

$$Q(S - \widetilde{S}) = \widetilde{R} - R.$$

Kad bi $S - \widetilde{S}$ bio nenulti polinom, lijeva bi strana prema (1.14) imala stupanj barem $\deg Q$, dok je desna nula ili ima manji stupanj. To je nemoguće. Dakle, $S = \widetilde{S}$, a zatim i $R = \widetilde{R}$. □

Korolar 1.2.21. *Za realan broj α vrijedi $P(\alpha) = 0$ ako i samo ako postoji polinom S takav da je $P(x) = (x - \alpha)S(x)$. Nenulti polinom stupnja n ima najviše n različitih realnih nultočaka.*

Dokaz. Pri dijeljenju s $x - \alpha$ ostatak je konstanta r. Uvrštavanjem $x = \alpha$ u $P(x) = (x - \alpha)S(x) + r$ dobivamo $r = P(\alpha)$, što dokazuje prvu tvrdnju.

Drugu tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Nenulta konstanta nema nultočaka. Ako polinom stupnja $n \geqslant 1$ nema nultočaka, tvrdnja je očita. Inače odaberimo nultočku α i napišimo $P = (x - \alpha)S$. Tada je $\deg S = n - 1$, a svaka nultočka $\beta \neq \alpha$ od P ujedno je nultočka od S, jer je $0 = (\beta - \alpha)S(\beta)$. Po pretpostavci indukcije takvih je brojeva najviše $n - 1$, pa ih zajedno s α ima najviše n. □

Posebno, polinomna funkcija jednoznačno određuje svoje koeficijente: razlika dvaju različitih polinoma ne može biti nula za svaki realan x. Od sada stoga bez opasnosti od zabune koristimo naziv polinom i za pripadnu funkciju. Uočimo da gornja ograda broja nultočaka ne jamči njihovo postojanje: polinom $x^2 + 1$ nema realnih nultočaka.

Dublji rezultat iz algebre kaže da se svaki nenulti realni polinom može rastaviti na realne linearne i kvadratne faktore:

$$P(x) = A \prod_{i=1}^{p} (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{q} (x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}, \qquad b_j^2 - 4c_j < 0.$$

Ovdje je $A \neq 0$, eksponenti su pozitivni cijeli brojevi, a jedan ili oba produkta mogu biti prazni, s vrijednošću 1. Stupanj je $\sum_i k_i + 2\sum_j l_j$. Ova tvrdnja slijedi iz osnovnog teorema algebre, koji jamči rastav nad kompleksnim brojevima na linearne faktore, uparivanjem konjugiranih nultočaka. Navodimo je bez dokaza; ona ne slijedi samo iz teorema o dijeljenju polinoma.

Definicija 1.2.22. Racionalna funkcija *zadana je kvocijentom polinoma*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdje Q nije nulpolinom. Prirodna domena ovoga izraza jest $D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

Prema korolaru 1.2.21 iz domene je isključeno konačno mnogo brojeva, najviše $\deg Q$. Teorem 1.2.20 daje, za svaki $x \in D$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \qquad R = 0 \text{ ili } \deg R < \deg Q.$$

Kada je brojnik nenulti polinom manjega stupnja od nazivnika, kvocijent zovemo *pravom racionalnom funkcijom.* Gornji zapis stoga rastavlja racionalnu funkciju na polinom i pravu racionalnu funkciju, uz mogućnost da je ostatak nula.

Primjer 1.2.23. Za $x \neq 1$ vrijedi

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

Funkcija na lijevoj strani ima prirodnu domenu $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Kraćenje faktora ne dodaje broj 1 njezinoj domeni. Funkcija $g(x) = x + 1$ na cijelom $\mathbb{R}$ njezino je proširenje; graf prvotne funkcije dobivamo uklanjanjem točke $(1, 2)$.

Razlomljeni linearni izraz

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

zahtijeva $(c, d) \neq (0, 0)$ kako nazivnik ne bi bio nulpolinom. Za $c = 0$ on daje afinu funkciju $(a/d)x + b/d$ na $\mathbb{R}$, konstantnu upravo kada je $a = 0$. Neka je sada $c \neq 0$ i označimo $\Delta = ad - bc$. Tada je

$$f(x) = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c^2}\frac{1}{x + d/c}, \qquad x \neq -\frac{d}{c}. \tag{1.15}$$

Ako je $\Delta = 0$, to je konstantna funkcija s vrijednošću a/c na domeni $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$.

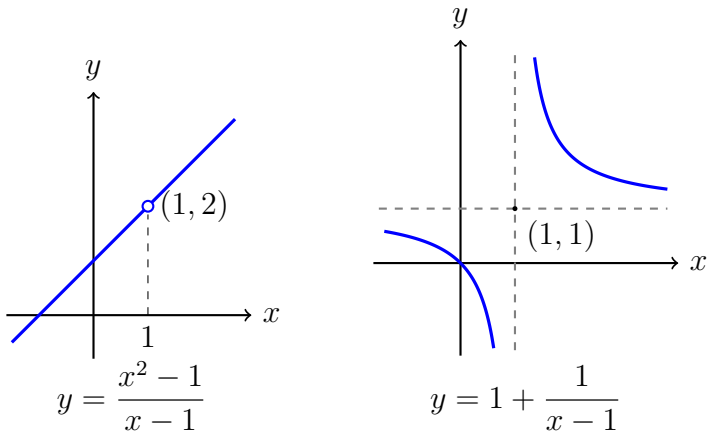
Ako je $\Delta \neq 0$, iz (1.15) vidimo da $f(x) \neq a/c$. Za svaki $y \neq a/c$ jednadžba $y = f(x)$ jednoznačno se rješava:

$$(cy - a)x = b - dy, \qquad x = \frac{b - dy}{cy - a}.$$

Dobiveni x doista pripada domeni, jer je $cx + d = -\Delta/(cy - a) \neq 0$. Dakle,

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-d/c\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$$

je bijekcija s inverzom $f^{-1}(y) = (b - dy)/(cy - a)$. Njezin graf dobivamo translacijom grafa $y = \gamma/x$, gdje je $\gamma = -\Delta/c^2 \neq 0$, za vektor $(-d/c, a/c)$. To je hiperbola sa središtem $(-d/c, a/c)$.



Zadatak 1.2.7. Podijelite $x^3 - 1$ s $x - 1$ i odredite sve realne nultočke polinoma $x^3 - 1$. Odredite domenu, sliku i inverz funkcije $f(x) = (2x + 1)/(x - 1)$, pri čemu za kodomenu uzmite njezinu sliku. Objasnite zašto funkcija $g(x) = (2x + 2)/(x + 1)$ na svojoj prirodnoj domeni nema inverznu funkciju.

1.2.6. Potencije i korijeni

Za $n \in \mathbb{N}$ funkcija $p_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, naziva se *potencijom s prirodnim eksponentom* n. Veza između potenciranja i korjenovanja primjer je konstrukcije inverzne funkcije, ali pritom treba odvojeno provjeriti injektivnost i sliku.

Propozicija 1.2.24. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija $x \mapsto x^n$ strogo je rastuća na $[0, +\infty\rangle$. Ako je n neparan, strogo je rastuća i neparna na cijeloj $\mathbb{R}$. Ako je n paran, parna je i strogo padajuća na $\langle -\infty, 0]$.*

Dokaz. Za $0 \leqslant u < v$ nejednakost $u^n < v^n$ dokazujemo indukcijom po n. Baza $n = 1$ jest pretpostavka. U koraku vrijedi

$$u^{n+1} = u^n u \leqslant v^n u < v^n v = v^{n+1},$$

jer je $u \geqslant 0$, $v^n > 0$ i $u < v$.

Ako je n neparan, tada je $(-x)^n = -x^n$. Za $u < v \leqslant 0$ imamo $0 \leqslant -v < -u$, pa je $(-v)^n < (-u)^n$, odnosno $u^n < v^n$. Za argumente s različitih strana nule tvrdnja slijedi iz predznaka njihovih potencija. Zajedno s prvim dijelom to daje strogi rast na $\mathbb{R}$.

Ako je n paran, tada je $(-x)^n = x^n$. Za $u < v \leqslant 0$ sada iz $(-v)^n < (-u)^n$ dobivamo $v^n < u^n$, što dokazuje strogi pad na negativnom polupravcu. □

Za određivanje slike potrebno nam je još *postojanje korijena*: za svaki $y > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ postoji $t > 0$ takav da je $t^n = y$. Tu činjenicu, poznatu iz škole, u ovom pregledu prihvaćamo; njezin dokaz iz svojstva potpunosti realnih brojeva dolazi kasnije. Ona ne slijedi iz same stroge monotonosti potencije. Jedinstvenost takvoga t, međutim, već slijedi iz propozicije 1.2.24. Za $y = 0$ jedino nenegativno rješenje jest $t = 0$.

Definicija 1.2.25. *Za $n \in \mathbb{N}$ i $y \geqslant 0$ jedinstveni nenegativni broj t takav da je $t^n = y$ označavamo s $\sqrt[n]{y}$ i zovemo n-tim* korijenom *broja y. Za neparan n oznaku proširujemo i na $y < 0$ pravilom*

$$\sqrt[n]{y} := -\sqrt[n]{-y}.$$

Za $n = 2$ uobičajeno pišemo $\sqrt{y}$ umjesto $\sqrt[2]{y}$.

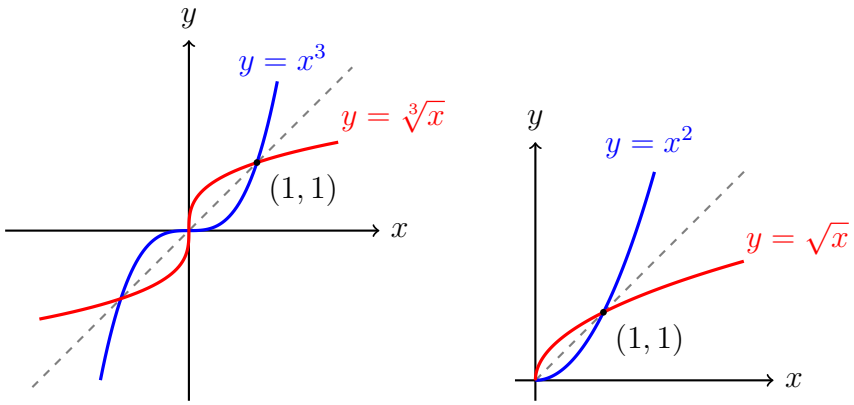
Prema tome, za neparan n potencija i korijen čine par inverznih bijekcija

$$p_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p_n(x) = x^n, \qquad p_n^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}.$$

Za paran n potencija na $\mathbb{R}$ nije injektivna, jer $p_n(-x) = p_n(x)$. Ograničenjem na $[0, +\infty\rangle$ i odabirom slike za kodomenu dobivamo bijekciju

$$p_{n,+} \colon [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle, \qquad p_{n,+}^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}.$$

Ograničenje na $\langle -\infty, 0]$ također je bijekcija na $[0, +\infty\rangle$, ali je njegov inverz $y \mapsto -\sqrt[n]{y}$. Prema propoziciji 1.2.13, korijeni su strogo rastući na svojim domenama; posljednja, negativna grana inverza strogo pada.



Propozicija 1.2.26. *Za $a, b \geqslant 0$ i $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Ako je još $b > 0$, vrijedi i

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Dokaz. Produkt $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ nenegativan je, a njegova n-ta potencija jednaka je ab. Po jedinstvenosti nenegativnoga korijena to je $\sqrt[n]{ab}$. Analogno, kvocijent u trećoj formuli nenegativan je i ima n-tu potenciju a/b. Konačno, ako je $t = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, tada je $t \geqslant 0$ i $t^{mn} = (t^m)^n = a$, pa je $t = \sqrt[mn]{a}$. □

Valja paziti na predznak pri obrnutom redoslijedu operacija:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n \text{ neparan}, \\ |x|, & n \text{ paran}, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Na primjer, $\sqrt{(-3)^2} = 3$, a ne -3. Također, korijen nije distributivan prema zbrajanju: $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 2 = \sqrt{1} + \sqrt{1}$.

Zadatak 1.2.8. Za proizvoljan $b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ odredite sva realna rješenja jednadžbe $x^n = b$. Razlikujte parnost broja n i predznak broja b. Za $a \geqslant b \geqslant 0$ dokažite

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leqslant a - b$$

te zaključite $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$ za sve $a, b \geqslant 0$.

1.2.7. Eksponencijalne i logaritamske funkcije

Neka je $a > 0$. Za prirodne eksponente potenciju a^n definiramo uzastopnim množenjem, a zatim stavljamo

$$a^0 := 1, \qquad a^{-n} := \frac{1}{a^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Pravila množenja i kraćenja daju $a^{m+k} = a^m a^k$ i $(a^m)^k = a^{mk}$ za $m, k \in \mathbb{Z}$. Na primjer, za negativan eksponent jednakost $a^m a^{-k} = a^{m-k}$ slijedi kraćenjem zajedničkih faktora ako je $m \geqslant k \geqslant 0$, a u ostalim slučajevima svođenjem na recipročne vrijednosti.

Definicija 1.2.27. *Za $a > 0$ i racionalan broj $q = m/n$, gdje su $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$, definiramo*

$$a^q := \sqrt[n]{a^m}.$$

Pritom uvijek uzimamo pozitivni n-ti korijen.

Najprije treba provjeriti da definicija ne ovisi o zapisu racionalnoga broja. Ako je $m/n = m'/n'$, tada je $mn' = m'n$. Pozitivni brojevi $u = \sqrt[n]{a^m}$ i $v = \sqrt[n']{a^{m'}}$ zadovoljavaju

$$u^{nn'} = a^{mn'} = a^{m'n} = v^{nn'}.$$

Zbog injektivnosti potenciranja pozitivnih brojeva prirodnim eksponentom slijedi $u = v$. Ovaj argument vrijedi i kada su brojnici negativni ili jednaki nuli.

Propozicija 1.2.28. *Za $a, b > 0$ i $q, r \in \mathbb{Q}$ vrijedi*

$$a^{q+r} = a^q a^r, \qquad (ab)^q = a^q b^q, \qquad (a^q)^r = a^{qr}.$$

Funkcija $q \mapsto a^q$ na $\mathbb{Q}$ strogo raste ako je $a > 1$, strogo pada ako je $0 < a < 1$, a konstantna je ako je $a = 1$.

Dokaz. Napišimo $q = m/n$ i $r = p/k$, uz $m, p \in \mathbb{Z}$ i $n, k \in \mathbb{N}$. Oba pozitivna broja a^{q+r} i $a^q a^r$, potencirana na nk, daju a^{mk+pn}, pa su jednaka. Slično, obje strane jednakosti $(ab)^q = a^q b^q$, potencirane na n, daju $(ab)^m = a^m b^m$. Za posljednji zakon iz definicije i pravila za cjelobrojne potencije dobivamo

$$\left((a^q)^r\right)^{kn} = \left((a^q)^p\right)^n = \left((a^q)^n\right)^p = a^{mp} = \left(a^{qr}\right)^{kn}.$$

Injektivnost potenciranja na kn daje traženu jednakost.

Neka je $a > 1$ i $q < r$. Pišemo $r - q = l/s$, gdje su $l, s \in \mathbb{N}$. Budući da je $a^l > 1$, vrijedi $a^{r-q} = \sqrt[s]{a^l} > 1$, pa je $a^r = a^q a^{r-q} > a^q$. Za $0 < a < 1$ primijenimo već dokazano na $1/a > 1$ i upotrijebimo jednakost $a^q = 1/(1/a)^q$. Slučaj $a = 1$ neposredan je iz definicije. □

Za iracionalan x prethodna definicija ne daje značenje izrazu a^x. Približavanje broja x racionalnim brojevima sugerira kako bismo ga mogli odrediti, ali samo po sebi ne dokazuje da tražena vrijednost postoji niti da ne ovisi o aproksimacijama. Ovdje ćemo se osloniti na sljedeći teorem o realnim brojevima.

Teorem 1.2.29 (Teorem o realnoj eksponencijalnoj funkciji)**.** *Za svaki $a > 0$, $a \neq 1$, postoji točno jedna strogo monotona bijekcija $E_a \colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ takva da je*

$$E_a(0) = 1, \qquad E_a(1) = a, \qquad E_a(x + y) = E_a(x)E_a(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ona proširuje funkciju $q \mapsto a^q$ s $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$. Strogo raste za $a > 1$, a strogo pada za $0 < a < 1$.

Teorem 1.2.29 zasad prihvaćamo bez dokaza. Njegovo potpuno opravdanje zahtijeva svojstvo potpunosti realnih brojeva i rezultate koje ćemo razviti kasnije. Posebno, ni postojanje proširenja ni njegova surjektivnost ne slijede samo iz gustoće racionalnih brojeva. Uvjet $a \neq 1$ nužan je: strogo monotona funkcija ne može imati jednake vrijednosti u 0 i 1.

Dio tvrdnji lako možemo provjeriti iz navedenih svojstava. Za cjelobrojni m funkcijska jednadžba daje $E_a(m) = a^m$, a za $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ daje

$$E_a(m/n)^n = E_a(m) = a^m.$$

Pozitivnost vrijednosti stoga povlači $E_a(m/n) = \sqrt[n]{a^m}$. Smjer stroge monotonosti određen je usporedbom $E_a(0) = 1$ i $E_a(1) = a$.

Definicija 1.2.30. *Funkciju iz teorema 1.2.29 nazivamo* eksponencijalnom funkcijom s bazom *a i pišemo*

$$E_a(x) = \exp_a(x) = a^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

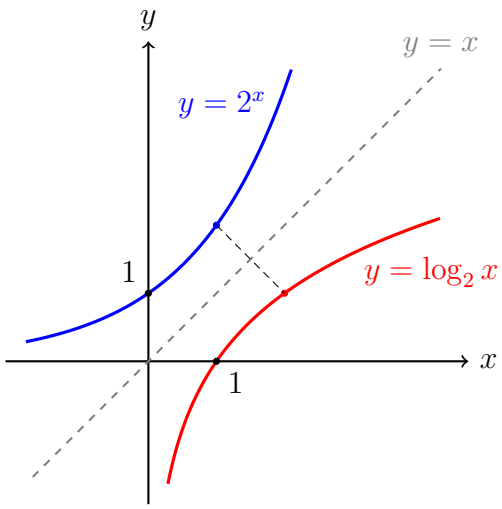
Za $a = 1$ zasebno definiramo $1^x := 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Za $a > 0$, $a \neq 1$, inverz eksponencijalne funkcije zovemo logaritamskom funkcijom s bazom *a i označavamo*

$$\log_a \colon \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}.$$

Dakle, za $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x, \qquad a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a(a^y) = y.$$

Posebno, $\log_a 1 = 0$ i $\log_a a = 1$. Prema propoziciji 1.2.13, logaritamska funkcija strogo raste za $a > 1$, a strogo pada za $0 < a < 1$. Njezin je graf zrcalna slika grafa eksponencijalne funkcije s obzirom na pravac $y = x$.



Propozicija 1.2.31. *Za $a > 0$, $a \neq 1$, i $x, y > 0$ vrijedi*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Dokaz. Ako je $u = \log_a x$ i $v = \log_a y$, tada je $xy = a^u a^v = a^{u+v}$, pa primjenom logaritma dobivamo prvu jednakost. Iz $1 = a^0 = a^v a^{-v}$ slijedi $a^{-v} = 1/a^v$, pa je $x/y = a^{u-v}$, što daje drugu. □

Među bazama osobito je važan *Eulerov broj* e. Njega možemo jednoznačno zadati zahtjevom

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Postojanje i jedinstvenost broja koji zadovoljava sve ove nejednakosti dokazat ćemo u poglavlju o nizovima; zasad ih prihvaćamo. Za $n = 1$ vidimo $e \geqslant 2 > 1$, a približna vrijednost jest $e \approx 2.718281828$. Oznake $\exp x := e^x$ i $\ln x := \log_e x$ standardne su; ln zovemo *prirodnim logaritmom*. Logaritam s bazom 10 zovemo *dekadskim logaritmom* i najjasnije ga je pisati kao $\log_{10}$.

Propozicija 1.2.32. *Za $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$a^x = e^{x \ln a}. \tag{1.16}$$

Za $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, vrijedi formula promjene baze

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad (x > 0).$$

Nadalje, za $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad (ab)^x = a^x b^x, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad \ln(a^x) = x \ln a.$$

Dokaz. Za $a \neq 1$ broj $\ln a$ različit je od nule. Funkcija $F(x) = e^{x \ln a}$ strogo je monotona bijekcija s $\mathbb{R}$ na $\langle 0, +\infty \rangle$, zadovoljava $F(x + y) = F(x)F(y)$ te $F(0) = 1$ i $F(1) = a$. Jedinstvenost iz teorema 1.2.29 zato daje $F(x) = a^x$. Za $a = 1$ formula vrijedi jer je $\ln 1 = 0$. Primjenom ln dobivamo i $\ln(a^x) = x \ln a$.

Ako je $u = \log_a x$, tada je $x = a^u$, pa je $\ln x = u \ln a$. Dakle, $\log_a x = \ln x / \ln a$. Primijenimo tu jednakost i s bazom b te skratimo nenulti broj $\ln b$; dobivamo formulu promjene baze. Nazivnik $\log_b a$ nije nula jer je $a \neq 1$.

Prvi zakon potenciranja već je svojstvo eksponencijalne funkcije. Ostali slijede iz (1.16) i propozicije 1.2.31:

$$(ab)^x = e^{x \ln(ab)} = e^{x \ln a + x \ln b} = a^x b^x, \qquad (a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{xy \ln a} = a^{xy}. \qquad \square$$

Za fiksiran $\alpha \in \mathbb{R}$ funkciju

$$p_\alpha \colon \langle 0, +\infty \rangle \to \langle 0, +\infty \rangle, \qquad p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

zovemo *potencijskom funkcijom s eksponentom* α. Za $\alpha > 0$ ona strogo raste, za $\alpha < 0$ strogo pada, a za $\alpha = 0$ konstantna je. Za $\alpha \neq 0$ njezin je inverz $p_{1/\alpha}$ jer je $(x^\alpha)^{1/\alpha} = x$. Time ujedno ponovno vidimo da je bijekcija na $\langle 0, +\infty \rangle$.

Važno je razlikovati $x \mapsto a^x$, gdje je baza fiksirana, od $x \mapsto x^\alpha$, gdje je fiksiran eksponent. Za opći realni α drugu funkciju definiramo na pozitivnim brojevima. Proširenja na 0 ili negativne argumente treba razmatrati zasebno; primjerice, x^2 ima smisla na cijeloj $\mathbb{R}$, a realna vrijednost $(-1)^{1/2}$ ne postoji.

Zadatak 1.2.9. Za $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ dokažite $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$. Riješite nejednakosti $2^x < 8$ i $(1/2)^x < 1/8$. Objasnite zašto se smjerovi dobivenih nejednakosti za x razlikuju.

1.2.8. Hiperbolne i area funkcije

Definicija 1.2.33. Hiperbolni sinus, hiperbolni kosinus, hiperbolni tangens *i* hiperbolni kotangens *definirani su formulama*

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} && (x \in \mathbb{R}),\\
\operatorname{ch} x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} && (x \in \mathbb{R}),\\
\operatorname{th} x &:= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} && (x \in \mathbb{R}),\\
\operatorname{cth} x &:= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} && (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}).
\end{aligned}$$

U drugim tekstovima susreću se i oznake sh, ch, th i cth. Iz definicije je $\operatorname{ch} x > 0$ za svaki x, a $\operatorname{sh} x = 0$ ako i samo ako je $x = 0$, pa su nazivnici različiti od nule upravo na navedenim domenama. Funkcije sh, th i cth neparne su, a ch je parna.

Propozicija 1.2.34. *Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1,\\
\operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,\\
\operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.
\end{aligned}$$

Dokaz. Prvu jednakost dobivamo rastavljanjem razlike kvadrata:

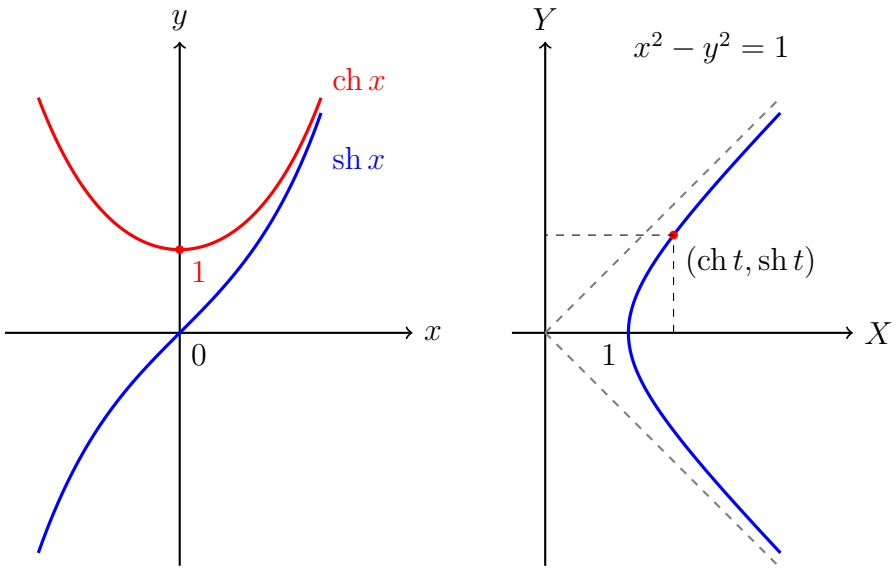
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = e^x e^{-x} = 1.$$

Za adicijske formule uvrstimo definicije i grupiramo članove:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} = \operatorname{sh}(x+y),\\
\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4} = \operatorname{ch}(x+y).
\end{aligned}$$

□

Prvi identitet objašnjava naziv hiperbolnih funkcija: točka $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ leži na desnoj grani hiperbole $x^2 - y^2 = 1$, analogno tome kako točka $(\cos t, \sin t)$ leži na jediničnoj kružnici. Parametar t ovdje nije kut točke na hiperboli; ima kompliciraniju geometrijsku interpretaciju.



Propozicija 1.2.35. *Funkcije* sh *i* th *strogo rastu na* $\mathbb{R}$. *Funkcija* ch *strogo pada na* $\langle -\infty, 0]$ *i strogo raste na* $[0, +\infty\rangle$. *Funkcija* cth *strogo pada na svakom od intervala* $\langle -\infty, 0\rangle$ *i* $\langle 0, +\infty\rangle$.

Dokaz. Funkcije e^x i $-e^{-x}$ strogo rastu, pa strogo raste i njihov poluzbroj $\operatorname{sh} x$. Iz $\operatorname{sh} 0 = 0$ slijedi $\operatorname{sh} x > 0$ za $x > 0$. Budući da je $\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$, funkcija ch strogo raste na $[0, +\infty\rangle$; parnost daje strogo padanje na $\langle -\infty, 0]$.

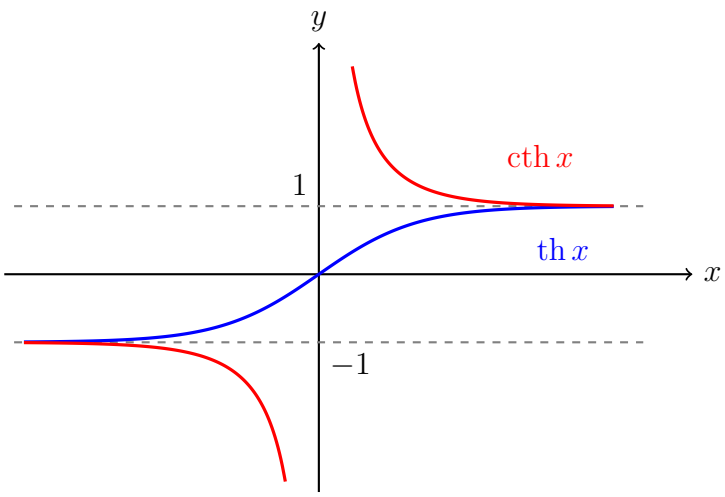
Za $x < y$ adicijske formule, neparnost hiperbolnog sinusa i parnost hiperbolnog kosinusa daju

$$\operatorname{th} y - \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y} = \frac{\operatorname{sh}(y - x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y} > 0.$$

Ako su $x < y$ istoga predznaka, analogno je

$$\operatorname{cth} y - \operatorname{cth} x = \frac{-\operatorname{sh}(y - x)}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y} < 0,$$

jer nazivnik tada ima pozitivan predznak. □



Funkcija cth nije strogo padajuća na cijeloj svojoj domeni: za $x < 0 < y$ imamo $\operatorname{cth} x < 0 < \operatorname{cth} y$. Ipak je injektivna. Na svakoj je grani injektivna zbog stroge monotonosti, a vrijednosti na dvjema granama različitih su predznaka. Nasuprot tome, ch na $\mathbb{R}$ nije injektivna, pa ćemo prije uzimanja inverza njezinu domenu suziti na $[0, +\infty\rangle$.

Propozicija 1.2.36. *Sljedeće funkcije s naznačenim domenama i kodomenama jesu bijekcije:*

$$\operatorname{sh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch}|_{[0,+\infty\rangle}\colon [0,+\infty\rangle \to [1,+\infty\rangle,$$
$$\operatorname{th}\colon \mathbb{R} \to \langle -1,1\rangle, \qquad \operatorname{cth}\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle.$$

Njihovi inverzi nazivaju se area funkcijama *i zadani su formulama*

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsh} y &= \ln\bigl(y + \sqrt{y^2+1}\bigr) && (y \in \mathbb{R}),\\
\operatorname{arch} y &= \ln\bigl(y + \sqrt{y^2-1}\bigr) && (y \in [1,+\infty\rangle),\\
\operatorname{arth} y &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} && (y \in \langle -1,1\rangle),\\
\operatorname{arcth} y &= \frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1} && (y \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle).
\end{aligned}$$

Kodomena funkcije arch *jest* $[0,+\infty\rangle$*, kodomena funkcije* arcth *jest* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$*, a kodomene preostalih dviju area funkcija jesu* $\mathbb{R}$*.*

Dokaz. Injektivnost smo već dokazali. Za surjektivnost i formule inverza važno je krenuti od proizvoljnoga elementa navedene kodomene.

Neka je $y \in \mathbb{R}$. Broj $u = y + \sqrt{y^2+1}$ pozitivan je jer je $\sqrt{y^2+1} > |y|$, a množenjem dobivamo $u^{-1} = \sqrt{y^2+1} - y$. Za $x = \ln u$ stoga vrijedi

$$\operatorname{sh} x = \frac{u - u^{-1}}{2} = y.$$

Time su istodobno dokazane surjektivnost funkcije sh i formula za njezin inverz.

Neka je $y \geqslant 1$. Tada je $u = y + \sqrt{y^2-1} \geqslant 1$, $u^{-1} = y - \sqrt{y^2-1}$ i $x = \ln u \geqslant 0$, pa je $\operatorname{ch} x = (u + u^{-1})/2 = y$. Obratno, identitet $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$ i pozitivnost hiperbolnog kosinusa daju $\operatorname{ch} x \geqslant 1$. Dakle, slika ograničene funkcije upravo je $[1, +\infty\rangle$, uključujući vrijednost $\operatorname{ch} 0 = 1$.

Za $u > 0$ vrijedi $-1 < (u-1)/(u+1) < 1$, pa je $\operatorname{th} x \in \langle -1, 1\rangle$ za svaki x. Ako je $-1 < y < 1$, broj $u = (1+y)/(1-y)$ pozitivan je. Uzmemo li $x = (\ln u)/2$, dobivamo $e^{2x} = u$ i

$$\operatorname{th} x = \frac{u-1}{u+1} = y.$$

Za $x \neq 0$ imamo $\operatorname{th} x \neq 0$ i $\operatorname{cth} x = 1/\operatorname{th} x$, pa je $|\operatorname{cth} x| > 1$. Neka je sada $|y| > 1$. Broj $u = (y+1)/(y-1)$ pozitivan je i različit od 1: za $y > 1$ oba su člana razlomka pozitivna, a za $y < -1$ oba su negativna. Stoga je $x = (\ln u)/2 \neq 0$ i

$$\operatorname{cth} x = \frac{u+1}{u-1} = y.$$

To dokazuje i posljednju surjektivnost i formulu inverza. □

Zadatak 1.2.10. Dokažite da su arsh i arth neparne i strogo rastuće, a arcth neparna te strogo padajuća na svakom od intervala $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$. Za $x \in \mathbb{R}$ dokažite

$$\operatorname{arch}(\operatorname{ch} x) = |x|, \qquad \operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

Objasnite zašto u prvoj jednakosti ne smijemo zamijeniti $|x|$ brojem x bez dodatnog uvjeta $x \geqslant 0$.

1.2.9. Trigonometrijske i arkus funkcije

Trigonometrijske funkcije povezuju kutove s koordinatama točaka na kružnici. Koristit ćemo poznate činjenice euklidske geometrije o kutovima, duljinama lukova i zakretanjima ravnine. Kut mjerimo u *radijanima*: njegova je mjera omjer duljine pripadnoga luka i polumjera kružnice. Puni kut ima mjeru 2π, a pravi kut $\pi/2$. Pozitivan smjer obilaska kružnice suprotan je smjeru kazaljke na satu.

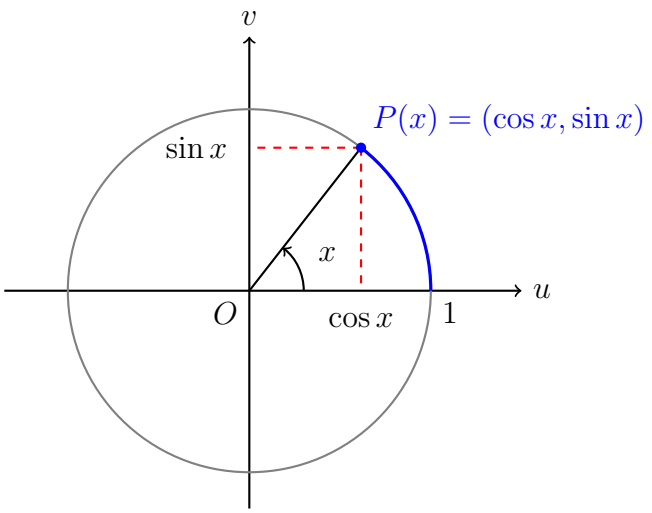
Neka je $K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$ jedinična kružnica. Za $0 \leqslant x < 2\pi$ označimo s $P(x)$ točku do koje dolazimo od $(1, 0)$ obilaskom kružnice u pozitivnom smjeru za kut x. Poznato geometrijsko pridruživanje $x \mapsto P(x)$ bijekcija je s $[0, 2\pi\rangle$ na K. Za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$ pišemo

$$x = 2k\pi + r, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant r < 2\pi,$$

i definiramo $P(x) := P(r)$. Broj $k = \lfloor x/(2\pi) \rfloor$ pokazuje da je takav zapis jedinstven. Time dopuštamo negativne kutove i više punih obilazaka.

Definicija 1.2.37. Kosinus *i* sinus *definiramo koordinatama točke* $P(x)$*:*

$$P(x) = (\cos x, \sin x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$



Iz jednadžbe kružnice odmah dobivamo

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Zrcaljenje preko vodoravne osi mijenja x u $-x$, pa je

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x.$$

Dakle, kosinus je parna, a sinus neparna funkcija. Sjecišta kružnice s koordinatnim osima daju

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi, \qquad \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Posebno, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin(\pi/2) = 1$ i $\cos(\pi/2) = 0$. Na gornjoj polukružnici sinus je pozitivan, tj. $\sin x > 0$ za $0 < x < \pi$; na desnoj polukružnici kosinus je pozitivan, tj. $\cos x > 0$ za $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Definicija 1.2.38. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, i $f\colon D \to \mathbb{R}$. Broj $\tau > 0$ je* period *funkcije f ako za svaki $x \in D$ vrijedi*

$$x - \tau \in D, \qquad x + \tau \in D, \qquad f(x + \tau) = f(x).$$

Funkcija je periodička *ako ima period. Ako skup njezinih pozitivnih perioda ima najmanji element, nazivamo ga* temeljnim periodom.

Uvjet na domenu znači $D + \tau = D$, gdje je $D + \tau = \{x + \tau : x \in D\}$. Važno je zahtijevati mogućnost pomicanja u oba smjera. Iz definicije slijedi i $f(x - \tau) = f(x)$ te, ponavljanjem, $f(x + k\tau) = f(x)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Periodička funkcija na nepraznoj domeni nije injektivna: x i $x + \tau$ različiti su argumenti s istom vrijednošću.

Primjer 1.2.39. Konstantna funkcija na $\mathbb{R}$ ima svaki pozitivan broj za period, pa nema temeljni period. Takvih primjera ima i među nekonstantnim funkcijama. Za funkciju

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

svaki je pozitivan racionalan broj period. Doista, pribrajanje racionalnoga broja čuva racionalnost i iracionalnost. Obratno, ako je τ period, onda $d(\tau) = d(0) = 1$, pa je $\tau \in \mathbb{Q}$. Svaki njezin period τ ima manji period $\tau/2$; zato ni ova funkcija nema temeljni period.

Geometrijska definicija pokazuje da su sinus i kosinus periodički s periodom 2π. Njihove osnovne identitete sada ćemo dokazati na način koji vrijedi za sve realne kutove.

Propozicija 1.2.40 (Adicijske formule)**.** *Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Dokaz. Uređene parove promatramo kao vektore te ih zbrajamo i množimo realnim brojem po koordinatama:

$$(u, v) + (s, t) = (u + s, v + t), \qquad a(u, v) = (au, av).$$

Zakretanje oko ishodišta za kut x preslikava vektore $(1, 0)$ i $(0, 1)$ redom u

$$(\cos x, \sin x), \qquad (-\sin x, \cos x).$$

Druga jednakost slijedi iz činjenice da je druga slika dobivena od prve dodatnim zakretanjem za pravi kut u pozitivnom smjeru. Zakretanje čuva zbrajanje vektora i množenje realnim brojem: to je geometrijsko svojstvo zakretanja, koje čuva paralelograme i usmjerene omjere na pravcima. Zato slika vektora $(u, v) = u(1, 0) + v(0, 1)$ ima koordinate

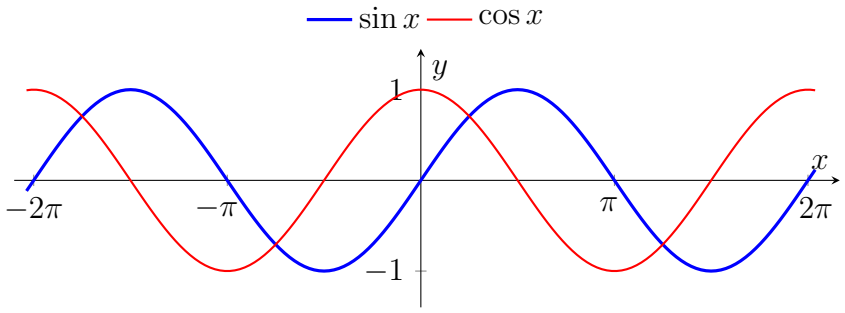
$$(u \cos x - v \sin x,\ u \sin x + v \cos x).$$

Primijenimo to na $(u, v) = P(y) = (\cos y, \sin y)$. Geometrijski je njegova slika $P(x+y)$, jer se kutovi uzastopnih zakretanja zbrajaju. Usporedba dviju koordinata daje obje formule. □

Uvrštavanjem posebnih kutova dobivamo, primjerice,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x,$$
$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \qquad \cos(x + \pi) = -\cos x.$$

Najmanji pozitivni period obiju funkcija doista je 2π. Ako je τ period kosinusa, onda je $\cos\tau = \cos 0 = 1$, pa je $P(\tau) = (1, 0)$ i τ je cjelobrojni višekratnik 2π. Ako je τ period sinusa, onda je $\sin\tau = 0$, pa je $\tau = k\pi$. Sada $\sin(\pi/2 + \tau) = \sin(\pi/2) = 1$ pokazuje da je k paran.



Korolar 1.2.41. *Za sve* $x, y \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big),$$
$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big),$$
$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big).$$

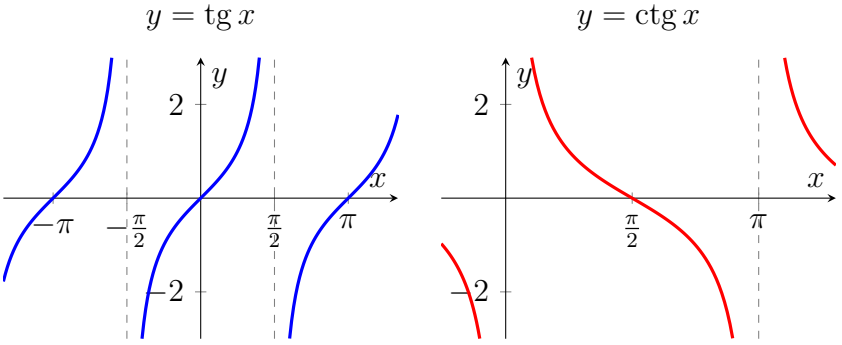
Dokaz. U adicijske formule uvrstimo najprije y, a zatim $-y$. Zbrajanje dviju formula za sinus daje prvu jednakost. Zbrajanje, odnosno oduzimanje formula za kosinus daje drugu, odnosno treću jednakost. □

Definicija 1.2.42. Tangens *i* kotangens *definiramo s*

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Tangens i kotangens neparne su funkcije. Adicijske formule pokazuju da je π period obiju funkcija. To je i njihov temeljni period: iz $\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg} 0 = 0$ slijedi $\tau = k\pi$; za kotangens se jednako zaključuje iz $\operatorname{ctg}(\pi/2 + \tau) = \operatorname{ctg}(\pi/2) = 0$. Jednakost $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$ vrijedi samo kada su $\sin x$ i $\cos x$ oba različiti od nule. Primjerice, $\operatorname{ctg}(\pi/2) = 0$, dok $\operatorname{tg}(\pi/2)$ nije definiran.

Tangens opisuje i nagib pravca. Ako nevertikalan pravac s pozitivnim smjerom vodoravne osi zatvara kut α, njegov koeficijent smjera jest $k = \operatorname{tg}\alpha$. Doista, usmjereni pomak po tom pravcu razmjeran je paru $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, pa je omjer promjene ordinata i promjene apscisa jednak $\sin\alpha/\cos\alpha$. Uvjet $\cos\alpha \neq 0$ upravo isključuje vertikalni pravac.



Prekidima između grana na slici označena su mjesta u kojima funkcije nisu definirane. Grane preko takvih mjesta ne spajamo.

Propozicija 1.2.43. *Sljedeće restrikcije, s navedenim kodomenama, bijekcije su:*

funkcija	*domena restrikcije*	*kodomena*	*monotonost*
sin	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$	*strogo raste*
cos	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	*strogo pada*
tg	$\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$	$\mathbb{R}$	*strogo raste*
ctg	$\langle 0, \pi \rangle$	$\mathbb{R}$	*strogo pada*

Dokaz. Za $0 \leqslant u < v \leqslant \pi$ adicijske formule daju

$$\cos u - \cos v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{v-u}{2} > 0,$$

jer oba argumenta sinusa pripadaju $\langle 0, \pi \rangle$. Dakle, kosinus strogo pada na $[0, \pi]$. Iz $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ slijedi da sinus strogo raste na $[-\pi/2, \pi/2]$. Za $-\pi/2 < u < v < \pi/2$ vrijedi

$$\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} u = \frac{\sin(v-u)}{\cos u \cos v} > 0.$$

Brojnik je pozitivan jer je $0 < v - u < \pi$, a oba faktora u nazivniku pozitivna su na desnoj polukružnici. Za $0 < u < v < \pi$ slično dobivamo

$$\operatorname{ctg} v - \operatorname{ctg} u = -\frac{\sin(v-u)}{\sin u \sin v} < 0.$$

Time su dokazane stroga monotonost i injektivnost.

Za surjektivnost sinusa uzmimo $t \in [-1, 1]$. Točka $(\sqrt{1-t^2}, t)$ nalazi se na desnoj polukružnici, pa je jednaka $P(x)$ za neki $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Zato je $\sin x = t$. Za kosinus koristimo točku $(t, \sqrt{1-t^2})$ na gornjoj polukružnici i kut $x \in [0, \pi]$. Nadalje, za svaki $t \in \mathbb{R}$ točke

$$\frac{(1,t)}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \frac{(t,1)}{\sqrt{1+t^2}}$$

pripadaju redom otvorenoj desnoj i otvorenoj gornjoj polukružnici. Prva zato daje kut $x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ s $\operatorname{tg} x = t$, a druga kut $x \in \langle 0, \pi \rangle$ s $\operatorname{ctg} x = t$. □

Ovim smo ujedno dokazali da je slika sinusa i kosinusa upravo $[-1, 1]$, a slika tangensa i kotangensa upravo $\mathbb{R}$.

Definicija 1.2.44. *Inverzne funkcije bijekcija iz propozicije 1.2.43 nazivamo* arkus funkcijama*:*

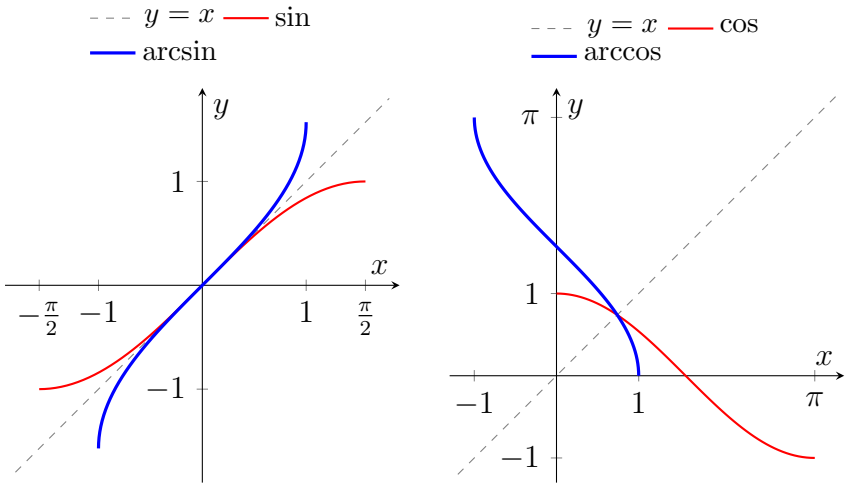
$$\begin{aligned} \arcsin &: [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2], \\ \arccos &: [-1,1] \longrightarrow [0, \pi], \\ \operatorname{arctg} &: \mathbb{R} \longrightarrow \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle, \\ \operatorname{arcctg} &: \mathbb{R} \longrightarrow \langle 0, \pi \rangle. \end{aligned}$$

Tako, primjerice, $\arcsin t$ *označava jedinstven kut* $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ *za koji je* $\sin x = t$.

Funkcije arcsin i arctg strogo rastu, a arccos i arcctg strogo padaju. Pri primjeni pravila za inverz nužno je voditi računa o domenama:

$$\sin(\arcsin t) = t \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1), \qquad \arcsin(\sin x) = x \quad (-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2).$$

Druga jednakost ne vrijedi za sve realne x; primjerice, $\arcsin(\sin \pi) = 0 \neq \pi$. Analogna pravila za ostala tri para vrijede na njihovim navedenim domenama.



Graf inverzne funkcije dobivamo zrcaljenjem grafa odabrane restrikcije preko pravca $y = x$. Na slici su crveno prikazane upravo glavne grane sinusa i kosinusa.

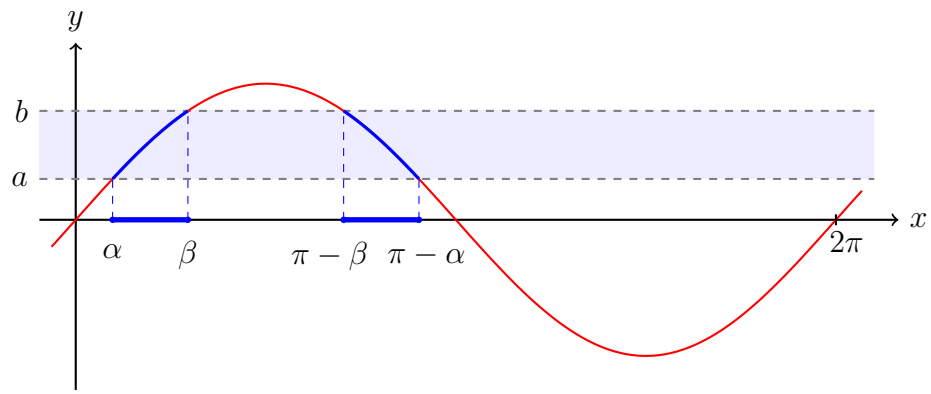
Primjer 1.2.45. Riješimo jednadžbe $\sin x = b$ i $\cos x = b$. Ako je $b \notin [-1, 1]$, obje imaju prazan skup rješenja. Za $b \in [-1, 1]$ sva su rješenja

$$\begin{aligned} \sin x = b &\iff x = \arcsin b + 2k\pi \text{ ili } x = \pi - \arcsin b + 2k\pi, \\ \cos x = b &\iff x = \arccos b + 2k\pi \text{ ili } x = -\arccos b + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Prva formula slijedi iz simetrije $\sin(\pi - x) = \sin x$ i periodičnosti; druga iz parnosti kosinusa i periodičnosti. Drugih rješenja nema, jer pravac $v = b$, odnosno $u = b$, siječe jediničnu kružnicu u najviše dvije točke, a svaka točka odgovara jednom kutu modulo 2π. Za $b = \pm 1$ dvije navedene porodice rješenja međusobno se podudaraju.

Primjer 1.2.46. Neka je $-1 < a < b < 1$. Riješimo nejednadžbu $a \leqslant \sin x \leqslant b$. Stavimo $\alpha = \arcsin a$ i $\beta = \arcsin b$. Na segmentu $[-\pi/2, \pi/2]$ sinus strogo raste, pa ondje nejednadžba vrijedi točno za $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Na segmentu $[\pi/2, 3\pi/2]$ primijenimo jednakost $\sin x = \sin(\pi - x)$; dobivamo $\pi - \beta \leqslant x \leqslant \pi - \alpha$. Ta dva segmenta zajedno obuhvaćaju puni period, pa je skup svih rješenja

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Big([\alpha + 2k\pi, \beta + 2k\pi] \cup [\pi - \beta + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi] \Big).$$



Slika prikazuje slučaj $0 < a < b < 1$. Plavo su označeni dijelovi grafa unutar vodoravne trake i njima odgovarajući intervali na osi apscisa. Formula iz primjera vrijedi i kada su a ili b negativni.

Zadatak 1.2.11. Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{Z}$ restrikcija sinusa na $[-\pi/2+n\pi, \pi/2+n\pi]$ bijekcija na $[-1,1]$ i da je njezin inverz

$$t \longmapsto (-1)^n \arcsin t + n\pi.$$

Odredite odgovarajuće inverze restrikcija kosinusa na $[n\pi, (n+1)\pi]$, tangensa na $\langle -\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi\rangle$ i kotangensa na $\langle n\pi, (n+1)\pi\rangle$. Riješite jednadžbe $\operatorname{tg} x = c$ i $\operatorname{ctg} x = c$ za $c \in \mathbb{R}$.

Zadatak 1.2.12. Dokažite identitete

$$\arcsin(-t) = -\arcsin t, \qquad \arccos t = \frac{\pi}{2} - \arcsin t \qquad (t \in [-1,1]),$$

$$\operatorname{arctg}(-t) = -\operatorname{arctg} t, \qquad \operatorname{arcctg} t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Izračunajte $\arcsin(\sin(5\pi/6))$ i $\arccos(\cos(4\pi/3))$.

1.2.10. Elementarne funkcije

Dosad upoznate porodice osnovni su građevni elementi velikoga broja funkcija koje ćemo susretati u analizi.

Definicija 1.2.47. Elementarne funkcije *dobivamo iz konstanti, potencija, korijena, eksponencijalnih, logaritamskih, trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija te pripadnih arkus i area funkcija. Pritom dopuštamo konačan broj zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i komponiranja. Njihove restrikcije također smatramo elementarnim funkcijama. Pri svakom koraku račun provodimo samo ondje gdje je definiran; posebno, pri dijeljenju nazivnik mora biti različit od nule.*

Na primjer, izraz

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

definira elementarnu funkciju na $\langle -2, 2\rangle$: argument logaritma uvijek je pozitivan, a korijen u nazivniku mora biti pozitivan. Domena izraza dio je njegova matematičkog značenja i mora se odrediti prije primjene pravila računanja.

1.3. Realni brojevi i potpunost

U prethodnim smo odjeljcima realne brojeve i neka njihova svojstva uzimali kao poznate iz škole. Sada ćemo precizirati pretpostavke na kojima se ta svojstva temelje. Razlikovat ćemo pravila računanja, pravila uspoređivanja i *potpunost*. Upravo će nam posljednje svojstvo omogućiti da dokažemo postojanje brojeva koje ne možemo dobiti konačnim brojem racionalnih računskih operacija.

Realne brojeve ovdje opisujemo aksiomima: odabranim osnovnim pretpostavkama iz kojih izvodimo ostale tvrdnje. Nećemo provoditi njihovu skupovnu konstrukciju. Posebno, slika brojevnoga pravca služi razumijevanju aksioma, ali ne zamjenjuje dokaze.

1.3.1. Aksiomi polja i pravila računanja

Na skupu $\mathbb{R}$ zadane su operacije

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Drugu operaciju zovemo množenjem, a $x \cdot y$ obično pišemo xy. Za te operacije zahtijevamo sljedeća svojstva.

Svojstva zbrajanja.

(A1) *Asocijativnost zbrajanja:* za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

(A2) *Neutralni element za zbrajanje:* postoji $0 \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x+0 = 0+x = x.$$

(A3) *Suprotni element:* za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $y \in \mathbb{R}$ takav da je

$$x+y = y+x = 0.$$

(A4) *Komutativnost zbrajanja:* za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x+y = y+x.$$

Svojstva množenja.

(A5) *Asocijativnost množenja:* za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(xy)z = x(yz).$$

(A6) *Neutralni element za množenje:* postoji $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x1 = 1x = x.$$

(A7) *Recipročni element:* za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je

$$xz = zx = 1.$$

(A8) *Komutativnost množenja:* za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$xy = yx.$$

Sljedeći aksiom povezuje te dvije operacije.

(A9) *Distributivnost množenja prema zbrajanju:* za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Skup s operacijama koje zadovoljavaju (A1)–(A9) nazivamo *poljem*. Racionalni brojevi s uobičajenim operacijama također čine polje. Dakle, sami aksiomi polja još ne izdvajaju $\mathbb{R}$ od $\mathbb{Q}$.

U aksiomima smo zahtijevali postojanje neutralnih i inverznih elemenata. Njihovu jedinstvenost ne moramo posebno pretpostaviti.

Propozicija 1.3.1. *Neutralni elementi za zbrajanje i množenje jedinstveni su. Za svaki x jedinstven je i element y za koji je $x + y = 0$; za svaki $x \neq 0$ jedinstven je element z za koji je $xz = 1$.*

Dokaz. Ako su 0 i $0'$ neutralni za zbrajanje, onda je $0 = 0 + 0' = 0'$. Za dva neutralna elementa za množenje jednako dobivamo $1 = 1 \cdot 1' = 1'$.

Ako je $x + y = 0$ i $x + y' = 0$, onda je

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = 0 + y' = y'.$$

Ako je $xz = 1$ i $xz' = 1$, tada je

$$z = z1 = z(xz') = (zx)z' = 1z' = z'. \qquad \square$$

Jedinstveni element suprotan broju x označavamo s $-x$, a za $x \neq 0$ njegov recipročni element s x^{-1} ili $1/x$. Oduzimanje i dijeljenje definiramo pravilima

$$x - y := x + (-y), \qquad \frac{x}{y} := xy^{-1} \quad (y \neq 0).$$

Propozicija 1.3.2. *Za realne brojeve vrijede pravila kraćenja*

$$x + z = y + z \implies x = y, \qquad xz = yz,\ z \neq 0 \implies x = y.$$

Nadalje,

$$x0 = 0, \qquad -0 = 0, \qquad -(-x) = x,$$
$$(-x)y = -(xy), \qquad (-x)(-y) = xy,$$

te vrijedi

$$xy = 0 \iff x = 0 \text{ } \textit{ili} \text{ } y = 0. \tag{1.17}$$

Dokaz. Za aditivno kraćenje objema stranama pribrojimo $-z$; za multiplikativno kraćenje obje strane pomnožimo s z^{-1}. Asocijativnost daje tražene zaključke. Distributivnost zatim daje

$$x0 = x(0 + 0) = x0 + x0.$$

Kraćenjem pribrojnika $x0$ slijedi $x0 = 0$. Iz $0 + 0 = 0$ i $(-x) + x = 0$, zbog jedinstvenosti suprotnoga elementa, dobivamo $-0 = 0$ i $-(-x) = x$.

Budući da je

$$(-x)y + xy = ((-x) + x)y = 0y = 0,$$

broj $(-x)y$ suprotan je broju xy, pa je $(-x)y = -(xy)$. Primijenimo li to pravilo dvaput, dobivamo $(-x)(-y) = -(-(xy)) = xy$.

Ako je $xy = 0$ i $x \neq 0$, množenjem s x^{-1} dobivamo $y = 0$. Obrat u (1.17) slijedi iz već dokazane jednakosti $x0 = 0$. □

Posebno, umnožak dvaju nenultih brojeva nije nula. Tek sada iz aksioma zaključujemo da množenje doista jest operacija na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i da taj skup s množenjem čini komutativnu grupu. Također, nula nema recipročni element: za svaki z vrijedi $0z = 0 \neq 1$. Zbog toga dijeljenje nulom nije definirano.

Zadatak 1.3.1. Iz aksioma polja izvedite formule

$$-(x + y) = (-x) + (-y), \qquad (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \quad (x, y \neq 0),$$

te pravilo zbrajanja razlomaka

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{xv + yu}{uv} \qquad (u, v \neq 0).$$

U svakom koraku navedite zašto korišteni recipročni elementi postoje.

1.3.2. Uređaj i računanje s nejednakostima

Na $\mathbb{R}$ je zadana i relacija $\leqslant$. Za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ zahtijevamo sljedeća svojstva.

(A10) *Totalnost uređaja:* vrijedi $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$.

(A11) *Antisimetričnost:* ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$, onda je $x = y$.

(A12) *Tranzitivnost:* ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$, onda je $x \leqslant z$.

(A13) *Usklađenost sa zbrajanjem:* iz $x \leqslant y$ slijedi $x + z \leqslant y + z$.

(A14) *Usklađenost s množenjem:* iz $0 \leqslant x$ i $0 \leqslant y$ slijedi $0 \leqslant xy$.

Prva tri svojstva kazuju da je $\leqslant$ *linearan uređaj*; refleksivnost $x \leqslant x$ već slijedi iz (A10). Pišemo $x < y$ ako je $x \leqslant y$ i $x \neq y$. Posljednja dva svojstva izražavaju usklađenost uređaja s operacijama. Polje s takvim uređajem zovemo *uređenim poljem*.

Propozicija 1.3.3. *U uređenom polju vrijede sljedeća pravila.*

(a) $x \leqslant y$ *ako i samo ako je* $x + z \leqslant y + z$. *Isto vrijedi za stroge nejednakosti.*

(b) Ako je $x \leqslant y$ *i* $z \geqslant 0$, *onda je* $xz \leqslant yz$. *Ako je* $z \leqslant 0$, *onda je* $xz \geqslant yz$. *Za* $x < y$ *i* $z \neq 0$ *odgovarajuće nejednakosti su stroge.*

(c) $x^2 \geqslant 0$ *za svaki* x, *a* $x^2 > 0$ *za* $x \neq 0$. *Posebno,* $1 > 0$.

(d) Ako je $0 < x < y$, *onda je* $0 < 1/y < 1/x$.

Dokaz. U (a) jedan je smjer aksiom (A13), a drugi dobivamo pribrajanjem $-z$. Strogoća se čuva jer bi jednakost nakon pribrajanja, zbog kraćenja, značila jednakost i prije njega. Posebno, $x \leqslant y$ ekvivalentno je s $0 \leqslant y - x$ i s $-y \leqslant -x$.

Za (b), ako su $y - x \geqslant 0$ i $z \geqslant 0$, onda je

$$0 \leqslant (y - x)z = yz - xz,$$

pa je $xz \leqslant yz$. Ako su $y - x > 0$ i $z > 0$, njihov umnožak nije nula prema (1.17), pa je i zaključak strog. Za $z < 0$ primijenimo dokazano na $-z > 0$ i promijenimo predznake. Slučaj $z = 0$ neposredan je.

Za (c), ako je $x \geqslant 0$, aksiom (A14) daje $x^2 \geqslant 0$. Ako je $x < 0$, onda je $-x > 0$ i $x^2 = (-x)^2 > 0$ prema (b). Za $x \neq 0$ kvadrat ne može biti nula. Primjena na $x = 1$ daje $1 = 1^2 > 0$.

Ako je $u > 0$, njegov recipročni element mora biti pozitivan: inače bi iz $u^{-1} \leqslant 0$ i (b) slijedilo $1 = uu^{-1} \leqslant 0$. Za $0 < x < y$ zato imamo

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y - x}{xy} > 0,$$

što dokazuje (d). □

Uzastopnim pribrajanjem jedinice sada dobivamo pozitivne elemente $1, 2, 3, \ldots$ koji odgovaraju prirodnim brojevima. Pribrajanjem njihovih suprotnih elemenata dobivamo cijele brojeve, a dijeljenjem nenultim cijelim brojevima racionalne brojeve. Pri tim poistovjećivanjima računanje i uređaj slažu se s onima koje smo već upoznali na $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$.

I $\mathbb{Q}$ je uređeno polje. Stoga dokazi koji koriste samo aksiome polja i uređaja jednako vrijede za racionalne brojeve. Takvim dokazima pripadaju, primjerice, pravila s nejednakostima i osnovna svojstva apsolutne vrijednosti iz prethodnoga odjeljka. Za postojanje korijena i realnih eksponencijalnih vrijednosti trebat će nam dodatno svojstvo.

1.3.3. Međe, supremum i infimum

Definicija 1.3.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Broj $M \in \mathbb{R}$ je* gornja međa *ili* majoranta *skupa S ako vrijedi*

$$(\forall x \in S) \quad x \leqslant M.$$

Broj $m \in \mathbb{R}$ je donja međa *ili* minoranta *skupa S ako je $m \leqslant x$ za svaki $x \in S$. Skup je* omeđen odozgo*, odnosno* omeđen odozdo*, ako ima gornju, odnosno donju među. Ako ima obje, kažemo da je* omeđen*.*

Gornja međa ne mora pripadati skupu. Ako je M jedna gornja međa, onda je i svaki broj veći od M gornja međa. Zato je prirodno pitati postoji li najmanja od svih gornjih međa.

Definicija 1.3.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ neprazan. Njegovu najmanju gornju među, ako postoji, zovemo* supremumom *i označavamo sa* $\sup S$*. Njegovu najveću donju među, ako postoji, zovemo* infimumom *i označavamo s* $\inf S$*.*

Ako gornja međa skupa ujedno pripada skupu, zovemo je maksimumom *i označavamo s* $\max S$*. Analogno definiramo* minimum $\min S$ *kao donju među koja pripada skupu.*

Iz antisimetričnosti uređaja slijedi da su supremum i infimum, kada postoje, jedinstveni. Isto vrijedi za maksimum i minimum. Nadalje,

$$\max S \text{ postoji} \iff \sup S \text{ postoji i pripada } S,$$

a tada je $\max S = \sup S$. Doista, svaka gornja međa mora biti veća od ili jednaka svakom elementu skupa, pa i maksimumu. Analogna tvrdnja vrijedi za minimum i infimum.

Propozicija 1.3.6 (Karakterizacija supremuma i infimuma)**.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ neprazan i $s \in \mathbb{R}$. Tada je $s = \sup S$ ako i samo ako vrijede oba uvjeta:*

$$\begin{aligned} &(\forall x \in S) \quad x \leqslant s, \\ &(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S) \quad s - \varepsilon < x. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Analogno, $t = \inf S$ ako i samo ako je $t \leqslant x$ za sve $x \in S$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $x < t + \varepsilon$.

Dokaz. Ako je $s = \sup S$, onda je s gornja međa, dok $s - \varepsilon < s$ to nije. Zato postoji $x \in S$ s $x > s - \varepsilon$. Obratno, pretpostavimo oba navedena uvjeta. Kada bi postojala gornja međa $M < s$, za $\varepsilon = s - M > 0$ drugi bi uvjet dao $x \in S$ takav da je $M < x$, što je nemoguće. Prema tome, s je najmanja gornja međa. Dokaz za infimum dobivamo obrnutim nejednakostima. □

Uvjet (1.18) možemo pisati i kao

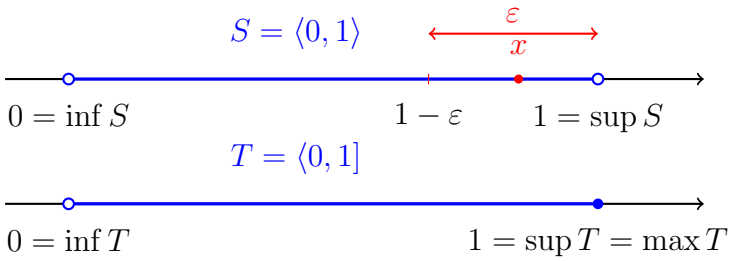
$$(\forall u < s)(\exists x \in S) \quad u < x \leqslant s.$$

Bitno je da x smijemo birati nakon što je zadan ε, odnosno u. Ne tvrdimo da jedan te isti element mora biti proizvoljno blizu supremumu.

Primjer 1.3.7. Za $S = \langle 0, 1\rangle$ vrijedi $\inf S = 0$ i $\sup S = 1$, ali ne postoje ni minimum ni maksimum. Primjerice, ako je $\varepsilon > 0$, uzmimo

$$\delta = \min\{\varepsilon/2, 1/2\}, \qquad x = 1 - \delta.$$

Tada je $x \in S$ i $1 - \varepsilon < x$, pa je doista $\sup S = 1$. Broj $\delta \in S$ na isti način potvrđuje da je $\inf S = 0$. Za $T = \langle 0, 1]$ imamo isti supremum i infimum, ali sada postoji maksimum: $\max T = 1$.



Prema definiciji omeđenosti prazan je skup omeđen: svaki je realan broj njegova gornja i donja međa. Ipak, $\emptyset$ nema supremum ni infimum u $\mathbb{R}$, jer $\mathbb{R}$ nema najmanji ni najveći element. Zato je u tvrdnjama o postojanju supremuma i infimuma pretpostavka nepraznosti nužna. U ovom odjeljku te oznake uvijek označavaju realne brojeve; ne uvodimo vrijednosti $\pm\infty$ za supremume i infimume.

1.3.4. Aksiom potpunosti i Arhimedovo svojstvo

Definicija supremuma kaže što on jest, ali ne jamči da postoji. Upravo to osigurava sljedeća pretpostavka o realnim brojevima.

Definicija 1.3.8 (Potpunost)**.** *Uređeno polje je* potpuno *ako svaki njegov neprazan odozgo omeđen podskup ima supremum u tom polju.*

Posljednji aksiom realnih brojeva glasi:

(A15) *Aksiom potpunosti:* svaki neprazan odozgo omeđen skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

Aksiom (A15) dodajemo aksiomima polja i uređaja (A1)–(A14). Dakle, $\mathbb{R}$ promatramo kao potpuno uređeno polje. Potpunost je jači zahtjev od pravila računanja i uspoređivanja; kasnije ćemo izričito pokazati zašto ga $\mathbb{Q}$ ne zadovoljava.

Teorem 1.3.9. *Svaki neprazan odozdo omeđen skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima infimum u $\mathbb{R}$. Pritom je*

$$\inf S = -\sup(-S), \qquad -S := \{-x : x \in S\}.$$

Dokaz. Ako je m donja međa skupa S, onda je $-m$ gornja međa nepraznoga skupa $-S$. Prema aksiomu potpunosti postoji $u = \sup(-S)$. Za svaki $x \in S$ vrijedi $-x \leqslant u$, odnosno $-u \leqslant x$. Ako je $\varepsilon > 0$, postoji $-x \in -S$ takav da je $u - \varepsilon < -x$, odnosno $x < -u + \varepsilon$. Karakterizacija infimuma sada daje $\inf S = -u$. □

Teorem 1.3.10 (Arhimedovo svojstvo)**.** *Skup $\mathbb{N}$ nije omeđen odozgo u $\mathbb{R}$. Ekvivalentno, za sve $a, b > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $na > b$. Posebno, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $1/n < \varepsilon$.*

Dokaz. Kada bi $\mathbb{N}$ bio omeđen odozgo, po potpunosti bi postojao $s = \sup \mathbb{N}$. Broj $s - 1$ nije gornja međa, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $s - 1 < n$. Tada je $s < n + 1$, iako $n + 1 \in \mathbb{N}$, što je proturječje.

Za $a, b > 0$ odaberemo $n > b/a$, pa je $na > b$. Obratno, takvo svojstvo za $a = 1$ isključuje svaku pozitivnu gornju među skupa $\mathbb{N}$, a nepozitivni brojevi to ionako nisu. Za posljednju tvrdnju odaberemo $n > 1/\varepsilon$. □

Naziv "Arhimedov aksiom" čest je u literaturi. U našoj aksiomatici to je *teorem*, jer smo ga izveli iz potpunosti. Samo Arhimedovo svojstvo ipak ne jamči potpunost. Naime, ono vrijedi i u $\mathbb{Q}$ bez pozivanja na potpunost: ako su $a = p/q > 0$ i $b = r/s > 0$, gdje su $p, q, r, s \in \mathbb{N}$, za $n = (r + 1)q$ vrijedi

$$na = (r + 1)p > r \geqslant r/s = b.$$

Primjer 1.3.11. Neka je

$$S = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tada je $\min S = \inf S = 1/2$ i $\sup S = 1$, dok maksimum ne postoji. Doista, za $n \geqslant 1$ vrijedi

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

a $1/2$ dobivamo za $n = 1$. Za zadani $\varepsilon > 0$ odaberemo $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n > 1/\varepsilon$. Tada je $1/(n + 1) < \varepsilon$, odnosno $1 - \varepsilon < n/(n + 1)$. Zato je $\sup S = 1$. Taj broj ne pripada skupu, pa nema maksimuma.

Propozicija 1.3.12 (Cijeli dio)**.** *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji točno jedan $k \in \mathbb{Z}$ takav da je*

$$k \leqslant x < k + 1.$$

Taj cijeli broj označavamo s $\lfloor x \rfloor$.

Dokaz. Po Arhimedovu svojstvu postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $N > |x| + 1$. Među konačno mnogo cijelih brojeva $-N, -N+1, \ldots, N$ koji su veći od x odaberimo najmanji, j. Takav broj postoji jer je $N > x$, a $j > -N$ jer je $-N < x$. Zbog minimalnosti vrijedi $j-1 \leqslant x < j$, pa je $k = j - 1$ traženi broj. Ako bi i $l > k$ bio cijeli broj s istim svojstvom, onda bi $l \geqslant k + 1 > x$, što je nemoguće. Isto isključuje $l < k$. □

Teorem 1.3.13 (Gustoća racionalnih brojeva)**.** *Između svaka dva realna broja $x < y$ nalazi se racionalan broj:*

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x < y \implies (\exists q \in \mathbb{Q})\ x < q < y.$$

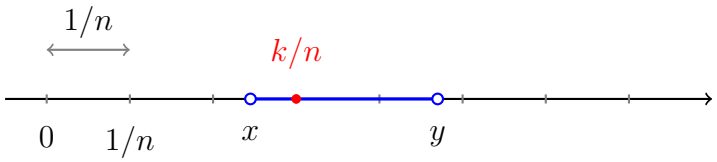
Dokaz. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ tako da je $1/n < y - x$ i stavimo $k = \lfloor nx \rfloor + 1$. Tada je

$$nx < k \leqslant nx + 1,$$

pa racionalan broj $q = k/n$ zadovoljava

$$x < q \leqslant x + \frac{1}{n} < y.$$

□



Slika prikazuje ideju dokaza: odaberemo dovoljno finu mrežu $\{k/n : k \in \mathbb{Z}\}$ i uzmemo prvu njezinu točku desno od x. Gustoća znači i da svaki otvoreni interval sadrži beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Kada bi ih bilo samo konačno mnogo, između dvaju susjednih članova konačnog popisa, u koji uključimo i krajeve intervala, ponovno bismo našli racionalan broj.

Zadatak 1.3.2. Pokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$0 \leqslant x - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} < 10^{-n}.$$

Objasnite kako Arhimedovo svojstvo jamči da ta pogreška može biti manja od svakog zadanog pozitivnog broja.

1.3.5. Uspoređivanje i računanje sa supremumima

Propozicija 1.3.14. *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni omeđeni skupovi.*

(a) Ako je $A \subseteq B$, onda je $\sup A \leqslant \sup B$ i $\inf A \geqslant \inf B$.

(b) Ako za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ s $a \leqslant b$, onda je $\sup A \leqslant \sup B$.

(c) Ako za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ s $a \leqslant b$, onda je $\inf A \leqslant \inf B$.

Dokaz. U (a) svaka gornja međa skupa B jest gornja međa skupa A; posebno je to $\sup B$, pa je $\sup A \leqslant \sup B$. S donjim međama zaključujemo analogno. U (b) za svaki $a \in A$ možemo odabrati $b \in B$ i dobiti $a \leqslant b \leqslant \sup B$. Zato je $\sup B$ gornja međa skupa A. U (c) za svaki $b \in B$ dobivamo $\inf A \leqslant a \leqslant b$, pa je $\inf A$ donja međa skupa B. □

Važno je uočiti razliku između kvantifikatora u (b) i (c). Broj koji odabiremo smije ovisiti o prethodno zadanom broju. Također, prava inkluzija $A \subset B$ ne mora dati strogu nejednakost supremuma: skupovi $\langle 0, 1\rangle$ i $[0, 1]$ imaju isti supremum.

Propozicija 1.3.15. *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni i omeđeni odozgo. Za skup*

$$A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

vrijedi

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B. \tag{1.19}$$

Ako su još $A, B \subseteq [0, +\infty\rangle$, za skup $AB := \{ab : a \in A,\ b \in B\}$ vrijedi

$$\sup(AB) = (\sup A)(\sup B).$$

Dokaz. Stavimo $\alpha = \sup A$ i $\beta = \sup B$. Za svaki $a \in A$ i $b \in B$ vrijedi $a + b \leqslant \alpha + \beta$. Za zadani $\varepsilon > 0$ možemo odabrati $a \in A$ i $b \in B$ takve da je

$$\alpha - \varepsilon/2 < a, \qquad \beta - \varepsilon/2 < b.$$

Tada je $\alpha + \beta - \varepsilon < a + b$. Karakterizacija supremuma dokazuje (1.19).

U drugom dijelu su $\alpha, \beta \geqslant 0$ te $0 \leqslant ab \leqslant \alpha\beta$ za sve $a \in A$, $b \in B$. Ako je $\alpha = 0$ ili $\beta = 0$, barem je jedan od skupova jednak $\{0\}$, pa je $AB = \{0\}$ i tvrdnja vrijedi. Inače, za $\varepsilon > 0$ odaberimo

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\alpha + \beta + 1} > 0,$$

te $a \in A$ i $b \in B$ takve da su $0 \leqslant \alpha - a < \delta$ i $0 \leqslant \beta - b < \delta$. Tada je

$$0 \leqslant \alpha\beta - ab = \beta(\alpha - a) + a(\beta - b) \leqslant \beta(\alpha - a) + \alpha(\beta - b) < (\alpha + \beta)\delta < \varepsilon.$$

Ponovno primijenimo karakterizaciju supremuma. □

Pretpostavku o predznaku u formuli za umnožak ne smijemo izostaviti. Za $A = B = \{-2, -1\}$ vrijedi $\sup(AB) = 4$, a $(\sup A)(\sup B) = 1$. U dokazu smo procjenjivali razliku $\alpha\beta - ab$; to izbjegava množenje donjih procjena koje bi mogle biti negativne.

Zadatak 1.3.3. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan omeđen skup i $c \in \mathbb{R}$. Za $cA := \{ca : a \in A\}$ dokažite

$$\sup(cA) = \begin{cases} c \sup A, & c > 0, \\ 0, & c = 0, \\ c \inf A, & c < 0. \end{cases}$$

Izvedite odgovarajuću formulu za infimum, a zatim dokažite $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ za neprazne odozdo omeđene skupove.

Zadatak 1.3.4. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni omeđeni skupovi. Pokažite da je

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Ako je $A \cap B \neq \emptyset$, vrijedi li uvijek $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$?

1.3.6. Ugniježđeni segmenti

Potpunost ima i geometrijsko tumačenje. Ako neprazne segmente umećemo jedan u drugi, postoji barem jedna točka koja pripada svima njima.

Teorem 1.3.16 (Cantorov teorem o ugniježđenim segmentima)**.** *Neka su $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, neprazni segmenti takvi da je*

$$I_{n+1} \subseteq I_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Tada postoje brojevi

$$\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\},$$

vrijedi $\alpha \leqslant \beta$ i

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta].$$

Ako uz to vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad b_n - a_n < \varepsilon, \tag{1.20}$$

onda presjek sadrži točno jednu točku.

Dokaz. Iz ugniježđenosti slijedi

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n.$$

Posebno, skupovi svih lijevih i svih desnih krajeva neprazni su i sadržani u $[a_1, b_1]$, pa postoje α i β. Za bilo koje $n, m \in \mathbb{N}$, uz $k = \max\{n, m\}$ imamo

$$a_n \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant b_m.$$

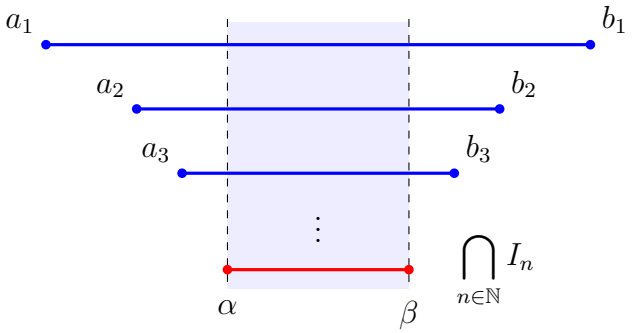
Dakle, svaki b_m gornja je međa skupa svih a_n, pa je $\alpha \leqslant b_m$ za svaki m. To znači da je α donja međa skupa svih b_m, odakle $\alpha \leqslant \beta$.

Nadalje, broj x pripada svim segmentima ako i samo ako je $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ za svaki n. Prema definicijama supremuma i infimuma, to je ekvivalentno uvjetu $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Time je dokazana formula za presjek, a on je neprazan jer je $\alpha \leqslant \beta$.

Ako vrijedi (1.20), onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n za koji je

$$0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant b_n - a_n < \varepsilon.$$

Kad bi bilo $\beta > \alpha$, izbor $\varepsilon = \beta - \alpha$ dao bi proturječje. Stoga je $\alpha = \beta$. □



Primjer 1.3.17. Pretpostavke teorema imaju različite uloge.

1. Otvoreni intervali $\langle 0, 1/n\rangle$ neprazni su, ugnježđeni i proizvoljno kratki, ali im je presjek $\emptyset$. Naime, za svaki $x > 0$ Arhimedovo svojstvo daje n takav da je $1/n < x$, pa x ne pripada n-tom intervalu; broj 0 nije ni u jednom od njih.

2. Zatvoreni, neomeđeni intervali $[n, +\infty\rangle$ također su neprazni i ugniježđeni, ali im je presjek $\emptyset$. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ veći od x.

3. Segmenti $[0, 1+1/n]$ strogo se smanjuju, ali im je presjek $[0, 1]$. Doista, taj je segment sadržan u svima njima, a za $x > 1$ postoji n takav da je $1/n < x - 1$. Strogo smanjivanje segmenata zato ne jamči jedinstvenost zajedničke točke; uvjet (1.20) mnogo je jači.

Cantorov teorem zajedno s Arhimedovim svojstvom može zamijeniti aksiom potpunosti. Preciznije, uređeno polje potpuno je ako i samo ako ima Arhimedovo svojstvo i svaka ugniježđena obitelj nepraznih segmenata $[a_n, b_n]$, indeksirana prirodnim brojevima, ima neprazan presjek. Jedan smjer već smo dokazali. Dokažimo i drugi.

Neka je S neprazan odozgo omeđen skup u takvu polju. Odaberimo $s_0 \in S$, postavimo $a_1 = s_0 - 1$ i za b_1 uzmimo bilo koju gornju među skupa S. Tada $a_1 < b_1$, pri čemu a_1 nije, a b_1 jest gornja međa od S. Pretpostavimo da smo konstruirali segment s tim svojstvom i označimo $m_n = (a_n + b_n)/2$. Ako je m_n gornja međa od S, odaberemo

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, m_n];$$

u suprotnom odaberemo $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [m_n, b_n]$. Tako lijevi kraj nikada nije gornja međa, a desni uvijek jest.

Po Cantorovu svojstvu postoji c u presjeku svih tih segmenata. Svako prepolavljanje dijeli duljinu s 2, pa je

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \leqslant \frac{b_1 - a_1}{n}.$$

Posljednja nejednakost slijedi iz $2^{n-1} \geqslant n$, što se lako dokazuje indukcijom. Arhimedovo svojstvo stoga pokazuje da za svaki $\varepsilon > 0$ možemo odabrati n tako da je $b_n - a_n < \varepsilon$.

Pokažimo da je $c = \sup S$. Kad bi neki $s \in S$ zadovoljavao $s > c$, odabrali bismo n za koji je $b_n - a_n < s - c$. Tada bi bilo

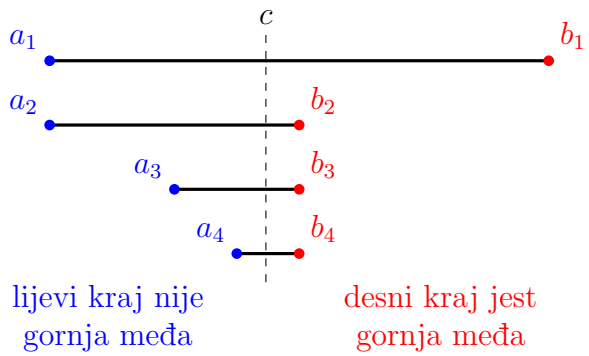
$$b_n \leqslant c + (b_n - a_n) < s,$$

protivno tome da je b_n gornja međa. Dakle, c je gornja međa. Za svaki $y < c$ možemo pak odabrati n tako da je $b_n - a_n < c - y$. Slijedi

$$a_n \geqslant c - (b_n - a_n) > y.$$

Budući da a_n nije gornja međa, postoji $s \in S$ takav da je $s > a_n > y$. Zato nijedan $y < c$ nije gornja međa, pa je $c = \sup S$.

Ovaj postupak uzastopnoga prepolavljanja naziva se *bisekcija*. U dokazu smo uz svojstvo ugniježđenih segmenata upotrijebili i Arhimedovo svojstvo; ne izostavljamo ga kada tvrdnju formuliramo za proizvoljno uređeno polje.



Zadatak 1.3.5. Odredite presjeke ugniježđenih segmenata

$$\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \qquad \left[1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right], \qquad \left[0, \frac{1}{2^n}\right] \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Za svaki primjer izravno provjerite svojstva potrebna u teoremu 1.3.16.

1.3.7. Postojanje korijena

U prethodnom smo odjeljku postojanje korijena prihvatili kao poznatu činjenicu. Sada ga možemo dokazati iz potpunosti. Trebat će nam samo svojstva prirodnih potencija, a ne neprekidnost funkcija ili derivacije.

Teorem 1.3.18. *Za svaki $t \geqslant 0$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji točno jedan broj $s \geqslant 0$ takav da je $s^n = t$. Taj broj označavamo sa $\sqrt[n]{t}$.*

Dokaz. Za $n = 1$ uzmemo $s = t$, a za $t = 0$ uzmemo $s = 0$. Neka je zato $n \geqslant 2$ i $t > 0$. Za $0 \leqslant u < v$ vrijedi

$$v^n - u^n = (v-u)\big(v^{n-1} + v^{n-2}u + \cdots + u^{n-1}\big) > 0. \tag{1.21}$$

Dakle, prirodna je potencija strogo rastuća na nenegativnim brojevima, što odmah daje jedinstvenost korijena, uključujući slučaj $t = 0$.

Za dokaz postojanja promatrajmo skup

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0,\ x^n \leqslant t\}.$$

Broj $r = \min\{1, t\} > 0$ pripada S jer je $r^n \leqslant r \leqslant t$. Skup je odozgo omeđen brojem $1 + t$: ako je $x > 1 + t$, onda je $x > 1$ i $x^n \geqslant x > t$. Zato postoji $s = \sup S$, pri čemu je $s \geqslant r > 0$.

Pokažimo da je $s^n = t$. Postavimo $C = n(s+1)^{n-1} > 0$. Iz (1.21) slijedi procjena

$$0 \leqslant v^n - u^n \leqslant C(v-u) \qquad (0 \leqslant u \leqslant v \leqslant s+1), \tag{1.22}$$

jer je svaki od n pribrojnika u zagradi najviše $(s+1)^{n-1}$.

Kad bi bilo $s^n < t$, za

$$h = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{t - s^n}{2C}\right\} > 0$$

dobili bismo

$$(s+h)^n \leqslant s^n + Ch \leqslant s^n + \frac{t - s^n}{2} < t.$$

To znači da je $s + h \in S$, protivno tome da je s gornja međa.

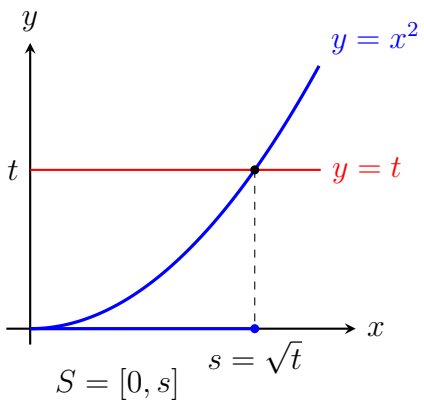
Kad bi bilo $s^n > t$, odabrali bismo

$$h = \min\left\{\frac{s}{2}, \frac{1}{2}, \frac{s^n - t}{2C}\right\} > 0.$$

Tada je $s - h > 0$, a procjena (1.22) daje

$$(s-h)^n \geqslant s^n - Ch \geqslant s^n - \frac{s^n - t}{2} > t.$$

Stoga je svaki $x \in S$ manji od $s - h$, jer bi $x \geqslant s - h$ povlačilo $x^n \geqslant (s-h)^n > t$. Broj $s - h$ bio bi gornja međa manja od supremuma s, što je opet proturječje. Preostaje $s^n = t$. □



Za neparan n i $t < 0$ jednadžba $x^n = t$ također ima točno jedno realno rješenje:

$$x = -\sqrt[n]{-t}.$$

Naime, rješenje mora biti negativno, pa se zamjenom $u = -x > 0$ jednadžba svodi na $u^n = -t$. Za paran n negativan broj nema realan n-ti korijen. Ako je pak n paran i $t > 0$, jednadžba $x^n = t$ ima dva realna rješenja, $\sqrt[n]{t}$ i $-\sqrt[n]{t}$, ali oznaka $\sqrt[n]{t}$ uvijek znači nenegativno od njih.

Primjer 1.3.19. Uređeno polje $\mathbb{Q}$ nije potpuno. Usporedimo računanje supremuma u $\mathbb{Q}$ i u $\mathbb{R}$ za skup

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q \geqslant 0,\ q^2 < 2\}.$$

Skup je neprazan jer $1 \in A$, a broj 2 njegova je gornja međa. Prema upravo dokazanom teoremu postoji pozitivan realan broj $\sqrt{2}$. On je gornja međa od A jer je kvadriranje strogo rastuće na nenegativnim brojevima. Ako je $y < \sqrt{2}$, gustoća racionalnih brojeva daje

$$\max\{0, y\} < q < \sqrt{2}, \qquad q \in \mathbb{Q}.$$

Tada je $q \in A$ i $q > y$. Prema tome, supremum skupa A promatranoga kao podskup od $\mathbb{R}$ jest $\sqrt{2}$.

Prisjetimo se da je $\sqrt{2}$ iracionalan: iz zapisa $\sqrt{2} = p/q$ u skraćenom obliku, za $p, q \in \mathbb{N}$, jednakost $p^2 = 2q^2$ povlačila bi da su i p i q parni. Zato svaka racionalna gornja međa u od A zadovoljava $u > \sqrt{2}$. Gustoća ponovno daje racionalan broj v između $\sqrt{2}$ i u. Broj v također je gornja međa od A, manja od u. Dakle, u $\mathbb{Q}$ ne postoji najmanja gornja međa skupa A.

Zadatak 1.3.6. Neka je $t > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Pokažite da je

$$\sqrt[n]{t} = \sup\{x \geqslant 0 : x^n < t\} = \inf\{x \geqslant 0 : x^n > t\}.$$

Objasnite zašto je u prvoj jednakosti potrebna pretpostavka $t > 0$.

1.3.8. Konstrukcija realne eksponencijalne funkcije

U prethodnom odjeljku definirali smo racionalne potencije pomoću pozitivnih korijena i dokazali njihova pravila računanja. Postojanje korijena sada smo opravdali svojstvom potpunosti. Preostaje opravdati proširenje potencije a^q s racionalnih na realne eksponente. Pritom ćemo dokazati i surjektivnost, koja ne slijedi samo iz stroge monotonosti.

Najprije neka je $a > 1$. Ključna je sljedeća procjena.

Lema 1.3.20. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$1 < a^{1/n} \leqslant 1 + \frac{a-1}{n}.$$

Posebno, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $1 < a^{1/n} < 1 + \varepsilon$.

Dokaz. Stavimo $h = a^{1/n} - 1 > 0$. Bernoullijeva nejednakost

$$(1+h)^n \geqslant 1 + nh \qquad (h \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N})$$

slijedi indukcijom: nakon množenja nejednakosti za n brojem $1+h$ dobivamo $(1+nh)(1+h) = 1 + (n+1)h + nh^2 \geqslant 1 + (n+1)h$. Stoga je $a \geqslant 1 + nh$, odnosno $h \leqslant (a-1)/n$. Za posljednju tvrdnju dovoljno je, prema Arhimedovu svojstvu, odabrati $n > (a-1)/\varepsilon$. □

Procjena iz leme izražava činjenicu da se pozitivni n-ti korijen broja a može učiniti proizvoljno bliskim broju 1. To smo dokazali bez pojma limesa niza.

Definicija 1.3.21. *Za $a > 1$ i $x \in \mathbb{R}$ definiramo*

$$A_x := \{a^q : q \in \mathbb{Q},\ q < x\}, \qquad E_a(x) := \sup A_x.$$

Da bi definicija imala smisla, moramo provjeriti da je A_x neprazan i omeđen odozgo. Prema Arhimedovu svojstvu postoje cijeli brojevi m, M takvi da je $m < x < M$. Tada je $a^m \in A_x$, a za svaki racionalan $q < x$ vrijedi $a^q < a^M$. Zato supremum postoji i zadovoljava

$$0 < a^m \leqslant E_a(x) \leqslant a^M.$$

Posebno, dobili smo funkciju $E_a \colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$.

Propozicija 1.3.22. *Za svaki racionalan broj t vrijedi $E_a(t) = a^t$.*

Dokaz. Ako je $q < t$, tada je $a^q < a^t$, pa je $E_a(t) \leqslant a^t$. S druge strane, za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj $t - 1/n$ je racionalan i manji od t, pa

$$E_a(t) \geqslant a^{t-1/n} = \frac{a^t}{a^{1/n}}.$$

Prema lemi 1.3.20,

$$0 \leqslant a^t - E_a(t) \leqslant a^t - \frac{a^t}{a^{1/n}} = a^t \frac{a^{1/n} - 1}{a^{1/n}} \leqslant \frac{a^t(a-1)}{n}.$$

Kad bi $a^t - E_a(t) > 0$, Arhimedovo svojstvo omogućilo bi izbor n za koji je desna strana manja od $a^t - E_a(t)$, što je proturječje. Dakle, $E_a(t) = a^t$. □

U definiciji smo uzeli strogu nejednakost $q < x$. Zato a^t za racionalan t nije element skupa A_t; ipak je njegov supremum. Upravo je prethodni dokaz potreban da bismo utvrdili da nova definicija daje već poznatu vrijednost.

Propozicija 1.3.23. *Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$E_a(x+y) = E_a(x)E_a(y).$$

Nadalje, funkcija E_a strogo raste.

Dokaz. Najprije ćemo dokazati jednakost skupova

$$A_x A_y = A_{x+y}. \tag{1.23}$$

Ako je $q < x$ i $s < y$, pri čemu su $q, s \in \mathbb{Q}$, tada je $q + s < x + y$ i $a^q a^s = a^{q+s} \in A_{x+y}$. Time je dokazana jedna inkluzija.

Za obratnu inkluziju uzmimo racionalan broj $r < x + y$. Otvoreni interval $\langle r - y, x\rangle$ je neprazan, pa zbog gustoće racionalnih brojeva postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$r - y < q < x.$$

Broj $s := r - q$ također je racionalan, zadovoljava $s < y$, i vrijedi $a^r = a^q a^s \in A_x A_y$. To dokazuje (1.23).

Skupovi A_x, A_y su neprazni, omeđeni odozgo i sastoje se od pozitivnih brojeva. Zato možemo primijeniti dokazano pravilo za supremum produkta skupova:

$$E_a(x+y) = \sup(A_x A_y) = (\sup A_x)(\sup A_y) = E_a(x)E_a(y).$$

Za $x \leqslant y$ vrijedi $A_x \subseteq A_y$, pa je $E_a(x) \leqslant E_a(y)$. Da bismo dobili strogu nejednakost za $x < y$, odaberimo racionalan broj q takav da je $0 < q < y - x$. Tada je

$$E_a(y - x) \geqslant a^q > 1,$$

pa već dokazani zakon daje

$$E_a(y) = E_a(x)E_a(y - x) > E_a(x).$$

□

Posebno, vrijedi $E_a(0) = 1$, $E_a(1) = a$ i

$$E_a(-x) = \frac{1}{E_a(x)}, \qquad E_a\left(x + \frac{1}{n}\right) = E_a(x)a^{1/n}, \qquad E_a\left(x - \frac{1}{n}\right) = \frac{E_a(x)}{a^{1/n}}. \tag{1.24}$$

Prvu jednakost dobivamo iz $E_a(x)E_a(-x) = E_a(0) = 1$, a ostale iz zakona zbrajanja eksponenata i propozicije 1.3.22.

Propozicija 1.3.24. *Funkcija $E_a\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ je surjekcija.*

Dokaz. Neka je $b > 0$. Želimo pronaći $z \in \mathbb{R}$ takav da je $E_a(z) = b$. Promotrimo skup

$$S := \{x \in \mathbb{R} : E_a(x) \leqslant b\}.$$

Bernoullijeva nejednakost daje $a^n = (1 + (a-1))^n \geqslant 1 + n(a-1)$. Prema Arhimedovu svojstvu možemo odabrati $n \in \mathbb{N}$ tako da je

$$a^n > \max\{b, 1/b\}.$$

Tada je $E_a(-n) = a^{-n} < b$, pa je $-n \in S$. Za svaki $x \geqslant n$ vrijedi $E_a(x) \geqslant a^n > b$, pa je n gornja međa skupa S. Dakle, postoji $z := \sup S$.

Pretpostavimo najprije da je $E_a(z) < b$. Prema lemi 1.3.20 možemo odabrati $m \in \mathbb{N}$ tako da je

$$a^{1/m} < \frac{b}{E_a(z)}.$$

Tada je, prema (1.24),

$$E_a\left(z + \frac{1}{m}\right) = E_a(z)a^{1/m} < b.$$

Stoga $z + 1/m \in S$, što proturječi tome da je z gornja međa.

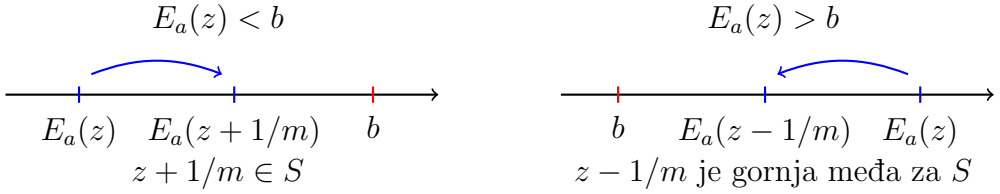
Pretpostavimo sada da je $E_a(z) > b$. Ovaj put odaberimo $m \in \mathbb{N}$ tako da je

$$a^{1/m} < \frac{E_a(z)}{b}.$$

Slijedi

$$E_a\left(z - \frac{1}{m}\right) = \frac{E_a(z)}{a^{1/m}} > b.$$

Zbog monotonosti je $E_a(x) > b$ za svaki $x \geqslant z - 1/m$. Prema tome, $z - 1/m$ je gornja međa skupa S, manja od njegova supremuma z, što je ponovno proturječje. Preostaje jedino mogućnost $E_a(z) = b$. □



Na slici su prikazana dva slučaja koja smo isključili u dokazu. U prvome dobivamo element skupa S veći od z, a u drugome gornju među manju od z. Mali pomaci za $1/m$ omogućuju da vrijednost funkcije ostane s iste strane broja b.

Propozicija 1.3.25. *Funkcija E_a jedino je rastuće proširenje racionalnih potencija na $\mathbb{R}$. Preciznije, ako rastuća funkcija $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava $F(q) = a^q$ za svaki $q \in \mathbb{Q}$, tada je $F = E_a$.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Za svaki racionalan $q < x$ vrijedi $a^q = F(q) \leqslant F(x)$, pa je $E_a(x) \leqslant F(x)$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ izaberimo racionalan r takav da je $x < r < x + 1/n$. Tada je

$$F(x) \leqslant F(r) = a^r = E_a(r) \leqslant E_a(x + 1/n) = E_a(x)a^{1/n}.$$

Stoga lema 1.3.20 daje

$$0 \leqslant F(x) - E_a(x) \leqslant \frac{E_a(x)(a-1)}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Prema Arhimedovu svojstvu slijedi $F(x) = E_a(x)$. □

Teorem 1.3.26. *Za svaki $a > 0$, $a \neq 1$, postoji točno jedna strogo monotona bijekcija $E_a\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ takva da je*

$$E_a(0) = 1, \qquad E_a(1) = a, \qquad E_a(x + y) = E_a(x)E_a(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ona proširuje racionalne potencije. Strogo raste za $a > 1$, a strogo pada za $0 < a < 1$.

Dokaz. Za $a > 1$ postojanje, zakon zbrajanja eksponenata i bijektivnost već smo dokazali. Neka druga funkcija F zadovoljava navedene uvjete. Ona mora strogo rasti jer je $F(0) = 1 < a = F(1)$. Iz funkcijske jednadžbe dobivamo $F(m) = a^m$ za $m \in \mathbb{Z}$ i $F(m/n)^n = F(m) = a^m$ za $n \in \mathbb{N}$. Pozitivnost vrijednosti daje $F(m/n) = a^{m/n}$, pa propozicija 1.3.25 daje $F = E_a$.

Neka je sada $0 < a < 1$. Za bazu $c := 1/a > 1$ već smo konstruirali funkciju E_c. Definiramo

$$E_a(x) := \frac{1}{E_c(x)}.$$

Ona je strogo padajuća bijekcija na pozitivne brojeve, jer je E_c strogo rastuća bijekcija, a preslikavanje $t \mapsto 1/t$ strogo padajuća bijekcija pozitivnih brojeva. Iz svojstava funkcije E_c slijedi

$$E_a(0) = 1, \qquad E_a(1) = a, \qquad E_a(x + y) = \frac{1}{E_c(x)E_c(y)} = E_a(x)E_a(y).$$

Za racionalan q vrijedi $E_a(q) = 1/c^q = a^q$. Ako F zadovoljava uvjete teorema za bazu a, onda funkcija $x \mapsto 1/F(x)$ zadovoljava iste uvjete za bazu c. Dokazana jedinstvenost za $c > 1$ daje jedinstvenost i za $0 < a < 1$. □

Za $a = 1$ zasebno definiramo $E_1(x) := 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Ta funkcija proširuje racionalne potencije i zadovoljava zakon zbrajanja eksponenata, ali nije bijekcija na skup pozitivnih brojeva.

Od sada je oznaka $a^x := E_a(x)$ potpuno opravdana za svaki $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$. Time smo dokazali teorem o realnoj eksponencijalnoj funkciji koji smo ranije privremeno prihvatili. Za $a \neq 1$ opravdano je i postojanje njezine inverzne, logaritamske funkcije na cijelom skupu pozitivnih brojeva.

U ovom dokazu nismo pretpostavili neprekidnost eksponencijalne funkcije. Svojstvo potpunosti upotrijebili smo pri definiranju $E_a(x)$ i pri dokazivanju surjektivnosti. Gustoća racionalnih brojeva omogućila je rastavljanje eksponenata i usporedbe racionalnim potencijama, a procjena iz leme 1.3.20 isključila je mogućnost razmaka koji se tim usporedbama ne bi mogao zatvoriti.

Zadatak 1.3.7. Za $a > 1$ i $x \in \mathbb{R}$ dokažite i gornju karakterizaciju

$$a^x = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q},\ q > x\}.$$

Uputa: za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberite racionalan q između x i $x + 1/n$ i upotrijebite lemu 1.3.20.

1.4. Ekvipotentnost i prebrojivost

Broj elemenata dvaju konačnih skupova možemo usporediti sparivanjem: svakom elementu prvoga skupa pridružujemo po jedan različit element drugoga. Ako na objema stranama svi elementi dobiju partnera, skupovi imaju jednak broj elemenata. Jezikom funkcija, konstruirali smo bijekciju. Ta ideja omogućuje uspoređivanje i beskonačnih skupova, ali zaključci pritom mogu biti drukčiji od onih na koje smo navikli za konačne skupove.

1.4.1. Jednakobrojnost i uspoređivanje skupova

Definicija 1.4.1. *Skupovi A i B su* jednakobrojni *ili* ekvipotentni *ako postoji bijekcija $f\colon A \to B$. Tada pišemo*

$$A \sim B \qquad \textit{ili} \qquad k(A) = k(B).$$

Ako postoji injekcija $f\colon A \to B$, pišemo $k(A) \leqslant k(B)$. Ako uz to skupovi nisu ekvipotentni, pišemo $k(A) < k(B)$. Oznaku $k(A)$ zovemo kardinalnim brojem *skupa A.*

Za naše potrebe dovoljno je razumjeti značenje jednakosti i usporedbi kardinalnih brojeva: određujemo ih postojanjem odgovarajućih preslikavanja. Nećemo provoditi zasebnu konstrukciju kardinalnih brojeva.

Propozicija 1.4.2. *Ekvipotentnost je refleksivna, simetrična i tranzitivna:*

$$\begin{aligned} &A \sim A, \\ &A \sim B \implies B \sim A, \\ &A \sim B,\ B \sim C \implies A \sim C. \end{aligned}$$

Usporedba putem injekcija također je refleksivna i tranzitivna.

Dokaz. Identiteta $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ je bijekcija. Ako je $f\colon A \to B$ bijekcija, onda je i njezin inverz $f^{-1}\colon B \to A$ bijekcija. Ako su $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ bijekcije, takva je i kompozicija $g \circ f\colon A \to C$. Posljednja tvrdnja slijedi jer je identiteta injektivna, a kompozicija dviju injekcija ponovno je injekcija. □

Dakle, na svakoj promatranoj obitelji skupova ekvipotentnost je relacija ekvivalencije. Ekvipotentne skupove smijemo zamijeniti jedne drugima i pri uspoređivanju kardinalnih brojeva: ako su $A' \sim A$ i $B \sim B'$, bijekcije na tim dvjema stranama možemo komponirati s injekcijom $A \to B$ i dobiti injekciju $A' \to B'$.

Definicija 1.4.3. *Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $F_n := \{1, \ldots, n\}$, a $F_0 := \emptyset$. Skup A je* konačan *ako je $A \sim F_n$ za neki $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tada kažemo da A ima n elemenata i pišemo $k(A) = n$. Skup koji nije konačan zovemo* beskonačnim.

Posebno, $\emptyset$ je konačan skup s 0 elemenata. Da bi izraz "broj elemenata konačnog skupa" bio jednoznačan, treba provjeriti da isti skup ne može biti ekvipotentan s F_m i F_n za $m \neq n$.

Lema 1.4.4 (Dirichletovo načelo)**.** *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ ne postoji injekcija $F_{n+1} \to F_n$.*

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 0$ ne postoji ni funkcija iz nepraznoga skupa F_1 u $\emptyset$. Pretpostavimo da ne postoji injekcija $F_{n+1} \to F_n$. Kad bi postojala injekcija $f\colon F_{n+2} \to F_{n+1}$, u kodomeni bismo mogli zamijeniti oznake $f(n+2)$ i $n+1$ (ili ih ostaviti ako su već jednake). Tako bismo dobili injekciju h s $h(n+2) = n+1$. Zbog injektivnosti nijedan od argumenata $1, \ldots, n+1$ ne bi imao sliku $n+1$. Zato bi restrikcija funkcije h na F_{n+1} bila injekcija u F_n, protivno pretpostavci indukcije. □

Korolar 1.4.5. *Broj elemenata konačnoga skupa jedinstveno je određen. Skup $\mathbb{N}$ je beskonačan.*

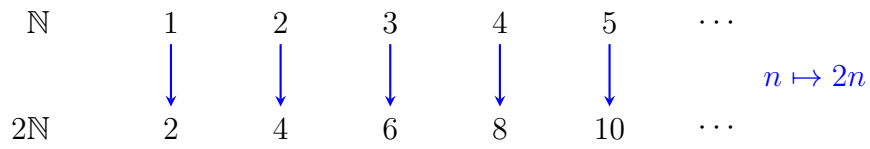
Dokaz. Ako je $m > n$ i postoji bijekcija $F_m \to F_n$, njezinim suženjem na $F_{n+1} \subseteq F_m$ dobili bismo zabranjenu injekciju. Zato $A \sim F_m$ i $A \sim F_n$ povlači $m = n$. Kad bi $\mathbb{N}$ bio konačan, bijekciju $\mathbb{N} \to F_n$ na isti bismo način mogli suziti na F_{n+1} i dobiti proturječje. □

Za konačne skupove oznaka $k(A) \leqslant k(B)$ slaže se s uobičajenom usporedbom njihovih brojeva elemenata. Za $m \leqslant n$ uključivanje $F_m \hookrightarrow F_n$ je injekcija, dok za $m > n$ takva injekcija ne postoji prema prethodnoj lemi.

Primjer 1.4.6. Skup $2\mathbb{N} := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ pravi je podskup od $\mathbb{N}$, ali preslikavanje

$$f\colon \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, \qquad f(n) = 2n,$$

jest bijekcija. Dakle, beskonačan skup može biti ekvipotentan svojemu pravom podskupu. Uključivanje $2\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ nije surjektivno, ali to ne sprječava postojanje neke druge bijekcije između tih skupova.



Prava inkluzija zato sama po sebi ne dokazuje strogu nejednakost kardinalnih brojeva. Sljedeći teorem daje temeljno pravilo za uspoređivanje pomoću injekcija u oba smjera.

1.4.2. Cantor–Schröder–Bernsteinov teorem

Želimo li dokazati da su dva skupa ekvipotentna, katkad je znatno lakše pronaći po jednu injekciju u svakom smjeru nego izravno zadati bijekciju. Sljedeći teorem pokazuje da je i to dovoljno.

Teorem 1.4.7 (Cantor–Schröder–Bernstein)**.** *Neka su A i B skupovi. Ako postoje injekcije $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to A$, tada postoji bijekcija $h\colon A \to B$. Drugim riječima,*

$$k(A) \leqslant k(B) \quad i \quad k(B) \leqslant k(A) \quad \Longrightarrow \quad A \sim B.$$

Dokaz. Dokazat ćemo teorem povezivanjem elemenata u lance. Ako je jedan od skupova prazan, postojanje obiju injekcija povlači da je i drugi prazan, pa tvrdnja vrijedi. U nastavku možemo pretpostaviti da su skupovi neprazni.

Najprije ih možemo smatrati disjunktnima. Doista, umjesto A i B možemo uzeti njihove označene kopije $A \times \{0\}$ i $B \times \{1\}$, koje su disjunktne, te injekcije

$$(a, 0) \longmapsto (f(a), 1), \qquad (b, 1) \longmapsto (g(b), 0).$$

Bijekciju između tih kopija vraćamo na polazne skupove jednostavnim izostavljanjem oznaka. Zato radi preglednosti nadalje pišemo samo A i B, uz pretpostavku $A \cap B = \emptyset$.

Iz svakoga $a \in A$ povučemo strelicu prema $f(a) \in B$, a iz svakoga $b \in B$ strelicu prema $g(b) \in A$. Svaki element tako ima točno jednoga *sljedbenika* i najviše jednoga *prethodnika*. Naime, element skupa B ima najviše jednu prasliku po injekciji f, a element skupa A najviše jednu prasliku po injekciji g.

Dva elementa smjestimo u istu *komponentu* ako se od jednoga do drugoga može doći konačnim brojem koraka duž strelica, pri čemu je dopušteno ići i u suprotnom smjeru. To je relacija ekvivalencije: možemo napraviti nula koraka, obrnuti redoslijed koraka ili nadovezati dva puta. Zato su komponente međusobno disjunktne i zajedno daju cijeli skup $A \cup B$.

Objasnimo kakve komponente mogu nastati. Od svakog elementa slijedimo strelice unaprijed, što je uvijek moguće jer sljedbenik postoji. Unatrag nastavljamo dok god prethodnik postoji. Nema grananja, jer su sljedbenik i, kada postoji, prethodnik jedinstveni. Ako se neki element ponovi, dobivamo konačan ciklus. U takav ciklus ne može ulaziti nikakav dodatni lanac: mjesto njegova ulaska imalo bi dva različita prethodnika, onoga iz ciklusa

i onoga iz dodatnog lanca. Iz ciklusa također ne može izlaziti dodatna strelica, jer svaki element ima samo jednoga sljedbenika. Ciklus stoga čini cijelu svoju komponentu. Njegova je duljina parna, jer se elementi skupova A i B izmjenjuju.

Ako nema ponavljanja, dobivamo ili lanac koji se beskonačno nastavlja u oba smjera ili lanac koji ima prvi element, a beskonačno se nastavlja unaprijed. Prvi element pripada ili skupu A ili skupu B. Konačan lanac bez ciklusa nije moguć, jer bi njegov posljednji element morao imati sljedbenika. Time smo dobili točno četiri vrste komponenti:

1. lanac s prvim elementom u A;

2. lanac s prvim elementom u B;

3. lanac bez prvoga elementa, beskonačan u oba smjera;

4. konačan ciklus.

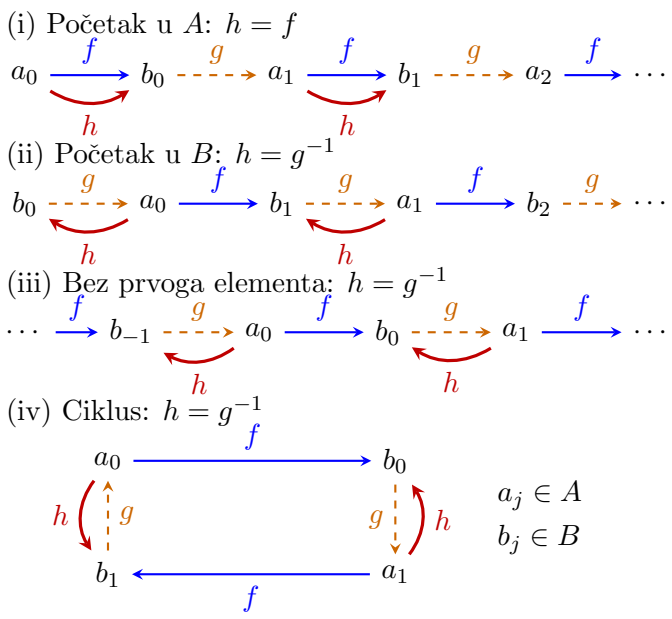
Na komponenti prve vrste koristimo f. Svaki njezin element iz B ima prethodnika u A, jer prvi element lanca pripada A. Taj je prethodnik jedinstven. Zato restrikcija funkcije f bijektivno preslikava sve elemente te komponente iz A na sve njezine elemente iz B.

Na svakoj od ostalih triju vrsta komponenti koristimo strelice funkcije g u obrnutom smjeru. Naime, svaki element iz A u takvoj komponenti ima prethodnika u B: u drugoj vrsti samo prvi element, koji pripada B, nema prethodnika, a u trećoj i četvrtoj vrsti svaki element ima prethodnika. Funkcija g stoga bijektivno preslikava elemente komponente iz B na one iz A, pa njezin inverz daje bijekciju u traženom smjeru. Oznaka $g^{-1}(a)$ ovdje znači jedinstveni $b \in B$ za koji je $g(b) = a$; ona je definirana za $a \in g(B)$.

Dakle, za svaki $a \in A$ postavimo

$$h(a) := \begin{cases} f(a), & \text{ako komponenta od } a \text{ počinje u } A, \\ g^{-1}(a), & \text{u svim ostalim slučajevima.} \end{cases} \tag{1.25}$$

Ovo pravilo ne zahtijeva nikakav zaseban izbor unutar komponenti. U svakoj od njih već smo provjerili da daje bijekciju između njezinih elemenata iz A i njezinih elemenata iz B. Elementi različitih komponenti ne mogu imati istu sliku, jer h ostaje unutar komponente. Zato je h injektivna. Nadalje, svaki $b \in B$ ima prasliku u vlastitoj komponenti, pa je h surjektivna. Time je dokazana tvrdnja. □



Strelice označene s h prikazuju odabrane parove; u posljednja tri slučaja idu u smjeru suprotnom od pripadnih strelica funkcije g. Ciklus može imati bilo koji pozitivan paran broj elemenata, uključujući dva; na slici je prikazan ciklus s četiri elementa.

Teorem izražava antisimetričnost usporedbe kardinalnih brojeva: injekcije u oba smjera jamče $k(A) = k(B)$. Sami skupovi A i B pritom mogu biti različiti.

Konstrukciju iz dokaza možemo zapisati i bez pozivanja na dijagram. Postavimo

$$C_0 := A \setminus g(B), \qquad C_{n+1} := g(f(C_n)) \quad (n \geqslant 0), \qquad C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Skup C_0 sastoji se od prvih elemenata lanaca koji počinju u A, a skup C_n od njihovih elemenata dobivenih nakon $2n$ koraka. Zato je C upravo skup svih elemenata iz A koji pripadaju komponentama prve vrste. Formula (1.25) glasi

$$h(a) = \begin{cases} f(a), & a \in C, \\ g^{-1}(a), & a \in A \setminus C. \end{cases}$$

Drugi je redak dobro definiran jer $A \setminus C \subseteq g(B)$.

Korolar 1.4.8. *Ako je $A \subseteq B \subseteq C$ i $A \sim C$, tada je $A \sim B \sim C$.*

Dokaz. Inkluzija $A \to B$ jest injekcija. Restrikcija bilo koje bijekcije $C \to A$ na skup B jest injekcija $B \to A$. Po teoremu slijedi $A \sim B$, a iz $A \sim C$ i tranzitivnosti dobivamo $B \sim C$. □

1.4.3. Prebrojivi skupovi

Definicija 1.4.9. *Skup A zovemo* prebrojivim *ako je $A \sim \mathbb{N}$. Skup je* najviše prebrojiv *ako je konačan ili prebrojiv, a* neprebrojiv *ako nije najviše prebrojiv.*

Prema ovoj konvenciji prebrojiv skup nužno je beskonačan. Prazan skup je konačan, pa je najviše prebrojiv. U literaturi se riječ "prebrojiv" ponekad upotrebljava i za konačne skupove, zbog čega treba obratiti pozornost na prihvaćenu definiciju. Podsjetimo da je $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, a $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Bijekciju $u\colon \mathbb{N} \to A$ možemo zamisliti kao *nabrajanje* svih elemenata skupa A:

$$u(1), u(2), u(3), \ldots.$$

Svaki se element pritom pojavljuje točno jednom. Za prebrojivost nije potrebno da nabrajanje slijedi neki unaprijed zadani poredak elemenata.

Primjer 1.4.10. Preslikavanja

$$n \longmapsto 2n, \qquad n \longmapsto 2n - 1$$

bijekcije su s $\mathbb{N}$ na skup pozitivnih parnih, odnosno pozitivnih neparnih brojeva. Dakle, oba su skupa prebrojiva. I preslikavanje $n \mapsto 2n + 1$ jest bijekcija, ali njegova je slika $2\mathbb{N} + 1 = \{3, 5, 7, \ldots\}$, pa ne obuhvaća broj 1. Bijekcija $n \mapsto n - 1$ pokazuje da je i $\mathbb{N}_0$ prebrojiv.

Primjer 1.4.11. Skup cijelih brojeva možemo nabrojiti redom

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots.$$

Preciznije, funkcija $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ zadana s

$$u(1) = 0, \qquad u(2n) = n, \qquad u(2n + 1) = -n \quad (n \in \mathbb{N})$$

jest bijekcija: pozitivni cijeli brojevi pojavljuju se na parnim mjestima, negativni na neparnim mjestima većima od 1, a nula samo na prvome mjestu. Zato je $\mathbb{Z}$ prebrojiv. Njezina inverzna funkcija jest

$$\zeta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \qquad \zeta(z) = \begin{cases} 2z, & z > 0, \\ 1 - 2z, & z \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Tu ćemo bijekciju upotrijebiti za označavanje cijelih brojeva prirodnim brojevima.

Propozicija 1.4.12. *Svaki podskup prebrojivoga skupa je najviše prebrojiv.*

Dokaz. Najprije dokažimo tvrdnju za podskup $C \subseteq \mathbb{N}$. Ako je C konačan, tvrdnja vrijedi po definiciji. Ako je C beskonačan, njegovo ćemo nabrajanje odrediti jednoznačno, birajući u svakome koraku najmanji preostali element:

$$c_1 = \min C, \qquad c_{n+1} = \min\bigl(C \setminus \{c_1, \ldots, c_n\}\bigr).$$

Skup iz kojega biramo nikada nije prazan, jer bi inače C bio konačan. Najmanji element postoji po svojstvu dobre uređenosti skupa $\mathbb{N}$. Po konstrukciji je $c_{n+1} > c_n$, pa indukcijom slijedi $c_n \geqslant n$. Stoga je $n \mapsto c_n$ injekcija s $\mathbb{N}$ u C.

Provjerimo da smo doista obuhvatili svaki element skupa C. Kad neki $k \in C$ ne bi bio odabran ni u jednome koraku, on bi posebno bio među kandidatima pri odabiru c_k. Tada bi vrijedilo $c_k \leqslant k$. Zajedno s $c_k \geqslant k$ to daje $c_k = k$, što je proturječje. Prema tome je $n \mapsto c_n$ i surjekcija, pa je C prebrojiv.

Sada neka je $B \subseteq A$, gdje je A prebrojiv, i neka je $f\colon A \to \mathbb{N}$ bijekcija. Restrikcija funkcije f, uz kodomenu $f(B)$, daje bijekciju $B \to f(B)$. Skup $f(B) \subseteq \mathbb{N}$ po dokazanome je konačan ili prebrojiv, pa isto vrijedi za B. □

Propozicija 1.4.13. *Skup A je najviše prebrojiv ako i samo ako postoji injekcija $j\colon A \to \mathbb{N}$.*

Dokaz. Ako je A konačan, bijekcija s nekim skupom $\{1, \ldots, m\}$, shvaćena kao funkcija s kodomenom $\mathbb{N}$, daje traženu injekciju. Za $A = \emptyset$ uzimamo praznu funkciju. Ako je A prebrojiv, postoji čak bijekcija $A \to \mathbb{N}$.

Obratno, injekcija $j\colon A \to \mathbb{N}$ daje bijekciju $A \to j(A)$. Po propoziciji 1.4.12 skup $j(A)$ je najviše prebrojiv, pa je takav i A. □

Odmah slijedi da je podskup najviše prebrojivoga skupa najviše prebrojiv: dovoljno je injekciju u $\mathbb{N}$ suziti na taj podskup.

Korolar 1.4.14. *Slika svake funkcije s domenom $\mathbb{N}$ najviše je prebrojiva. Za neprazan skup S vrijedi i obrat: ako je najviše prebrojiv, postoji surjekcija $\mathbb{N} \to S$.*

Dokaz. Neka je $f\colon \mathbb{N} \to S$. Za $a \in f(\mathbb{N})$ definiramo

$$j(a) := \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, f(n) = a\}.$$

Skup pod znakom minimuma nije prazan, pa je j dobro definirana. Ako je $j(a) = j(b) = n$, tada je $a = f(n) = b$. Dakle, $j\colon f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ jest injekcija i možemo primijeniti propoziciju 1.4.13.

Obratno, ako je S prebrojiv, postoji čak bijekcija $\mathbb{N} \to S$. Ako je S neprazan i konačan, napišimo $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$, gdje je $m \geqslant 1$. Surjekciju dobivamo tako da definiramo $f(n) = s_n$ za $1 \leqslant n \leqslant m$, a $f(n) = s_m$ za $n > m$. □

Ovaj korolar dopušta nabrajanje s ponavljanjem: ako su svi elementi nekoga skupa obuhvaćeni vrijednostima $f(1), f(2), \ldots$, taj je skup najviše prebrojiv. Da bismo zaključili da je prebrojiv, trebamo još znati da je beskonačan.

1.4.4. Parovi prirodnih brojeva i racionalni brojevi

Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ možemo zamisliti kao beskonačnu mrežu. Nabrajanje po cijelim redcima ne bi bilo prikladno: nikada ne bismo završili prvi redak i stigli do drugoga. Umjesto toga nabrajamo po konačnim dijagonalama na kojima je zbroj koordinata stalan.

Propozicija 1.4.15. *Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv. Jedna bijekcija s toga skupa na $\mathbb{N}$ zadana je formulom*

$$\pi(m,n) = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m. \tag{1.27}$$

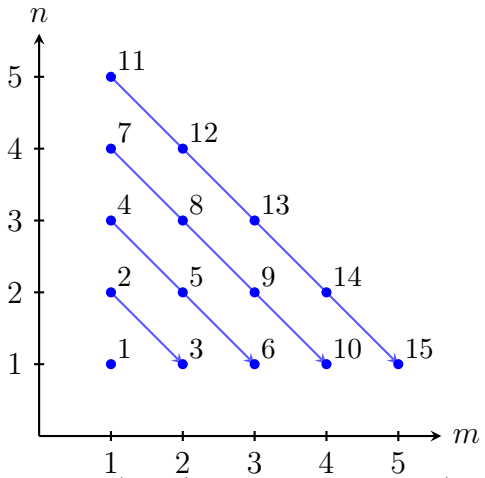
Dokaz. Za $d \in \mathbb{N}$ stavimo

$$D_d := \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, m+n = d+1\}, \qquad T_d := \frac{d(d+1)}{2}, \qquad T_0 := 0.$$

Skup D_d ima točno d elemenata: redom su to $(1,d), (2,d-1), \ldots, (d,1)$. Za $(m,n) \in D_d$ formula (1.27) daje $\pi(m,n) = T_{d-1} + m$. Dakle, dijagonala D_d preslikava se bijektivno na skup

$$\{T_{d-1}+1, T_{d-1}+2, \ldots, T_d\}.$$

Ti su skupovi međusobno disjunktni i zajedno daju $\mathbb{N}$. Doista, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveni $d \in \mathbb{N}$ takav da je $T_{d-1} < k \leqslant T_d$: uzmemo najmanji d za koji je $k \leqslant T_d$, a takav postoji jer je $T_k \geqslant k$. Time su dokazane i injektivnost i surjektivnost funkcije π. □



Uz točku (m,n) zapisan je broj $\pi(m,n)$.

Teorem 1.4.16. *Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je prebrojiv.*

Dokaz. Svaki racionalni broj r ima jedinstveni zapis

$$r = \frac{p}{q}, \qquad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad \gcd(|p|, q) = 1.$$

Za nulu je to zapis $0/1$. Preslikavanje $r \mapsto (p, q)$ zato je dobro definirana injekcija s $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Da bismo dobili injekciju u $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cijeli broj p najprije zamijenimo prirodnim brojem $\zeta(p)$ iz (1.26). Konačno, funkcija

$$J\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}, \qquad J(r) := \pi\big(\zeta(p), q\big) \quad \text{za skraćeni zapis } r = p/q$$

jest injekcija, kao kompozicija injekcija. S druge strane, uključenje $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto n$, jest injekcija. Cantor–Schröder–Bernsteinov teorem 1.4.7 sada daje $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. □

U prethodnome dokazu izbor skraćenoga zapisa osigurava da je pravilo $r \mapsto (p, q)$ jednoznačno. Bez te konvencije isti bi broj imao različite zapise, primjerice $1/2 = 2/4$. Prebrojivost racionalnih brojeva također ne znači da se oni mogu nabrojiti u strogo rastućemu poretku: između svaka dva različita racionalna broja nalazi se još jedan racionalan broj.

Korolar 1.4.17. *Ako su A i B najviše prebrojivi skupovi, tada su takvi i $A \times B$ i $A \cup B$.*

Dokaz. Odaberimo injekcije $j\colon A \to \mathbb{N}$ i $k\colon B \to \mathbb{N}$. Pravilo $(a, b) \mapsto \pi(j(a), k(b))$ daje injekciju $A \times B \to \mathbb{N}$. Za uniju upotrijebimo injekciju $h\colon A \cup B \to \mathbb{N}$ zadanu s

$$h(x) = \begin{cases} 2j(x), & x \in A, \\ 2k(x) - 1, & x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Elementi iz A dobivaju parne oznake, a preostali elementi neparne; unutar svakoga od tih dvaju dijelova injektivnost slijedi iz injektivnosti funkcija j i k. Zaključak sada slijedi iz propozicije 1.4.13. □

Zadatak 1.4.1. Dokažite indukcijom da je konačan produkt najviše prebrojivih skupova najviše prebrojiv. Posebno zaključite da je $\mathbb{Q}^d$ prebrojiv za svaki $d \in \mathbb{N}$.

Zadatak 1.4.2. Neka je A prebrojiv, a $F \subseteq A$ konačan. Dokažite da je $A \setminus F$ prebrojiv.

1.4.5. Ekvipotentnost intervala

Prebrojivost ne smijemo poistovjetiti s omeđenošću, duljinom ili gustoćom skupa na brojevnom pravcu. Najprije ćemo pokazati da svi intervali koji imaju barem dvije točke imaju jednako mnogo elemenata kao cijeli skup $\mathbb{R}$.

Propozicija 1.4.18. *Za realne brojeve $a < b$ i $c < d$ vrijedi*

$$\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle, \qquad [a, b] \sim [c, d].$$

Dokaz. Afina funkcija

$$L(x) = c + \frac{d - c}{b - a}(x - a)$$

preslikava a u c, a b u d i strogo raste. Njezin je inverz

$$L^{-1}(y) = a + \frac{b-a}{d-c}(y-c).$$

Iz formula slijedi da su $a < x < b$ i $c < L(x) < d$ ekvivalentni, kao i odgovarajuće nestroge nejednakosti. Zato navedene restrikcije daju bijekcije traženih intervala. □

Propozicija 1.4.19. *Za svake $a < b$ vrijedi $\mathbb{R} \sim \langle a, b\rangle$.*

Dokaz. Dovoljno je konstruirati bijekciju sa $\mathbb{R}$ na $\langle -1, 1\rangle$, a zatim primijeniti prethodnu propoziciju. Takva je funkcija

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle, \qquad \varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

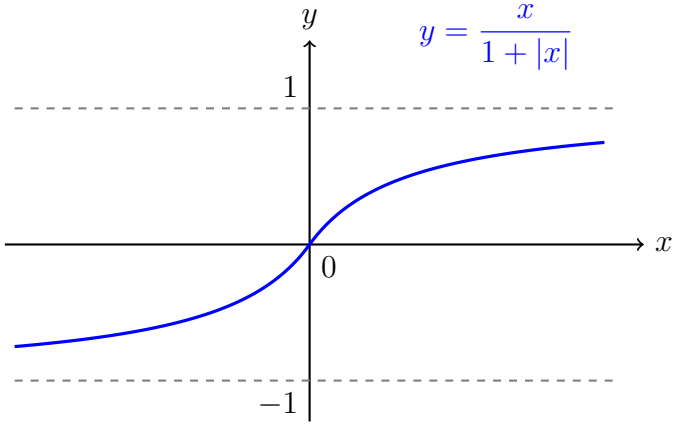
Doista, $|\varphi(x)| = |x|/(1+|x|) < 1$. Za $-1 < y < 1$ definiramo

$$\psi(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

Nazivnik je pozitivan, a iz

$$1 + |\psi(y)| = \frac{1}{1-|y|}, \qquad 1 - |\varphi(x)| = \frac{1}{1+|x|}$$

slijedi $\varphi(\psi(y)) = y$ i $\psi(\varphi(x)) = x$. Prema tome, φ i ψ međusobno su inverzne bijekcije. □



Propozicija 1.4.20. *Za svake $a < b$ vrijedi $[a, b] \sim \langle a, b\rangle$.*

Dokaz. Uključivanje $\langle a, b\rangle \hookrightarrow [a, b]$ je injekcija. Injekciju u drugom smjeru daje afina funkcija

$$j\colon [a, b] \to \langle a, b\rangle, \qquad j(x) = a + \frac{b-a}{4} + \frac{x-a}{2}.$$

Njezina je slika segment

$$\left[\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}\right] \subseteq \langle a, b\rangle.$$

Cantor–Schröder–Bernsteinov teorem 1.4.7 sada daje traženu bijekciju. □

Korolar 1.4.21. *Svaki interval $I \subseteq \mathbb{R}$ koji sadrži barem dvije različite točke ekvipotentan je skupu $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Odaberimo $a, b \in I$, $a < b$. Prema definiciji intervala vrijedi $\langle a, b\rangle \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$. Već smo konstruirali bijekciju $\mathbb{R} \to \langle a, b\rangle$, pa kompozicijom s uključivanjem dobivamo injekciju $\mathbb{R} \to I$. Uključivanje $I \hookrightarrow \mathbb{R}$ daje injekciju u drugom smjeru. Ponovno primijenimo teorem 1.4.7. □

Tvrdnja uključuje otvorene, zatvorene i poluotvorene intervale. Uvjet o dvjema različitim točkama nužan je: prazan i jednočlan interval konačni su skupovi, dok je $\mathbb{R}$ beskonačan jer sadrži $\mathbb{N}$. Jednak kardinalni broj ovdje ne znači jednaku duljinu intervala niti jednako ponašanje njihovih krajnjih točaka.

Zadatak 1.4.3. Konstruirajte izravnu bijekciju $[0, 1] \to [0, 1\rangle$ pravilom

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+2}, & x = \dfrac{1}{n+1} \text{ za neki } n \in \mathbb{N}_0, \\ x, & \text{inače.} \end{cases}$$

Provjerite injektivnost i surjektivnost te objasnite zašto se točka 1 ne smije samo preslikati u 0, uz ostale točke fiksne.

1.4.6. Neprebrojivost realnih brojeva

Iako su svi intervali s barem dvije točke međusobno ekvipotentni, nijedan od njih ne možemo potpuno popisati prirodnim brojevima. Za dokaz upotrijebit ćemo potpunost iz prethodnoga odjeljka, u obliku teorema o ugniježđenim segmentima.

Teorem 1.4.22. *Za svake realne brojeve $a < b$ segment $[a, b]$ je neprebrojiv.*

Dokaz. Dokažimo da nijedna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to [a, b]$ nije surjektivna. Budući da je $[a, b]$ neprazan, time ćemo isključiti i konačnost i prebrojivost toga skupa.

Neka je, dakle, zadana proizvoljna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to [a, b]$. Rekurzivno ćemo konstruirati neprazne segmente $I_n = [a_n, b_n]$, počevši od $I_0 = [a, b]$, tako da je

$$I_n \subseteq I_{n-1}, \qquad f(n) \notin I_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Pretpostavimo da smo odabrali $I_{n-1} = [u, v]$, gdje je $u < v$. Ako je $f(n) \leqslant (u + v)/2$, postavimo

$$I_n = \left[\frac{u + 3v}{4}, v\right];$$

inače postavimo

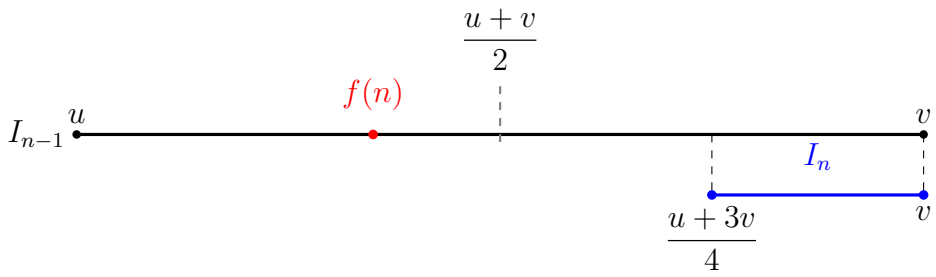
$$I_n = \left[u, \frac{3u + v}{4}\right].$$

U prvome je slučaju svaki element odabranoga segmenta strogo veći od $(u+v)/2$, a u drugome strogo manji. Zato u oba slučaja vrijedi $f(n) \notin I_n$. Segment I_n ima pozitivnu duljinu $(v-u)/4$ i sadržan je u I_{n-1}, pa postupak možemo nastaviti.

Prema Cantorovu teoremu o ugniježđenim segmentima postoji

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_n.$$

Taj broj pripada $[a,b]$, ali za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \in I_n$ i $f(n) \notin I_n$, pa je $x \neq f(n)$. Dakle, x nije u slici funkcije f. Budući da je f bila proizvoljna, nikakvo popisivanje prirodnim brojevima ne može obuhvatiti cijeli segment. □



Slika prikazuje prvi slučaj konstrukcije. U drugome odabiremo lijevu četvrtinu segmenta. Za dokaz je dovoljno postojanje zajedničke točke; ne trebamo zasebno dokazivati da je ona jedinstvena.

Korolar 1.4.23. *Skup* $\mathbb{R}$ *i svaki njegov interval koji sadrži barem dvije različite točke neprebrojivi su.*

Dokaz. Kad bi $\mathbb{R}$ bio najviše prebrojiv, takav bi bio i njegov podskup $[0,1]$, protivno prethodnom teoremu. Svaki interval s barem dvije točke ekvipotentan je skupu $\mathbb{R}$, pa je i on neprebrojiv. □

Korolar 1.4.24. *Skup iracionalnih brojeva* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *je neprebrojiv.*

Dokaz. Kad bi bio najviše prebrojiv, unija

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

dvaju najviše prebrojivih skupova bila bi najviše prebrojiva, što je proturječje. □

Gustoća i prebrojivost opisuju različita svojstva. Gustoća racionalnih brojeva kaže da svaki neprazan otvoreni interval sadrži racionalan broj. Ona ne kaže da se svaki realan broj nalazi u nekom popisu racionalnih brojeva. Štoviše, $\mathbb{Q}$ je gust i prebrojiv, dok je svaki neprazan otvoreni interval neprebrojiv.

Zadatak 1.4.4. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ najviše prebrojiv i $a < b$. Dokažite da je $\langle a,b\rangle \setminus S$ neprebrojiv. Posebno zaključite da svaki neprazan otvoreni interval sadrži neprebrojivo mnogo iracionalnih brojeva.

Poglavlje 2

Nizovi

Pri približnom računanju obično ne dobivamo odjednom točnu vrijednost, nego redom sve bolje aproksimacije. Primjerice, broj možemo zamjenjivati njegovim decimalnim odsječcima, a korijen računati postupkom koji iz jedne aproksimacije proizvodi sljedeću. Takav uređeni slijed vrijednosti opisujemo nizom. Glavno je pitanje približavaju li se njegovi članovi nekom broju i kako tu tvrdnju precizno izraziti i dokazati.

U ovom poglavlju najprije uvodimo konvergenciju i dokazujemo pravila računanja s limesima. Zatim proučavamo odabrane primjere, gomilišta i kriterije konvergencije. Na kraju realne brojeve proširujemo na kompleksne te pokazujemo kako se konvergencija kompleksnoga niza svodi na konvergenciju dvaju realnih nizova. Koristit ćemo potpunost realnih brojeva, Arhimedovo svojstvo i postojanje korijena, dokazane u prethodnom poglavlju.

2.1. Nizovi i podnizovi

Definicija 2.1.1. *Neka je $S \neq \emptyset$.* Niz u skupu S *funkcija je* $a\colon \mathbb{N} \to S$. *Vrijednost* $a(n)$ *označavamo s* a_n *i nazivamo* n-tim članom niza*, a broj* n *njegovim* indeksom. *Niz označavamo s* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ili kraće s* (a_n).

Niz nije isto što i skup njegovih vrijednosti $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. U nizu pamtimo redoslijed i ponavljanja. Na primjer, nizovi $1, 2, 1, 2, \ldots$ i $2, 1, 2, 1, \ldots$ različiti su, iako im je skup vrijednosti isti. Konstantni niz $a_n = c$ ima beskonačno mnogo članova, ali samo jednu vrijednost.

Primjer 2.1.2. Nizove možemo zadati na različite načine:

1. formulom, primjerice $a_n = 1/n$ ili $b_n = (-1)^n$;

2. po slučajevima, primjerice $c_{2k-1} = 0$, $c_{2k} = k$ za $k \in \mathbb{N}$;

3. rekurzijom, primjerice $u_1 = 1$ i $u_{n+1} = (u_n + 2/u_n)/2$ za $n \in \mathbb{N}$.

U posljednjem slučaju treba provjeriti da je svaki korak definiran. Ovdje indukcija daje $u_n > 0$, pa nazivnik nikada nije nula. Samo prvih nekoliko zapisanih članova općenito ne određuje cijeli niz: potrebno je pravilo koje određuje svaki član.

Ponekad je prirodnije početi indeksom 0 ili nekim drugim cijelim brojem. Tada ćemo to izričito navesti. Promjena početnoga indeksa ne mijenja bit pojmova koje uvodimo. Niz može imati i funkcije kao članove: primjerice, $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(nx)$, jest niz funkcija. Za svaki fiksni x dobivamo realan niz $(f_n(x))$.

Definicija 2.1.3. *Realan niz (a_n) je* omeđen odozgo *ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $a_n \leqslant M$ za svaki n, a* omeđen odozdo *ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je $m \leqslant a_n$ za svaki n. Niz je* omeđen *ili* ograničen *ako je omeđen s obiju strana; ekvivalentno, postoji $C > 0$ takav da je $|a_n| \leqslant C$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Niz je rastući *ako je $a_n \leqslant a_{n+1}$ za svaki n, a* padajući *ako je $a_n \geqslant a_{n+1}$ za svaki n. Ako vrijede stroge nejednakosti, govorimo o* strogo rastućem *odnosno* strogo padajućem *nizu. Rastuće i padajuće nizove zajedno nazivamo* monotonima.

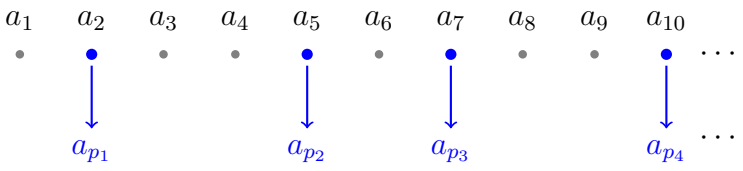
Uvjet $a_n \leqslant a_{n+1}$ ekvivalentan je uvjetu $n < m \implies a_n \leqslant a_m$: doista, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \cdots \leqslant a_m$. Jednako vrijedi za ostale vrste monotonosti. Rastući niz ne mora biti strogo rastući; konstantni je niz i rastući i padajući. Niz $(1/n)$ strogo pada i omeđen je, niz (n) strogo raste i nije omeđen odozgo, a niz $((-1)^n)$ omeđen je, ali nije monoton.

Definicija 2.1.4. Podniz *niza (a_n) niz je oblika $(a_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$, gdje su $p_1 < p_2 < \cdots$ prirodni brojevi. Drugim riječima, podniz dobivamo izabiranjem beskonačno mnogo članova uz očuvanje njihova redoslijeda.*

Primjerice, (a_{2k}) i (a_{2k-1}) jesu podnizovi parnih i neparnih indeksa. U oznaci a_{p_k} treba razlikovati k, mjesto u podnizu, od p_k, mjesta u izvornom nizu.

Lema 2.1.5. *Za strogo rastući niz prirodnih brojeva (p_k) vrijedi $p_k \geqslant k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Podniz podniza ponovno je podniz izvornoga niza.*

Dokaz. Imamo $p_1 \geqslant 1$. Ako je $p_k \geqslant k$, onda je $p_{k+1} \geqslant p_k + 1 \geqslant k + 1$, pa prva tvrdnja slijedi indukcijom. Ako je $(a_{p_{q_j}})$ podniz od (a_{p_k}), onda iz $q_j < q_{j+1}$ i strogoga rasta (p_k) slijedi $p_{q_j} < p_{q_{j+1}}$. To je upravo traženi uvjet na indekse. □



Na slici su izabrani indeksi $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 10$. Nastavak izbora mora dati strogo rastući beskonačan niz indeksa. Izbor članova ne mora očuvati razmake između indeksa, ali mora očuvati njihov redoslijed.

Zadatak 2.1.1. Dokažite da svaki podniz omeđenoga niza ostaje omeđen i da svaki podniz monotonoga niza ostaje monoton u istome smislu. Navedite neomeđen niz koji ima omeđen podniz.

2.2. Limes realnoga niza

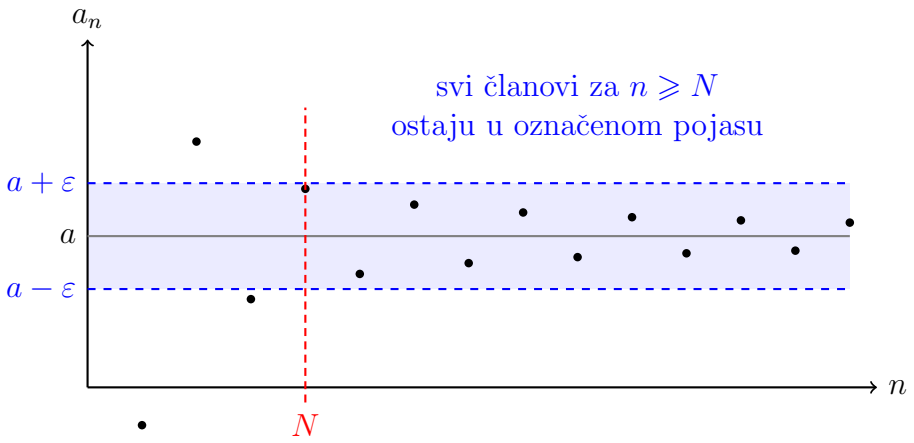
Izraz *gotovo svi članovi* znači: svi članovi osim eventualno konačno mnogo njih. Budući da konačan skup indeksa ima gornju među, to je isto što i *svi članovi od nekog indeksa nadalje*. Izraz *beskonačno mnogo članova* slabiji je: govori da nakon svakoga indeksa postoji još neki član s traženim svojstvom. U oba slučaja brojimo indekse, a ne različite vrijednosti.

Definicija 2.2.1. *Realan niz* (a_n) konvergira *ili* teži *broju* $a \in \mathbb{R}$ *ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geqslant N \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

Broj a *zovemo* limesom *ili* graničnom vrijednošću *niza i pišemo* $a_n \to a$ *ili* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. *Niz koji nema limes u* $\mathbb{R}$ *nazivamo* divergentnim u $\mathbb{R}$.

Za svaki zadani $\varepsilon > 0$ od nekoga mjesta nadalje svi članovi moraju pripadati intervalu $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$. Indeks N smije ovisiti o ε, ali nakon njegova izbora nejednakost mora vrijediti za *svaki* $n \geqslant N$. Ne zahtijevamo da se udaljenosti $|a_n - a|$ stalno smanjuju, ni da neki član niza bude jednak limesu. Konvencija $n > N$ umjesto $n \geqslant N$ daje isti pojam: dovoljno je pomaknuti granični indeks za jedan.



Na slici je niz $a_n = 1 + 1.25(-1)^n/n$. Za prikazani $\varepsilon = 0.35$ možemo uzeti $N = 4$. Slika predočuje definiciju, ali konačan crtež sam po sebi ne dokazuje tvrdnju o svim preostalim članovima.

Primjer 2.2.2. Vrijedi $1/n \to 0$. Za zadani $\varepsilon > 0$ Arhimedovo svojstvo daje $N \in \mathbb{N}$ takav da je $N > 1/\varepsilon$. Tada za svaki $n \geqslant N$ vrijedi

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Jednako dokazujemo $(-1)^n/n \to 0$, jer je apsolutna vrijednost člana ponovno $1/n$. Taj niz nije monoton. Konstantni niz $a_n = c$ konvergira k c, jer je $|a_n - c| = 0$.

Negacija tvrdnje $a_n \to a$, za *zadani* a, glasi

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant N) \quad |a_n - a| \geqslant \varepsilon_0.$$

To znači da se članovi udaljeni barem ε_0 od a pojavljuju proizvoljno daleko u nizu. Da bismo dokazali divergenciju u $\mathbb{R}$, treba isključiti *svaki* $a \in \mathbb{R}$, a ne samo jednoga kandidata.

Teorem 2.2.3. *Limes realnoga niza jedinstven je. Svaki konvergentan realan niz omeđen je.*

Dokaz. Pretpostavimo $a_n \to a$ i $a_n \to b$, gdje je $a \neq b$. Uzmimo $\varepsilon = |a-b|/3 > 0$. Postoje indeksi N_1, N_2 takvi da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za $n \geqslant N_1$ i $|a_n - b| < \varepsilon$ za $n \geqslant N_2$. Za $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$ dobivamo

$$|a-b| \leqslant |a-a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b|,$$

što je proturječje.

Ako $a_n \to a$, odaberimo N tako da je $|a_n - a| < 1$ za $n \geqslant N$. Za te indekse vrijedi $|a_n| < |a| + 1$. Broj

$$C := \max\{|a|+1, |a_1|, \ldots, |a_N|\}$$

zato omeđuje apsolutne vrijednosti *svih* članova. □

Propozicija 2.2.4. *Promjena konačno mnogo članova ne mijenja konvergenciju ni limes. Za svaki fiksni $r \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$a_n \to a \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+r} \to a.$$

Dokaz. Ako se dva niza podudaraju za $n \geqslant N_0$, u definiciji limesa dovoljno je svaki prag N zamijeniti s $\max\{N, N_0\}$. Za pomak indeksa, iz $n \geqslant N$ slijedi $n + r \geqslant N$. Obratno, ako je $|a_{n+r} - a| < \varepsilon$ za $n \geqslant N$, onda je $|a_m - a| < \varepsilon$ za $m \geqslant N + r$, uz $n = m - r$. □

Teorem 2.2.5. *Ako je $a_n \to a$, onda svaki podniz (a_{p_k}) konvergira k a.*

Dokaz. Za $\varepsilon > 0$ odaberimo N iz definicije limesa izvornoga niza. Ako je $k \geqslant N$, onda je $p_k \geqslant k \geqslant N$ prema lemi 2.1.5, pa je $|a_{p_k} - a| < \varepsilon$. □

Primjer 2.2.6. Omeđeni niz $a_n = (-1)^n$ divergira: njegov parni podniz ima limes 1, a neparni podniz limes -1. Kada bi cijeli niz konvergirao, oba bi podniza morala imati isti limes. Postojanje jednoga konvergentnog podniza zato nije dovoljno za konvergenciju cijeloga niza.

2.2.1. Beskonačni limesi

Definicija 2.2.7. *Pišemo* $a_n \to +\infty$ *ako*

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N) \quad a_n > M,$$

a $a_n \to -\infty$ *ako*

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N) \quad a_n < M.$$

To su beskonačni limesi. *Zajedno s konačnim limesima promatramo ih u* proširenom skupu realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Simboli $-\infty$ i $+\infty$ nisu realni brojevi. Niz koji teži jednom od njih divergira u $\mathbb{R}$, iako ima limes u $\overline{\mathbb{R}}$. Na primjer, $n \to +\infty$ i $-n \to -\infty$. Sama neomeđenost odozgo ne povlači $a_n \to +\infty$: niz $a_{2k} = k$, $a_{2k-1} = 0$ neomeđen je odozgo, ali se stalno vraća na nulu.

Propozicija 2.2.8. *Ako* $a_n \to +\infty$*, onda su* $a_n > 0$ *za gotovo sve* n *i* $1/a_n \to 0$*, pri čemu recipročni niz promatramo od mjesta gdje je definiran. Obratno, ako je* $a_n > 0$ *za gotovo sve* n *i* $1/a_n \to 0$*, onda* $a_n \to +\infty$*. Svaki podniz niza s limesom* $+\infty$ *ili* $-\infty$ *ima isti limes.*

Dokaz. Za prvu tvrdnju primijenimo definiciju s pragom $M = 1/\varepsilon > 0$. Tada je $0 < 1/a_n < \varepsilon$ za gotovo sve n. Za obrat, za zadani $M \in \mathbb{R}$ izaberimo $B > \max\{M, 0\}$. Za gotovo sve n imamo $0 < 1/a_n < 1/B$, pa je $a_n > B > M$. Tvrdnja o podnizovima slijedi iz $p_k \geqslant k$ jednako kao kod konačnoga limesa. □

2.2.2. Konvergencija monotonih nizova

Teorem 2.2.9. *Rastući realan niz koji je omeđen odozgo konvergira i vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Padajući realan niz koji je omeđen odozdo konvergira i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

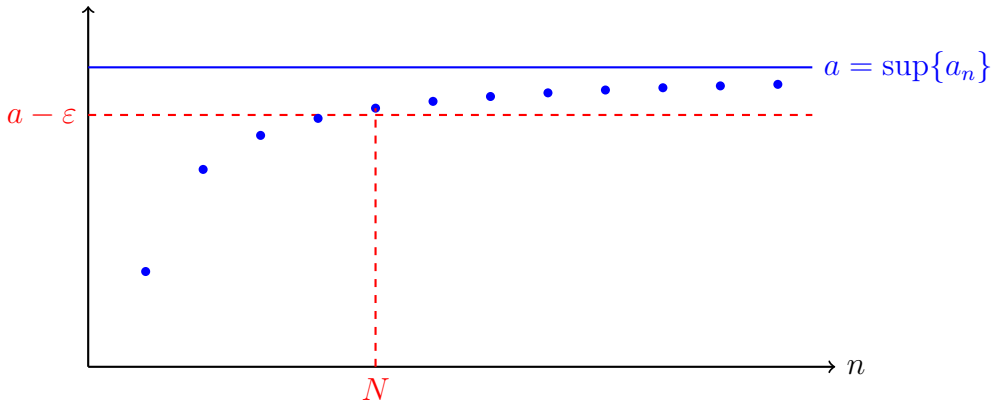
Rastući niz koji nije omeđen odozgo teži k $+\infty$*, a padajući niz koji nije omeđen odozdo teži k* $-\infty$*.*

Dokaz. Neka je (a_n) rastući i omeđen odozgo. Po potpunosti postoji $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Za svaki $\varepsilon > 0$ broj $a - \varepsilon$ nije gornja međa, pa postoji N takav da je $a - \varepsilon < a_N$. Za $n \geqslant N$ monotonost daje

$$a - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant a < a + \varepsilon,$$

odnosno $|a_n - a| < \varepsilon$. Za padajući niz postavimo $a = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Postoji N takav da je $a_N < a + \varepsilon$, a za $n \geqslant N$ vrijedi $a \leqslant a_n \leqslant a_N < a + \varepsilon$.

Ako rastući niz nije omeđen odozgo, za svaki $M \in \mathbb{R}$ postoji N s $a_N > M$. Tada $a_n \geqslant a_N > M$ za svaki $n \geqslant N$, što upravo znači $a_n \to +\infty$. Dokaz za padajući neomeđeni niz dobivamo obratom nejednakosti. □



Za rastući niz dovoljno je pronaći jedan član iznad $a - \varepsilon$: svi kasniji članovi ostaju iznad njega i ispod supremuma a. Upravo zato monotonost pretvara svojstvo supremuma u konvergenciju.

Omeđenost je nužna za konvergenciju u $\mathbb{R}$, ali nije dovoljna. Monotonost nije nužna, a sama po sebi također nije dovoljna. Zajedno, omeđenost i monotonost daju dovoljan uvjet. Potpunost smo u prethodnom dokazu upotrijebili pri postojanju supremuma odnosno infimuma.

Zadatak 2.2.1. Dokažite: ako $a_{2k} \to a$ i $a_{2k-1} \to a$, onda $a_n \to a$. Objasnite zašto je bitno da su limesi jednaki i da su tim dvama podnizovima obuhvaćeni svi indeksi.

Zadatak 2.2.2. Za $a_n = 3 + (-1)^n/\sqrt{n}$ iz definicije dokažite $a_n \to 3$. Za zadani $\varepsilon > 0$ navedite prikladan prirodan broj N.

2.3. Operacije s konvergentnim nizovima

Zbrajanje, oduzimanje i množenje nizova provodimo po članovima: $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ i $(a_n)(b_n) = (a_n b_n)$. Dijeljenje zahtijeva dodatnu pozornost jer nazivnik ne smije biti nula. U sljedećem teoremu svi navedeni limesi a, b jesu konačni.

Teorem 2.3.1. *Neka $a_n \to a$ i $b_n \to b$ u $\mathbb{R}$. Tada vrijedi*

$$a_n \pm b_n \to a \pm b, \qquad a_n b_n \to ab, \qquad |a_n| \to |a|.$$

Ako je $b \neq 0$, onda je $b_n \neq 0$ za gotovo sve n i

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}.$$

U posljednjoj tvrdnji kvocijent promatramo od mjesta gdje je definiran; eventualne ranije članove možemo zadati proizvoljno.

Dokaz. Za zadani $\varepsilon > 0$ odaberimo N_1, N_2 tako da $|a_n - a| < \varepsilon/2$ za $n \geqslant N_1$ i $|b_n - b| < \varepsilon/2$ za $n \geqslant N_2$. Za $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$ tada vrijedi

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon.$$

Za produkt koristimo omeđenost: postoji $C \geqslant 1$ takav da je $|a_n| \leqslant C$ za svaki n. Rastavimo pogrešku u obliku

$$a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a).$$

Za dovoljno velik n istodobno vrijedi $|b_n - b| < \varepsilon/(2C)$ i $|a_n - a| < \varepsilon/(2(|b| + 1))$, pa

$$|a_n b_n - ab| \leqslant C|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| < \varepsilon.$$

Obratna nejednakost trokuta daje $\big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a|$, odakle slijedi tvrdnja za apsolutne vrijednosti.

Neka je $b \neq 0$. Za dovoljno velik n imamo $|b_n - b| < |b|/2$, pa je $|b_n| \geqslant |b| - |b_n - b| > |b|/2 > 0$. Za te indekse vrijedi

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n|\,|b|} \leqslant \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|.$$

Za zadani $\varepsilon > 0$ desna je strana manja od ε čim dodatno zahtijevamo $|b_n - b| < \varepsilon|b|^2/2$. Dakle, $1/b_n \to 1/b$, a tvrdnja za kvocijent slijedi primjenom već dokazanoga pravila za produkt. □

Korolar 2.3.2. *Ako $a_n \to a$, $b_n \to b$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, onda $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$. Za svaki polinom P vrijedi $P(a_n) \to P(a)$. Ako su P, Q polinomi i $Q(a) \neq 0$, onda*

$$\frac{P(a_n)}{Q(a_n)} \longrightarrow \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Dokaz. Konstantni nizovi imaju svoje konstantne vrijednosti za limese. Zato linearnost slijedi iz pravila za sumu i produkt. Konačnom primjenom tih pravila dobivamo tvrdnju za polinome, a pravilom za kvocijent posljednju tvrdnju. □

Primjer 2.3.3. Dijeljenjem brojnika i nazivnika s n^2 dobivamo

$$\frac{3n^2 - n + 2}{2n^2 + 5} = \frac{3 - 1/n + 2/n^2}{2 + 5/n^2} \longrightarrow \frac{3}{2}.$$

Nazivnik nakon dijeljenja ima limes $2 \neq 0$, pa su ispunjeni uvjeti teorema. Nasuprot tome, iz $a_n \to 0$ i $b_n \to 0$ ne možemo odrediti limes kvocijenta: za $b_n = 1/n$ izbori $a_n = 1/n$, $a_n = 1/n^2$ i $a_n = (-1)^n/n$ daju redom limes 1, limes 0 i divergentan kvocijent.

Pravila za konačne limese ne dopuštaju računanje s izrazima poput $0/0$, $\infty - \infty$ ili $0 \cdot \infty$. To nisu rezultati računanja. Takvi zapisi samo opisuju situacije u kojima navedeni podaci o pojedinim nizovima ne određuju limes njihova kvocijenta, razlike ili produkta.

2.3.1. Uređaj i teorem o sendviču

Teorem 2.3.4. *Neka $a_n \to a$ i $b_n \to b$. Ako je $a_n \leqslant b_n$ za gotovo sve n, onda je $a \leqslant b$. Ako je $a < b$, onda je $a_n < b_n$ za gotovo sve n.*

Dokaz. Za prvu tvrdnju pretpostavimo suprotno, $a > b$. Za $\varepsilon = (a-b)/3$ i dovoljno velik n vrijedi

$$a_n > a - \varepsilon > b + \varepsilon > b_n,$$

što proturječi pretpostavci $a_n \leqslant b_n$. Za drugu tvrdnju uzmimo $\varepsilon = (b-a)/3$. Za dovoljno velik n tada je $a_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b_n$. □

Stroga nejednakost između članova ne mora ostati stroga nakon prijelaza na limes: $0 < 1/n$ za svaki n, a oba limesa jednaka su 0. Posebno, ako $a_n \to a > 0$, onda su gotovo svi članovi pozitivni.

Teorem 2.3.5 (Teorem o sendviču)**.** *Neka za gotovo sve n vrijedi $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$. Ako $a_n \to c$ i $b_n \to c$, onda i $c_n \to c$.*

Dokaz. Za $\varepsilon > 0$ izaberimo prag nakon kojega vrijede obje pretpostavljene nejednakosti i istodobno $c - \varepsilon < a_n$ te $b_n < c + \varepsilon$. Za sve te indekse vrijedi

$$c - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < c + \varepsilon,$$

što je definicija $c_n \to c$. □

Korolar 2.3.6. *Ako je (a_n) omeđen i $b_n \to 0$, onda $a_n b_n \to 0$.*

Dokaz. Iz $|a_n| \leqslant C$ slijedi $0 \leqslant |a_n b_n| \leqslant C|b_n| \to 0$. Teorem o sendviču daje $|a_n b_n| \to 0$, što je ekvivalentno $a_n b_n \to 0$. □

Na primjer, $\sin n/n \to 0$, jer je $|\sin n| \leqslant 1$. Ne treba dokazivati konvergenciju samoga niza $(\sin n)$.

Propozicija 2.3.7. *Za realan broj q takav da je $|q| < 1$ vrijedi $q^n \to 0$. Za $q > 1$ vrijedi $q^n \to +\infty$.*

Dokaz. Ako je $q = 0$, tvrdnja je neposredna. Za $0 < |q| < 1$ zapišimo $1/|q| = 1 + h$, gdje je $h > 0$. Bernoullijeva nejednakost $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$ daje

$$0 \leqslant |q^n| = \frac{1}{(1+h)^n} \leqslant \frac{1}{1+nh} \longrightarrow 0.$$

Posljednji limes slijedi dijeljenjem brojnika i nazivnika s n. Za $q > 1$ ista nejednakost daje $q^n \geqslant 1 + n(q-1)$, pa za svaki $M \in \mathbb{R}$ vrijedi $q^n > M$ za sve dovoljno velike n. □

Bernoullijevu nejednakost za $h \geqslant 0$ možemo dokazati indukcijom: iz $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$ množenjem s $1 + h$ dobivamo $(1+h)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)h + nh^2 \geqslant 1 + (n+1)h$. Nejednakost vrijedi i za $-1 \leqslant h < 0$ istom indukcijom, jer je i tada $1 + h \geqslant 0$ i $nh^2 \geqslant 0$.

2.3.2. Stolzov teorem i aritmetičke sredine

Pravilo za kvocijent konvergentnih nizova ne primjenjuje se izravno ako nazivnik teži k $+\infty$. U nekim takvim slučajevima pomaže uspoređivanje prirasta brojnika i nazivnika.

Teorem 2.3.8 (Stolz)**.** *Neka su (a_n) i (b_n) realni nizovi, neka je (b_n) strogo rastući i neka $b_n \to +\infty$. Ako za neki $L \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \longrightarrow L,$$

onda je

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow L.$$

Kvocijent a_n/b_n definiran je barem od nekog indeksa nadalje.

Dokaz. Uzmimo $\varepsilon > 0$. Postoji $K \in \mathbb{N}$ takav da je $b_K > 0$ i

$$\left| \frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (k \geqslant K).$$

Budući da je $b_{k+1} - b_k > 0$, slijedi

$$|(a_{k+1} - a_k) - L(b_{k+1} - b_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(b_{k+1} - b_k).$$

Za $n > K$ zbrajanjem od $k = K$ do $k = n - 1$, uz nejednakost trokuta i poništavanje susjednih članova, dobivamo

$$|(a_n - a_K) - L(b_n - b_K)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(b_n - b_K).$$

Stoga je

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| \leqslant \frac{|a_K - Lb_K|}{b_n} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{b_n - b_K}{b_n} \leqslant \frac{|a_K - Lb_K|}{b_n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Indeks K sada je fiksiran. Kako $b_n \to +\infty$, prvi pribrojnik manji je od $\varepsilon/2$ za sve dovoljno velike n. Time je dokazana konvergencija kvocijenta. □

Dokaz pokazuje ulogu obiju pretpostavki o nazivniku: pozitivni prirasti omogućuju zbrajanje procjena, a neograničeni rast uklanja utjecaj konačnoga početnog dijela niza. Nije potrebno pretpostaviti da (a_n) raste ili da teži u beskonačnost.

Korolar 2.3.9 (Cesàro)**.** *Ako $c_n \to c$, onda aritmetičke sredine prvih n članova također konvergiraju k c:*

$$\frac{c_1 + \cdots + c_n}{n} \longrightarrow c.$$

Dokaz. Primijenimo Stolzov teorem na $a_n = c_1 + \cdots + c_n$ i $b_n = n$. Tada je $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n) = c_{n+1} \to c$. □

Primjer 2.3.10. Obrat ne vrijedi. Za $c_{2k-1} = 0$ i $c_{2k} = 1$ niz (c_n) divergira, ali za njegove sredine s_n vrijedi

$$s_{2k} = \frac{1}{2}, \qquad s_{2k-1} = \frac{k-1}{2k-1}, \qquad \left| s_n - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

Dakle, $s_n \to 1/2$.

Primjer 2.3.11. Stolzov teorem omogućuje računanje limesa bez prethodnoga poznavanja formule za zbroj kvadrata. Za $a_n = 1^2 + \cdots + n^2$ i $b_n = n^3$ imamo

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^2}{3n^2 + 3n + 1} \longrightarrow \frac{1}{3},$$

pa je $(1^2 + \cdots + n^2)/n^3 \to 1/3$.

Zadatak 2.3.1. Za prirodan broj p dokažite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Uputa: upotrijebite Stolzov teorem i binomnu formulu za $(n+1)^{p+1} - n^{p+1}$.

Zadatak 2.3.2. Neka je $b_n > 0$ i $b_n \to 0$. Dokažite $1/b_n \to +\infty$. Za svaki od izraza $a_n - b_n$ i $c_n d_n$ navedite primjere različitih limesa uz iste uvjete $a_n, b_n \to +\infty$, odnosno $c_n \to 0$, $d_n \to +\infty$.

2.4. Primjeri i eksponencijalna funkcija

Opći teoremi o nizovima postaju osobito korisni kada iz rekurzije ili formule trebamo najprije dokazati konvergenciju, a tek zatim odrediti limes. U primjerima koji slijede pazit ćemo upravo na taj redoslijed. Nakon postupka za računanje korijena uvest ćemo broj e i povezati jedan niz elementarnih izraza s već konstruiranom eksponencijalnom funkcijom.

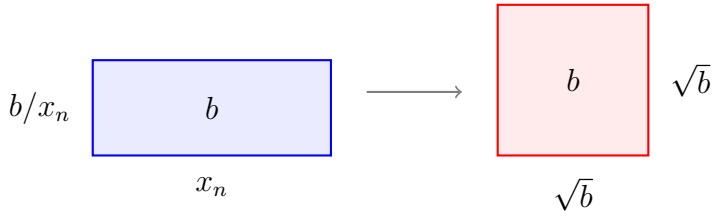
2.4.1. Heronov postupak za računanje kvadratnoga korijena

Postojanje pozitivnoga kvadratnog korijena dokazali smo iz potpunosti realnih brojeva. Sada želimo taj korijen aproksimirati brojevima koje možemo izračunati pomoću osnovnih računskih operacija.

Neka je $b > 0$ i neka je $x_0 > 0$ proizvoljna početna aproksimacija. Definiramo

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2.1}$$

Ako je x_n veći od $\sqrt{b}$, broj b/x_n manji je od $\sqrt{b}$. Njihova aritmetička sredina daje novu aproksimaciju. Taj postupak zovemo *Heronovim postupkom*; on je ujedno poseban slučaj Newtonova postupka, koji ćemo upoznati nakon derivacija.



pravokutnik i kvadrat imaju jednaku površinu

Slika motivira usrednjavanje duljina stranica pravokutnika. Za zaključak o konvergenciji ipak su potrebne točne algebarske jednakosti i teorem o monotonim nizovima.

Teorem 2.4.1. *Za svaki $b > 0$ i svaki $x_0 > 0$ rekurzija* (2.1) *određuje niz pozitivnih brojeva. Vrijedi*

$$x_n \geqslant \sqrt{b} \quad (n \geqslant 1), \qquad x_{n+1} \leqslant x_n \quad (n \geqslant 1), \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{b}.$$

Za pogrešku vrijedi točna formula

$$x_{n+1} - \sqrt{b} = \frac{(x_n - \sqrt{b})^2}{2x_n} \qquad (n \geqslant 0). \tag{2.2}$$

Dokaz. Pozitivnost svih članova dokazujemo indukcijom. Ako je $x_n > 0$, onda je $b/x_n > 0$, pa je izraz za x_{n+1} definiran i pozitivan. Kako je $x_0 > 0$, rekurzija se može nastaviti za svaki indeks.

Označimo $r := \sqrt{b} > 0$. Budući da je $b = r^2$, imamo

$$x_{n+1} - r = \frac{x_n^2 + r^2 - 2rx_n}{2x_n} = \frac{(x_n - r)^2}{2x_n} \geqslant 0.$$

Time smo istodobno dokazali (2.2) i činjenicu $x_n \geqslant r$ za svaki $n \geqslant 1$, neovisno o položaju početnoga člana. Nadalje,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{b - x_n^2}{2x_n} \leqslant 0 \qquad (n \geqslant 1).$$

Dakle, niz od člana x_1 nadalje pada i omeđen je odozdo brojem r. Postoji njegov limes $L \geqslant r > 0$. Tek sada smijemo prijeći na limes u rekurziji. Pravila za limes zbroja i kvocijenta daju

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{b}{L}\right),$$

pa je $L^2 = b$. Pozitivnost broja L i jedinstvenost pozitivnoga korijena daju $L = r$. □

Ako je $0 < x_0 < \sqrt{b}$, prvi korak povećava aproksimaciju i dovodi je iznad korijena. Zato niz ne mora padati počevši od x_0. Ako je $x_0 = \sqrt{b}$, svi su članovi jednaki korijenu. Ako je $x_0 \neq \sqrt{b}$, formula pogreške pokazuje da je $x_n > \sqrt{b}$ za $n \geqslant 1$, pa niz od toga mjesta strogo pada.

Samo rješavanje jednadžbe za mogući limes ne dokazuje konvergenciju. U prethodnom dokazu njezino smo postojanje opravdali prije nego što smo rekurziju upotrijebili za računanje limesa.

Za $n \geqslant 1$ stavimo $\delta_n := x_n - r \geqslant 0$. Iz formule pogreške slijede dvije korisne procjene:

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n^2}{2x_n} \leqslant \frac{\delta_n}{2}, \qquad \delta_{n+1} \leqslant \frac{\delta_n^2}{2r}.$$

Prva daje eksplicitnu ocjenu

$$0 \leqslant x_n - r \leqslant \frac{x_1 - r}{2^{n-1}} \qquad (n \geqslant 1).$$

Druga procjena omeđuje novu pogrešku konstantnim višekratnikom kvadrata prethodne pogreške. Kada je pogreška mala, to objašnjava brzu konvergenciju postupka.

Primjer 2.4.2. Za $b = 2$ i $x_0 = 2$ prva tri koraka daju

$$x_1 = \frac{3}{2}, \qquad x_2 = \frac{17}{12}, \qquad x_3 = \frac{577}{408}.$$

Pritom je $b/x_n \leqslant \sqrt{b} \leqslant x_n$ za svaki $n \geqslant 1$. Zato svaka izračunata aproksimacija daje i interval koji sigurno sadrži korijen. Primjerice,

$$\frac{816}{577} \leqslant \sqrt{2} \leqslant \frac{577}{408}.$$

Duljina toga intervala iznosi $1/235416 < 0.000005$. Tako točnost možemo provjeriti bez unaprijed poznate vrijednosti broja $\sqrt{2}$.

Zadatak 2.4.1. Za Heronov postupak dokažite da niz $(b/x_n)_{n\geqslant 1}$ raste prema $\sqrt{b}$ te da su segmenti $[b/x_n, x_n]$ ugniježđeni. Izvedite jednakost

$$x_n - \frac{b}{x_n} = 2(x_n - x_{n+1}) \qquad (n \geqslant 1).$$

Objasnite kako ona omogućuje procjenu pogreške iz dviju uzastopnih aproksimacija.

2.4.2. Nizovi korijena

U sljedećim primjerima i red korijena ovisi o indeksu. Zato ih ne dobivamo iz pravila o limesu fiksne potencije.

Propozicija 2.4.3. *Vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Binomni poučak za $n \geqslant 2$ daje

$$(1+\varepsilon)^n \geqslant 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2.$$

Ako je $n > 1 + 2/\varepsilon^2$, desna strana veća je od n. Budući da uzimanje pozitivnoga n-tog korijena čuva poredak, za sve takve indekse imamo

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon.$$

To je upravo tvrdnja o traženom limesu. □

Korolar 2.4.4. *Za svaki $a > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Dokaz. Za $a > 1$ i sve dovoljno velike n vrijedi $1 < a < n$, pa

$$1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}.$$

Tvrdnju daje teorem o sendviču. Za $a = 1$ niz je konstantan. Ako je $0 < a < 1$, već dokazani slučaj primijenimo na $1/a > 1$ i upotrijebimo

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}.$$

□

Pretpostavka $a > 0$ bitna je. Za $a = 0$ niz je konstantno jednak nuli, dok za $a < 0$ realni korijen parnoga reda nije definiran. Za $a > 1$ postoji i izravna ocjena

$$0 < a^{1/n} - 1 \leqslant \frac{a-1}{n},$$

koju smo ranije izveli iz Bernoullijeve nejednakosti. Sada je možemo čitati i kao kvantitativan dokaz konvergencije.

Zadatak 2.4.2. Odredite limese nizova

$$\sqrt[n]{n^3}, \qquad \sqrt[n]{5n}, \qquad \sqrt[n]{n+1}.$$

U posljednjem primjeru usporedite $n + 1$ s n i $2n$.

2.4.3. Broj e

Promotrimo nizove

$$u_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad v_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Prvi će niz dati donje, a drugi gornje aproksimacije istoga broja. Najprije ćemo dokazati postojanje njihova zajedničkog limesa, a zatim njime definirati broj e.

Teorem 2.4.5. *Niz (u_n) strogo raste, niz (v_n) strogo pada i oba konvergiraju istom realnom broju L. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$u_n < L < v_n.$$

Segmenti $[u_n, v_n]$ ugniježđeni su i imaju točno jednu zajedničku točku, broj L.

Dokaz. Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$ i radi preglednosti označimo

$$a := 1+\frac{1}{n}, \qquad b := 1+\frac{1}{n+1}.$$

Tada je $a > b > 0$, $a-b = 1/(n(n+1))$ i $b-1 = 1/(n+1)$. Za svaki $m \in \mathbb{N}$ rastav razlike potencija daje

$$a^m - b^m = (a-b)\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j}b^j.$$

Svaki od m pribrojnika u sumi barem je b^{m-1}, a najviše a^{m-1}. Zato

$$m(a-b)b^{m-1} \leqslant a^m - b^m \leqslant m(a-b)a^{m-1}.$$

Najprije usporedimo $u_{n+1} = b^{n+1}$ i $u_n = a^n$. Primjenom gornje ocjene s $m = n$ dobivamo

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (b-1)a^n - b(a^n - b^n) \\ &\geqslant \frac{a^n}{n+1} - bn(a-b)a^{n-1} \\ &= \frac{a^{n-1}(a-b)}{n+1} = \frac{a^{n-1}}{n(n+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Dakle, niz (u_n) strogo raste.

Za usporedbu $v_n = a^{n+1}$ i $v_{n+1} = b^{n+2}$ upotrijebimo donju ocjenu s $m = n+1$:

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= (a^{n+1} - b^{n+1}) - (b-1)b^{n+1} \\ &\geqslant (n+1)(a-b)b^n - \frac{b^{n+1}}{n+1} \\ &= b^n\left(\frac{1}{n} - \frac{n+2}{(n+1)^2}\right) = \frac{b^n}{n(n+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Prema tome, niz (v_n) strogo pada.

Iz definicija neposredno slijedi $v_n = u_n(1 + 1/n) > u_n$. Zajedno s upravo dokazanom monotonošću to daje

$$2 = u_1 \leqslant u_n < v_n \leqslant v_1 = 4 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Oba su niza, dakle, monotona i omeđena, pa prema teoremu o monotonim nizovima postoje konačni limesi $U = \lim u_n$ i $V = \lim v_n$. Tek sada u jednakosti

$$v_n = u_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

prelazimo na limes i dobivamo $V = U$. Označimo zajednički limes s L. Stroga monotonost daje

$$u_n < u_{n+1} \leqslant L \leqslant v_{n+1} < v_n.$$

Prema tome, L pripada svakom segmentu $[u_n, v_n]$, a ti su segmenti ugniježđeni. Ako i broj c pripada svima njima, onda $u_n \leqslant c \leqslant v_n$ za svaki n. Prelaskom na limes dobivamo $L \leqslant c \leqslant L$, pa je $c = L$. □

Definicija 2.4.6. *Broj*

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

zovemo Eulerovim brojem.

U odjeljku o funkcijama broj e uveli smo pomoću donjih i gornjih ograda, uz najavu da ćemo opravdati postojanje i jedinstvenost. Prethodni teorem pokazuje da je upravo definirani limes taj broj: jedini je realan broj koji za svaki n zadovoljava

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Za računanje broja e koristan je i drugi niz,

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pri tome je $0! := 1$. Dokazat ćemo da i ovaj niz konvergira prema e. Sve sume u dokazu konačne su; nije nam potrebna teorija beskonačnih redova.

Teorem 2.4.7. *Niz (s_n) strogo raste i vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Posebno, $2 < e < 3$.

Dokaz. Očito je $s_{n+1} - s_n = 1/(n+1)! > 0$. Za $k \geqslant 2$ imamo $k! \geqslant 2 \cdot 3^{k-2}$, pa za $n \geqslant 2$ formula za konačnu geometrijsku sumu daje

$$s_n \leqslant 2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{3^j} < 2 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{11}{4}.$$

I $s_1 = 2 < 11/4$, pa je niz (s_n) omeđen i raste. Označimo njegov limes sa S.

Binomni poučak daje zapis

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right). \tag{2.3}$$

Za $k = 0$ produkt je prazan i prema dogovoru jednak 1. U zapisu (2.3) svi faktori pripadaju intervalu $[0, 1]$, pa je $u_n \leqslant s_n$ za svaki n. Prelaskom na limes dobivamo $e \leqslant S$.

Za obratnu nejednakost *najprije fiksirajmo* $p \in \mathbb{N}$. Za svaki $n \geqslant p$ iz (2.3) slijedi

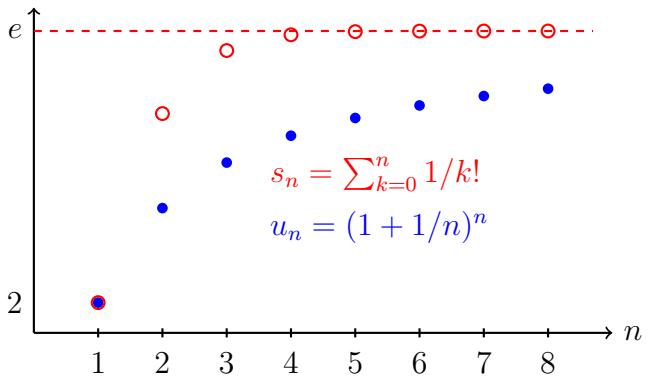
$$u_n \geqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Na desnoj strani sada je fiksan, konačan broj pribrojnika i faktora. Zato smijemo primijeniti pravila za njihove limese kad $n \to \infty$. Svaki produkt teži broju 1, pa dobivamo

$$e \geqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} = s_p.$$

To vrijedi za svaki p. Tek sada puštamo $p \to \infty$ i dobivamo $e \geqslant S$. Dakle, $S = e$. Konačno, $e \geqslant s_2 = 5/2 > 2$ i $e \leqslant 11/4 < 3$. □

U dokazu jednakosti limesa ne možemo jednostavno zamijeniti svaki faktor njegovim limesom u sumi čiji broj članova također raste. Pravila o limesu zbroja i produkta odnose se na fiksan konačan broj nizova. Zato smo najprije zadržali prvih $p + 1$ članova, prešli na limes po n, a zatim po p.



Na slici su prikazani prvi članovi obaju nizova. Oba prilaze broju e odozdo. Iz već dokazanih ograda slijedi

$$0 < e - u_n < v_n - u_n = \frac{u_n}{n} < \frac{3}{n}.$$

Za konačne sume s_n dobit ćemo znatno manju zajamčenu ogradu pogreške pri istom indeksu n.

Propozicija 2.4.8. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$0 < e - s_n \leqslant \frac{1}{n\,n!}.$$

Dokaz. Za $m \in \mathbb{N}$ imamo

$$0 < s_{n+m} - s_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+j)} \leqslant \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(n+1)^j} \leqslant \frac{1}{n\,n!}.$$

Puštanjem $m \to \infty$ dobivamo gornju ocjenu. Stroga pozitivnost slijedi iz $e \geqslant s_{n+1} > s_n$. □

Tako se, primjerice, dovoljno velikom konačnom sumom dobiva $e \approx 2.718281828$. Procjena ostatka određuje koliko znamenaka smijemo smatrati pouzdanima.

Zadatak 2.4.3. Primijenite ocjenu ostatka za $n = 6$ i napišite racionalni segment koji sadrži e.

Prikaz broja e kao limesa konačnih suma omogućuje nam dokazati i da taj broj nije racionalan. Ključ je u tome što množenje s $n!$ uklanja nazivnike svih pribrojnika u s_n, a ostatak ipak ostaje strogo pozitivan i malen.

Teorem 2.4.9. *Broj e je iracionalan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $e = p/q$ za neke $p, q \in \mathbb{N}$. Odaberimo prirodan broj $n \geqslant \max\{q, 2\}$ i promotrimo

$$D := n!(e - s_n) = \frac{p\,n!}{q} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}.$$

Budući da je $q \leqslant n$, broj q dijeli $n!$, pa je prvi pribrojnik cijeli broj. Za svaki $0 \leqslant k \leqslant n$ i broj $n!/k!$ cijeli je: za $k < n$ to je produkt $(k+1)(k+2)\cdots n$, a za $k = n$ jednak je 1. Prema tome, D je cijeli broj.

S druge strane, propozicija 2.4.8 daje

$$0 < D = n!(e - s_n) \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2} < 1.$$

Ne postoji cijeli broj strogo između 0 i 1. Dobiveno proturječje pokazuje da e nije racionalan. □

2.4.4. Eksponencijalna funkcija kao limes

U odjeljku o potpunosti konstruirali smo realne potencije a^x proširenjem racionalnih potencija pomoću supremuma. Sada ćemo dokazati da za bazu $a = e$ vrijedi i korisna limes formula. Najprije radimo s nenegativnim argumentom.

Definicija 2.4.10. *Neka su $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ i $f\colon D \to \mathbb{R}$ funkcije na istom skupu D. Kažemo da niz (f_n)* konvergira po točkama *prema funkciji f ako za svaki $x \in D$ niz brojeva $(f_n(x))$ konvergira prema $f(x)$.*

Dakle, argument x najprije fiksiramo, a zatim promatramo limes po indeksu n. U definiciji konvergencije prag indeksa smije ovisiti i o odabranom x i o traženoj točnosti.

Teorem 2.4.11. *Za svaki $x \geqslant 0$ postoji konačan limes*

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad f_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Vrijedi

$$F(0) = 1, \qquad F(1) = e, \qquad F(x) \geqslant 1 + x,$$

a za sve $x, y \geqslant 0$ vrijedi

$$F(x + y) = F(x)F(y).$$

Dokaz. Binomni zapis sada glasi

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Usporedba faktora, kao u dokazu za (u_n), pokazuje da $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$. Za $x > 0$ novi član daje strogu nejednakost. Za $x = 0$ svi su članovi jednaki 1.

Odaberimo cijeli $m \geqslant 1$ takav da je $x \leqslant m$. Za svaki n imamo

$$f_n(x) \leqslant f_n(m) \leqslant f_{mn}(m) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{mn} = u_n^m \leqslant 3^m.$$

Prva nejednakost slijedi usporedbom baza, a druga iz upravo dokazane monotonosti po indeksu, jer je $mn \geqslant n$. Dakle, za fiksni x niz $(f_n(x))$ raste i omeđen je, pa njegov limes postoji. Vrijednosti $F(0) = 1$ i $F(1) = e$ slijede iz definicije. Iz prvih dvaju pribrojnika binomnoga zapisa dobivamo $f_n(x) \geqslant 1 + x$, pa i $F(x) \geqslant 1 + x > 0$.

Za zakon zbrajanja eksponenata fiksirajmo $x, y \geqslant 0$ i stavimo

$$A_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right), \qquad B_n := 1 + \frac{x + y}{n}.$$

Tada je $A_n \geqslant B_n \geqslant 1$ i $A_n - B_n = xy/n^2$. Rastav razlike potencija daje

$$0 \leqslant A_n^n - B_n^n = \frac{xy}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} A_n^{n-1-j} B_n^j \leqslant \frac{xy}{n} A_n^{n-1} \leqslant \frac{xy}{n} f_n(x) f_n(y).$$

Nizovi $(f_n(x))$ i $(f_n(y))$ konvergentni su, pa su omeđeni. Desna strana zato teži nuli. Budući da je $A_n^n = f_n(x)f_n(y)$ i $B_n^n = f_n(x+y)$, pravila za limese i teorem o sendviču daju $F(x)F(y) - F(x+y) = 0$. □

Propozicija 2.4.12. *Definirajmo* $E\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ *formulom*

$$E(x) := \begin{cases} F(x), & x \geqslant 0, \\ 1/F(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Tada je $E(x+y) = E(x)E(y)$ *za sve* $x, y \in \mathbb{R}$*, funkcija* E *strogo raste i vrijedi* $E(x) = e^x$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$*.*

Dokaz. Zakon je već dokazan za nenegativne argumente. Za $x = -s$, $y = -t$, gdje su $s, t \geqslant 0$, imamo

$$E(x+y) = \frac{1}{F(s+t)} = \frac{1}{F(s)F(t)} = E(x)E(y).$$

Preostaje slučaj suprotnih predznaka. Zbog simetrije dovoljno je uzeti $x = s \geqslant 0$ i $y = -t \leqslant 0$. Ako je $s \geqslant t$, tada $F(s) = F(s-t)F(t)$, pa

$$E(s-t) = F(s-t) = \frac{F(s)}{F(t)} = E(s)E(-t).$$

Ako je $s < t$, tada $F(t) = F(t-s)F(s)$, pa

$$E(s-t) = \frac{1}{F(t-s)} = \frac{F(s)}{F(t)} = E(s)E(-t).$$

Time smo obuhvatili i slučaj $s = t$.

Za $h > 0$ imamo $E(h) = F(h) \geqslant 1 + h > 1$. Zato za $x < y$ zakon daje

$$E(y) = E(x)E(y-x) > E(x),$$

pa E strogo raste. Nadalje, $E(0) = 1$ i $E(1) = e$. Funkcijska jednadžba daje $E(m) = e^m$ za $m \in \mathbb{Z}$ te

$$E(m/n)^n = E(m) = e^m \qquad (m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}).$$

Pozitivnost vrijednosti i jedinstvenost pozitivnoga korijena stoga daju $E(m/n) = e^{m/n}$. Dakle, E je rastuće proširenje racionalnih potencija s bazom $e > 1$. Prema propoziciji 1.3.25 takvo je proširenje jedinstveno. Zato je $E(x) = e^x$ za svaki realan x. □

Nismo pretpostavili da limes koji definira F već jest poznata eksponencijalna funkcija. Najprije smo dokazali postojanje limesa, zakon zbrajanja eksponenata i monotonost, a zatim primijenili prethodno dokazanu jedinstvenost proširenja racionalnih potencija. Time je povezanost dviju konstrukcija opravdana bez upotrebe neprekidnosti ili derivacija.

Korolar 2.4.13. *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Za negativan x baza je pozitivna za sve dovoljno velike n.

Dokaz. Za $x \geqslant 0$ tvrdnja je već dokazana. Neka je $x = -t$, gdje je $t > 0$. Za $n > t$ vrijedi

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n.$$

Ako je $0 \leqslant v \leqslant 1$, rastav razlike potencija daje

$$0 \leqslant 1 - (1-v)^n = v \sum_{j=0}^{n-1} (1-v)^j \leqslant nv.$$

Za $v = t^2/n^2$ slijedi

$$1 - \frac{t^2}{n} \leqslant \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1.$$

Srednji izraz stoga teži broju 1. Kako $(1 + t/n)^n \to e^t > 0$, dijeljenjem dobivamo traženi limes $1/e^t = e^{-t}$. □

2.5. Podnizovi, gomilišta i limesi superior i inferior

Ograničen niz ne mora konvergirati: članovi niza $((-1)^n)$ ne približavaju se jednom broju. Ipak, možemo izdvojiti parne ili neparne indekse i tako dobiti konvergentne podnizove. Pokazat ćemo da se iz svakoga ograničenog realnog niza može izdvojiti konvergentan podniz. Zatim ćemo opisati sve brojeve kojima se mogu približavati njegovi podnizovi.

2.5.1. Monotoni i konvergentni podnizovi

Lema 2.5.1. *Svaki niz realnih brojeva ima monoton podniz.*

Dokaz. Indeks n nazovimo *vršnim* ako je

$$a_n \geqslant a_m \qquad \text{za svaki } m > n.$$

Drugim riječima, nakon člana a_n nema strogo većega člana. Razlikujemo dva slučaja.

Ako vršnih indeksa ima beskonačno mnogo, neka je n_1 najmanji vršni indeks, a n_{k+1} najmanji vršni indeks veći od n_k. Takav indeks uvijek postoji: beskonačan podskup od $\mathbb{N}$ ne može biti ograničen odozgo. Iz definicije vršnoga indeksa slijedi

$$a_{n_1} \geqslant a_{n_2} \geqslant a_{n_3} \geqslant \cdots.$$

Dakle, dobili smo padajući podniz.

Ako vršnih indeksa ima konačno mnogo, odaberimo N veći od svih njih; ako ih nema, stavimo $N = 1$. Neka je $n_1 = N$. Budući da $n_k \geqslant N$ nije vršni indeks, postoji $m > n_k$ takav da je $a_m > a_{n_k}$. Za n_{k+1} uzmemo najmanji takav m. Tako dobivamo strogo rastući niz indeksa i

$$a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \cdots .$$

U oba slučaja traženi podniz postoji. □

Tvrdnja ne jamči strogo monoton podniz: konstantan niz nema takav podniz. U dokazu smo pri svakom koraku birali najmanji raspoloživi indeks, pa je postupak izbora potpuno određen svojstvom dobrog uređenja prirodnih brojeva.

Korolar 2.5.2. *Neka je $r \in \mathbb{N}$ i neka su zadani realni nizovi $(a_n^{(1)}), \ldots, (a_n^{(r)})$. Postoje indeksi $n_1 < n_2 < \cdots$ takvi da su svi podnizovi*

$$(a_{n_k}^{(1)})_k, \ldots, (a_{n_k}^{(r)})_k$$

monotoni. Smjer monotonosti ne mora biti jednak za sve njih. Ako su svi zadani nizovi ograničeni, ti podnizovi konvergiraju.

Dokaz. Prema lemi postoji strogo rastuća funkcija $p_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koju je $(a^{(1)}_{p_1(k)})_k$ monoton. Ako je $r = 1$, odabir je završen. Za $r \geqslant 2$ primijenimo lemu na niz $(a^{(2)}_{p_1(k)})_k$. Dobivamo strogo rastuću funkciju $q_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da je $(a^{(2)}_{p_1(q_2(k))})_k$ monoton. Podniz prvoga monotonog niza i dalje je monoton, pa su uz $p_2 = p_1 \circ q_2$ prva dva niza monotona.

Nastavimo istim postupkom. Nakon j koraka imamo strogo rastuću funkciju p_j za koju su prvih j podnizova monotoni. Primjenom leme na $(a^{(j+1)}_{p_j(k)})_k$ dobivamo $p_{j+1} = p_j \circ q_{j+1}$, a već postignuta monotonost ostaje očuvana. Nakon konačno mnogo, točnije r, koraka stavimo $n_k = p_r(k)$. Ako su nizovi ograničeni, svi dobiveni podnizovi ograničeni su i monotoni, pa konvergiraju prema teoremu 2.2.9. □

Teorem 2.5.3 (Bolzano–Weierstrassov teorem)**.** *Svaki ograničen niz realnih brojeva ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Prema lemi 2.5.1 postoji monoton podniz. On je ograničen jer je podniz ograničenoga niza. Zato konvergira prema teoremu 2.2.9. □

2.5.2. Gomilišta niza

Definicija 2.5.4. *Broj $b \in \mathbb{R}$ zovemo* gomilištem *niza (a_n) ako postoji podniz (a_{n_k}) takav da je $a_{n_k} \to b$. Skup svih realnih gomilišta označavat ćemo s $G(a_n)$.*

U ovoj definiciji gomilište je realan broj. Ako podniz teži u $+\infty$ ili $-\infty$, to ćemo izričito navesti; simboli $\pm\infty$ nisu elementi skupa $G(a_n)$.

Propozicija 2.5.5. *Za realan broj b sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

1. *b je gomilište niza (a_n);*
2. *za svaki $\varepsilon > 0$ skup indeksa*

$$\{n \in \mathbb{N} : |a_n - b| < \varepsilon\}$$

je beskonačan;

3. *za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geqslant N$ takav da je $|a_n - b| < \varepsilon$.*

Dokaz. Ako $a_{n_k} \to b$, za svaki $\varepsilon > 0$ svi dovoljno kasni članovi podniza leže u $\langle b-\varepsilon, b+\varepsilon\rangle$. Njihovi su indeksi međusobno različiti, pa vrijedi druga tvrdnja. Druga i treća tvrdnja ekvivalentne su jer je podskup od $\mathbb{N}$ beskonačan ako i samo ako nije ograničen odozgo.

Pretpostavimo treću tvrdnju i stavimo $n_0 = 0$. Za svaki $k \geqslant 1$ neka je n_k najmanji indeks koji zadovoljava

$$n_k \geqslant n_{k-1} + 1, \qquad |a_{n_k} - b| < \frac{1}{k}.$$

Takav indeks postoji prema pretpostavci. Dobivamo podniz, a procjena pogreške pokazuje da $a_{n_k} \to b$. □

U drugoj tvrdnji brojimo *indekse*, a ne različite vrijednosti članova. Konstantan niz $a_n = c$ ima gomilište c, iako skup njegovih vrijednosti ima samo jedan element. Zato gomilište niza nije isto što i gomilište skupa njegovih vrijednosti u smislu koji zahtijeva druge, različite točke.

Primjer 2.5.6. Svaki ograničen realan niz ima barem jedno gomilište prema Bolzano–Weierstrassovu teoremu. Ako $a_n \to a$, svaki podniz konvergira prema a, pa je $G(a_n) = \{a\}$.

Niz $a_n = (-1)^n$ ima točno dva gomilišta, -1 i 1. Oba se dobivaju iz neparnih odnosno parnih indeksa. Ako $b \notin \{-1, 1\}$, okolina polumjera $\frac{1}{2}\min\{|b-1|, |b+1|\}$ ne sadrži nijedan član niza, pa b nije gomilište.

Niz $a_n = n$ nema realnih gomilišta: u svakom ograničenom intervalu nalazi se samo konačno mnogo njegovih članova.

Primjer 2.5.7 (Nabrajanje racionalnih brojeva)**.** Neka je $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekcija, čije smo postojanje dokazali u odjeljku o prebrojivosti. Tada je

$$G(r_n) = \mathbb{R}.$$

Doista, svaki neprazan otvoreni interval sadrži beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Da bismo to vidjeli, za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ podijelimo interval na m međusobno disjunktnih nepraznih otvorenih podintervala i u svakome upotrijebimo gustoću $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$. Dobivamo barem m različitih racionalnih brojeva. Zbog bijektivnosti nabrajanja, za svaki $b \in \mathbb{R}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo indeksa n s $r_n \in \langle b-\varepsilon, b+\varepsilon\rangle$. Propozicija 2.5.5 sada daje tvrdnju.

2.5.3. Limes superior i limes inferior

Pretpostavimo u ovom pododjeljku da je (a_n) ograničen. Za svaki $m \in \mathbb{N}$ definiramo infimum i supremum repa niza:

$$\alpha_m := \inf\{a_n : n \geqslant m\}, \qquad \beta_m := \sup\{a_n : n \geqslant m\}.$$

Skupovi na desnim stranama neprazni su i ograničeni, pa su α_m i β_m realni brojevi. Izbacivanjem prvih članova skup se smanjuje, stoga

$$\alpha_m \leqslant \alpha_{m+1}, \qquad \beta_{m+1} \leqslant \beta_m.$$

Oba su niza ograničena istim zajedničkim međama kao (a_n), pa konvergiraju.

Definicija 2.5.8. Limes inferior *i* limes superior *ograničenoga realnog niza definiramo s*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} \alpha_m = \sup_{m\in\mathbb{N}} \alpha_m, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} \beta_m = \inf_{m\in\mathbb{N}} \beta_m.$$

Kraće ćemo ih označavati s ℓ i L.

Vrijedi $\alpha_m \leqslant a_m \leqslant \beta_m$ i $\ell \leqslant L$. Prva nejednakost neposredna je iz definicije, a druga slijedi prelaskom na limes u $\alpha_m \leqslant \beta_m$. Sljedeći teorem objašnjava zašto ove veličine opisuju krajnje moguće granice podnizova.

Teorem 2.5.9. *Za ograničen realan niz vrijedi*

$$\ell = \min G(a_n), \qquad L = \max G(a_n).$$

Posebno, limes inferior i limes superior sami su gomilišta niza.

Dokaz. Najprije neka je $a_{n_k} \to b$. Za fiksni m svi dovoljno veliki indeksi n_k zadovoljavaju $n_k \geqslant m$, pa je $\alpha_m \leqslant a_{n_k} \leqslant \beta_m$. Prelaskom na limes po k dobivamo $\alpha_m \leqslant b \leqslant \beta_m$. To vrijedi za svaki m, pa prelaskom na limes po m slijedi

$$\ell \leqslant b \leqslant L.$$

Preostaje pokazati da se obje krajnje vrijednosti postižu.

Stavimo $n_0 = 0$. Za $k \geqslant 1$ neka je $M_k = \max\{k, n_{k-1} + 1\}$. Prema karakterizaciji supremuma postoji indeks $n \geqslant M_k$ za koji je $a_n > \beta_{M_k} - 1/k$. Za n_k uzmemo najmanji takav indeks. Budući da je $\beta_{M_k} \geqslant L$ i $n_k \geqslant k$, vrijedi

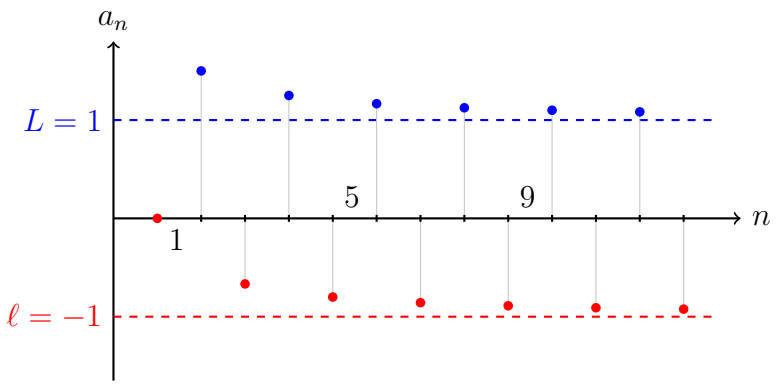
$$L - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leqslant \beta_k.$$

Obje krajnje strane teže prema L, pa $a_{n_k} \to L$.

Za donju granicu stavimo $m_0 = 0$ i $P_k = \max\{k, m_{k-1} + 1\}$. Karakterizacija infimuma daje indeks $m \geqslant P_k$ za koji je $a_m < \alpha_{P_k} + 1/k$; neka je m_k najmanji takav indeks. Tada

$$\alpha_k \leqslant a_{m_k} < \ell + \frac{1}{k},$$

jer je $\alpha_{P_k} \leqslant \ell$. Prema teoremu o sendviču $a_{m_k} \to \ell$. Time su oba broja gomilišta, a već dokazane nejednakosti pokazuju da su najmanje odnosno najveće gomilište. □



Na slici je niz $a_n = (-1)^n + 1/n$. Njegov parni podniz teži prema 1, a neparni prema -1. Drugih gomilišta nema. Doista, za $b \notin \{-1, 1\}$ stavimo $d = \min\{|b-1|, |b+1|\} > 0$. Kada je $1/n < d/3$, nejednakost trokuta daje $|a_n - b| > 2d/3$. Zato u okolini $\langle b - d/3, b + d/3\rangle$ leži samo konačno mnogo članova, pa b nije gomilište. Slijedi $\ell = -1$ i $L = 1$.

Teorem 2.5.10. *Neka je (a_n) ograničen realan niz. Realni broj L jednak je njegovu limesu superioru ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijede oba uvjeta:*

1. *$a_n < L + \varepsilon$ za sve dovoljno velike n;*

2. *$a_n > L - \varepsilon$ za beskonačno mnogo indeksa n.*

Realni broj ℓ jednak je njegovu limesu inferioru ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijede oba uvjeta:

1. *$a_n > \ell - \varepsilon$ za sve dovoljno velike n;*

2. *$a_n < \ell + \varepsilon$ za beskonačno mnogo indeksa n.*

Dokaz. Neka je $L = \limsup a_n$. Kako $\beta_m \to L$, za dovoljno veliki m vrijedi $\beta_m < L + \varepsilon$. Tada je $a_n < L + \varepsilon$ za sve $n \geqslant m$. Nadalje, L je gomilište, pa u svakoj njegovoj ε-okolini ima članova s beskonačno mnogo indeksa; svi ti članovi veći su od $L - \varepsilon$.

Obratno, neka realan broj L zadovoljava navedene uvjete, a pravi limes superior označimo s B. Prema prvom uvjetu za neki m vrijedi $\beta_m \leqslant L + \varepsilon$, pa je $B \leqslant L + \varepsilon$. Prema drugom uvjetu za svaki m postoji $n \geqslant m$ s $a_n > L - \varepsilon$. Zato je $\beta_m > L - \varepsilon$ i prelaskom na limes $B \geqslant L - \varepsilon$. Budući da to vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, mora biti $B = L$.

Za niz $(-a_n)$ infimum i supremum svakoga repa jednaki su $-\beta_m$ odnosno $-\alpha_m$. Stoga

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n.$$

Primjenom upravo dokazane karakterizacije na $(-a_n)$ dobivamo oba smjera tvrdnje za limes inferior. □

Prvi uvjet sam nije dovoljan: svaki broj veći od limesa superiora zadovoljava ga. Zajedno s prvim uvjetom, drugi uvjet osigurava da se članovi beskonačno često vraćaju proizvoljno blizu gornjoj granici. Ni limes superior ni limes inferior ne moraju biti vrijednosti članova niza, kao što pokazuje niz $a_n = 1/n$.

Teorem 2.5.11. *Za ograničen realan niz sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

1. *niz konvergira;*
2. $\liminf a_n = \limsup a_n$*;*
3. *niz ima točno jedno realno gomilište.*

Kada vrijede, limes niza, limes inferior, limes superior i jedino gomilište jednaki su.

Dokaz. Ako niz konvergira prema a, svaki njegov podniz konvergira prema a, pa je $G(a_n) = \{a\}$. Ako je skup gomilišta jednočlan, njegov minimum i maksimum jednaki su, pa teorem 2.5.9 daje $\ell = L$. Naposljetku, ako je $\ell = L = a$, iz $\alpha_n \leqslant a_n \leqslant \beta_n$, $\alpha_n \to a$ i $\beta_n \to a$ prema teoremu o sendviču slijedi $a_n \to a$. □

Primjer 2.5.12. Ograničenost u prethodnom teoremu ne smijemo izostaviti. Za niz

$$a_{2k} = 0, \qquad a_{2k-1} = k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

jedino je realno gomilište 0, ali niz ne konvergira. Doista, u dovoljno maloj okolini bilo kojega $b \neq 0$ nema nula, a ima samo konačno mnogo pozitivnih cijelih brojeva; stoga b nije gomilište. Niz je neograničen, pa ne može konvergirati prema realnom broju.

Zadatak 2.5.1. Neka su (a_n) i (b_n) ograničeni te neka je $a_n \leqslant b_n$ za sve dovoljno velike n. Dokažite

$$\liminf a_n \leqslant \liminf b_n, \qquad \limsup a_n \leqslant \limsup b_n.$$

Uputa: Usporedite infimume i supremume odgovarajućih repova. Dokažite i

$$\limsup(a_n + b_n) \leqslant \limsup a_n + \limsup b_n$$

te pronađite primjer u kojem je nejednakost stroga. Što se događa ako jedan od nizova konvergira?

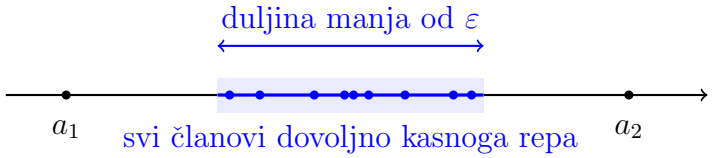
2.6. Cauchyjevi nizovi

Definicija konvergencije uspoređuje članove niza s njegovim limesom. Možemo li prepoznati konvergenciju i kada taj broj još ne poznajemo? Sljedeći uvjet uspoređuje samo članove niza međusobno.

Definicija 2.6.1. *Realni niz* (a_n) *zovemo* Cauchyjevim nizom *ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \geqslant N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Za zadanu točnost isti indeks N mora vrijediti za *sve parove* indeksa $m, n \geqslant N$, bez obzira na to koliko su oni međusobno udaljeni.



Slika prikazuje rep smješten u interval duljine manje od ε. Tada se bilo koja njegova dva člana razlikuju za manje od ε. Položaj konačno mnogo početnih članova nije bitan za Cauchyjevo svojstvo.

Lema 2.6.2. *Svaki Cauchyjev realni niz ograničen je.*

Dokaz. Za $\varepsilon = 1$ odaberimo N iz definicije. Za $n \geqslant N$, uz fiksni indeks $m = N$, vrijedi

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Stoga broj

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |a_N|\}$$

zadovoljava $|a_n| \leqslant M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Teorem 2.6.3 (Cauchyjev kriterij konvergencije)**.** *Niz realnih brojeva konvergira u* $\mathbb{R}$ *ako i samo ako je Cauchyjev.*

Dokaz. Neka najprije $a_n \to a$ i neka je $\varepsilon > 0$. Postoji N takav da je $|a_n - a| < \varepsilon/2$ za sve $n \geqslant N$. Za proizvoljne $m, n \geqslant N$ nejednakost trokuta daje

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, niz je Cauchyjev.

Obratno, neka je niz Cauchyjev. Prema lemi 2.6.2 on je ograničen, pa prema Bolzano–Weierstrassovu teoremu ima podniz $a_{n_k} \to a$ za neki $a \in \mathbb{R}$. Pokazat ćemo da prema a konvergira cijeli niz.

Za zadani $\varepsilon > 0$ odaberimo N takav da je

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (m, n \geqslant N).$$

Budući da $a_{n_k} \to a$ i $n_k \to +\infty$, možemo fiksirati jedan k za koji istodobno vrijedi

$$n_k \geqslant N, \qquad |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tada za *svaki* $n \geqslant N$ imamo

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Time smo dokazali $a_n \to a$. □

Primjer 2.6.4 (Susjedni članovi nisu dovoljni)**.** Ako je (a_n) Cauchyjev, onda $a_{n+1} - a_n \to 0$. Obrat ne vrijedi. Promotrimo niz konačnih suma

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Vrijedi $H_{n+1} - H_n = 1/(n+1) \to 0$, ali

$$H_{2n} - H_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Za $\varepsilon = 1/2$, ma koliko velik bio N, indeksi $n = N$ i $m = 2N$ krše Cauchyjev uvjet. Zato (H_n) nije Cauchyjev i ne konvergira prema realnom broju.

[Potpunost i skup u kojem tražimo limes] Prvi smjer Cauchyjeva kriterija koristi samo nejednakost trokuta. U obratu smo koristili potpunost realnih brojeva, posredno preko teorema o monotonim nizovima i Bolzano–Weierstrassova teorema. Svojstvo da svaki Cauchyjev niz ima limes u promatranome prostoru nazivamo *potpunošću* u smislu Cauchyjevih nizova.

Skup $\mathbb{Q}$, s uobičajenom udaljenošću, nema to svojstvo. Na primjer, racionalni brojevi

$$q_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}$$

zadovoljavaju $0 \leqslant \sqrt{2} - q_n < 10^{-n}$, pa konvergiraju prema $\sqrt{2}$ u $\mathbb{R}$ i zato čine Cauchyjev niz. Taj niz nema limes u $\mathbb{Q}$: eventualni racionalni limes bio bi i realni limes, što zbog jedinstvenosti limesa i iracionalnosti broja $\sqrt{2}$ nije moguće. Važno je, dakle, navesti u kojem skupu tražimo limes.

Zadatak 2.6.1. Neka za realni niz (a_n) vrijedi

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant Cq^n \qquad (n \in \mathbb{N}), \qquad C > 0, \quad 0 < q < 1.$$

Dokažite da je niz Cauchyjev i da za njegov limes a vrijedi

$$|a - a_n| \leqslant \frac{Cq^n}{1-q}.$$

Uputa: Za $m > n$ teleskopski zbroj i konačna geometrijska suma daju $|a_m - a_n| \leqslant Cq^n(1 - q^{m-n})/(1-q)$. Najprije dokažite konvergenciju, a tek potom pustite $m \to \infty$.

2.7. Kompleksni brojevi i nizovi

Jednadžba $x^2 + 1 = 0$ nema realnoga rješenja, jer je kvadrat realnoga broja nenegativan. Proširit ćemo realne brojeve tako da ta jednadžba dobije rješenje, a da pritom ostanu sačuvana pravila računanja u polju. Zatim ćemo proučiti nizove u tom proširenju. Njihovu ćemo konvergenciju svesti na konvergenciju dvaju realnih nizova.

2.7.1. Polje kompleksnih brojeva

Definicija 2.7.1. *Skup* kompleksnih brojeva *jest* $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. *Na njemu definiramo operacije*

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Jednakost kompleksnih brojeva znači jednakost obiju koordinata.

Ove formule nisu posljedice nekog već poznatog računanja kompleksnim brojevima: njima tek *definiramo* te operacije. Najprije provjerimo pravila računanja.

Teorem 2.7.2. *Skup* $\mathbb{C}$ *s navedenim operacijama jest polje.*

Dokaz. Asocijativnost i komutativnost zbrajanja vrijede po koordinatama, jer vrijede za realne brojeve. Nula je $(0, 0)$, a broj suprotan broju (a, b) jest $(-a, -b)$.

Komutativnost množenja slijedi iz

$$ac - bd = ca - db, \qquad ad + bc = cb + da.$$

Provjerimo i asocijativnost množenja. Za tri para (a, b), (c, d) i (s, t) obje strane jednakosti

$$\big((a, b)(c, d)\big)(s, t) = (a, b)\big((c, d)(s, t)\big)$$

imaju, nakon množenja i sređivanja, koordinate

$$\big(acs - bds - adt - bct,\ act - bdt + ads + bcs\big).$$

Primjerice, prva koordinata lijeve strane jest $(ac-bd)s-(ad+bc)t$, a prva koordinata desne strane jest $a(cs - dt) - b(ct + ds)$; razvijanjem dobivamo isti izraz.

Distributivnost provjeravamo izravno:

$$\begin{aligned}(a, b)\big((c, d) + (s, t)\big) &= \big(a(c + s) - b(d + t),\ a(d + t) + b(c + s)\big)\\ &= \big(ac - bd, ad + bc\big) + \big(as - bt, at + bs\big).\end{aligned}$$

Neutralni element za množenje jest $(1, 0)$, različit od $(0, 0)$. Ako je $(a, b) \neq (0, 0)$, onda je $a^2 + b^2 > 0$ i

$$(a, b)^{-1} := \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

zadovoljava

$$(a,b)(a,b)^{-1} = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ba}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$$

Time su provjerena sva svojstva polja. □

Preslikavanje $a \mapsto (a,0)$ injektivno je i čuva zbrajanje te množenje:

$$(a,0)+(c,0) = (a+c,0), \qquad (a,0)(c,0) = (ac,0).$$

Zato realan broj a možemo poistovjetiti s kompleksnim brojem $(a,0)$. U tom smislu pišemo $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Nadalje, definiramo *imaginarnu jedinicu*

$$i := (0,1).$$

Vrijedi $i^2 = (-1,0) = -1$, a svaki kompleksan broj ima jedinstven zapis

$$z = (a,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi.$$

Broj a zovemo *realnim dijelom* i pišemo $a = \operatorname{Re} z$, a broj b *imaginarnim dijelom* i pišemo $b = \operatorname{Im} z$. Oba dijela realni su brojevi; imaginarni dio broja $a+bi$ jest b, a ne bi.

Primjer 2.7.3. Uz pravilo $i^2 = -1$ računamo

$$(2+3i)(1-2i) = 2 - 4i + 3i - 6i^2 = 8 - i.$$

Realne jednadžbe mogu sada imati nova rješenja: iz $z^2+1 = (z-i)(z+i) = 0$ slijedi da su i i $-i$ upravo sva rješenja jednadžbe $z^2+1=0$ u $\mathbb{C}$.

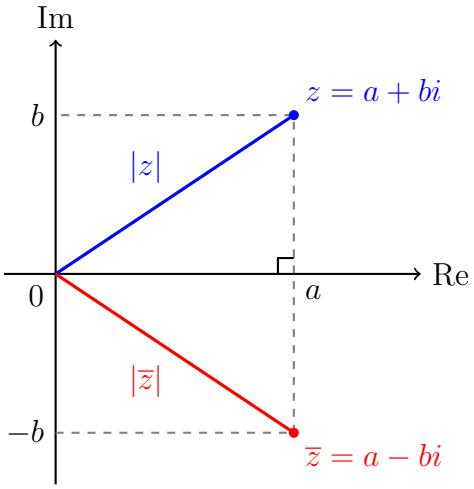
Na $\mathbb{C}$ ne postoji linearni uređaj uz koji bi $\mathbb{C}$ postao uređeno polje. Doista, u uređenom polju kvadrat svakog nenultog elementa strogo je pozitivan. Tada bi istodobno vrijedilo $1 > 0$ i $-1 = i^2 > 0$, što je nemoguće. Kompleksne brojeve zato općenito ne uspoređujemo znakovima $<$ i $>$; uspoređivati možemo njihove realne dijelove, imaginarne dijelove ili module.

2.7.2. Konjugiranje, modul i udaljenost

Definicija 2.7.4. *Za $z = a + bi \in \mathbb{C}$ njegov* konjugirani broj *i njegov* modul *definirani su s*

$$\overline{z} := a - bi, \qquad |z| := \sqrt{a^2+b^2}.$$

Postojanje nenegativnoga kvadratnog korijena već smo dokazali u $\mathbb{R}$. Ako je z realan, njegov je modul jednak njegovoj realnoj apsolutnoj vrijednosti, pa se oznake slažu. Geometrijski, $\overline{z}$ je zrcalna slika točke z s obzirom na realnu os, a $|z|$ njezina udaljenost od ishodišta.



Propozicija 2.7.5. *Za sve $z, w \in \mathbb{C}$ vrijedi*

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \qquad \overline{\overline{z}} = z,$$

$$z\overline{z} = |z|^2, \qquad |\overline{z}| = |z|, \qquad |zw| = |z|\,|w|.$$

Modul je nenegativan i jednak je nuli ako i samo ako je $z = 0$. Nadalje, za $z \neq 0$ vrijedi

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

Dokaz. Za $z = a+bi$ i $w = c+di$ prve jednakosti slijede usporedbom realnoga i imaginarnoga dijela. Posebno,

$$\overline{zw} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Također, $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$. Prema tome,

$$|zw|^2 = (zw)\overline{zw} = z\overline{z}\,w\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Oba broja $|zw|$ i $|z||w|$ nenegativna su, pa jednakost njihovih kvadrata daje jednakost tih brojeva. Ostale tvrdnje o predznaku modula i konjugiranju slijede izravno iz definicije. Iz $z\overline{z} = |z|^2 > 0$ za $z \neq 0$ dobivamo formulu za recipročni broj, a iz $1 = |z(1/z)| = |z|\,|1/z|$ dobivamo njegov modul. □

Dijeljenje se tako svodi na realan nazivnik:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i, \qquad c + di \neq 0.$$

Teorem 2.7.6 (Nejednakosti za modul)**.** *Za sve $z, w \in \mathbb{C}$ vrijede nejednakost trokuta*

$$|z + w| \leqslant |z| + |w|$$

i obrnuta nejednakost trokuta

$$\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|.$$

Osim toga,

$$|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|, \qquad |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|, \qquad |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|. \tag{2.4}$$

Dokaz. Ako je $z = a + bi$, iz $a^2 \leqslant a^2 + b^2$ i $b^2 \leqslant a^2 + b^2$ dobivamo prve dvije nejednakosti u (2.4). Za nejednakost trokuta računamo

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\ &\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Usporedba nenegativnih kvadratnih korijena daje traženu nejednakost. Primijenjena na $z = a + bi$ daje i $|z| \leqslant |a| + |bi| = |a| + |b|$.

Nadalje,

$$|z| = |(z - w) + w| \leqslant |z - w| + |w|,$$

pa je $|z| - |w| \leqslant |z - w|$. Zamjenom uloga z i w dobivamo $|w| - |z| \leqslant |z - w|$. Te dvije nejednakosti zajedno daju obrnutu nejednakost trokuta. □

Broj $|z - w|$ mjeri udaljenost točaka z i w u ravnini. Za $a \in \mathbb{C}$ i $\varepsilon > 0$ skup

$$B(a, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$$

jest *otvoreni krug* sa središtem a i polumjerom ε: sadrži unutrašnjost kružnice, ali ne i samu kružnicu.

2.7.3. Kompleksna eksponencijalna funkcija

Broj e i realna eksponencijalna funkcija $x \mapsto e^x$ već su uvedeni. Za realne argumente koristit ćemo također geometrijski definirane funkcije sinus i kosinus te njihove adicijske formule iz odjeljka o funkcijama. Njihova geometrijska svojstva ovdje ne izvodimo iz kompleksne eksponencijalne funkcije, kako bismo izbjegli kružno zaključivanje.

Definicija 2.7.7. *Za $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiramo*

$$\exp z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

Istu funkciju označavamo s e^z.

Jedinstvenost zapisa $z = x + iy$ jamči da je definicija jednoznačna. Za $y = 0$ dobivamo $\exp x = e^x$, pa je to doista proširenje realne eksponencijalne funkcije. Za proizvoljan kompleksan argument oznaka e^z u ovom trenutku znači upravo prethodnu formulu; nije definirana množenjem kompleksnoga broja samoga sobom z puta.

Propozicija 2.7.8. *Za sve $z, w \in \mathbb{C}$ vrijedi*

$$e^{z+w} = e^z e^w, \qquad e^0 = 1, \qquad e^{-z} = \frac{1}{e^z},$$

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}, \qquad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0.$$

Za realan y vrijedi Eulerova formula

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Nadalje,

$$e^z = e^w \quad \Longleftrightarrow \quad z - w = 2k\pi i \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}.$$

Dokaz. Za $z = x + iy$ i $w = u + iv$ realni zakon potenciranja i adicijske formule daju

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^{x+u}\big((\cos y \cos v - \sin y \sin v) + i(\sin y \cos v + \cos y \sin v)\big) \\ &= e^{x+u}\big(\cos(y+v) + i \sin(y+v)\big) = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Iz definicije slijede $e^0 = 1$ i Eulerova formula. Nadalje, $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ daje $|e^{x+iy}| = e^x > 0$. Zato iz $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ dobivamo formulu za e^{-z}. Parnost kosinusa i neparnost sinusa daju

$$e^{\overline{z}} = e^x(\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^x(\cos y - i \sin y) = \overline{e^z}.$$

Preostalu tvrdnju dovoljno je provjeriti za $e^{z-w} = 1$. Ako je $z - w = s + it$, usporedba modula daje $e^s = 1$, pa je $s = 0$ zbog stroge monotonosti realne eksponencijalne funkcije. Zatim mora biti $\cos t = 1$ i $\sin t = 0$, odnosno $t = 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Obrat slijedi iz periodičnosti realnih trigonometrijskih funkcija. □

Kompleksna eksponencijalna funkcija nije injektivna, jer je

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Stoga nema inverznu funkciju na cijeloj svojoj domeni. Svojstvo $e^{z+w} = e^z e^w$ i slaganje s realnom funkcijom sami po sebi nisu razlog za pretpostavljanje injektivnosti.

Eulerova formula i ista formula s argumentom $-y$ daju

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \qquad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

To motivira sljedeća proširenja.

Definicija 2.7.9. *Za $z \in \mathbb{C}$ definiramo*

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{sh} z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

Za realan argument prve se dvije definicije slažu s geometrijskim sinusom i kosinusom, a druge dvije s ranije uvedenim hiperbolnim funkcijama. Iz definicija slijede

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \qquad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \qquad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Na primjer, ako je $A = e^{iz}$ i $B = e^{-iz}$, onda je $AB = 1$, pa

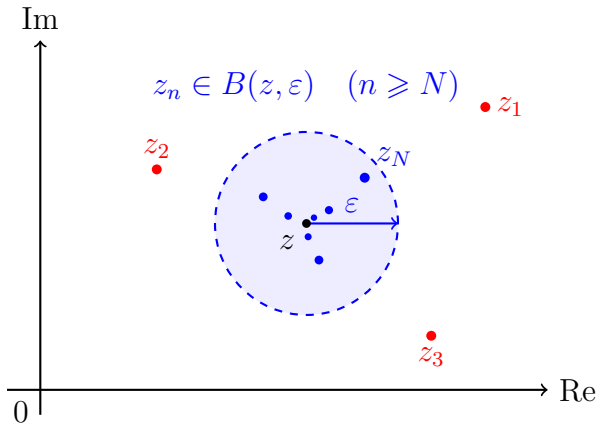
$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{(A+B)^2 - (A-B)^2}{4} = AB = 1.$$

Drugi se identitet dokazuje istim računom s $A = e^{z}$ i $B = e^{-z}$. Zakon potenciranja na isti način daje adicijske formule i za kompleksne argumente. Ipak, iz identiteta $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ne slijedi $|\sin z| \leqslant 1$: kvadrati u tom identitetu nisu kvadrati modula.

2.7.4. Konvergencija kompleksnih nizova

Definicija 2.7.10. *Niz (z_n) u $\mathbb{C}$* konvergira *prema $z \in \mathbb{C}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant N$ vrijedi $|z_n - z| < \varepsilon$. Tada pišemo $z_n \to z$ ili $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.*

Dakle, svaki otvoreni krug oko z mora sadržavati sve članove niza počevši od nekoga indeksa. Početni članovi mogu biti izvan toga kruga; njihov konačan broj ne utječe na konvergenciju.



Teorem 2.7.11. *Neka je $z_n = x_n + iy_n$ i $z = x + iy$, gdje su x_n, y_n, x, y realni brojevi. Tada*

$$z_n \to z \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \to x \text{ i } y_n \to y.$$

Dokaz. Ako je $z_n \to z$, iz

$$|x_n - x| \leqslant |z_n - z|, \qquad |y_n - y| \leqslant |z_n - z|$$

slijedi konvergencija obiju koordinata prema njihovim odgovarajućim limesima.

Obratno, pretpostavimo da $x_n \to x$ i $y_n \to y$. Za zadani $\varepsilon > 0$ odaberimo N_1, N_2 tako da

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geqslant N_1), \qquad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geqslant N_2).$$

Za $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$ nejednakost trokuta daje

$$|z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon.$$

Time je konvergencija dokazana bez pozivanja na neprekidnost funkcije kvadratnoga korijena. □

Propozicija 2.7.12. *Limes kompleksnoga niza jedinstven je. Svaki konvergentan kompleksni niz ograničen je, tj. postoji $M > 0$ takav da je $|z_n| \leqslant M$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Svaki podniz konvergentnoga kompleksnog niza konvergira prema istom limesu.*

Dokaz. Jedinstvenost i tvrdnja o podnizovima slijede iz prethodnoga teorema i odgovarajućih tvrdnji za realne nizove. Za ograničenost uzmimo N tako da je $|z_n - z| < 1$ za $n \geqslant N$. Tada je $|z_n| < |z| + 1$ za $n \geqslant N$, a broj

$$M = \max\{1, |z_1|, \ldots, |z_N|, |z| + 1\}$$

omeđuje module svih članova niza. □

Teorem 2.7.13. *Ako $z_n \to z$ i $w_n \to w$ u $\mathbb{C}$, onda*

$$z_n + w_n \to z + w, \qquad z_n w_n \to zw,$$

$$\overline{z_n} \to \overline{z}, \qquad |z_n| \to |z|.$$

Ako je $w \neq 0$, onda je $w_n \neq 0$ za sve dovoljno velike n i za odgovarajući rep niza vrijedi

$$\frac{z_n}{w_n} \longrightarrow \frac{z}{w}.$$

Dokaz. Zbroj obrađujemo nejednakošću

$$|(z_n + w_n) - (z + w)| \leqslant |z_n - z| + |w_n - w|.$$

Oba izraza s desne strane teže nuli. Za produkt koristimo ograničenost $|z_n| \leqslant M$ i procjenu

$$|z_n w_n - zw| \leqslant |z_n|\,|w_n - w| + |w|\,|z_n - z| \leqslant M|w_n - w| + |w|\,|z_n - z|.$$

Konjugiranje i modul obrađujemo pomoću

$$|\overline{z_n} - \overline{z}| = |z_n - z|, \qquad \big||z_n| - |z|\big| \leqslant |z_n - z|.$$

Ako je $w \neq 0$, za sve dovoljno velike n vrijedi $|w_n - w| < |w|/2$. Obrnuta nejednakost trokuta daje $|w_n| > |w|/2 > 0$, a zatim

$$\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{w}\right| = \frac{|w_n - w|}{|w_n|\,|w|} \leqslant \frac{2}{|w|^2}|w_n - w| \longrightarrow 0.$$

Tvrdnja o kvocijentu sada slijedi iz tvrdnje o produktu. Ako je neki početni nazivnik jednak nuli, kvocijent na tom indeksu nije definiran. Proizvoljnim dopunjavanjem konačno mnogo početnih članova dobivamo niz s istim limesom. □

2.7.5. Ograničeni kompleksni nizovi i Cauchyjev kriterij

Teorem 2.7.14 (Bolzano–Weierstrassov teorem u $\mathbb{C}$)**.** *Svaki ograničeni kompleksni niz ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Neka je $z_n = x_n + iy_n$ i $|z_n| \leqslant M$ za sve n. Tada su oba realna niza (x_n) i (y_n) ograničena, jer je $|x_n|, |y_n| \leqslant M$.

Prema realnom Bolzano–Weierstrassovu teoremu postoji strogo rastući niz indeksa (n_k) takav da $x_{n_k} \to x$ za neki $x \in \mathbb{R}$. Sada promatramo ograničeni realni niz $(y_{n_k})_k$. Ponovnom primjenom istoga teorema postoji strogo rastući niz (k_j) takav da $y_{n_{k_j}} \to y$ za neki $y \in \mathbb{R}$. Niz $(x_{n_{k_j}})_j$ podniz je već konvergentnoga niza $(x_{n_k})_k$, pa i dalje konvergira prema x. Dakle,

$$z_{n_{k_j}} = x_{n_{k_j}} + iy_{n_{k_j}} \longrightarrow x + iy.$$

Budući da su oba niza indeksa strogo rastuća, i $(n_{k_j})_j$ strogo raste, pa smo doista dobili podniz početnoga niza. □

Važan je redoslijed odabira: najprije izdvajamo podniz za prvu koordinatu, a zatim *podniz toga podniza* za drugu. Neovisno odabrani konvergentni podnizovi dviju koordinata ne moraju imati iste indekse.

Definicija 2.7.15. *Kompleksni niz* (z_n) *jest* Cauchyjev *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $N \in \mathbb{N}$ *takav da*

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \qquad (m, n \geqslant N).$$

Teorem 2.7.16 (Cauchyjev kriterij u $\mathbb{C}$)**.** *Kompleksni niz konvergira ako i samo ako je Cauchyjev.*

Dokaz. Ako $z_n \to z$, onda za m, n dovoljno velike vrijedi

$$|z_n - z_m| \leqslant |z_n - z| + |z_m - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zato je niz Cauchyjev.

Obratno, ako je $(z_n) = (x_n + iy_n)$ Cauchyjev, onda iz

$$|x_n - x_m| \leqslant |z_n - z_m|, \qquad |y_n - y_m| \leqslant |z_n - z_m|$$

slijedi da su obje koordinatne komponente Cauchyjevi realni nizovi. Realni Cauchyjev kriterij daje $x_n \to x$ i $y_n \to y$ za neke $x, y \in \mathbb{R}$. Prema teoremu 2.7.11, $z_n \to x + iy$. □

Upravo se ta tvrdnja naziva *potpunošću kompleksnih brojeva* s obzirom na udaljenost $|z - w|$. Ovdje se potpunost ne izražava supremumom kompleksnih brojeva: uređaj polja na $\mathbb{C}$ ne postoji.

2.7.6. Kompleksni geometrijski nizovi

Propozicija 2.7.17. *Za $q \in \mathbb{C}$ promatrajmo niz $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

1. *Ako je $|q| < 1$, tada $q^n \to 0$.*
2. *Ako je $q = 1$, niz je konstantan i limes mu je 1.*
3. *Ako je $|q| = 1$ i $q \neq 1$, niz ne konvergira.*
4. *Ako je $|q| > 1$, tada $|q^n| \to +\infty$, pa niz (q^n) ne konvergira u $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Za $q = 0$ svi su članovi jednaki nuli. Ako je $0 < |q| < 1$, realni geometrijski niz $|q|^n$ teži nuli prema propoziciji 2.3.7. Iz $|q^n - 0| = |q|^n$ slijedi $q^n \to 0$. Slučaj $q = 1$ neposredan je.

Ako je $|q| = 1$ i $q \neq 1$, onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|q^{n+1} - q^n| = |q^n|\,|q - 1| = |q - 1| > 0.$$

Kad bi (q^n) konvergirao, bio bi Cauchyjev, što je u proturječju s tom jednakošću za $\varepsilon = |q - 1|/2$ i susjedne indekse $n, n + 1$.

Napokon, ako je $|q| > 1$, realni rezultat o geometrijskim nizovima daje $|q^n| = |q|^n \to +\infty$. Takav niz nije ograničen, pa ne može konvergirati u $\mathbb{C}$. □

U posljednjem slučaju tvrdnja $|q^n| \to +\infty$ odnosi se na *realni niz modula*. Ona ne znači da kompleksni brojevi q^n rastu prema $+\infty$ u smislu uređaja. S druge strane, ako je $|q| = 1$, Bolzano–Weierstrassov teorem jamči konvergentne podnizove čak i kada cijeli niz divergira. Na primjer, niz (i^n) periodički poprima vrijednosti $i, -1, -i, 1$.

Zadatak 2.7.1. Za $z, w \in \mathbb{C}$ dokažite

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Objasnite zašto se ova jednakost naziva pravilom paralelograma.

Zadatak 2.7.2. Dokažite adicijske formule za sinus i kosinus kompleksnih argumenata iz njihovih eksponencijalnih definicija. Zatim pokažite da kompleksni sinus nije omeđen modulom 1, koristeći $\sin(iy) = i \operatorname{sh} y$ za realan y.

Zadatak 2.7.3. Ispitajte konvergenciju nizova

$$\frac{n+i}{2n-i}, \qquad \left(\frac{1+i}{2}\right)^n, \qquad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n, \qquad \frac{(-1)^n+i}{n}.$$

Za niz koji ne konvergira pronađite dva podniza s različitim limesima.

Poglavlje 3

Limes funkcije i neprekidnost funkcije

Kod niza smo promatrali što se događa s njegovim članovima kada indeks raste. Kod funkcije realne varijable argument može prilaziti i konačnom broju, i to na različite načine. Primjerice, za funkciju $f(x) = 1/x$ možemo pitati približava li se $f(x)$ broju 1 kada se x približava broju 1, ili broju 0 kada x raste bez granice. Pojam limesa precizirat će takve tvrdnje, a pojam neprekidnosti povezati limes s vrijednošću funkcije u promatranoj točki.

Oslanjat ćemo se na rezultate o nizovima, osobito na pravila računanja s limesima i Bolzano–Weierstrassov teorem. Potpunost realnih brojeva omogućit će nam da dokažemo postojanje najveće i najmanje vrijednosti neprekidne funkcije na segmentu te svojstvo poprimanja međuvrijednosti. Na kraju ćemo neprekidnost opisati i pomoću otvorenih skupova.

3.1. Limes funkcije

3.1.1. Približavanje točki i definicija limesa

Definicija 3.1.1. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$. Točka $c \in \mathbb{R}$ jest* gomilište skupa D *ako za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in D$ takav da je*

$$0 < |x - c| < \delta.$$

Skup $\langle c-\delta, c+\delta\rangle$ nazivamo okolinom *točke c, a nakon izostavljanja same točke c dobivamo* probušenu okolinu.

Dakle, gomilištu možemo proizvoljno blizu prići drugim točkama skupa. Gomilište ne mora pripadati skupu: 0 je gomilište skupa $\langle 0, 1\rangle$. Točka 0 također je gomilište skupa $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, iako taj skup ne sadrži nijedan interval. Točka $c \in D$ koja nije gomilište skupa D naziva se *izoliranom točkom* skupa D. Primjerice, svaka je točka skupa $\mathbb{Z}$ izolirana.

Lema 3.1.2. *Točka c gomilište je skupa D ako i samo ako postoji niz (x_n) u $D \setminus \{c\}$ koji konvergira prema c.*

Dokaz. Ako je c gomilište, za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberimo $x_n \in D$ tako da je $0 < |x_n - c| < 1/n$. Tada $x_n \to c$. Obratno, ako takav niz postoji, za svaki $\delta > 0$ njegovi dovoljno kasni članovi zadovoljavaju $0 < |x_n - c| < \delta$, pa c jest gomilište. □

Gomilište skupa ne treba poistovjetiti s gomilištem niza. Primjerice, konstantni niz ima svoje gomilište, ali njegov jednočlani skup vrijednosti nema gomilišta. U prvom pojmu promatramo podnizove, a u drugom druge točke skupa u svakoj okolini.

Definicija 3.1.3. *Neka je $f\colon D \to \mathbb{R}$, a c gomilište skupa D. Kažemo da funkcija f ima* limes $L \in \mathbb{R}$ u točki c *ako za svaki niz (x_n) u $D \setminus \{c\}$ vrijedi*

$$x_n \longrightarrow c \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \longrightarrow L.$$

Pišemo $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ ili $f(x) \to L$ za $x \to c$. Kada je potrebno istaknuti domenu, pišemo $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in D}} f(x) = L$.

U definiciji se traži tvrdnja za *svaki* takav niz. Provjera jednoga niza, pa ni konačno mnogo odabranih nizova, općenito nije dovoljna. Niz koji prilazi točki c može biti posve lijevo od nje, posve desno ili prelaziti s jedne strane na drugu; ne mora biti monoton. Limes ovisi samo o vrijednostima funkcije u točkama različitima od c. Vrijednost $f(c)$ može biti drukčija od L, a može biti i nedefinirana.

Uvjet da je c gomilište važan je: bez njega ne bi bilo nijednoga niza koji treba provjeriti, pa bi ista prazna tvrdnja vrijedila za svaki L.

Teorem 3.1.4 (Cauchyjev opis limesa)**.** *Neka je $f\colon D \to \mathbb{R}$, a c gomilište skupa D. Jednakost $\lim_{x\to c} f(x) = L \in \mathbb{R}$ vrijedi ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

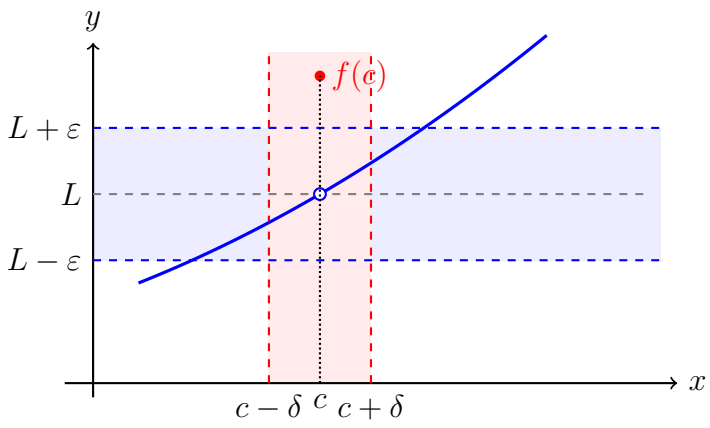
Dokaz. Pretpostavimo najprije (3.1) i uzmimo proizvoljan niz (x_n) u $D\setminus\{c\}$ koji konvergira prema c. Za zadani $\varepsilon > 0$ odaberimo odgovarajući $\delta > 0$. Postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geqslant N$ vrijedi $|x_n - c| < \delta$. Kako je $x_n \neq c$, tada je $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. To dokazuje $f(x_n) \to L$.

Obratno, pretpostavimo svojstvo iz definicije, a zaniječimo (3.1). Tada postoji $\varepsilon_0 > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ možemo naći $x \in D$ za koji vrijedi

$$0 < |x - c| < \delta, \qquad |f(x) - L| \geqslant \varepsilon_0.$$

Za $\delta = 1/n$ odaberimo takvu točku x_n. Dobiveni niz zadovoljava $x_n \to c$ i $x_n \neq c$, ali $f(x_n)$ ne konvergira prema L, jer su svi njegovi članovi od L udaljeni barem za ε_0. To je proturječje. □

Broj δ smije ovisiti o ε, funkciji i točki c, ali se mora odabrati prije točke x: isti δ mora vrijediti za sve $x \in D$ koji zadovoljavaju uvjet blizine. Geometrijski, dio grafa iznad probušene δ-okoline točke c mora ležati u vodoravnoj traci između $L - \varepsilon$ i $L + \varepsilon$.



Na slici je $f(c) \neq L$. Izdvojena točka grafa iznad c ne utječe na limes jer je uvjetom $0 < |x - c|$ upravo taj argument izostavljen.

Primjer 3.1.5. Za svaki $c \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$. Doista, ako je $|x - c| < 1$, onda je $|x| < |c| + 1$, pa

$$|x^2 - c^2| = |x - c|\,|x + c| \leqslant |x - c|\big(|x| + |c|\big) \leqslant |x - c|(2|c| + 1).$$

Za $\varepsilon > 0$ stoga možemo uzeti $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|c| + 1)\}$. To je primjer česta postupka: najprije ograničimo x na jednostavnu okolinu, a zatim smanjimo tu okolinu koliko zahtijeva zadana točnost.

Primjer 3.1.6. Za $x \neq 1$ vrijedi $(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$, pa je

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Izravno, $|x + 1 - 2| = |x - 1|$, pa odgovara $\delta = \varepsilon$. Dodamo li funkciji bilo koju vrijednost u točki 1, limes ostaje 2.

3.1.2. Osnovna svojstva i računanje s limesima

Propozicija 3.1.7. *Limes funkcije u gomilištu njezine domene, ako postoji, jedinstven je.*

Dokaz. Kad bi različiti brojevi L i M bili limesi, za $\varepsilon = |L - M|/3$ postojali bi pozitivni δ_L i δ_M iz (3.1). Budući da je c gomilište, postoji $x \in D$ takav da je $0 < |x - c| < \min\{\delta_L, \delta_M\}$. Tada

$$|L - M| \leqslant |L - f(x)| + |f(x) - M| < 2\varepsilon < |L - M|,$$

što je nemoguće. □

Propozicija 3.1.8. *Neka je* $\lim_{x \to c} f(x) = L \in \mathbb{R}$. *Tada vrijedi:*

1. *Funkcija f omeđena je na nekoj probušenoj okolini točke c unutar svoje domene.*
2. *Ako je $L \neq 0$, onda na dovoljno maloj takvoj okolini $f(x)$ ima isti predznak kao L i vrijedi $|f(x)| > |L|/2$.*
3. *Ako se f i g, definirane na D, podudaraju na nekoj probušenoj okolini točke c, onda je $\lim_{x\to c} g(x) = L$.*
4. *Ako je $D' \subseteq D$ i c gomilište skupa D', onda restrikcija $f|_{D'}$ također ima limes L u c.*

Dokaz. Za prvu tvrdnju uzmimo $\varepsilon = 1$; tada blizu c vrijedi $|f(x)| \leqslant |L| + |f(x) - L| < |L| + 1$. Za drugu uzmimo $\varepsilon = |L|/2$. Ako je $L > 0$, dobivamo $f(x) > L/2 > 0$, a ako je $L < 0$, dobivamo $f(x) < L/2 < 0$. Za treću tvrdnju δ iz definicije dodatno smanjimo tako da smo u okolini podudaranja funkcija. Za četvrtu isti δ vrijedi i za sve točke manjega skupa D'. □

Konvergencija restrikcije ne povlači konvergenciju izvorne funkcije. Primjerice, funkcija $f(x) = 1$ za $x > 0$, a $f(x) = -1$ za $x < 0$, na pozitivnom dijelu domene ima limes 1 u 0. Na cijeloj domeni $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nema limes u 0: za $x_n = 1/n$ dobivamo $f(x_n) = 1$, a za $y_n = -1/n$ dobivamo $f(y_n) = -1$.

Teorem 3.1.9. *Neka su $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, neka je c gomilište skupa D i neka su $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}$. Tada za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \qquad \lim_{x\to c} \lambda f(x) = \lambda A,$$
$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB, \qquad \lim_{x\to c} |f(x)| = |A|.$$

Ako je $B \neq 0$, funkcija g nema nula u dovoljno maloj probušenoj okolini točke c unutar D, a na domeni na kojoj je količnik definiran vrijedi

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Dokaz. Za proizvoljan niz $x_n \in D \setminus \{c\}$ s $x_n \to c$ imamo $f(x_n) \to A$ i $g(x_n) \to B$. Tvrdnje slijede iz odgovarajućih pravila za nizove, teorem 2.3.1, i definicije limesa funkcije. Ako je $B \neq 0$, propozicija 3.1.8 osigurava $|g(x)| > |B|/2$ blizu c. Zato domena količnika sadrži sve točke skupa D u toj probušenoj okolini, a pravilo za količnike nizova daje posljednju tvrdnju. □

Ne tražimo da nazivnik bude različit od nule daleko od točke c. Međutim, uvjet $B \neq 0$ bitan je za navedeno pravilo. Ako brojnik i nazivnik oba teže nuli, sam taj podatak ne određuje limes količnika: količnici x/x, x^2/x i x/x^2 za $x \to 0$ ponašaju se različito.

Teorem 3.1.10 (Usporedba i teorem o sendviču)**.** *Neka su $f, g, h\colon D \to \mathbb{R}$, a c gomilište skupa D.*

1. *Ako je* $f(x) \leqslant g(x)$ *za sve* $x \in D$ *dovoljno blizu* c, $x \neq c$, *i ako postoje konačni limesi* $A = \lim_{x\to c} f(x)$ *i* $B = \lim_{x\to c} g(x)$, *onda je* $A \leqslant B$.

2. *Ako u takvoj okolini vrijedi* $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ *i ako je* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L \in \mathbb{R}$, *onda je* $\lim_{x\to c} h(x) = L$.

Dokaz. Za svaki niz $x_n \in D \setminus \{c\}$ s $x_n \to c$ navedene nejednakosti vrijede za sve dovoljno velike n. Primijenimo teoreme o usporedbi i sendviču za nizove 2.3.4 i 2.3.5 te definiciju limesa funkcije. □

Stroga nejednakost ne mora ostati stroga nakon prijelaza na limes: za $x \neq 0$ vrijedi $0 < x^2$, a oba izraza teže nuli kada $x \to 0$. Posebno, ako je $|h(x) - L| \leqslant r(x)$ blizu c i $r(x) \to 0$, onda je $h(x) \to L$.

3.1.3. Jednostrani limesi

Definicija 3.1.11. *Neka je* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *i stavimo*

$$D_- := D \cap \langle -\infty, c\rangle, \qquad D_+ := D \cap \langle c, +\infty\rangle.$$

Ako je c *gomilište skupa* D_-, lijevi limes *funkcije* f *u* c *jest limes restrikcije* $f|_{D_-}$ *u* c *i označava se* $\lim_{x\to c-} f(x)$ *ili* $f(c-)$. *Ako je* c *gomilište skupa* D_+, *analogno definiramo* desni limes $\lim_{x\to c+} f(x)$ *ili* $f(c+)$.

Za desni limes uvjet blizine glasi $0 < x - c < \delta$, a za lijevi $0 < c - x < \delta$, uz $x \in D$. U nizovnom opisu dopuštamo samo argumente s odgovarajuće strane. Oznake $f(c-)$ i $f(c+)$ označavaju limese, a ne vrijednost funkcije u novim točkama domene.

Teorem 3.1.12. *Ako je* c *gomilište obaju skupova* D_- *i* D_+, *onda*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x) = L.$$

Ako je c *gomilište točno jednoga od tih skupova, limes relativno domeni* D *postoji ako i samo ako postoji taj jednostrani limes, i tada su jednaki.*

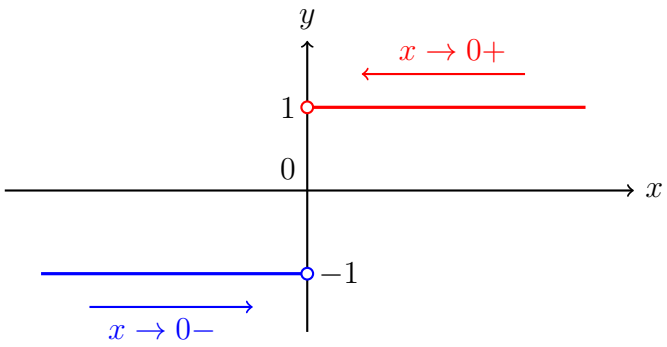
Dokaz. Iz limesa na D slijede limesi restrikcija. Obratno, za zadani $\varepsilon > 0$ odaberimo pozitivne δ_- i δ_+ za oba jednostrana limesa. Za $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$ svaka točka $x \in D$ s $0 < |x - c| < \delta$ zadovoljava jednu od jednostranih pretpostavki, pa je $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ako, primjerice, c nije gomilište skupa D_-, postoji $r > 0$ takav da $D \cap \langle c - r, c\rangle = \emptyset$. U probušenoj r-okolini točke c domena tada ima samo točke desno od c. Zato se uvjet za puni relativni limes svodi na desni. Slučaj s drugom stranom jednak je. □

Primjer 3.1.13. Za funkciju $f(x) = |x|/x$, $x \neq 0$, vrijedi

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = 1,$$

pa limes u 0 ne postoji. Za funkciju $g\colon [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $g(x)=x^2$, limes u 0 relativno domeni jednak je desnom limesu i iznosi 0. Lijevi limes te funkcije ne definiramo, jer s lijeve strane nema točaka njezine domene koje bi prilazile nuli.



Pravila za aritmetičke operacije, usporedbu i sendvič vrijede i za jednostrane limese: riječ je o istim pravilima na manjoj domeni.

3.1.4. Beskonačni limesi i limesi u beskonačnosti

Dosad su i točka približavanja i limes bili realni brojevi. Proširit ćemo zapis dopuštajući oznake $+\infty$ i $-\infty$, kao u poglavlju o nizovima. One nisu realni brojevi niti novi argumenti na kojima bi funkcija trebala biti definirana.

Definicija 3.1.14. *Neka je* $f\colon D \to \mathbb{R}$. *Ako je* $c \in \mathbb{R}$ *gomilište skupa* D, *pišemo* $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ *ako*

$$(\forall M>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in D)\quad 0<|x-c|<\delta \implies f(x)>M.$$

Za limes $-\infty$ *posljednji uvjet zamjenjujemo s* $f(x)<-M$.

Ako je D *neomeđen odozgo, pišemo* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L\in\mathbb{R}$ *ako*

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists A\in\mathbb{R})(\forall x\in D)\quad x>A \implies |f(x)-L|<\varepsilon.$$

Ako je D *neomeđen odozdo, limes za* $x\to-\infty$ *definiramo zamjenjujući uvjet* $x>A$ *uvjetom* $x<A$.

Sve kombinacije konačnih i beskonačnih limesa možemo iskazati istim redoslijedom kvantifikatora: za svaki zahtjev o vrijednostima postoji prag za argumente tako da sve dopuštene argumente iza toga praga funkcija preslikava u zadano područje vrijednosti. Uvjeti za argumente i za vrijednosti biraju se neovisno iz tablice:

Približavanje	Uvjet za $x\in D$	Limes	Uvjet za $f(x)$
$x\to c\in\mathbb{R}$	$0<\lvert x-c\rvert<\delta$	$L\in\mathbb{R}$	$\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$
$x\to+\infty$	$x>A$	$+\infty$	$f(x)>M$
$x\to-\infty$	$x<A$	$-\infty$	$f(x)<-M$

Ovdje su $\varepsilon, M > 0$ proizvoljni, a biraju se $\delta > 0$ ili $A \in \mathbb{R}$. Primjerice, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ znači da za svaki $M > 0$ postoji $A \in \mathbb{R}$ takav da za sve $x \in D$ s $x < A$ vrijedi $f(x) > M$. Jednostrane beskonačne limese definiramo odgovarajućim restrikcijama. Teorem 3.1.12 vrijedi i za $L = \pm\infty$, s istim dokazom pomoću dvaju pragova.

Teorem 3.1.15 (Nizovni kriterij za proširene limese)**.** *Neka su $c, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Za konačni c pretpostavimo da je c gomilište domene D, a za $c = +\infty$ odnosno $c = -\infty$ da je D neomeđen u tom smjeru. Tada $\lim_{x\to c} f(x) = L$ vrijedi ako i samo ako za svaki niz (x_n) u D koji teži c vrijedi $f(x_n) \to L$; za konačni c dodatno zahtijevamo $x_n \neq c$ za svaki n.*

Dokaz. Ako vrijedi definicija limesa, za svaki zahtjev o vrijednostima odaberemo pripadni prag za argumente. Niz $x_n \to c$ od nekog indeksa zadovoljava taj prag, pa $f(x_n)$ zadovoljava zadani zahtjev. To je definicija $f(x_n) \to L$.

Ako definicija ne vrijedi, postoji jedan zahtjev o vrijednostima koji ne možemo osigurati nijednim pragom za argumente. Za konačni L to znači $|f(x) - L| \geqslant \varepsilon_0$ za neki fiksni $\varepsilon_0 > 0$, za $L = +\infty$ znači $f(x) \leqslant M_0$, a za $L = -\infty$ znači $f(x) \geqslant -M_0$, za neki fiksni $M_0 > 0$. Za konačni c redom biramo takve točke s $0 < |x_n - c| < 1/n$; za $c = +\infty$ biramo ih s $x_n > n$, a za $c = -\infty$ s $x_n < -n$. Tada je $x_n \to c$, a $f(x_n)$ ne teži L, što dokazuje obrat. □

Pravila računanja s konačnim limesima vrijede i pri $x \to \pm\infty$. Usporedba također vrijedi za beskonačne limese: ako je, primjerice, $f(x) \leqslant g(x)$ u području približavanja i $f(x) \to +\infty$, onda $g(x) \to +\infty$. Doista, svaki prag $f(x) > M$ osigurava i $g(x) > M$. Ako je $f(x) \leqslant g(x)$ i $g(x) \to -\infty$, analogno $f(x) \to -\infty$.

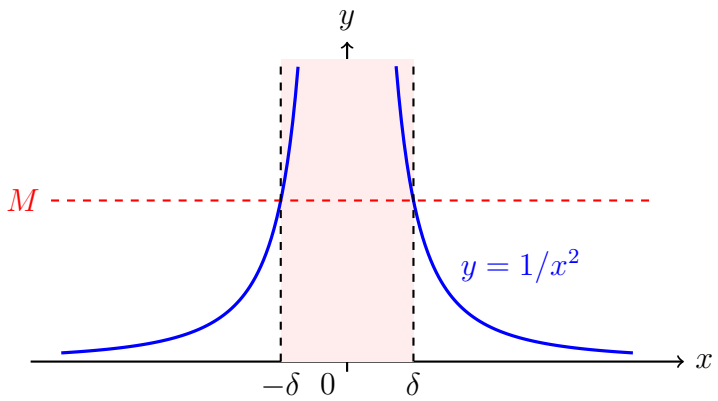
Primjer 3.1.16. Vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Za prva dva limesa dovoljno je zahtijevati $|x| > 1/\varepsilon$ u odgovarajućem smjeru. Za treći, za zadani $M > 0$ uzmemo $\delta = 1/\sqrt{M}$: iz $0 < |x| < \delta$ slijedi $1/x^2 > M$. S druge strane,

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

pa $1/x$ u 0 nema ni konačan ni beskonačan dvostrani limes.



Primjer 3.1.17. Dijeljenjem brojnika i nazivnika s x^2 dobivamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 - 1/x + 1/x^2}{2 + 5/x^2} = \frac{3}{2}.$$

Funkcija $\sin x$ nema limes kada $x \to +\infty$: za $x_n = \pi/2 + 2\pi n$ vrijedi $\sin x_n = 1$, a za $y_n = 3\pi/2 + 2\pi n$ vrijedi $\sin y_n = -1$. Oba niza argumenata teže $+\infty$.

Izraze kao što su $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ ili ∞/∞ ne smijemo tretirati kao brojeve. Primjerice, funkcije x, $2x$ i x^2 sve teže $+\infty$, ali razlike $x - x$, $2x - x$ i $x - x^2$ imaju različito ponašanje. U takvu slučaju treba proučiti same funkcije, primjerice prikladnim rastavljanjem ili usporedbom.

3.1.5. Limes monotone funkcije u beskonačnosti

Teorem 3.1.18. *Neka je $f\colon \langle a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ rastuća funkcija, gdje je $a \in \mathbb{R}$. Ako je omeđena odozgo, onda*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup\{f(x) : x > a\} \in \mathbb{R}.$$

Ako nije omeđena odozgo, onda je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Posebno, rastuća funkcija na tom intervalu ima konačan limes u $+\infty$ ako i samo ako je omeđena odozgo.

Za padajuću funkciju analogno vrijedi: konačan limes postoji ako i samo ako je omeđena odozdo, i jednak je infimumu slike; inače je limes $-\infty$.

Dokaz. Neka je slika rastuće funkcije omeđena odozgo i označimo njezin supremum s L. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 > a$ takav da je $L - \varepsilon < f(x_0) \leqslant L$. Za $x > x_0$ monotonost daje

$$L - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant L,$$

pa je $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ako slika nije omeđena odozgo, za svaki $M > 0$ postoji $x_0 > a$ s $f(x_0) > M$; za $x > x_0$ tada vrijedi $f(x) \geqslant f(x_0) > M$.

Radi izravne provjere nužnosti, ako rastuća funkcija ima konačan limes L, od nekog $A > a$ vrijedi $f(x) < L + 1$ za $x > A$. Za $a < x \leqslant A$ monotonost daje $f(x) \leqslant f(A)$. Stoga je cijela funkcija omeđena odozgo s $\max\{L+1, f(A)\}$. Tvrdnje za padajuću funkciju slijede primjenom dokazanoga na $-f$. □

Za konačan limes rastuće funkcije ne treba omeđenost s obiju strana. Funkcija $f(x) = -1/(x - a)$ na $\langle a, +\infty\rangle$ strogo raste, omeđena je odozgo i teži nuli u $+\infty$, ali nije omeđena odozdo. Ograničavanje ponašanja kod $+\infty$ samo po sebi ne ograničava ponašanje uz drugi kraj domene.

Zadatak 3.1.1. Izravno pomoću ε i δ dokažite $\lim_{x\to c}(ax + b) = ac + b$ za $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x\to 2} 1/x = 1/2$. U drugom slučaju najprije osigurajte da je nazivnik udaljen od nule.

Zadatak 3.1.2. Neka je $D = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ i $f(1/n) = (-1)^n/n$. Dokažite da je 0 gomilište skupa D i da je $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in D}} f(x) = 0$. Što se mijenja ako stavimo $f(1/n) = (-1)^n$?

Zadatak 3.1.3. Odredite sve konačne i beskonačne jednostrane limese u 0 funkcija $1/x^3$, $1/|x|$ i $x/|x|$. Obrazložite u kojim slučajevima postoji dvostrani limes.

Zadatak 3.1.4. Iskažite i dokažite analogon teorema 3.1.18 za rastuću funkciju $f\colon \langle -\infty, b\rangle \to \mathbb{R}$ kada $x \to -\infty$. Koja je jednostrana omeđenost sada potrebna za konačan limes?

3.2. Važni primjeri limesa

Opća pravila za limese postaju osobito korisna kada znamo nekoliko osnovnih primjera. Dokazat ćemo limese povezane s trigonometrijskim i eksponencijalnim funkcijama. Pritom ćemo se osloniti na geometrijsku definiciju sinusa i kosinusa te na prikaz eksponencijalne funkcije limesom niza, dokazan u prethodnom poglavlju.

3.2.1. Trigonometrijski limesi

Za računanje limesa izraza $\sin x/x$ treba najprije dobiti ocjenu koja vrijedi za sve dovoljno male nenulte x. Sam graf funkcije može sugerirati odgovor, ali ne daje takvu ocjenu.

Lema 3.2.1. *Za kut t izražen u radijanima vrijedi*

$$\sin t < t < \operatorname{tg} t \qquad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.2}$$

Dokaz. Neka je $O = (0,0)$ središte jedinične kružnice, a

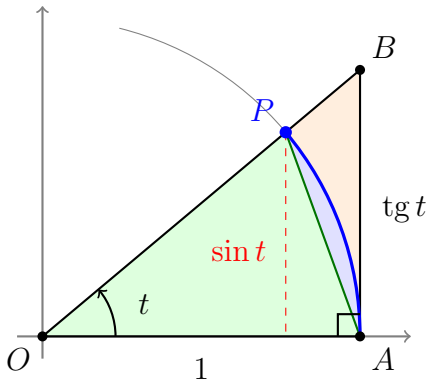
$$A = (1,0), \qquad P = (\cos t, \sin t)$$

njezine točke. Polupravac OP siječe tangentu na kružnicu u točki A u točki $B = (1, \operatorname{tg} t)$. Budući da je $0 < t < \pi/2$, sve su navedene duljine pozitivne. Trokut OAP sadržan je u kružnom isječku omeđenom polumjerima OA, OP i kraćim lukom AP. Taj je isječak sadržan u trokutu OAB. U oba slučaja razlika površina strogo je pozitivna.

Koristimo poznatu geometrijsku formulu prema kojoj kružni isječak polumjera r i kuta t, mjerenog u radijanima, ima površinu $r^2 t/2$. Površine dvaju trokuta i isječka zato daju

$$\frac{1}{2}\sin t < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\operatorname{tg} t.$$

Množenjem s 2 dobivamo tražene nejednakosti. □



Na slici zeleni trokut leži unutar kružnog isječka, a isječak unutar vanjskog trokuta. Usporedba se odnosi na kutove između 0 i $\pi/2$. Nejednakosti (3.2) ne prenosimo na proizvoljno velike kutove.

Teorem 3.2.2. *Vrijedi*

$$\lim_{h\to 0} \sin h = 0, \qquad \lim_{h\to 0} \cos h = 1, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Dokaz. Najprije dokazujemo prve dvije tvrdnje. Za $0 < |h| < \pi/2$ iz leme i neparnosti sinusa slijedi

$$|\sin h| = \sin|h| \leqslant |h|.$$

Ta nejednakost vrijedi i za $h = 0$, pa teorem o sendviču daje $\sin h \to 0$ kada $h \to 0$. Prema identitetu za dvostruki kut i istoj ocjeni imamo, za $|h| < \pi$,

$$0 \leqslant 1 - \cos h = 2\sin^2 \frac{h}{2} \leqslant 2\left(\frac{|h|}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{2}.$$

Desna strana teži nuli, pa je $\cos h \to 1$.

Sada neka je $0 < h < \pi/2$. Iz $\sin h \leqslant h$ dobivamo $\sin h/h \leqslant 1$. Iz $h \leqslant \operatorname{tg} h = \sin h/\cos h$, koristeći $h > 0$ i $\cos h > 0$, dobivamo $\cos h \leqslant \sin h/h$. Funkcije $h \mapsto \cos h$ i $h \mapsto \sin h/h$ parne su, pa iste ocjene vrijede za $-\pi/2 < h < 0$. Dakle,

$$\cos h \leqslant \frac{\sin h}{h} \leqslant 1 \qquad \left(0 < |h| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Budući da smo već dokazali $\cos h \to 1$, još jedna primjena teorema o sendviču daje $\sin h/h \to 1$. □

Dokazom smo ujedno dobili izravnu ocjenu pogreške:

$$0 \leqslant 1 - \frac{\sin h}{h} \leqslant 1 - \cos h \leqslant \frac{h^2}{2} \qquad \left(0 < |h| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Primjerice, za zadani $\varepsilon > 0$ možemo uzeti $\delta = \min\{\pi/2, \sqrt{2\varepsilon}\}$. Tada $0 < |h| < \delta$ povlači $|\sin h/h - 1| < \varepsilon$. Ovdje je bitno da je h mjeren u radijanima: ta je mjera korištena u formuli za površinu kružnog isječka.

Primjer 3.2.3. Iz identiteta $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$ za $x \neq 0$ slijedi

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2.$$

Kada $x \to 0$, i $x/2 \to 0$, pa upravo dokazani limes daje

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Dopuštenost zamjene $h = x/2$ može se provjeriti i izravno: uvjet $0 < |x| < 2\delta$ osigurava $0 < |h| < \delta$.

Primjer 3.2.4. Za $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, vrijedi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{a}{b}.$$

Za dovoljno male nenulte x imamo $0 < |bx| < \pi/2$, pa nazivnik nije nula. Ako je $a = 0$, izraz je jednak nuli. Ako je $a \neq 0$, pišemo

$$\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{a}{b}\,\frac{\sin(ax)}{ax}\,\frac{bx}{\sin(bx)}.$$

Posljednja dva faktora teže broju 1: za fiksni nenulti broj c uvjet $0 < |x| < \delta/|c|$ daje $0 < |cx| < \delta$. Pravilo za limes produkta zato daje tvrdnju.

3.2.2. Eksponencijalni limesi

Za eksponencijalnu funkciju koristimo korolar 2.4.13, prema kojem za svaki fiksni $h \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$e^h = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{h}{n}\right)^n.$$

Iz te formule izvest ćemo ocjenu koja povezuje $e^h - 1$ s h. Treba razlikovati dva koraka: najprije uz fiksni h puštamo $n \to \infty$, a tek zatim proučavamo ponašanje kada $h \to 0$.

Lema 3.2.5. *Za svaki $h \neq 0$ vrijedi*

$$\min\{1, e^h\} \leqslant \frac{e^h - 1}{h} \leqslant \max\{1, e^h\}. \tag{3.3}$$

Dokaz. Neka je najprije $h > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Za $q = 1 + h/n > 1$ rastav razlike potencija daje

$$\frac{(1+h/n)^n - 1}{h} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+\frac{h}{n}\right)^j.$$

Svaki je pribrojnik između 1 i $(1+h/n)^{n-1}$. Stoga vrijedi

$$1 \leqslant \frac{(1+h/n)^n - 1}{h} \leqslant \left(1+\frac{h}{n}\right)^{n-1}.$$

Kako je h fiksan, srednji izraz teži $(e^h-1)/h$. Desni izraz možemo zapisati kao

$$\left(1+\frac{h}{n}\right)^{n-1} = \frac{(1+h/n)^n}{1+h/n},$$

pa njegov limes iznosi e^h, jer nazivnik teži broju 1. Prelaskom na limese dobivamo

$$1 \leqslant \frac{e^h-1}{h} \leqslant e^h \qquad (h>0). \tag{3.4}$$

Ako je $h<0$, stavimo $t=-h>0$. Iz $e^{-t}=1/e^t$ slijedi

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{e^t-1}{t\,e^t}.$$

Nejednakost (3.4) za t podijelimo pozitivnim brojem e^t i dobijemo

$$e^h \leqslant \frac{e^h-1}{h} \leqslant 1 \qquad (h<0).$$

To zajedno s pozitivnim slučajem daje tvrdnju. □

Teorem 3.2.6. *Vrijedi*

$$\lim_{h\to 0} e^h = 1, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1.$$

Dokaz. Eksponencijalna funkcija strogo raste, pa za $|h|<1$ imamo $0<e^h\leqslant e$. Iz (3.3) zato slijedi

$$|e^h-1| \leqslant e|h| \qquad (0<|h|<1).$$

Desna strana teži nuli, pa $e^h\to 1$.

Prema istoj lemi broj $(e^h-1)/h$ leži između 1 i e^h. Njegova je udaljenost od broja 1 zato najviše $|e^h-1|$:

$$\left|\frac{e^h-1}{h}-1\right| \leqslant |e^h-1| \qquad (h\neq 0).$$

Desna strana teži nuli prema prvom dijelu dokaza. Time je dokazana i druga tvrdnja. □

Primjer 3.2.7. Za svaki $a\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x} = a.$$

Za $a=0$ izraz je identički nula, a za $a\neq 0$ pišemo

$$\frac{e^{ax}-1}{x} = a\frac{e^{ax}-1}{ax}$$

i primijenimo teorem s argumentom $h=ax$.

3.2.3. Usporedba eksponencijalne funkcije i polinoma

Iz prethodnoga poglavlja znamo da je za svaki fiksni $x \geqslant 0$ niz $((1+x/n)^n)$ rastući i da mu je limes e^x; vidi teorem 2.4.11 i propoziciju 2.4.12. Zato za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$e^x \geqslant \left(1+\frac{x}{m}\right)^m \geqslant \frac{x^m}{m^m} \qquad (x \geqslant 0). \tag{3.5}$$

Prva nejednakost uspoređuje član rastućega niza s njegovim limesom, a druga slijedi iz $1 + x/m \geqslant x/m \geqslant 0$.

Propozicija 3.2.8. *Za svaki realni polinom P vrijedi*

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)e^{-x} = 0.$$

Dokaz. Ako je P nulpolinom, tvrdnja je neposredna. Inače pišimo

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d, \qquad d \in \mathbb{N}_0, \quad a_d \neq 0,$$

i stavimo $C = |a_0| + \cdots + |a_d| > 0$. Za $x \geqslant 1$ svaka potencija x^j, $0 \leqslant j \leqslant d$, najviše je x^d, pa nejednakost trokuta daje

$$|P(x)| \leqslant Cx^d.$$

Odaberimo sada fiksni prirodan broj $m = d + 1$. Ocjena (3.5) daje

$$0 \leqslant |P(x)e^{-x}| = \frac{|P(x)|}{e^x} \leqslant \frac{Cx^dm^m}{x^m} = \frac{Cm^m}{x} \qquad (x \geqslant 1).$$

Desna strana teži nuli kada $x \to +\infty$. Teorem o sendviču zato daje traženi limes. □

U dokazu smo nakon izbora stupnja d odabrali jedan broj $m > d$ i držali ga fiksnim. Time se tvrdnja o limesu niza za svaki fiksni x pretvorila u nejednakost koja vrijedi za sve $x \geqslant 0$. Tek smo potom pustili $x \to +\infty$.

Zadatak 3.2.1. Izračunajte limese

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Provjerite da su izrazi definirani u nekoj probušenoj okolini nule. *Uputa:* Za drugi limes izrazite brojnik pomoću $1 - \cos(ax)$ i $1 - \cos(bx)$ te upotrijebite primjer 3.2.3.

Zadatak 3.2.2. Izračunajte limes

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$$

na dva načina: rastavom razlike kvadrata i primjenom teorema 3.2.6. Objasnite zašto nazivnik nije nula za $x \neq 0$.

Zadatak 3.2.3. Neka je $a > 0$, a P realni polinom. Dokažite

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)e^{-ax} = 0.$$

Uputa: Stavite $y = ax$ i primijenite propoziciju 3.2.8 na polinom $Q(y) = P(y/a)$.

3.3. Neprekidnost funkcije

Limes opisuje vrijednosti funkcije u blizini promatrane točke, ne uzimajući u obzir vrijednost u samoj točki. Neprekidnost povezuje upravo ta dva podatka: kada argument prilazi točki domene, vrijednosti funkcije trebaju prilaziti njezinoj vrijednosti u toj točki. Pritom dopuštamo i domene koje nisu otvoreni intervali. Tako će ista definicija obuhvatiti unutarnje točke intervala, njegove uključene krajeve, ali i izolirane točke domene.

Definicija 3.3.1. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ i $c \in D$. Funkcija f je* neprekidna u točki c *ako vrijedi*

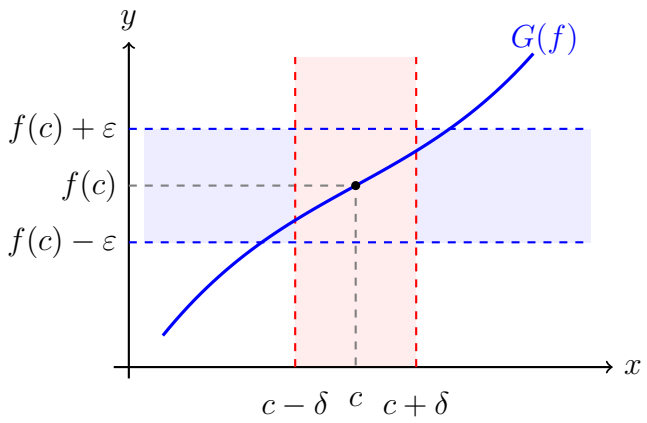
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Funkcija je neprekidna na D *ako je neprekidna u svakoj točki $c \in D$. Ako nije neprekidna u $c \in D$, kažemo da u toj točki ima* prekid.

Broj δ može ovisiti o ε i o odabranoj točki c, ali mora vrijediti za sve dopuštene x odjednom. U definiciji nema uvjeta $x \neq c$: za $x = c$ zaključak je ionako istinit. Skupovno, tražimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f\big(D \cap \langle c - \delta, c + \delta\rangle\big) \subseteq \langle f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon\rangle.$$

Presjek s domenom bitan je: ne razmatramo argumente za koje funkcija nije definirana.



Na slici dio grafa iznad okomitoga pojasa ostaje u vodoravnom pojasu. Slika prikazuje jedan izbor ε i δ; neprekidnost zahtijeva odgovarajući izbor δ za svaki $\varepsilon > 0$.

Propozicija 3.3.2. *Ako je $c \in D$ gomilište skupa D, tada je $f\colon D \to \mathbb{R}$ neprekidna u c ako i samo ako je*

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D}} f(x) = f(c).$$

Ako je c izolirana točka skupa D, svaka funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ neprekidna je u c.

Dokaz. U prvom slučaju definicije se razlikuju samo po tome dopuštaju li $x = c$. Za taj argument vrijedi $|f(x) - f(c)| = 0 < \varepsilon$, pa njegovo dodavanje ili izostavljanje ne mijenja uvjet. U drugom slučaju postoji $r > 0$ takav da je $D \cap \langle c - r, c + r\rangle = \{c\}$. Za svaki $\varepsilon > 0$ možemo uzeti $\delta = r$, jer je jedini argument koji treba provjeriti upravo $x = c$. □

Primjerice, svaka funkcija $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ neprekidna je na $\mathbb{Z}$. To nije tvrdnja o tome možemo li njezin graf nacrtati jednim potezom: neprekidnost uvijek promatramo u odnosu na zadanu domenu. Za funkciju $1/x$ s domenom $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ točka 0 nije točka domene, pa u njoj ne pitamo je li funkcija neprekidna. Možemo zasebno pitati može li se funkcija neprekidno produljiti u 0.

Teorem 3.3.3 (Nizovni kriterij neprekidnosti)**.** *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ neprekidna je u $c \in D$ ako i samo ako za svaki niz (x_n) u D vrijedi*

$$x_n \to c \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \to f(c).$$

U ovom kriteriju dopušteno je da pojedini ili svi članovi budu jednaki c.

Dokaz. Neka je f neprekidna u c i $x_n \to c$. Za zadani $\varepsilon > 0$ neprekidnost daje $\delta > 0$ iz definicije. Konvergencija niza daje $N \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geqslant N$ vrijedi $|x_n - c| < \delta$. Tada je $|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon$, kako je traženo.

Obratno, pretpostavimo da f nije neprekidna u c. Negiranjem definicije dobivamo neki $\varepsilon_0 > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in D$ za koji je

$$|x - c| < \delta, \qquad |f(x) - f(c)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Za $\delta = 1/n$ odaberimo takav x_n. Tada $x_n \to c$, ali $|f(x_n) - f(c)| \geqslant \varepsilon_0$ za svaki n, pa $(f(x_n))$ ne konvergira prema $f(c)$. Time smo dokazali obrat. □

Negacija neprekidnosti sadrži *jedan fiksni* pozitivni broj ε_0 koji radi za svaku okolinu točke c. Za dokaz prekidnosti dovoljno je pronaći jedan niz koji narušava nizovni kriterij; za dokaz neprekidnosti treba obuhvatiti sve nizove.

3.3.1. Osnovni primjeri i vrste ponašanja

Primjer 3.3.4. Konstantna funkcija, identiteta, apsolutna vrijednost i funkcija $x \mapsto x^2$ neprekidne su na $\mathbb{R}$. To možemo provjeriti izravno:

1. Za $f(x) = d$ uvijek je $|f(x) - f(c)| = 0$, pa odgovara svaki $\delta > 0$.
2. Za $f(x) = x$ biramo $\delta = \varepsilon$.
3. Za $f(x) = |x|$ također biramo $\delta = \varepsilon$, jer je $\big||x| - |c|\big| \leqslant |x - c|$.

4. Za $f(x) = x^2$ najprije zahtijevamo $|x-c| < 1$. Tada je $|x+c| \leqslant |x-c|+2|c| < 1+2|c|$. Za
$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|c|}\right\}$$
iz $|x-c| < \delta$ slijedi $|x^2-c^2| = |x-c||x+c| < \varepsilon$.

Nije potrebno pronaći najveći mogući δ; dovoljan je bilo koji pozitivan izbor koji osigurava traženu procjenu.

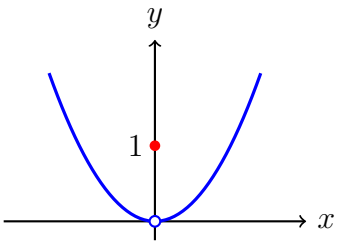
Primjer 3.3.5. Funkcija $f(x) = 1/x$ neprekidna je na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Fiksirajmo $c \neq 0$ i $\varepsilon > 0$ te stavimo
$$\delta = \min\left\{\frac{|c|}{2}, \frac{\varepsilon|c|^2}{2}\right\}.$$
Iz $|x-c| < \delta$ slijedi $|x| \geqslant |c| - |x-c| > |c|/2$, pa
$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \frac{|x-c|}{|x||c|} \leqslant \frac{2|x-c|}{|c|^2} < \varepsilon.$$
Uvjet $|x| > |c|/2$ objašnjava zašto se najprije moramo odmaknuti od nule u nazivniku.

Primjer 3.3.6. Sljedeća tri primjera pokazuju različito ponašanje u ishodištu.

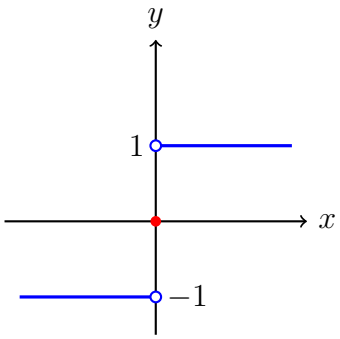
1. Funkcija $f(x) = x^2$ za $x \neq 0$, $f(0) = 1$, ima u nuli *uklonjivi prekid*: njezin je limes 0, a vrijednost 1. Promijenimo li samo $f(0)$ u 0, dobivamo neprekidnu funkciju.

2. Funkcija sgn ima lijevi limes -1 i desni limes 1 u nuli. Budući da su različiti, nikakav izbor vrijednosti u nuli ne može je učiniti neprekidnom. Takav prekid zovemo *skokom*. Za $c \neq 0$ funkcija je konstantna u dovoljno maloj okolini od c, pa je ondje neprekidna.

3. Funkcija $\sin(1/x)$, definirana za $x \neq 0$, nema limes u 0. Naime, za
$$x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}, \qquad y_n = \frac{1}{3\pi/2 + 2n\pi}$$
vrijedi $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, ali su odgovarajuće vrijednosti stalno 1 odnosno -1. Zato ni ovdje dodjeljivanje vrijednosti u nuli ne daje neprekidno produljenje.



uklonjivi prekid

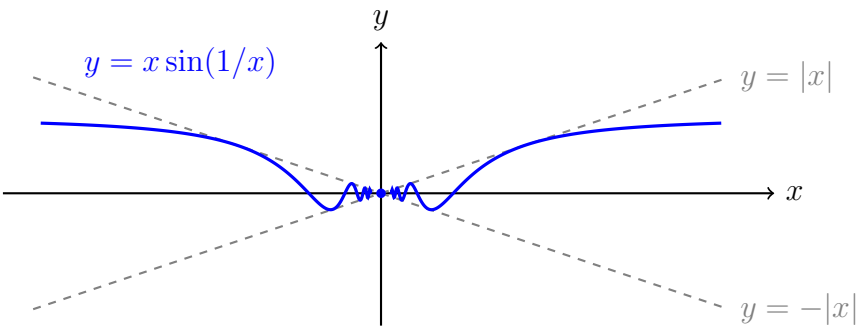


skok

Primjer 3.3.7. Funkcija

$$F(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

neprekidna je u 0. Doista, $|F(x) - F(0)| \leqslant |x|$, pa možemo uzeti $\delta = \varepsilon$. Faktor x smanjuje amplitudu oscilacija. To pokazuje da osciliranje funkcije u blizini točke samo po sebi ne isključuje neprekidnost.



Primjer 3.3.8. *Dirichletova funkcija*

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

prekidna je u svakoj točki. Iz gustoće racionalnih i iracionalnih brojeva za svaki $c \in \mathbb{R}$ možemo odabrati racionalne r_n i iracionalne s_n s $|r_n - c| < 1/n$ i $|s_n - c| < 1/n$. Oba niza konvergiraju prema c, a njihove slike konvergiraju prema različitim brojevima 1 i 0.

Nasuprot tome, funkcija $g(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ neprekidna je točno u 0. Ondje je $|g(x) - g(0)| \leqslant |x|$, što dokazuje neprekidnost. Za $c \neq 0$ nizovi iz prethodnoga odlomka daju $g(r_n) = r_n \to c$ i $g(s_n) = 0 \to 0$, pa barem jedan od tih nizova slika ne konvergira prema $g(c)$.

3.3.2. Lokalna svojstva i operacije

Lema 3.3.9. *Neka je $f\colon D \to \mathbb{R}$ neprekidna u $c \in D$. Tada je f* lokalno omeđena u c: *postoje $r > 0$ i $M > 0$ takvi da za $x \in D$, $|x - c| < r$, vrijedi $|f(x)| < M$. Ako je još $f(c) \neq 0$, postoji $r > 0$ takav da za takve x funkcija čuva predznak od $f(c)$ i zadovoljava*

$$|f(x)| > \frac{|f(c)|}{2}.$$

Dokaz. Primijenimo definiciju s $\varepsilon = 1$. U dobivenoj okolini je $|f(x)| \leqslant |f(x) - f(c)| + |f(c)| < 1 + |f(c)|$, pa odgovara $M = 1 + |f(c)|$. Ako je $f(c) \neq 0$, primijenimo definiciju s $\varepsilon = |f(c)|/2$. Tada je

$$f(c) - \frac{|f(c)|}{2} < f(x) < f(c) + \frac{|f(c)|}{2}.$$

Za $f(c) > 0$ lijevi je kraj $f(c)/2 > 0$; za $f(c) < 0$ desni je kraj $f(c)/2 < 0$. U oba slučaja slijede obje tvrdnje. □

Neprekidnost u jednoj točki ne jamči neprekidnost u njezinoj okolini, kao što pokazuje $x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Ipak, lema daje kontrolu vrijednosti u okolini: one su omeđene, a nenulta vrijednost ne može odmah promijeniti predznak.

Teorem 3.3.10. *Ako su $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ neprekidne u $c \in D$, onda su u c neprekidne i funkcije $\lambda f + \mu g$ za $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ te fg. Ako je $g(c) \neq 0$, kvocijent f/g neprekidan je u c na svojoj domeni $D_0 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.*

Dokaz. Za svaki niz $x_n \in D$ koji konvergira prema c nizovni kriterij daje $f(x_n) \to f(c)$ i $g(x_n) \to g(c)$. Pravila za limese nizova daju

$$\lambda f(x_n) + \mu g(x_n) \to \lambda f(c) + \mu g(c), \qquad f(x_n)g(x_n) \to f(c)g(c).$$

Ponovna primjena kriterija dokazuje prve dvije tvrdnje. Za niz (x_n) u D_0 također vrijedi $g(x_n) \to g(c) \neq 0$, pa pravilo za kvocijent nizova daje $f(x_n)/g(x_n) \to f(c)/g(c)$. To dokazuje posljednju tvrdnju. Prethodna lema dodatno pokazuje da svi argumenti iz D dovoljno blizu c pripadaju D_0 i da su ondje nazivnici odmaknuti od nule. □

Korolar 3.3.11. *Svaki polinom neprekidan je na $\mathbb{R}$. Svaka racionalna funkcija P/Q, gdje su P, Q polinomi i Q nije nulpolinom, neprekidna je na svojoj domeni $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.*

Dokaz. Identiteta i konstante neprekidne su. Indukcijom i pravilom za produkt slijedi neprekidnost svake potencije x^n za $n \in \mathbb{N}$. Polinom je konačna linearna kombinacija tih funkcija i konstante, pa je neprekidan. Za racionalnu funkciju primijenimo pravilo za kvocijent u svakoj točki u kojoj nazivnik nije nula. □

Teorem 3.3.12 (Neprekidnost kompozicije)**.** *Neka je $f\colon D \to E$, $g\colon E \to \mathbb{R}$, gdje su $D, E \subseteq \mathbb{R}$. Ako je f neprekidna u $c \in D$, a g neprekidna u $f(c) \in E$, tada je $g \circ f$ neprekidna u c.*

Dokaz. Za zadani $\varepsilon > 0$ neprekidnost od g daje $\eta > 0$ takav da za $y \in E$ vrijedi

$$|y - f(c)| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |g(y) - g(f(c))| < \varepsilon.$$

Neprekidnost od f za taj η daje $\delta > 0$ takav da $x \in D$, $|x - c| < \delta$, povlači $|f(x) - f(c)| < \eta$. Kako je $f(x) \in E$, u prvu implikaciju smijemo uvrstiti $y = f(x)$. Dobivamo $|g(f(x)) - g(f(c))| < \varepsilon$. □

Korolar 3.3.13 (Neprekidna funkcija i limes)**.** *Neka je c gomilište skupa $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to E$ i $\lim_{x \to c,\, x \in D} f(x) = L \in E$. Ako je $g\colon E \to \mathbb{R}$ neprekidna u L, tada je*

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D}} g(f(x)) = g(L).$$

Dokaz. Za $\varepsilon > 0$ neprekidnost od g u L daje $\eta > 0$ takav da $y \in E$, $|y - L| < \eta$, povlači $|g(y) - g(L)| < \varepsilon$. Definicija limesa od f daje $\delta > 0$ takav da $x \in D$, $0 < |x - c| < \delta$, povlači $|f(x) - L| < \eta$. Spajanjem tih implikacija dobivamo tvrdnju. □

U korolaru je dopušteno da $f(x) = L$ za beskonačno mnogo argumenata, ili čak za sve argumente. To ne stvara poteškoću jer neprekidnost vanjske funkcije obuhvaća i samu točku L. Samo podatak o limesu od g u L, bez podatka o vrijednosti $g(L)$, ne bi bio dovoljan za takav zaključak. Primjerice, neka je $f(x) = 0$ za sve x, a $g(y) = 0$ za $y \neq 0$ i $g(0) = 1$. Tada je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ i $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, ali $g(f(x)) = 1$ za svaki x.

Korolar 3.3.14. *Ako su $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ neprekidne u $c \in D$, onda su u c neprekidne i $|f|$, $\max\{f, g\}$ i $\min\{f, g\}$.*

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz neprekidnosti apsolutne vrijednosti i teorema o kompoziciji. Ostale slijede iz jednakosti

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \qquad \min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

i pravila za linearne kombinacije. □

3.3.3. Jednostrana neprekidnost i krajevi intervala

Definicija 3.3.15. *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ je* neprekidna slijeva *u $c \in D$ ako je njezina restrikcija na $D \cap \langle -\infty, c]$ neprekidna u c.* Neprekidnost zdesna *definiramo pomoću restrikcije na $D \cap [c, +\infty\rangle$.*

Kada je c lijevo gomilište domene, neprekidnost slijeva znači $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$; analogno vrijedi zdesna. Tvrdnja slijedi usporedbom definicija, kao u propoziciji 3.3.2.

Propozicija 3.3.16. *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ neprekidna je u $c \in D$ ako i samo ako je ondje neprekidna i slijeva i zdesna. Posebno, za $a < b$ funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna je na $[a, b]$ ako i samo ako je neprekidna u svakoj točki $\langle a, b\rangle$, zdesna u a i slijeva u b.*

Dokaz. Restrikcija neprekidne funkcije neprekidna je u svakoj točki nove domene: isti δ i dalje vrijedi. Obratno, za $\varepsilon > 0$ odaberimo $\delta_- > 0$ iz lijeve i $\delta_+ > 0$ iz desne neprekidnosti te stavimo $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$. Za $x \in D$ s $|x - c| < \delta$ primijenimo lijevi uvjet ako je $x \leqslant c$, a desni ako je $x \geqslant c$. U oba slučaja vrijedi tražena procjena. Na segmentu nema točaka domene lijevo od a ni desno od b, pa uvjet na svakom kraju svodimo na jedinu relevantnu stranu. □

Ova definicija obuhvaća i konstantne funkcije. Ako je $a = b$, domena je jednočlan skup i svaka funkcija na njoj neprekidna je. Neprekidnost na segmentu ne zahtijeva da funkcija unaprijed bude definirana izvan segmenta. Ipak, može se tako produljiti.

Propozicija 3.3.17. *Za $a < b$ funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna je na $[a,b]$ ako i samo ako je funkcija*

$$F(x) = \begin{cases} f(a), & x < a, \\ f(x), & a \leqslant x \leqslant b, \\ f(b), & x > b \end{cases}$$

neprekidna na $\mathbb{R}$.

Dokaz. Ako je f neprekidna, F je neprekidna izvan krajeva segmenta: ondje je lokalno ili konstantna ili jednaka f. U a je F slijeva konstantna, a zdesna jednaka funkciji f neprekidnoj zdesna. Zato je neprekidna u a prema prethodnoj propoziciji. Jednako postupamo u b. Obrat slijedi restrikcijom neprekidne funkcije F na $[a,b]$. □

Isti argument u jednoj točki daje korisnu inačicu: ako je f definirana na $\langle a,c]$, njezino produljenje stalnom vrijednošću $f(c)$ desno od c neprekidno je u c ako i samo ako je f u c neprekidna slijeva. Analogna tvrdnja vrijedi uz zamjenu lijeve i desne strane.

3.3.4. Neprekidnost osnovnih elementarnih funkcija

Teorem 3.3.18. *Eksponencijalne funkcije $x \mapsto a^x$ za $a > 0$, funkcije* sin, cos, sh *i* ch *neprekidne su na $\mathbb{R}$. Funkcije* tg, ctg, th *i* cth *neprekidne su na svojim prirodnim domenama.*

Dokaz. Iz teorema 3.2.6 znamo da je $\lim_{h\to 0} e^h = 1 = e^0$, pa je eksponencijalna funkcija neprekidna u 0. Za proizvoljan $c \in \mathbb{R}$ koristimo adicijsko pravilo:

$$|e^x - e^c| = e^c|e^{x-c} - 1|.$$

Za $\varepsilon > 0$ neprekidnost u nuli daje $\delta > 0$ takav da $|h| < \delta$ povlači $|e^h - 1| < \varepsilon/e^c$. Uz $h = x - c$ dobivamo neprekidnost u c. Za $a > 0$ već znamo $a^x = e^{x \ln a}$; to je kompozicija neprekidnih funkcija. Ovaj zapis obuhvaća i $a = 1$.

Za trigonometrijske funkcije iz teorema 3.2.2 imamo $\sin h \to 0$ i $\cos h \to 1$ kada $h \to 0$. Adicijske formule daju

$$\sin(c+h) = \sin c \cos h + \cos c \sin h \longrightarrow \sin c,$$

$$\cos(c+h) = \cos c \cos h - \sin c \sin h \longrightarrow \cos c.$$

To dokazuje neprekidnost u proizvoljnom c. Sada su $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$ i $\operatorname{ctg} x = \cos x/\sin x$ neprekidne ondje gdje su njihovi nazivnici nenulti, dakle redom na

$$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Napokon, $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$ i $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ neprekidne su kao linearne kombinacije neprekidnih funkcija. Budući da je $\operatorname{ch} x > 0$ za svaki x, kvocijent $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x/\operatorname{ch} x$ neprekidan je na $\mathbb{R}$. Vrijedi $\operatorname{sh} x = 0$ ako i samo ako je $e^x = e^{-x}$, odnosno $x = 0$ zbog injektivnosti eksponencijalne funkcije. Zato je $\operatorname{cth} x = \operatorname{ch} x/\operatorname{sh} x$ neprekidna na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. □

Neprekidnost logaritma, korijena i inverznih trigonometrijskih funkcija opravdat ćemo općim teoremom o neprekidnosti inverzne funkcije. Time izbjegavamo pretpostavku da je inverz svake neprekidne bijekcije automatski neprekidan bez provjere dodatnih uvjeta.

Zadatak 3.3.1. Neka je $D = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ i $f\colon D \to \mathbb{R}$. Dokažite da je f neprekidna u svakoj točki $1/n$ te da je neprekidna u 0 ako i samo ako je $f(1/n) \to f(0)$. Primijenite to na $f(1/n) = (-1)^n/n$, $f(0) = 0$.

Zadatak 3.3.2. Za koje je $A \in \mathbb{R}$ funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1 \end{cases}$$

neprekidna na $\mathbb{R}$? Zatim odredite sve $A, B \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija jednaka x^2 za $x < 1$, $Ax + B$ za $1 \leqslant x \leqslant 2$ i $x + 2$ za $x > 2$ neprekidna na $\mathbb{R}$.

Zadatak 3.3.3. Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i $f(q) = q^2$ za svaki $q \in \mathbb{Q}$, dokažite da je $f(x) = x^2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Općenitije, dokažite da se dvije neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$ koje se podudaraju na $\mathbb{Q}$ podudaraju svugdje.

Zadatak 3.3.4. Neka je $f\colon D \to \mathbb{R}$ neprekidna u $c \in D$. Dokažite izravno iz definicije da je $|f|$ neprekidna u c. Vrijedi li obrat? Dokažite da obrat vrijedi ako je $f(c) = 0$, a za slučaj $f(c) \neq 0$ pronađite protuprimjer.

3.4. Neprekidne funkcije na segmentu

Neprekidnost je svojstvo funkcije u pojedinoj točki. Na segmentu ona ima i važne posljedice za sve vrijednosti funkcije zajedno: funkcija je omeđena, postiže najmanju i najveću vrijednost te poprima sve vrijednosti između njih. U dokazima će se jasno vidjeti različite uloge zatvorenosti, omeđenosti i svojstva da između dviju točaka segmenta nema praznina.

Neprekidnost na $[a, b]$ uvijek shvaćamo u odnosu na tu domenu. Za $a < b$ ona u unutrašnjosti znači uobičajenu neprekidnost, u a neprekidnost zdesna, a u b neprekidnost slijeva. Nije potrebno unaprijed zadavati funkciju izvan segmenta. Konstantne funkcije pritom nisu nikakva iznimka. Ako je $a = b$, svaka funkcija na jednočlanom skupu $\{a\}$ neprekidna je, a sve sljedeće tvrdnje o ekstremima vrijede neposredno.

3.4.1. Omeđenost i postizanje ekstrema

Teorem 3.4.1 (Weierstrassov teorem)**.** *Neka je $a \leqslant b$ i neka je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Tada je f omeđena i postoje $x_m, x_M \in [a, b]$ takvi da je*

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) \qquad (x \in [a, b]).$$

Drugim riječima, funkcija na segmentu postiže svoj minimum i maksimum.

Dokaz. Najprije dokažimo omeđenost. Kad f ne bi bila omeđena, za svaki $n \in \mathbb{N}$ mogli bismo odabrati $x_n \in [a,b]$ tako da je $|f(x_n)| > n$. Niz (x_n) omeđen je, pa prema Bolzano–Weierstrassovu teoremu 2.5.3 ima podniz (x_{n_k}) koji konvergira nekom $c \in \mathbb{R}$. Iz $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ i prijelaza na limes slijedi $a \leqslant c \leqslant b$. Posebno, c pripada domeni funkcije. Zbog neprekidnosti i teorema 3.3.3 vrijedi

$$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(c).$$

Konvergentan je niz omeđen, što proturječi nejednakostima $|f(x_{n_k})| > n_k \geqslant k$. Zato je f omeđena.

Skup $f([a,b])$ neprazan je i omeđen. Prema potpunosti $\mathbb{R}$ postoje realni brojevi

$$m = \inf f([a,b]), \qquad M = \sup f([a,b]).$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ svojstvo supremuma daje $y_n \in [a,b]$ za koji je

$$M - \frac{1}{n} < f(y_n) \leqslant M.$$

Ponovno izdvojimo konvergentan podniz $y_{n_k} \to x_M$. Kao prije, iz $a \leqslant y_{n_k} \leqslant b$ zaključujemo $x_M \in [a,b]$. Teorem o sendviču i neprekidnost sada daju

$$M = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_M).$$

Dakle, supremum se postiže i zato je maksimum. Primjenom upravo dokazanoga na $-f$ dobivamo točku x_m u kojoj f postiže minimum. □

Postojanje supremuma samo po sebi ne znači da se supremum postiže. U dokazu smo najprije upotrijebili potpunost da dobijemo broj M, a zatim Bolzano–Weierstrassov teorem i neprekidnost da dokažemo $M \in f([a,b])$. To su dva različita koraka.

Primjer 3.4.2. Pretpostavke teorema ne smijemo zanemariti.

1. Funkcija $f(x) = 1/x$ neprekidna je na $\langle 0,1]$, ali nije omeđena odozgo. Domena je omeđena, ali nije zatvorena.

2. Funkcija $f(x) = x$ neprekidna je i omeđena na $\langle 0,1\rangle$, ali ne postiže ni infimum 0 ni supremum 1.

3. Funkcija $f(x) = x$ neprekidna je na zatvorenoj, neomeđenoj domeni $\mathbb{R}$, ali nije omeđena.

4. Na segmentu $[0,1]$ funkcija zadana s $f(0) = 0$ i $f(x) = 1/x$ za $x > 0$ nije omeđena. Ona nije neprekidna u 0.

Primjeri ne tvrde da je svaka funkcija bez neke od pretpostavki neomeđena ili da ne postiže ekstreme. Pokazuju da bez tih pretpostavki zaključak nije zajamčen za sve funkcije.

3.4.2. Nultočke i međuvrijednosti

Teorem 3.4.3 (Bolzanov teorem o nultočki)**.** *Neka je $a < b$ i neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Ako je $f(a)f(b) < 0$, postoji $c \in \langle a,b\rangle$ takav da je $f(c) = 0$.*

Dokaz. Zamjenom f s $-f$, ako je potrebno, možemo pretpostaviti $f(a) < 0 < f(b)$. Stavimo

$$A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}.$$

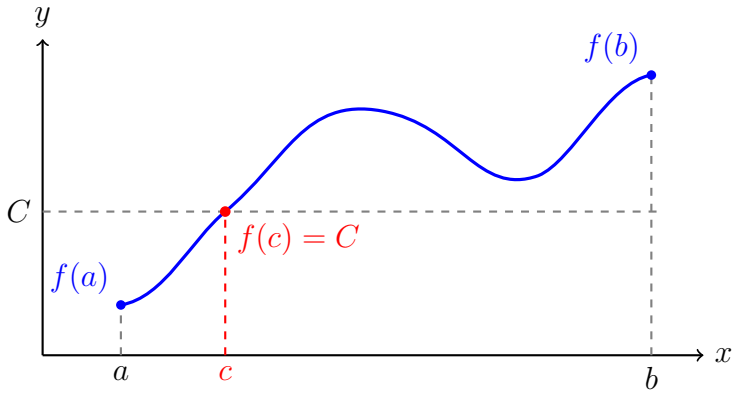
Vrijedi $a \in A$, pa je $A \neq \emptyset$, a b je gornja međa od A. Zato postoji $c = \sup A \in [a,b]$.

Neprekidnost u a i $f(a) < 0$ daju $\delta_a > 0$ tako da je $f(x) < 0$ za $x \in [a,b]$ s $|x-a| < \delta_a$. Postoji takav $x > a$, pa je $c \geqslant x > a$. Jednako tako iz neprekidnosti u b i $f(b) > 0$ slijedi da postoji $\delta_b > 0$ tako da je $f(x) > 0$ za $x \in [a,b]$ s $|x-b| < \delta_b$. Odaberemo li $0 < \eta < \min\{\delta_b, b-a\}$, skup A nema članova u $\langle b-\eta, b]$, pa je $c \leqslant b-\eta < b$. Dakle, $c \in \langle a,b\rangle$.

Kad bi bilo $f(c) < 0$, neprekidnost bi dala $f(x) < 0$ i za neki $x \in \langle c,b\rangle$ dovoljno blizu c. Tada bi $x \in A$ i $x > c$, protivno tomu da je c gornja međa. Kad bi bilo $f(c) > 0$, postojala bi okolina točke c na kojoj je f pozitivna. Izabrali bismo $\eta > 0$ dovoljno malen da je $c - \eta > a$ i da je $f(x) > 0$ za $x \in \langle c-\eta, c]$. No svojstvo supremuma daje $x \in A$ za koji je $c - \eta < x \leqslant c$, što je proturječje. Preostaje $f(c) = 0$. □

Teorem 3.4.4 (Teorem o međuvrijednostima)**.** *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i neka je broj C između $f(a)$ i $f(b)$, uključujući krajnje vrijednosti. Tada postoji $c \in [a,b]$ takav da je $f(c) = C$. Ako je C strogo između $f(a)$ i $f(b)$, možemo uzeti $c \in \langle a,b\rangle$.*

Dokaz. Ako je $C = f(a)$ ili $C = f(b)$, uzmemo odgovarajuću krajnju točku. Inače neprekidna funkcija $g(x) = f(x) - C$ zadovoljava $g(a)g(b) < 0$, pa prethodni teorem daje $g(c) = 0$ u unutrašnjosti. □



Teorem jamči postojanje, ali općenito ne i jedinstvenost točke c. Ako je funkcija uz to strogo monotona, jedinstvenost slijedi iz injektivnosti. Na slici je prikazana jedna od mogućih točaka c; za dokaz nije potrebna pretpostavka o obliku nacrtanoga grafa.

Korolar 3.4.5. *Slika nepraznoga segmenta neprekidnom realnom funkcijom jest segment. Preciznije, uz oznake iz Weierstrassova teorema vrijedi*

$$f([a,b]) = [m,M], \qquad m = f(x_m), \quad M = f(x_M).$$

Dopušteno je $m = M$, kada je slika jednočlan skup.

Dokaz. Iz definicije minimuma i maksimuma slijedi $f([a,b]) \subseteq [m,M]$. Ako je $m = M$, jednakost je neposredna. Ako je $m < M$, primijenimo teorem o međuvrijednostima na segment s krajevima x_m i x_M, poredanima od manjeg do većeg. Taj je segment sadržan u $[a,b]$. Svaki $C \in [m,M]$ poprima se na njemu, pa vrijedi i obratna inkluzija. □

Primjer 3.4.6. Za $p(x) = x^3 + x - 1$ vrijedi $p(0) = -1$ i $p(1) = 1$. Polinom je neprekidan, pa postoji $c \in \langle 0,1\rangle$ za koji je $p(c) = 0$. Taj je c jedinstven: za $x < y$ imamo

$$p(y) - p(x) = (y-x)(y^2 + xy + x^2 + 1) > 0,$$

jer je $y^2 + xy + x^2 = (y + x/2)^2 + 3x^2/4 \geqslant 0$. Tako smo postojanje i jedinstvenost rješenja dokazali bez njegova izračunavanja i bez uporabe derivacija.

Zadatak 3.4.1. Neka je $f\colon [a,b] \to [a,b]$ neprekidna, gdje je $a < b$. Dokažite da postoji $c \in [a,b]$ takav da je $f(c) = c$. Mora li takva točka biti jedinstvena?

Uputa: Razmotrite $f(x) - x$ i njegove vrijednosti u krajevima.

3.4.3. Jednoliko neprekidne funkcije

U definiciji neprekidnosti veličina δ može ovisiti i o ε i o točki c. Katkad isti δ možemo upotrijebiti u svim točkama domene.

Definicija 3.4.7. *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ je* jednoliko neprekidna *na D ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D) \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Jednolika neprekidnost povlači neprekidnost u svakoj točki: u definiciji samo fiksiramo $y = c$. Obrat općenito ne vrijedi.

Teorem 3.4.8 (Heine–Cantorov teorem)**.** *Svaka neprekidna realna funkcija na segmentu jednoliko je neprekidna.*

Dokaz. Kad neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ne bi bila jednoliko neprekidna, postojalo bi $\varepsilon_0 > 0$ tako da za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo odabrati $x_n, y_n \in [a,b]$ s

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Postoji podniz $x_{n_k} \to c \in [a,b]$. Iz

$$|y_{n_k} - c| \leqslant |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| \longrightarrow 0$$

slijedi i $y_{n_k} \to c$. Neprekidnost daje $f(x_{n_k}) \to f(c)$ i $f(y_{n_k}) \to f(c)$, pa $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$. To proturječi donjoj međi ε_0. □

Zadatak 3.4.2. Dokažite da $f(x) = 1/x$ nije jednoliko neprekidna na $\langle 0, 1]$, iako je ondje neprekidna. Zatim dokažite da je jednoliko neprekidna na $[1, +\infty\rangle$.

Uputa: Za prvu tvrdnju uzmite $x_n = 1/n$ i $y_n = 1/(n+1)$, a za drugu procijenite $|1/x - 1/y|$ pomoću $|x - y|$.

3.5. Monotonost i inverzne funkcije

Monotonost uspoređuje vrijednosti funkcije u bilo kojim dvjema uređenim točkama, a neprekidnost uspoređuje vrijednosti u bliskim točkama. Ta svojstva nisu isto: monotona funkcija može imati skok, a neprekidna funkcija može mnogo puta mijenjati smjer rasta. Na intervalu su, međutim, povezana s oblikom slike funkcije.

U ovom odjeljku *interval* znači neprazan skup $I \subseteq \mathbb{R}$ sa svojstvom

$$x, y \in I, \quad x < z < y \quad \Longrightarrow \quad z \in I.$$

Interval može biti otvoren, zatvoren ili poluotvoren, omeđen ili neomeđen; dopuštamo i jednočlan skup. U svim tim slučajevima neprekidnost shvaćamo u odnosu na I. Kao i prije, riječ *rastuća* dopušta jednakost vrijednosti: $x < y$ povlači $f(x) \leqslant f(y)$. Za strogu nejednakost kažemo *strogo rastuća*. Analogno razlikujemo padajuće i strogo padajuće funkcije.

3.5.1. Jednostrani limesi monotone funkcije

Teorem 3.5.1. *Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ rastuća i neka je $c \in I$. Ako I sadrži točke manje od c, postoji konačan limes slijeva i*

$$f(c-) := \lim_{x \to c-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < c\} \leqslant f(c).$$

Ako I sadrži točke veće od c, postoji konačan limes zdesna i

$$f(c+) := \lim_{x \to c+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > c\} \geqslant f(c).$$

Za padajuću funkciju vrijede obratne nejednakosti: lijevi je limes odgovarajući infimum, a desni supremum.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $x \in I$ s $x < c$. Skup $\{f(x) : x \in I,\ x < c\}$ neprazan je i omeđen odozgo brojem $f(c)$. Njegov supremum L zato je realan i $L \leqslant f(c)$. Za $\varepsilon > 0$ postoji $u \in I$, $u < c$, takav da je $L - \varepsilon < f(u) \leqslant L$. Ako je $x \in I$ i $0 < c - x < c - u$, tada je $u < x < c$, pa monotonost daje

$$L - \varepsilon < f(u) \leqslant f(x) \leqslant L.$$

Dakle, $|f(x) - L| < \varepsilon$ uz $\delta = c - u$. To dokazuje tvrdnju o limesu slijeva.

Ako postoje točke desno od c, skup njihovih vrijednosti neprazan je i omeđen odozdo brojem $f(c)$. Neka je R njegov infimum. Za $\varepsilon > 0$ odaberemo $v \in I$, $v > c$, tako da je $R \leqslant f(v) < R + \varepsilon$. Za $c < x < v$ monotonost daje

$$R \leqslant f(x) \leqslant f(v) < R + \varepsilon,$$

što uz $\delta = v - c$ dokazuje desni limes. Za padajuću funkciju primijenimo dokazano na $-f$. □

Svojstvo intervala jamči da, čim postoje točke s jedne strane od c, postoje i takve točke proizvoljno blizu c. Zato su jednostrani limesi u teoremu smisleno definirani. U unutarnjoj točki rastuće funkcije posebno vrijedi

$$f(c-) \leqslant f(c) \leqslant f(c+). \tag{3.6}$$

Na rubu izvan domene limes monotone funkcije može biti beskonačan. Primjerice, $1/x$ pada na $\langle 0, 1\rangle$, a za $x \to 0+$ teži $+\infty$. Konačnost u prethodnom teoremu osigurava upravo vrijednost $f(c)$ u točki $c \in I$, zajedno s postojanjem točaka na promatranoj strani.

Propozicija 3.5.2. *Neka je I interval s barem dvije točke i neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ rastuća. Ako je $b = \sup I \in \mathbb{R}$ i $b \notin I$, onda*

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \sup f(I),$$

pri čemu je limes $+\infty$ ako slika nije omeđena odozgo. Ako je $a = \inf I \in \mathbb{R}$ i $a \notin I$, onda

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \inf f(I),$$

pri čemu je limes $-\infty$ ako slika nije omeđena odozdo. Ako je interval neomeđen u odgovarajućem smjeru, iste tvrdnje vrijede uz zapis $x \to +\infty$ odnosno $x \to -\infty$. Za padajuću funkciju uloge supremuma i infimuma zamjenjuju se. Posebno, omeđena monotona funkcija ima konačan jednostrani limes na svakom konačnom isključenom kraju intervala.

Dokaz. Pretpostavimo da je $b \in \mathbb{R}$ isključen desni kraj intervala. Tada je b gomilište domene slijeva: za svaki $\delta > 0$ svojstvo supremuma daje točku $x \in I$ s $b - \delta < x < b$. Ako je slika omeđena odozgo, stavimo $L = \sup f(I)$. Za $\varepsilon > 0$ odaberimo $u \in I$ s $L - \varepsilon < f(u) \leqslant L$. Budući da je $u < b$, broj $\delta = b - u$ pozitivan je. Za $x \in I$ i $0 < b - x < \delta$ vrijedi $u < x < b$, pa je

$$L - \varepsilon < f(u) \leqslant f(x) \leqslant L.$$

To dokazuje konačan limes. Ako slika nije omeđena odozgo, za $M > 0$ odaberemo $u \in I$ s $f(u) > M$. Isti izbor $\delta = b - u$ daje $f(x) \geqslant f(u) > M$.

Za isključeni lijevi kraj i sliku omeđenu odozdo stavimo $L = \inf f(I)$. Odaberemo $v \in I$ s $L \leqslant f(v) < L + \varepsilon$ i uzmemo $\delta = v - a > 0$. Za $x \in I$ s $a < x < a + \delta = v$ imamo $L \leqslant f(x) \leqslant f(v) < L + \varepsilon$. Ako slika nije omeđena odozdo, odaberemo v s $f(v) < -M$ i isti postupak daje $f(x) \leqslant f(v) < -M$.

Za beskonačne krajeve umjesto udaljenosti do kraja upotrijebimo pragove $x > u$ odnosno $x < v$; ostale su nejednakosti iste. Padajući slučaj slijedi primjenom dokazanoga na $-f$. □

Pretpostavka da je kraj isključen važna je za navedene formule pomoću cijele slike $f(I)$. Ako kraj pripada domeni, vrijednost u njemu može biti odvojena skokom od jednostranoga limesa. Tada koristimo formule iz teorema 3.5.1, u kojima je sam kraj izostavljen iz skupa čiji supremum ili infimum uzimamo.

3.5.2. Slika intervala i neprekidnost

Propozicija 3.5.3. *Ako je $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna na intervalu, tada je $f(I)$ interval.*

Dokaz. Neka su $u < v$ u $f(I)$. Postoje $x, y \in I$ s $f(x) = u$, $f(y) = v$. Segment s krajevima x, y sadržan je u I. Prema teoremu 3.4.4, svaki broj između u i v poprima se na tom segmentu, pa pripada $f(I)$. To je upravo svojstvo intervala. □

Teorem 3.5.4. *Monotona funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ na intervalu neprekidna je ako i samo ako je njezina slika $f(I)$ interval.*

Dokaz. Jedan smjer daje prethodna propozicija, bez pretpostavke monotonosti. Za obrat neka je f rastuća i neka je $f(I)$ interval. Fiksirajmo $c \in I$.

Ako postoje točke lijevo od c, prema teoremu 3.5.1 postoji $L = f(c-) \leqslant f(c)$. Kad bi bilo $L < f(c)$, odabrali bismo t s $L < t < f(c)$. Za bilo koji $u \in I$ s $u < c$ imamo $f(u) \leqslant L < t < f(c)$. Svojstvo intervala $f(I)$ tada bi dalo $x \in I$ s $f(x) = t$. To je nemoguće: ako je $x < c$, vrijedi $f(x) \leqslant L < t$, a ako je $x \geqslant c$, vrijedi $f(x) \geqslant f(c) > t$. Zato je $f(c-) = f(c)$.

Ako postoje točke desno od c, analogno je $R = f(c+) \geqslant f(c)$. Kad bi bilo $f(c) < R$, broj t između njih morao bi pripadati $f(I)$ jer leži između $f(c)$ i $f(v)$ za bilo koji $v > c$ u I. No za $x \leqslant c$ vrijedi $f(x) \leqslant f(c) < t$, a za $x > c$ vrijedi $f(x) \geqslant R > t$. Ponovno proturječje. Dakle, $f(c+) = f(c)$.

U unutarnjoj točki dobili smo neprekidnost s obiju strana. Na uključenom kraju dovoljan je limes s jedine raspoložive strane. Ako je I jednočlan, tvrdnja je neposredna. Zato je f neprekidna na cijelom I. Padajući slučaj slijedi primjenom na $-f$, čija je slika također interval. □

Slika neprekidne funkcije na otvorenom intervalu ne mora biti otvoren interval: funkcija $x \mapsto x^2$ šalje $\mathbb{R}$ na $[0, +\infty\rangle$. Također, bez monotonosti svojstvo da je slika interval ne jamči neprekidnost. Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zamjenjuje vrijednosti u 0 i 1, a drugdje je jednaka x, ima sliku $\mathbb{R}$, ali nije neprekidna u 0 ni u 1.

3.5.3. Neprekidnost inverzne funkcije

Lema 3.5.5. *Neprekidna funkcija na intervalu injektivna je ako i samo ako je strogo monotona.*

Dokaz. Strogo monotona funkcija injektivna je već po definiciji. Dokažimo obrat. Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna i injektivna.

Za svake tri točke $x_1 < x_2 < x_3$ iz I broj $f(x_2)$ mora biti strogo između $f(x_1)$ i $f(x_3)$. Doista, sve su tri vrijednosti različite zbog injektivnosti. Kad bi bilo $f(x_2) > \max\{f(x_1), f(x_3)\}$, odabrali bismo

$$\max\{f(x_1), f(x_3)\} < C < f(x_2).$$

Teorem o međuvrijednostima na $[x_1, x_2]$ i $[x_2, x_3]$ dao bi dvije različite točke, jednu u svakom od otvorenih intervala, u kojima je vrijednost jednaka C. To proturječi injektivnosti. Slučaj $f(x_2) < \min\{f(x_1), f(x_3)\}$ isključujemo jednako, ili primjenom upravo provedenoga argumenta na $-f$.

Preostaje opravdati da smjer strogih nejednakosti ne ovisi o izboru točaka. Ako I ima barem dvije točke, fiksirajmo $a < b$ u I. Pretpostavimo najprije $f(a) < f(b)$ i uzmimo proizvoljne $x < y$ u I. Različite članove konačnoga skupa $\{a, b, x, y\}$ poredajmo kao $z_1 < \cdots < z_r$. Za svake tri uzastopne točke dokazano svojstvo kaže da su razlike

$$f(z_{j+1}) - f(z_j), \qquad f(z_{j+2}) - f(z_{j+1})$$

istoga predznaka. Sve su uzastopne razlike stoga istoga predznaka. Budući da je $f(b) - f(a) > 0$ zbroj nekih uzastopnih razlika, taj predznak mora biti pozitivan. Zato je i $f(x) < f(y)$. Za $r = 2$ isto slijedi neposredno iz izbora a, b. Dakle, f je strogo rastuća. Ako je $f(a) > f(b)$, primjena argumenta na $-f$ daje strogi pad od f. Na jednočlanom intervalu uvjet stroge monotonosti vrijedi prazno. □

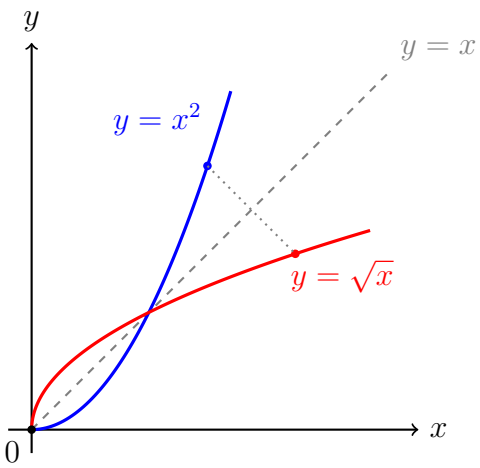
Teorem 3.5.6 (Teorem o neprekidnosti inverzne funkcije)**.** *Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna i strogo monotona na intervalu. Tada je $J = f(I)$ interval i*

$$f^{-1}\colon J \to I$$

neprekidna je i strogo monotona u istom smjeru kao f. Isti zaključak vrijedi ako umjesto stroge monotonosti pretpostavimo injektivnost funkcije f.

Dokaz. Slika J je interval prema propoziciji 3.5.3. Stroga monotonost jamči injektivnost, pa postoji inverz na slici. Ako f strogo raste i $u < v$ pripadaju J, za $x = f^{-1}(u)$ i $y = f^{-1}(v)$ ne može vrijediti $x \geqslant y$, jer bi tada bilo $u = f(x) \geqslant f(y) = v$. Dakle, f^{-1} strogo raste. Za padajuću funkciju analogno dobivamo strogi pad inverza.

Sada je f^{-1} monotona funkcija na intervalu J, a njezina je slika interval I. Prema teoremu 3.5.4 ona je neprekidna. Dokaz uključuje rubne točke koje pripadaju I ili J; ne zahtijeva da su ti intervali otvoreni. Posljednja tvrdnja slijedi iz prethodne leme. □



Graf inverzne funkcije dobivamo zamjenom koordinata, odnosno zrcaljenjem oko pravca $y = x$. Na slici se obje funkcije promatraju na $[0, +\infty\rangle$. Neprekidnost korijena u 0 ne zahtijeva definiranje korijena negativnoga broja: riječ je o neprekidnosti zdesna.

Ako je I otvoren interval i f strogo monotona i neprekidna, tada je i $f(I)$ otvoren interval. Naime, za svaki $x \in I$ postoje $u, v \in I$ s $u < x < v$. Vrijednost $f(x)$ leži strogo između $f(u)$ i $f(v)$, a svi brojevi između njih pripadaju slici. Stoga je svaka točka slike njezina unutarnja točka. Za intervale s uključenim krajevima taj zaključak ne treba vrijediti.

3.5.4. Korijeni, logaritmi, arcus i area funkcije

Sada možemo dovršiti dokaz neprekidnosti osnovnih elementarnih funkcija. Njihove domene, slike i svojstva monotonosti uvedeni su u poglavlju o funkcijama; postojanje korijena i realnih potencija opravdano je potpunošću realnih brojeva. Ovdje te činjenice povezujemo s dokazanim teoremom o inverzu.

Korolar 3.5.7. *Za $n \in \mathbb{N}$ funkcija $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ neprekidna je na $[0, +\infty\rangle$; ako je n neparan, neprekidna je na $\mathbb{R}$. Za $a > 0$, $a \neq 1$, funkcija $\log_a$ neprekidna je na $\langle 0, +\infty\rangle$. Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcija $x \mapsto x^\alpha$ neprekidna je na $\langle 0, +\infty\rangle$.*

Dokaz. Funkcija $x \mapsto x^n$ neprekidna je i strogo raste na $[0, +\infty\rangle$. Njezina je slika taj isti interval, što slijedi iz ranije dokazanoga postojanja korijena. Surjektivnost možemo dokazati i teoremom o međuvrijednostima: za $C > 0$ odaberemo $b > \max\{1, C\}$, pa je $0 < C < b^n$. Na $[0, b]$ potencija stoga poprima vrijednost C. Za neparan n strogi rast i surjektivnost vrijede i na $\mathbb{R}$, što na negativnom dijelu slijedi iz neparnosti. Teorem 3.5.6 daje neprekidnost korijena.

Funkcija $x \mapsto a^x$ neprekidna je prema teoremu 3.3.18, strogo monotona i ima sliku $\langle 0, +\infty\rangle$. Njezin je inverz $\log_a$ zato neprekidan. Posebno je neprekidan $\ln = \log_e$. Napokon, iz identiteta $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ za $x > 0$ i neprekidnosti kompozicije slijedi posljednja tvrdnja. □

Za $\alpha > 0$ funkciju x^α možemo neprekidno proširiti na $[0, +\infty\rangle$ vrijednošću $0^\alpha = 0$. Doista, za $\varepsilon > 0$ odaberimo $\delta = \varepsilon^{1/\alpha} > 0$. Iz $0 < x < \delta$ i strogog rasta pozitivne potencije slijedi $0 < x^\alpha < \varepsilon$. Za $\alpha < 0$ konačno neprekidno proširenje u 0 ne postoji. Za $\alpha = 0$ funkcija na pozitivnoj poluosi konstantno je 1 i ima neprekidno proširenje vrijednošću 1; to je izjava o proširenju funkcije, a ne opća definicija izraza 0^0.

Korolar 3.5.8. *Arcus i area funkcije neprekidne su na svojim prirodnim domenama:*

funkcija	*domena*	*funkcija*	*domena*
arcsin	$[-1, 1]$	arsh	$\mathbb{R}$
arccos	$[-1, 1]$	arch	$[1, +\infty\rangle$
arctg	$\mathbb{R}$	arth	$\langle -1, 1\rangle$
arcctg	$\mathbb{R}$	arcth	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

Dokaz. Restrikcije sinusa na $[-\pi/2, \pi/2]$ i kosinusa na $[0, \pi]$ neprekidne su i strogo monotone. Njihove su slike $[-1, 1]$: vrijednosti u krajevima jesu -1 i 1, a sve vrijednosti između njih dobivamo teoremom o međuvrijednostima. Zato teorem o inverzu daje neprekidnost arcsin i arccos, uključujući krajeve -1 i 1.

Tangens na $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ i kotangens na $\langle 0, \pi\rangle$ neprekidne su strogo monotone bijekcije na $\mathbb{R}$. Prema istom teoremu njihovi su inverzi arctg i arcctg neprekidni na $\mathbb{R}$.

Hiperbolne su funkcije neprekidne kao zbrojevi, razlike i kvocijenti eksponencijalnih funkcija na domenama na kojima nazivnici nisu nula. Primijenimo teorem o inverzu na bijekcije

$$\operatorname{sh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch}|_{[0,+\infty\rangle}\colon [0, +\infty\rangle \to [1, +\infty\rangle,$$
$$\operatorname{th}\colon \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle.$$

One su strogo rastuće, pa dobivamo neprekidnost prvih triju area funkcija. U slučaju arch to uključuje i točku 1.

Domena funkcije cth nije interval, pa razmatramo njezine dvije grane odvojeno: restrikcije na $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty\rangle$ neprekidne su strogo padajuće bijekcije na $\langle -\infty, -1\rangle$, odnosno $\langle 1, +\infty\rangle$. Njihovi su inverzi neprekidni na tim intervalima. Svaka točka domene arcth ima okolinu koja je sadržana u jednoj od tih dviju grana. Zato je arcth neprekidna na cijeloj svojoj domeni. □

Korolar 3.5.9. *Sve elementarne funkcije neprekidne su na svojim prirodnim domenama.*

Dokaz. Dokazali smo neprekidnost osnovnih funkcija od kojih se elementarne funkcije grade. Konačno mnogo zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja gdje nazivnik nije nula te komponiranja čuva neprekidnost. Svaki put domenu ograničavamo na točke u kojima je odgovarajući izraz definiran. Tvrdnja zato slijedi uzastopnom primjenom pravila o neprekidnosti aritmetičkih operacija i teorema 3.3.12. □

Zadatak 3.5.1. Dokažite da neprekidna injekcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, gdje je $a < b$, ima sliku

$$[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}].$$

Objasnite zašto samo injektivnost bez neprekidnosti nije dovoljna. Navedite i neprekidnu injekciju na domeni koja nije interval, a koja nije strogo monotona na cijeloj domeni.

3.5.5. Prekidi monotone funkcije

Monotona funkcija ima mnogo pravilnije prekide od proizvoljne funkcije. U unutarnjoj točki ne može oscilirati bez jednostranoga limesa, a ne može imati ni uklonjiv prekid.

Teorem 3.5.10. *Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ monotona funkcija na intervalu. Svaki njezin prekid u unutarnjoj točki jest skok: oba jednostrana limesa konačna su i međusobno različita. Skup svih točaka prekida najviše je prebrojiv.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati tvrdnju za rastuću funkciju, jer prelazak s f na $-f$ ne mijenja točke neprekidnosti. U svakoj unutarnjoj točki c postoje konačni jednostrani limesi koji zadovoljavaju (3.6). Ako su jednaki, između njih je i $f(c)$, pa je funkcija neprekidna. Zato u točki prekida nužno vrijedi

$$f(c-) < f(c+).$$

Neka je D skup unutarnjih točaka prekida. Za $c \in D$ definirajmo neprazan otvoren interval

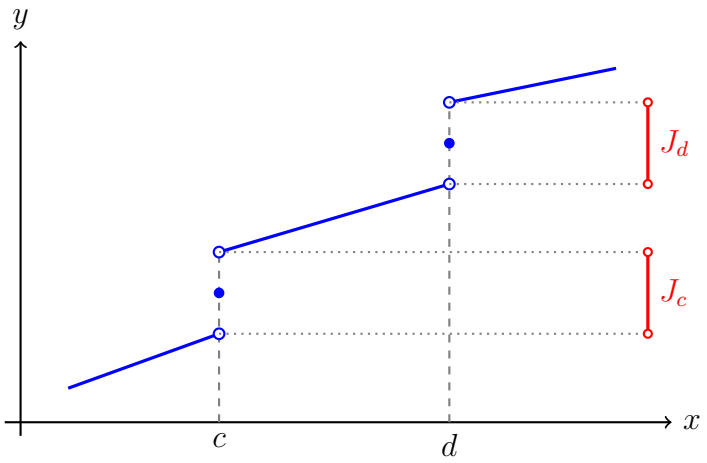
$$J_c = \langle f(c-), f(c+) \rangle.$$

Ti su intervali međusobno disjunktni. Doista, ako je $c < d$ i $z = (c+d)/2$, onda je $z \in I$ i

$$f(c+) = \inf_{x \in I,\, x > c} f(x) \leqslant f(z) \leqslant \sup_{x \in I,\, x < d} f(x) = f(d-).$$

Dakle, desni kraj od J_c nije desno od lijevog kraja od J_d.

Fiksirajmo jedno nabrajanje racionalnih brojeva $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ bez ponavljanja. Svaki J_c sadrži racionalan broj zbog gustoće $\mathbb{Q}$. Pridružimo c najmanji indeks $k(c) \in \mathbb{N}$ takav da je $q_{k(c)} \in J_c$. Takav indeks postoji i jednoznačno je određen. Zbog disjunktnosti intervala različitim točkama odgovaraju različiti indeksi. Preslikavanje $c \mapsto k(c)$ zato je injekcija iz D u $\mathbb{N}$. Prema tome, D je najviše prebrojiv. Interval ima najviše dvije rubne točke koje mu pripadaju. Dodavanjem eventualnih prekida u tim točkama skup ostaje najviše prebrojiv. Za jednočlan interval prekida nema. □



Crvene dužine označavaju otvorene intervale između jednostranih limesa, a ne dijelove grafa funkcije. Kako je $c < d$, interval J_c leži ispod J_d. Vrijednost funkcije u samoj točki skoka može biti bilo gdje između jednostranih limesa, uključujući njihove krajeve. Prebrojivost skupa prekida ne znači da je on konačan niti da su njegove točke međusobno udaljene nekim zajedničkim pozitivnim razmakom.

Zadatak 3.5.2. Za rastuću funkciju $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i unutarnju točku c stavite $s(c) = f(c+) - f(c-) \geqslant 0$. Dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji samo konačno mnogo unutarnjih točaka s $s(c) \geqslant \varepsilon$. Pomoću toga ponovno dokažite da je skup prekida najviše prebrojiv.

Uputa: Za konačan izbor $c_1 < \cdots < c_r$ pokažite $\sum_{j=1}^{r} s(c_j) \leqslant f(b) - f(a)$. Potom za ε uzimajte $1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

3.6. Otvoreni i zatvoreni skupovi

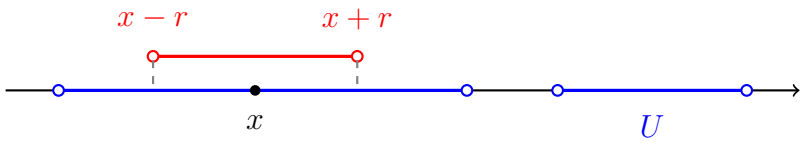
U definicijama limesa i neprekidnosti važnu ulogu imaju okoline oblika $\langle a-\delta, a+\delta\rangle$. Pritom smo promatrali samo one njihove točke koje pripadaju domeni. Domena ne mora sadržavati cijeli interval oko promatrane točke; neprekidnost ima smisla i na rubu domene, pa i u izoliranoj točki. U ovom odjeljku opisujemo skupove pomoću kojih se te lokalne činjenice mogu izraziti bez izričitog spominjanja brojeva ε i δ.

Definicija 3.6.1. *Skup $U \subseteq \mathbb{R}$ je* otvoren u $\mathbb{R}$ *ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je*

$$\langle x - r, x + r\rangle \subseteq U.$$

Skup $F \subseteq \mathbb{R}$ je zatvoren u $\mathbb{R}$ *ako je njegov komplement $\mathbb{R} \setminus F$ otvoren u $\mathbb{R}$.*

Polumjer r smije ovisiti o točki x. Primjerice, za $x \in \langle a, b\rangle$ možemo uzeti $r = \min\{x - a, b - x\} > 0$, pa je svaki otvoreni interval otvoren skup. Skup $\emptyset$ također je otvoren: nema točke za koju bi trebalo provjeriti uvjet iz definicije. Skup $\mathbb{R}$ je otvoren jer za svaku njegovu točku možemo uzeti, primjerice, $r = 1$. Njihovi su komplementi $\mathbb{R}$ i $\emptyset$, pa su oba skupa i zatvorena.



Otvoren skup može biti sastavljen od više odvojenih dijelova. Uvjet iz definicije provjerava se zasebno oko svake njegove točke. Sljedeća tvrdnja povezuje tu definiciju s opisom pomoću intervala.

Propozicija 3.6.2. *Skup $U \subseteq \mathbb{R}$ otvoren je ako i samo ako je unija neke obitelji omeđenih otvorenih intervala. Dopuštena je i prazna obitelj, čija je unija $\emptyset$.*

Dokaz. Ako je U otvoren, za svaki $x \in U$ postoji otvoreni interval koji sadrži x i sadržan je u U. Zato je U unija svih omeđenih otvorenih intervala sadržanih u U: ta unija sadrži svaku točku od U, a ne sadrži nijednu točku izvan U.

Obratno, neka je U unija omeđenih otvorenih intervala i neka je $x \in U$. Tada x pripada nekom intervalu $\langle a, b\rangle$ iz te obitelji. Za $r = \min\{x - a, b - x\} > 0$ imamo

$$\langle x - r, x + r\rangle \subseteq \langle a, b\rangle \subseteq U.$$

Time je provjeren uvjet otvorenosti. Za praznu uniju nema točaka koje treba razmatrati. □

Primjer 3.6.3. Za svaki $a \in \mathbb{R}$ polupravci $\langle -\infty, a\rangle$ i $\langle a, +\infty\rangle$ otvoreni su. Za točku x prvoga skupa uzmemo $r = a - x$, a za točku drugoga $r = x - a$. Zato su polupravci $[a, +\infty\rangle$ i $\langle -\infty, a]$ zatvoreni.

Ako je $a \leqslant b$, segment $[a, b]$ zatvoren je jer je

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = \langle -\infty, a\rangle \cup \langle b, +\infty\rangle$$

otvoren prema propoziciji 3.6.2. Za $a = b$ dobivamo da je svaki jednočlani skup $\{a\}$ zatvoren.

Riječi *otvoren* i *zatvoren* ne označavaju međusobno isključive mogućnosti. Skupovi $\emptyset$ i $\mathbb{R}$ imaju oba svojstva, a skup $[0, 1\rangle$ nema nijedno. Nije otvoren jer nijedan interval oko 0 nije sadržan u njemu; nije ni zatvoren jer njegov komplement sadrži 1, ali ne sadrži nijedan cijeli interval oko 1.

Teorem 3.6.4. *Za otvorene podskupove od* $\mathbb{R}$ *vrijedi:*

1. $\emptyset$ *i* $\mathbb{R}$ *otvoreni su;*
2. *unija proizvoljne obitelji otvorenih skupova otvorena je;*
3. *presjek konačne obitelji otvorenih skupova otvoren je.*

Pritom presjek prazne obitelji podskupova od $\mathbb{R}$ *dogovorno iznosi* $\mathbb{R}$.

Dokaz. Prvu smo tvrdnju već provjerili. Neka je $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, gdje je svaki U_λ otvoren, i neka je $x \in U$. Postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da je $x \in U_{\lambda_0}$, pa postoji $r > 0$ za koji je

$$\langle x - r, x + r\rangle \subseteq U_{\lambda_0} \subseteq U.$$

Prema tome, U je otvoren. Ako je $\Lambda = \emptyset$, dobivamo prazan skup, koji je također otvoren.

Neka su sada $U_1, \ldots, U_m$ otvoreni, gdje je $m \geqslant 1$, i neka je $x \in \bigcap_{j=1}^m U_j$. Za svaki j postoji $r_j > 0$ takav da je $\langle x - r_j, x + r_j\rangle \subseteq U_j$. Broj $r = \min\{r_1, \ldots, r_m\}$ strogo je pozitivan, pa je

$$\langle x - r, x + r\rangle \subseteq \bigcap_{j=1}^m U_j.$$

To dokazuje otvorenost presjeka. Za $m = 0$ presjek je $\mathbb{R}$, što smo obradili prvom tvrdnjom. □

Uvjet konačnosti kod presjeka ne smijemo izostaviti. Naime,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle = \{0\}.$$

Broj 0 pripada svakom intervalu. Ako je $x \neq 0$, prema Arhimedovu svojstvu postoji n takav da je $1/n < |x|$, pa x ne pripada n-tom intervalu. Time je jednakost dokazana. Skup $\{0\}$ nije otvoren jer svaki interval oko 0 sadrži i brojeve različite od 0.

Korolar 3.6.5. *Presjek proizvoljne obitelji zatvorenih skupova zatvoren je, a unija konačne obitelji zatvorenih skupova zatvorena je.*

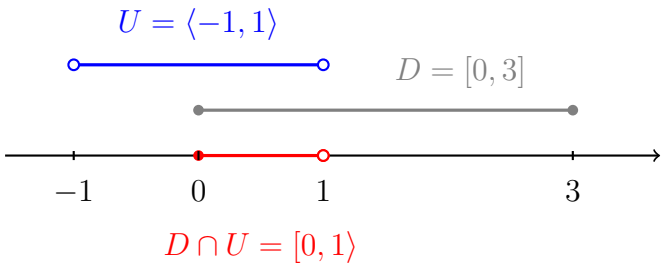
Dokaz. Prema De Morganovim pravilima, komplement presjeka unija je komplemenata, a komplement unije presjek je komplemenata. Tvrdnje zato slijede iz teorema 3.6.4. Za prazne obitelji dobivamo zatvorene skupove $\mathbb{R}$ odnosno $\emptyset$. □

3.6.1. Relativna otvorenost i neprekidnost

Ako je domena funkcije $D \subseteq \mathbb{R}$, pri ispitivanju neprekidnosti koristimo skupove $D \cap \langle a - \delta, a + \delta\rangle$. Oni ne moraju biti otvoreni u $\mathbb{R}$, ali su otvoreni u smislu sljedeće definicije.

Definicija 3.6.6. *Skup $V \subseteq D$ je* relativno otvoren u D *ako postoji otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $V = D \cap U$. Skup $H \subseteq D$ je* relativno zatvoren u D *ako je $D \setminus H$ relativno otvoren u D.*

Primjerice, skup $[0, 1\rangle$ relativno je otvoren u $D = [0, 3]$, jer je $[0, 1\rangle = D \cap \langle -1, 1\rangle$, iako nije otvoren u $\mathbb{R}$.



Lema 3.6.7. *Skup $V \subseteq D$ relativno je otvoren u D ako i samo ako za svaki $a \in V$ postoji $r > 0$ takav da je*

$$D \cap \langle a - r, a + r\rangle \subseteq V.$$

Dokaz. Ako je $V = D \cap U$ za otvoren U, za $a \in V \subseteq U$ odaberemo $r > 0$ tako da je $\langle a - r, a + r\rangle \subseteq U$. Presijecanjem s D dobivamo traženi uvjet.

Obratno, neka uvjet vrijedi. Neka je U unija svih otvorenih intervala I za koje je $D \cap I \subseteq V$. Skup U otvoren je i vrijedi $D \cap U \subseteq V$. Za svaki $a \in V$ pretpostavka daje jedan takav interval koji sadrži a, pa vrijedi i $V \subseteq D \cap U$. Dakle, $V = D \cap U$. □

Teorem 3.6.8. *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ neprekidna je na D ako i samo ako je za svaki otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}$ praslika*

$$f^{-1}(U) = \{x \in D : f(x) \in U\}$$

relativno otvorena u D.

Dokaz. Neka je f neprekidna na D, neka je U otvoren i neka je $a \in f^{-1}(U)$. Budući da je $f(a) \in U$, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\langle f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon\rangle \subseteq U$. Neprekidnost u a daje $\delta > 0$ za koji

$$x \in D, \quad |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Zato je $D \cap \langle a - \delta, a + \delta\rangle \subseteq f^{-1}(U)$. Lema 3.6.7 dokazuje relativnu otvorenost.

Obratno, neka su praslike svih otvorenih skupova relativno otvorene. Za $a \in D$ i $\varepsilon > 0$ uzmimo $U = \langle f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon\rangle$. Skup $f^{-1}(U)$ relativno je otvoren i sadrži a. Prema istoj lemi postoji $\delta > 0$ takav da je $D \cap \langle a - \delta, a + \delta\rangle \subseteq f^{-1}(U)$. To je upravo uvjet neprekidnosti funkcije f u a. □

Za praslike vrijedi $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus F) = D \setminus f^{-1}(F)$. Stoga teorem ostaje točan ako oba izraza *otvoren* zamijenimo izrazom *zatvoren*, uz zadržavanje riječi *relativno*. Ako je D otvoren u $\mathbb{R}$, njegovi relativno otvoreni podskupovi otvoreni su i u $\mathbb{R}$, jer su presjeci dvaju otvorenih skupova. Za opću domenu riječ *relativno* ne smijemo izostaviti.

Teorem 3.6.9. *Skup $F \subseteq \mathbb{R}$ zatvoren je ako i samo ako limes svakoga konvergentnog realnog niza čiji su svi članovi u F također pripada F.*

Dokaz. Neka je F zatvoren, $x_n \in F$ za svaki n i $x_n \to x$. Kad bi bilo $x \notin F$, otvorenost komplementa dala bi $r > 0$ takav da je $\langle x - r, x + r\rangle \subseteq \mathbb{R} \setminus F$. Konvergencija daje $x_n \in \langle x - r, x + r\rangle$ za sve dovoljno velike n, protivno pretpostavci $x_n \in F$. Zato je $x \in F$.

Obratno, pretpostavimo svojstvo nizova i neka je $x \notin F$. Ako nijedan interval oko x nije sadržan u $\mathbb{R} \setminus F$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo odabrati

$$x_n \in F \cap \left\langle x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right\rangle.$$

Iz $|x_n - x| < 1/n$ slijedi $x_n \to x$. Pretpostavljeno svojstvo tada daje $x \in F$, što je proturječje. Dakle, svaka točka komplementa ima interval sadržan u komplementu, pa je komplement otvoren, a F zatvoren. □

3.6.2. Kratak pogled na topologije

Tri svojstva iz teorema 3.6.4 možemo uzeti kao polazište i na skupovima na kojima nije zadana udaljenost.

Definicija 3.6.10. Topologija *na skupu X obitelj je $\mathcal{T}$ njegovih podskupova takva da vrijedi:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

2. *unija svake obitelji članova od* $\mathcal{T}$ *pripada* $\mathcal{T}$*;*

3. *presjek svake konačne obitelji članova od* $\mathcal{T}$ *pripada* $\mathcal{T}$*.*

Par $(X, \mathcal{T})$ *zovemo* topološkim prostorom*, a članove od* $\mathcal{T}$ *njegovim* otvorenim skupovima*. Njihove komplemente u* X *nazivamo* zatvorenim skupovima*.*

Dosad promatrani otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$ čine *standardnu* ili *euklidsku topologiju* $\mathcal{T}_E$. Na istom skupu možemo zadati i druge topologije. *Indiskretna topologija* jest $\{\emptyset, X\}$, a *diskretna topologija* sastoji se od svih podskupova od X. Obje zadovoljavaju aksiome: u prvom slučaju operacije daju samo $\emptyset$ ili X, a u drugom je svaki rezultat podskup od X. Svaka topologija na X sadrži indiskretnu i sadržana je u diskretnoj.

Primjer 3.6.11. *Kofinitnu topologiju* na $\mathbb{R}$ čini obitelj

$$\mathcal{T}_0 = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus U \text{ je konačan skup}\}.$$

Provjerimo aksiome. Prazan skup uključen je izričito, a $\mathbb{R}$ pripada obitelji jer je njegov komplement prazan. Ako je unija članova od $\mathcal{T}_0$ neprazna, sadrži neki neprazan član U; njezin je komplement tada podskup konačnog skupa $\mathbb{R} \setminus U$, pa je konačan. Konačan presjek koji ima prazan faktor prazan je; inače je njegov komplement konačna unija konačnih skupova, pa je konačan. Prazan presjek jest $\mathbb{R}$. Time su provjereni svi aksiomi.

Svaki jednočlani skup zatvoren je u ovoj topologiji. Štoviše, $\mathcal{T}_0$ najmanja je topologija na $\mathbb{R}$ s tim svojstvom: u svakoj takvoj topologiji konačni su skupovi zatvoreni kao konačne unije jednočlanih, pa su njihovi komplementi otvoreni. Ti su komplementi otvoreni i u standardnoj topologiji, te je $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_E$. Inkluzija je prava: interval $\langle 0, 1\rangle$ standardno je otvoren, ali njegov komplement nije konačan.

Definicija 3.6.12. *U topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T})$ *kažemo da niz* (x_n) konvergira točki $x \in X$ *ako za svaki otvoren skup* U *koji sadrži* x *postoji* $N \in \mathbb{N}$ *takav da je* $x_n \in U$ *za svaki* $n \geqslant N$*.*

U standardnoj topologiji na $\mathbb{R}$ ova je definicija ekvivalentna ranijoj definiciji konvergencije: svaki otvoren skup koji sadrži x sadrži i interval $\langle x - r, x + r\rangle$ za neki $r > 0$, a svaki je takav interval otvoren. Za drugu topologiju pojam konvergencije može biti posve drukčiji.

Propozicija 3.6.13. *U kofinitnoj topologiji na* $\mathbb{R}$ *niz* (x_n) *konvergira točki* x *ako i samo ako se svaki broj* $y \neq x$ *pojavljuje u nizu na najviše konačno mnogo mjesta. Posebno, niz čiji su članovi međusobno različiti konvergira svakom realnom broju.*

Dokaz. Ako niz konvergira točki x i $y \neq x$, skup $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ otvoren je i sadrži x. Zato su gotovo svi članovi niza različiti od y.

Obratno, pretpostavimo navedeno svojstvo i neka je $U \in \mathcal{T}_0$ otvoren skup koji sadrži x. Njegov komplement konačan je i ne sadrži x. Svaki se broj iz toga komplementa u nizu pojavljuje na konačno mnogo mjesta, pa je i ukupan broj takvih mjesta konačan. Dakle, gotovo svi članovi pripadaju skupu U, što dokazuje konvergenciju. Ako su članovi međusobno različiti, svaki se broj pojavljuje najviše jednom, pa kriterij vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$. □

Samo postojanje beskonačno mnogo različitih vrijednosti nije dovoljno za konvergenciju prema svakom broju. Niz zadan s $x_{2n} = 0$ i $x_{2n-1} = n$ ima beskonačno mnogo različitih vrijednosti, ali u kofinitnoj topologiji ne konvergira broju 1: otvoreni skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sadrži 1, a izvan njega ostaje svaki član parnog indeksa.

U standardnoj topologiji dvije različite točke a, b imaju disjunktne otvorene okoline: dovoljno je oko svake uzeti interval polumjera $|a-b|/3$. Niz ne može od nekog indeksa biti u objema disjunktnim okolinama, što ponovno objašnjava jedinstvenost limesa. To svojstvo razdvajanja zove se *Hausdorffovo svojstvo*. Kofinitna topologija na $\mathbb{R}$ nema ga: presjek dvaju nepraznih otvorenih skupova ima konačan komplement i zato nije prazan. Bez toga svojstva limes ne mora biti jedinstven, kao što pokazuje prethodna propozicija. U ostatku skripte, ako se izričito ne kaže drukčije, na $\mathbb{R}$ uvijek koristimo standardnu topologiju.

Zadatak 3.6.1. Odredite koji su od skupova $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$, $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\mathbb{Z}$ otvoreni, a koji zatvoreni u $\mathbb{R}$. Tvrdnje o zatvorenosti opravdajte pomoću komplemenata ili nizova.

Zadatak 3.6.2. Neka je $D = [0, 1]$. Odredite koji su od skupova $[0, 1/2\rangle$, $\langle 0, 1]$, $\{0\}$ i D relativno otvoreni, a koji relativno zatvoreni u D. Zatim primjenom teorema 3.6.8 objasnite zašto iz neprekidnosti funkcije ne slijedi da su slike otvorenih skupova nužno otvorene. Razmotrite konstantnu funkciju na $\mathbb{R}$.

Zadatak 3.6.3. Dokažite da u diskretnoj topologiji niz konvergira točki x ako i samo ako su mu svi članovi od nekog indeksa nadalje jednaki x. Što vrijedi u indiskretnoj topologiji? Pomoću propozicije 3.6.13 odredite sve limese niza $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1} = n$ u kofinitnoj topologiji na $\mathbb{R}$.

Poglavlje 4

Derivacija funkcije

Neprekidnost govori da mala promjena argumenta uzrokuje malu promjenu vrijednosti funkcije. Derivacija daje dodatnu informaciju: opisuje brzinu te promjene i omogućuje da funkciju blizu zadane točke zamijenimo afinom funkcijom. Iz te lokalne informacije, pomoću teorema srednje vrijednosti, izvest ćemo zaključke o monotonosti, ekstremima i konveksnosti na čitavim intervalima.

Najprije uvodimo derivaciju i pravila njezina računanja. Sve teoreme srednje vrijednosti obradit ćemo zajedno, od Rolleova do Taylorova teorema, a zatim njihove posljedice za ponašanje funkcija. Konveksnim funkcijama posvetit ćemo zaseban odjeljak. Poglavlje završava interpolacijom i Newtonovom metodom, koje povezuju diferencijalni račun s približnim računanjem.

4.1. Derivacija i lokalna aproksimacija

4.1.1. Promjena vrijednosti, brzina i tangenta

Za dva različita argumenta c i $c+h$ omjer

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

mjeri prosječnu promjenu vrijednosti funkcije po jedinici promjene argumenta. Taj izraz zovemo *kvocijentom diferencija*. Želimo opisati njegovo ponašanje kada h teži nuli.

Primjerice, neka $s(t)$ označava položaj točke koja se giba po pravcu, izražen u odabranoj koordinati. Tada je

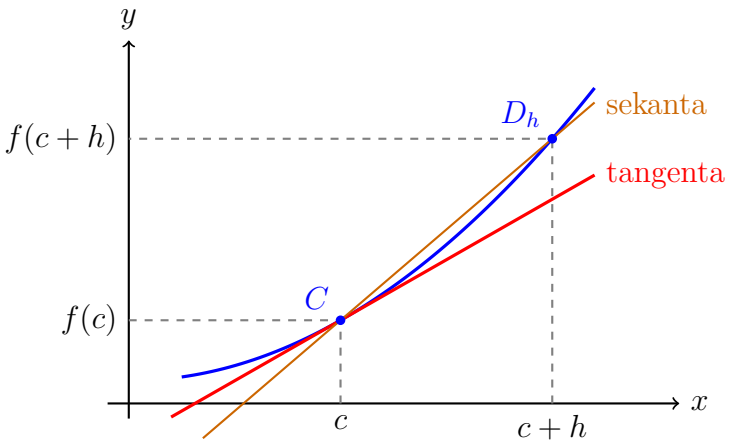
$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

prosječna brzina na vremenskom intervalu s krajevima t i $t+h$. Ako taj omjer ima konačan limes kada $h \to 0$, limes ćemo nazvati *trenutačnom brzinom* u trenutku t. Položaj ne treba poistovjetiti s ukupnim prijeđenim putom: koordinata može rasti ili padati, pa brzina može imati oba predznaka. Iznos brzine jest njezina apsolutna vrijednost.

Geometrijski, kvocijent diferencija koeficijent je smjera *sekante*, pravca kroz točke

$$C = (c, f(c)), \qquad D_h = (c+h, f(c+h)).$$

Ako koeficijenti smjera tih sekanti imaju konačan limes za $h \to 0$, dobiveni pravac kroz C nazivamo tangentom na graf u C. Treba, dakle, dokazati postojanje odgovarajućega limesa; sama slika sekanti ne jamči ga.



Treća motivacija jest lokalna aproksimacija. Među afinim funkcijama $x \mapsto A(x-c)+B$ tražimo onu koja najbolje opisuje f u blizini c. Prirodno je zahtijevati $B = f(c)$. Precizan zahtjev za koeficijent A bit će da pogreška aproksimacije bude zanemariva u usporedbi s $|x-c|$.

4.1.2. Definicija i prvi primjeri

Definicija 4.1.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$ i $c \in I$. Kažemo da je f* derivabilna *ili* diferencijabilna u c *ako postoji konačan limes*

$$f'(c) := \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Broj $f'(c)$ zovemo derivacijom *funkcije f u točki c. Ako je derivabilna u svakoj točki I, kažemo da je derivabilna na I. Tada je $f'\colon I \to \mathbb{R}$, $c \mapsto f'(c)$,* derivacija funkcije f.

Jednakost dvaju zapisa slijedi zamjenom $h = x - c$. Izraz s kvocijentom uvijek promatramo za $h \neq 0$, ali sama vrijednost $f(c)$ mora biti definirana. Koriste se i oznake $Df(c)$, $\frac{df}{dx}(c)$ ili $\frac{d}{dx} f(x)\big|_{x=c}$. Oznaka s razlomkom označava derivaciju; nije unaprijed definirana kao količnik dvaju beskonačno malih brojeva.

Za funkciju na proizvoljnom intervalu običnu derivaciju definiramo u njegovim unutarnjim točkama. Na uključenim krajevima koristit ćemo jednostrane derivacije. Time razlikujemo pojam obične derivacije od neprekidnosti, koju smo mogli definirati relativno svakoj domeni.

Primjer 4.1.2. Za konstantnu funkciju $f(x) = A$ kvocijent diferencija jednak je nuli, pa je $f'(c) = 0$. Za identitetu $f(x) = x$ jednak je 1, pa je $f'(c) = 1$. Općenitije, za $f(x) = Ax + B$ imamo

$$\frac{A(c+h) + B - (Ac + B)}{h} = A,$$

stoga je $f'(c) = A$ u svakoj točki.

Primjer 4.1.3. Za $f(x) = x^2$ vrijedi

$$\frac{(c+h)^2 - c^2}{h} = 2c + h \longrightarrow 2c,$$

pa je $f'(c) = 2c$ za svaki $c \in \mathbb{R}$. Tangenta na parabolu u (c, c^2) zato ima jednadžbu $y = c^2 + 2c(x - c)$.

Primjer 4.1.4. Za $f(x) = 1/x$ i $c \neq 0$, uz dovoljno malen $h \neq 0$, imamo

$$\frac{1/(c+h) - 1/c}{h} = -\frac{1}{c(c+h)} \longrightarrow -\frac{1}{c^2}.$$

Dovoljno je uzeti $|h| < |c|/2$, čime je $c + h \neq 0$. Dakle, $(1/x)' = -1/x^2$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definicija 4.1.5. *Ako je f definirana u c i u nekom intervalu desno od c, njezina* desna derivacija *u c jest konačan limes*

$$f'_+(c) := \lim_{h \to 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

ako postoji. Analogno, uz argumente lijevo od c definiramo lijevu derivaciju

$$f'_-(c) := \lim_{h \to 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Ako je c unutarnja točka domene, derivacija postoji ako i samo ako postoje obje konačne jednostrane derivacije i jednake su. To je teorem o jednostranim limesima primijenjen na kvocijent diferencija. Tada je $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$.

Primjer 4.1.6. Funkcija $f(x) = |x|$ neprekidna je na $\mathbb{R}$, ali nije derivabilna u 0:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{|h|}{h} = -1, \qquad f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{|h|}{h} = 1.$$

Za $c > 0$ funkcija je blizu c jednaka x, pa je $f'(c) = 1$; za $c < 0$ jednaka je $-x$, pa je $f'(c) = -1$. Jednostrane tangente u ishodištu imaju različite nagibe.

Za $f(x) = \sqrt[3]{x}$ u nuli kvocijent diferencija zadovoljava

$$\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{|h|^{2/3}} \longrightarrow +\infty.$$

To nije derivacija u smislu definicije 4.1.1, jer derivacija mora biti konačan realan broj. Geometrijski možemo govoriti o *okomitoj tangenti* $x = 0$. Takvo ponašanje valja izričito razlikovati od derivabilnosti.

4.1.3. Linearizacija i neprekidnost

Za funkciju r, definiranu u blizini nule, pišemo $r(h) = o(|h|)$ kada $h \to 0$ ako

$$\lim_{h\to 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0.$$

Kažemo da je $r(h)$ zanemariv u usporedbi s $|h|$. Ekvivalentno, $r(h)/h \to 0$. Ovo je svojstvo limesa, a ne tvrdnja da je $r(h)$ jednako nuli.

Teorem 4.1.7 (Linearizacija)**.** *Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabilna je u $c \in I$ ako i samo ako postoji broj $A \in \mathbb{R}$ i funkcija r, definirana za dovoljno male h, takva da je*

$$f(c+h) = f(c) + Ah + r(h), \qquad r(0) = 0, \qquad r(h) = o(|h|). \tag{4.1}$$

Tada je $A = f'(c)$ i taj je broj jedinstven. Ekvivalentno, u nekoj okolini točke c postoji funkcija ω neprekidna u c, $\omega(c) = 0$, takva da

$$f(x) = f(c) + \big(f'(c) + \omega(x)\big)(x - c). \tag{4.2}$$

Dokaz. Ako $f'(c)$ postoji, stavimo $A = f'(c)$ i $r(h) = f(c+h) - f(c) - Ah$. Za $h \neq 0$ vrijedi

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - A \longrightarrow 0,$$

pa imamo traženi prikaz. Obratno, iz prikaza (4.1), dijeljenjem s $h \neq 0$, slijedi

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = A + \frac{r(h)}{h} \longrightarrow A.$$

Zato je $f'(c) = A$, a jedinstvenost slijedi iz jedinstvenosti limesa.

Napokon, stavimo $\omega(x) = r(x-c)/(x-c)$ za $x \neq c$ i $\omega(c) = 0$. Tada je $\omega(x) \to 0 = \omega(c)$, pa je neprekidna u c i vrijedi (4.2). Obratno, iz tog prikaza dobivamo $r(h) = h\omega(c+h) = o(|h|)$. □

Teorem 4.1.8. *Ako je funkcija derivabilna u c, onda je u c neprekidna.*

Dokaz. Prema (4.2), kada $x \to c$, vrijedi

$$f(x) - f(c) = \big(f'(c) + \omega(x)\big)(x - c) \longrightarrow 0.$$

To je upravo neprekidnost u c. □

Obrat ne vrijedi, kao što pokazuje apsolutna vrijednost. Isti dokaz s jednostranim limesima pokazuje da konačna desna odnosno lijeva derivacija povlači odgovarajuću jednostranu neprekidnost.

Definicija 4.1.9. *Za funkciju derivabilnu u c* diferencijal u *c linearno je preslikavanje*

$$df_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad df_c(h) = f'(c)h.$$

Ako prirast argumenta označimo s $dx = h$, njegovu linearnu aproksimaciju prirasta vrijednosti pišemo $df = f'(c)\,dx$. Stvarni je prirast $\Delta f = f(c+h) - f(c)$, pa vrijedi $\Delta f = df_c(h) + o(|h|)$.

Preslikavanje $h \mapsto f'(c)h$ linearno je, a funkcija $x \mapsto f(c)+f'(c)(x-c)$ općenito je *afina*. Taj pomak za konstantu ne mijenja njezin nagib, ali je važan pri razlikovanju linearnih preslikavanja od njihovih pomaknutih grafova.

Teorem 4.1.10 (Najbolja lokalna afina aproksimacija)**.** *Neka je f derivabilna u c i neka je $p(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$. Za svaki afini polinom $q \neq p$ postoji $\delta_q > 0$ takav da za $0 < |x-c| < \delta_q$ vrijedi*

$$|f(x) - p(x)| < |f(x) - q(x)|.$$

Dokaz. Neka je $q(x) = A(x-c) + B$. Ako je $B \neq f(c)$, neprekidnost daje

$$|f(x) - q(x)| \longrightarrow |f(c) - B| > 0, \qquad |f(x) - p(x)| \longrightarrow 0.$$

Uz $\varepsilon = |f(c) - B|/3$ za dovoljno male $|x-c|$ prvi izraz veći je od 2ε, a drugi manji od ε. Time je zaključak dokazan u tom slučaju.

Ako je $B = f(c)$, mora biti $A \neq f'(c)$. Stavimo $d = |A - f'(c)| > 0$ i upotrijebimo (4.2). Za dovoljno male $|x-c|$ imamo $|\omega(x)| < d/3$, pa za $x \neq c$ vrijedi

$$|f(x) - p(x)| = |\omega(x)|\,|x-c| < \frac{d}{3}|x-c|,$$

$$|f(x) - q(x)| = |f'(c) - A + \omega(x)|\,|x-c| \geqslant \big(d - |\omega(x)|\big)|x-c| > \frac{2d}{3}|x-c|.$$

Dobivamo traženu strogu nejednakost. □

Broj δ_q smije ovisiti o konkurentskom polinomu q. Teorem ne tvrdi da postoji jedna okolina u kojoj je p bolji od svih drugih afinih polinoma odjednom. Primjerice, za svaki fiksni $x \neq c$ možemo izabrati pravac kroz točke $(c, f(c))$ i $(x, f(x))$, koji je upravo u točki x točan. Tvrdnja teorema uspoređuje p sa svakim *unaprijed fiksiranim* drugim polinomom u dovoljno maloj probušenoj okolini.

Primjer 4.1.11. Za $f(x) = \sqrt{x}$ i $c = 4$ racionalizacija daje

$$\frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} \longrightarrow \frac{1}{4}.$$

Zato je $\sqrt{4+h} \approx 2 + h/4$ za malen h. U ovom primjeru pogrešku možemo izračunati točno:

$$\sqrt{4+h} - 2 - \frac{h}{4} = -\frac{h^2}{4(\sqrt{4+h}+2)^2}.$$

Za $|h| \leqslant 1$ nazivnik je veći od 36, pa je apsolutna pogreška najviše $h^2/36$. Aproksimacija $\sqrt{4.01} \approx 2.0025$ stoga ima pogrešku manju od 0.000003. Sama derivabilnost daje pogrešku $o(|h|)$; jača kvadratna ocjena ovdje slijedi iz dodatno izvedenoga identiteta.

4.1.4. Tangenta, normala i predznak derivacije u točki

Ako je f derivabilna u c, njezina tangenta u $(c, f(c))$ jest pravac

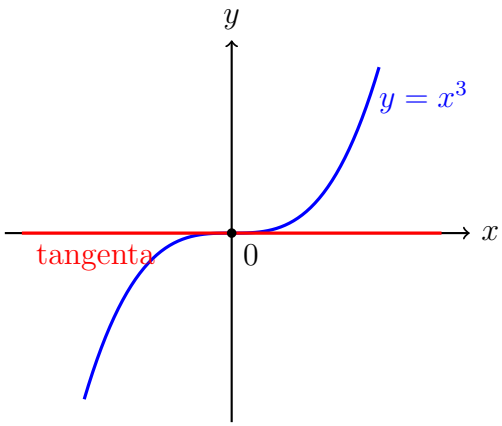
$$y = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Normala je pravac kroz istu točku, okomit na tangentu. Ako je $f'(c) \neq 0$, njezina je jednadžba

$$y = f(c) - \frac{1}{f'(c)}(x - c).$$

Ako je $f'(c) = 0$, tangenta je vodoravna, a normala okomiti pravac $x = c$; tada normala nije graf funkcije $y = g(x)$.

Tangenta može presijecati graf. Za $f(x) = x^3$ u $c = 0$ imamo $f'(0) = \lim_{h\to 0} h^2 = 0$, pa je tangenta $y = 0$. Graf je lijevo od ishodišta ispod, a desno iznad tangente. Zato tangentu ne definiramo kao pravac koji graf samo dodiruje i s njim nema drugih presjeka.



Lema 4.1.12. *Ako je $f'(c) > 0$, postoji $\delta > 0$ takav da*

$$c < x < c + \delta \implies f(x) > f(c), \qquad c - \delta < x < c \implies f(x) < f(c).$$

Ako je $f'(c) < 0$, vrijede obratne nejednakosti.

Dokaz. Ako je limes kvocijenta diferencija pozitivan, kvocijent je pozitivan u dovoljno maloj probušenoj okolini točke c. Za $x > c$ množimo s pozitivnim $x - c$, a za $x < c$ s negativnim $x - c$, čime se predznak nejednakosti mijenja. Za negativnu derivaciju dokaz je analogan. □

Lema uspoređuje $f(x)$ sa samo jednom vrijednošću $f(c)$. Ne tvrdi da je funkcija monotona u nekoj okolini točke c. Za monotonost na intervalu trebat će kontrolirati derivaciju u svim njegovim točkama; taj ćemo rezultat dokazati nakon teorema srednje vrijednosti.

Zadatak 4.1.1. Pomoću definicije izračunajte derivacije funkcija x^3 i $\sqrt{x}$ u proizvoljnoj točki $c > 0$. Odredite tangentu i normalu na graf $y = x^2$ u točki $(1, 1)$ te u točki $(0, 0)$.

Zadatak 4.1.2. Za koje su $A, B \in \mathbb{R}$ funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1, \\ Ax + B, & x > 1 \end{cases}$$

neprekidne u 1, a za koje su derivabilne u 1? Odgovor izvedite iz jednostranih kvocijenata diferencija.

Zadatak 4.1.3. Neka je f definirana u okolini c i neka postoji limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h}.$$

Mora li f biti derivabilna u c? Razmotrite $f(x) = |x|$ i $c = 0$. Što o tom limesu možemo reći ako je f derivabilna u c?

4.2. Računanje derivacija

Definicija derivacije daje način provjere pojedinačnih primjera. Za složenije izraze korisnije je jednom dokazati pravila koja povezuju operacije s funkcijama i njihove derivacije. U ovom odjeljku derivacije promatramo u unutarnjim točkama domena; rubne točke posebno ćemo navesti.

4.2.1. Algebarske operacije

Teorem 4.2.1. *Neka su $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ derivabilne u točki c otvorenog intervala I. Za svaka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funkcije $\alpha f + \beta g$ i fg derivabilne su u c i vrijedi*

$$(\alpha f + \beta g)'(c) = \alpha f'(c) + \beta g'(c),$$
$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

Ako je još $g(c) \neq 0$, funkcije $1/g$ i f/g definirane su u nekoj okolini točke c, derivabilne su u c i vrijedi

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = -\frac{g'(c)}{g(c)^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}.$$

Dokaz. Za $x \neq c$ razlika vrijednosti linearne kombinacije daje

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(c)}{x - c} = \alpha \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \beta \frac{g(x) - g(c)}{x - c}.$$

Prelaskom na limes dobivamo prvu jednakost. Za produkt pišemo

$$\frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} g(x) + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c}.$$

Prema teoremu 4.1.8 funkcija g neprekidna je u c, pa $g(x) \to g(c)$. Pravila računanja s limesima sada daju formulu za derivaciju produkta.

Ako je $g(c) \neq 0$, neprekidnost daje $\delta > 0$ takav da

$$|g(x) - g(c)| < \frac{|g(c)|}{2} \quad \text{za } x \in I,\ |x - c| < \delta.$$

Tada je $|g(x)| > |g(c)|/2 > 0$, pa je recipročna funkcija ondje definirana. Za $x \neq c$ u toj okolini vrijedi

$$\frac{1/g(x) - 1/g(c)}{x - c} = -\frac{1}{g(x)g(c)} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}.$$

Limes desne strane jednak je $-g'(c)/g(c)^2$. Napokon, iz $f/g = f \cdot (1/g)$ i pravila za produkt slijedi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)}{g(c)} - \frac{f(c)g'(c)}{g(c)^2},$$

što je tražena formula. □

Za derivaciju količnika u c nije potrebno da nazivnik bude različit od nule na cijelom početnom intervalu. Dovoljan je uvjet $g(c) \neq 0$; neprekidnost tada osigurava sve što je potrebno u okolini točke c. Prva formula također kaže da je pridruživanje $f \mapsto f'(c)$ linearno na prostoru funkcija derivabilnih u c.

4.2.2. Kompozicija i inverzna funkcija

Teorem 4.2.2 (Pravilo lanca)**.** *Neka su I, J otvoreni intervali, $f\colon I \to J$ i $g\colon J \to \mathbb{R}$. Ako je f derivabilna u $c \in I$, a g u $d = f(c)$, tada je $g \circ f$ derivabilna u c i*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Dokaz. Definirajmo na J pomoćnu funkciju

$$q(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(d)}{y - d}, & y \neq d, \\ g'(d), & y = d. \end{cases}$$

Prema definiciji derivacije q je neprekidna u d, a za svaki $y \in J$, uključujući $y = d$, vrijedi

$$g(y) - g(d) = q(y)(y - d).$$

Zato za svaki $x \in I \setminus \{c\}$ imamo

$$\frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x - c} = q(f(x)) \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Funkcija f neprekidna je u c, pa $f(x) \to d$ i $q(f(x)) \to q(d) = g'(d)$. Drugi faktor konvergira prema $f'(c)$, što dokazuje tvrdnju. □

U dokazu nismo dijelili s $f(x) - f(c)$. Ta razlika može biti nula i za $x \neq c$, primjerice kada je f konstantna ili kada se u svakoj okolini točke c ponavlja vrijednost $f(c)$. Proširenje kvocijenta vrijednošću $q(d)$ omogućuje da istom formulom obuhvatimo i takve točke.

Teorem 4.2.3 (Derivacija inverzne funkcije)**.** *Neka je I otvoren interval, a $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna i injektivna funkcija. Stavimo $J = f(I)$. Ako je f derivabilna u $c \in I$ i $f'(c) \neq 0$, tada je J otvoren interval, funkcija $f^{-1}\colon J \to I$ derivabilna je u $d = f(c)$ i vrijedi*

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Dokaz. Prema rezultatima prethodnog poglavlja f je strogo monotona, J je interval, a inverz f^{-1} neprekidan je. Svaka točka $c \in I$ leži između dviju točaka $a, b \in I$. Vrijednost $f(c)$ strogo je između $f(a)$ i $f(b)$, pa je unutarnja točka intervala J. Time je J otvoren.

Za $y \in J \setminus \{d\}$ stavimo $x = f^{-1}(y)$. Injektivnost daje $x \neq c$, a neprekidnost inverza daje $x \to c$ kada $y \to d$. Stoga

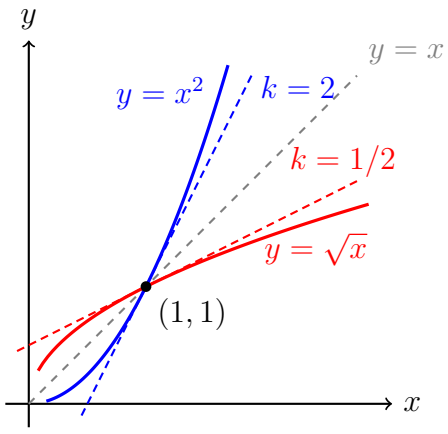
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} = \frac{x - c}{f(x) - f(c)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}} \longrightarrow \frac{1}{f'(c)}.$$

Posljednji je prijelaz dopušten jer je $f'(c) \neq 0$. □

Često ćemo tu formulu pisati s promjenjivim argumentom:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Uvjet $f'(c) \neq 0$ ne može se izostaviti. Funkcija $f(x) = x^3$ jest neprekidna bijekcija na $\mathbb{R}$, ali njezin inverz $\sqrt[3]{x}$ nema konačnu derivaciju u 0.



Zrcaljenje s obzirom na pravac $y = x$ zamjenjuje graf funkcije i graf njezina inverza. Tangente u odgovarajućim točkama također se zrcale; ako je njihov nagib konačan i različit od nule, nagibi su recipročni. Na slici su funkcija x^2 i njezin inverz ograničeni na pozitivne argumente.

4.2.3. Potencije, eksponencijalne i logaritamske funkcije

Iz definicije neposredno slijedi $(K)' = 0$ za konstantu K i $(x)' = 1$. U formulama za polinome x^0 označava konstantnu funkciju 1. Pravilo za produkt indukcijom daje

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}).$$

Doista, ako formula vrijedi za n, onda je

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n.$$

Za negativne cjelobrojne potencije, na domeni $x \neq 0$, slijedi

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Time su određene derivacije polinoma, a pravilom za količnik i derivacije racionalnih funkcija u svim točkama njihove domene.

Za prirodan $n \geqslant 2$ funkcija $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ inverz je odgovarajućeg ograničenja potencije $x \mapsto x^n$. Na pozitivnim argumentima teorem 4.2.3 daje

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \qquad (x > 0).$$

Za neparan n ista formula vrijedi i za $x < 0$. U točki 0 kvocijent razlika jednak je

$$\frac{\sqrt[n]{h} - 0}{h} = \frac{1}{(\sqrt[n]{h})^{n-1}}.$$

Za neparan $n \geqslant 3$ on teži prema $+\infty$ kada $h \to 0$; za paran $n \geqslant 2$ isto vrijedi kada $h \to 0^+$. Dakle, u prvom slučaju nema konačne derivacije u 0, a u drugom nema konačne desne derivacije u rubnoj točki domene. Sam korijen u 0 u oba je slučaja neprekidan.

Temeljni limes iz teorema 3.2.6 daje za svaki $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^{c+h} - e^c}{h} = e^c \frac{e^h - 1}{h} \longrightarrow e^c.$$

Prema tome, $(e^x)' = e^x$. Budući da je eksponencijalna funkcija neprekidna bijekcija s $\mathbb{R}$ na $\langle 0, +\infty\rangle$, a njezina je derivacija posvuda pozitivna, pravilo za inverz daje

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

Sada iz definicija $a^x = e^{x \ln a}$ i $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, te iz pravila lanca dobivamo

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0), \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}).$$

Formula za opću realnu potenciju ovdje se odnosi na pozitivnu bazu. Cjelobrojne potencije i korijeni na većim domenama obrađeni su zasebno. Za $a > 0$, $a \neq 1$, iz $\log_a x = \ln x / \ln a$ slijedi $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$.

$f(x)$	$f'(x)$	Argumenti za navedenu formulu
K	0	$x \in \mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$
x^{-n}, $n \in \mathbb{N}$	$-nx^{-n-1}$	$x \neq 0$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x, $a > 0$	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$1/x$	$x > 0$
$\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$1/(x \ln a)$	$x > 0$

Primjer 4.2.4 (Logaritamsko deriviranje)**.** Za $x \neq 0$ vrijedi $(\ln|x|)' = 1/x$: na pozitivnoj poluosi to je već dokazano, a na negativnoj primjenjujemo pravilo lanca na $\ln(-x)$.

Neka su f, g derivabilne na otvorenom intervalu I i neka je $f > 0$. Funkcija $H = f^g$ derivabilna je jer je $H = \exp(g \ln f)$ kompozicija već poznatih derivabilnih funkcija. Tek nakon tog opravdanja smijemo derivirati jednakost $\ln H = g \ln f$ i dobiti

$$H' = f^g \left(g' \ln f + g \frac{f'}{f} \right).$$

Posebno, $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$ za $x > 0$. Jednakost s logaritmima služi računanju derivacije; sama po sebi, bez prethodnog opravdanja, nije dokaz da derivacija H' postoji.

4.2.4. Trigonometrijske i arcus funkcije

Argumenti trigonometrijskih funkcija izraženi su u radijanima. Prema teoremu 3.2.2 i tamo dokazanoj procjeni $0 \leqslant 1 - \cos h \leqslant h^2/2$, vrijedi

$$\frac{\sin h}{h} \longrightarrow 1, \qquad \frac{\cos h - 1}{h} \longrightarrow 0.$$

Adicijska formula stoga daje

$$\frac{\sin(c+h) - \sin c}{h} = \sin c \, \frac{\cos h - 1}{h} + \cos c \, \frac{\sin h}{h} \longrightarrow \cos c.$$

Jednako, adicijska formula za kosinus daje $(\cos x)' = -\sin x$. Pravilo za količnik i identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ sada daju

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

u točkama u kojima su odgovarajući nazivnici različiti od nule.

Za arcus funkcije koristimo glavne grane određene u poglavlju o funkcijama. Ako je $y = \arcsin x$ i $-1 < x < 1$, tada je $-\pi/2 < y < \pi/2$, pa je $\cos y = \sqrt{1-x^2} > 0$. Pravilo za inverz daje $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$. Za $y = \arccos x$ vrijedi $0 < y < \pi$ i $\sin y = \sqrt{1-x^2}$, pa dobivamo suprotan predznak. Ako je $y = \operatorname{arctg} x$, onda je

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Za inverz kotangensa analogno je $(\operatorname{arcctg} x)' = -\sin^2 y = -1/(1+x^2)$. Tako smo dokazali sve formule sljedeće tablice.

$f(x)$	$f'(x)$	Domena derivabilnosti
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\langle -1, 1\rangle$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\langle -1, 1\rangle$
$\operatorname{arctg} x$	$1/(1+x^2)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-1/(1+x^2)$	$\mathbb{R}$

Funkcije arcsin i arccos definirane su i neprekidne i u -1 i 1, ali ondje nemaju konačnu jednostranu derivaciju. To se ne zaključuje samo iz neograničenosti formula za derivacije u unutrašnjosti. Primjerice, pri $x \to 1^-$ stavimo $y = \arcsin x \to \pi/2$. Tada

$$\frac{\arcsin x - \pi/2}{x-1} = \frac{1}{\dfrac{\sin y - \sin(\pi/2)}{y - \pi/2}} \longrightarrow +\infty,$$

jer nazivnik teži prema $\cos(\pi/2) = 0$ kroz pozitivne vrijednosti. Isti račun u -1 daje $+\infty$. Za arkus kosinus nazivnici su negativni i oba odgovarajuća kvocijenta teže prema $-\infty$.

4.2.5. Hiperbolne i area funkcije

Iz definicija hiperbolnih funkcija i već dokazanih pravila slijedi

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sh} x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,\\
(\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x,\\
(\operatorname{th} x)' &= \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\\
(\operatorname{cth} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.
\end{aligned}$$

Posljednja formula vrijedi za $x \neq 0$, a prethodne na cijelom $\mathbb{R}$.

Area funkcije definirane su kao inverzi odgovarajućih grana. Za $y = \operatorname{arsh} x$ vrijedi $\operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2} > 0$, pa pravilo za inverz daje

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Za $y = \operatorname{arch} x$ i $x > 1$ vrijedi $y > 0$ i $\operatorname{sh} y = \sqrt{x^2-1} > 0$, što daje $(\operatorname{arch} x)' = 1/\sqrt{x^2-1}$. Dalje, ako je $y = \operatorname{arth} x$, onda je

$$(\operatorname{arth} x)' = \operatorname{ch}^2 y = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Za $y = \operatorname{arcth} x$ ista primjena na odgovarajućoj grani kotangensa hiperbolnog daje

$$(\operatorname{arcth} x)' = -\operatorname{sh}^2 y = \frac{1}{1 - \operatorname{cth}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Ta je derivacija negativna na svakoj od dviju komponenti domene.

$f(x)$	$f'(x)$	Domena derivabilnosti
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$1/\operatorname{ch}^2 x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{cth} x$	$-1/\operatorname{sh}^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\operatorname{arsh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arch} x$	$1/\sqrt{x^2-1}$	$\langle 1, +\infty\rangle$
$\operatorname{arth} x$	$1/(1-x^2)$	$\langle -1, 1\rangle$
$\operatorname{arcth} x$	$1/(1-x^2)$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

Funkcija arch definirana je i u 1, ali ondje nema konačnu desnu derivaciju. Za $y = \operatorname{arch} x \to 0^+$ vrijedi

$$\frac{\operatorname{arch} x - \operatorname{arch} 1}{x-1} = \frac{y}{\operatorname{ch} y - 1} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} 0}{y}} \longrightarrow +\infty,$$

jer je $\operatorname{ch} y > 1$ za $y > 0$ i $\operatorname{ch}'(0) = \operatorname{sh} 0 = 0$. Ponovno je riječ o beskonačnom limesu kvocijenta, a ne o derivaciji koja bi imala realnu vrijednost.

4.2.6. Derivacije višeg reda

Definicija 4.2.5. *Za funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ na otvorenom intervalu I stavljamo $f^{(0)} = f$. Ako je $f^{(k-1)}$ definirana na I i derivabilna u $c \in I$, definiramo*

$$f^{(k)}(c) := (f^{(k-1)})'(c)$$

i nazivamo je derivacijom k-tog reda *funkcije f u c. Za prve redove pišemo i f', f'', f'''. Kažemo da je f n* puta derivabilna na *I ako su njezine derivacije do reda n definirane u svakoj točki intervala I.*

Pišemo $f \in C^n(I)$ ako je f n puta derivabilna na I te su na I neprekidne funkcije $f, f', \ldots, f^{(n)}$. Oznaka $C^0(I)$ znači samo neprekidnost, a $C^\infty(I)$ znači pripadnost $C^n(I)$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

Ako je f n puta derivabilna, niže su derivacije automatski neprekidne jer same imaju derivaciju. Zato je za $n \geqslant 1$ u definiciji $C^n(I)$ dovoljno dodatno zahtijevati neprekidnost $f^{(n)}$. Samo postojanje posljednje derivacije ne jamči njezinu neprekidnost.

Za $a < b$ oznaku $f \in C^n([a,b])$ koristit ćemo kada je f neprekidna na $[a,b]$, kada je $f|_{\langle a,b\rangle} \in C^n(\langle a,b\rangle)$ i kada se svaka derivacija $f^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, može neprekidno proširiti na oba kraja segmenta. Vrijednosti tih proširenja označavat ćemo $f^{(k)}(a)$ i $f^{(k)}(b)$. Time ne tražimo da funkcija bude definirana izvan segmenta.

Teorem 4.2.6 (Leibnizova formula)**.** *Ako su f, g n puta derivabilne na otvorenom intervalu I, onda je i njihov produkt n puta derivabilan i*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Dokaz. Za $n = 0$ formula je identitet, a za $n = 1$ pravilo za produkt. Pretpostavimo da vrijedi za n i neka f, g imaju još jednu derivaciju. Deriviranjem konačne sume dobivamo

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right).$$

Za $1 \leqslant k \leqslant n$ član $f^{(k)}g^{(n+1-k)}$ pojavljuje se dvaput, s ukupnim koeficijentom

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Krajnji članovi $fg^{(n+1)}$ i $f^{(n+1)}g$ imaju koeficijent 1. To je upravo tražena formula za $n+1$. □

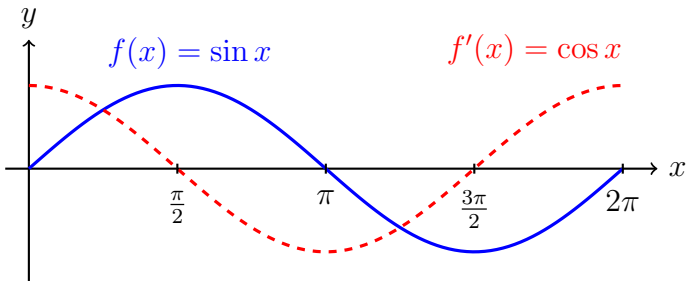
Primjer 4.2.7. Za $m \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\frac{d^k}{dx^k}x^m = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-k)!}\,x^{m-k}, & 0 \leqslant k \leqslant m, \\ 0, & k > m. \end{cases}$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ također vrijedi

$$\frac{d^k}{dx^k}e^x = e^x, \qquad \frac{d^k}{dx^k}\sin x = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right), \qquad \frac{d^k}{dx^k}\cos x = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

Posljednje dvije formule slijede indukcijom iz već dokazanih derivacija sinusa i kosinusa. Nakon četiri deriviranja početna se funkcija ponovi. Sve te funkcije pripadaju $C^\infty(\mathbb{R})$.



Na slici su funkcija i njezina prva derivacija. Vrijednost derivacije mjeri nagib tangente grafa početne funkcije; sam graf derivacije prikazuje kako se taj nagib mijenja s argumentom.

Zadatak 4.2.1. Odredite domenu i derivaciju svake od funkcija

$$\frac{x^2+1}{x-1}, \qquad \ln|\sin x|, \qquad \sqrt{1-x^2}, \qquad x^{\sin x} \quad (x > 0).$$

Za treću funkciju ispitajte i jednostrane kvocijente razlika na krajevima domene.

Zadatak 4.2.2. Neka je f derivabilna u c i neka je $g(y) = |y|$. Dokažite da je $g \circ f$ derivabilna u c ako je $f(c) \neq 0$. Ako je $f(c) = 0$, dokažite da je $|f|$ derivabilna u c ako i samo ako je $f'(c) = 0$. Objasnite zašto se u tom slučaju ne možemo neposredno pozvati na teorem o derivaciji kompozicije.

Zadatak 4.2.3. Provjerite formule za derivacije svih četiriju area funkcija izravnim deriviranjem njihovih logaritamskih prikaza iz propozicije 1.2.36. U svakom slučaju provjerite da je argument logaritma pozitivan na cijeloj odgovarajućoj domeni.

Zadatak 4.2.4. Leibnizovom formulom izračunajte n-tu derivaciju funkcije x^2e^x za $n \in \mathbb{N}$. Zatim izvedite formulu

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \qquad (x \neq 0)$$

i odredite n-tu derivaciju funkcije $\ln x$ za $n \geqslant 1$.

4.3. Teoremi srednje vrijednosti

Derivacija opisuje promjenu funkcije u neposrednoj blizini jedne točke. Teoremi srednje vrijednosti povezuju tu lokalnu informaciju s promjenom funkcije na cijelom segmentu. Obradit ćemo četiri povezana rezultata: Rolleov, Lagrangeov, Cauchyjev i Taylorov teorem. Preostala tri dokazat ćemo pomoću Rolleova teorema, čiji se dokaz oslanja na postojanje ekstrema neprekidne funkcije na segmentu. Zato najprije trebamo precizirati što znači lokalni ekstrem.

4.3.1. Lokalni ekstremi i Rolleov teorem

Definicija 4.3.1. *Neka je $f\colon D \to \mathbb{R}$ i $c \in D$. Kažemo da f u točki c ima* lokalni maksimum *ako postoji $\delta > 0$ takav da*

$$x \in D, \quad |x - c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(c).$$

Ako za $0 < |x-c| < \delta$ vrijedi stroga nejednakost $f(x) < f(c)$, govorimo o strogom lokalnom maksimumu. *Zamjenom nejednakosti s $f(x) \geqslant f(c)$, odnosno $f(x) > f(c)$, dobivamo definicije* lokalnog minimuma *i* strogog lokalnog minimuma. *Lokalni minimumi i maksimumi zajednički se nazivaju* lokalnim ekstremima.

Za lokalni ekstrem uspoređujemo vrijednosti samo u nekoj okolini točke c. Za *globalni* minimum ili maksimum odgovarajuća nejednakost mora vrijediti za svaki $x \in D$. Globalni ekstrem zato je i lokalni, ali obrat općenito ne vrijedi. Ista točka može biti i lokalni minimum i lokalni maksimum: to se, primjerice, događa za konstantnu funkciju.

Teorem 4.3.2 (Fermatov teorem)**.** *Neka je c unutarnja točka domene funkcije f. Ako je f derivabilna u c i u toj točki ima lokalni ekstrem, onda je $f'(c) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je u c lokalni maksimum. Za sve dovoljno male $h \neq 0$ vrijedi $f(c+h) - f(c) \leqslant 0$. Zato je

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0 \quad (h > 0), \qquad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \quad (h < 0).$$

Budući da oba jednostrana limesa postoje i jednaka su $f'(c)$, slijedi istodobno $f'(c) \leqslant 0$ i $f'(c) \geqslant 0$. Dakle, $f'(c) = 0$. Za lokalni minimum primijenimo dokazani slučaj na funkciju $-f$. □

Točku c u kojoj postoji derivacija i vrijedi $f'(c) = 0$ nazivamo *stacionarnom točkom*. Fermatov teorem daje nužan uvjet za lokalni ekstrem u unutarnjoj točki, ali taj uvjet nije dovoljan: za $f(x) = x^3$ vrijedi $f'(0) = 0$, a f u nuli nema ni lokalni minimum ni lokalni maksimum. Pretpostavka derivabilnosti također je bitna: funkcija $|x|$ ima strogi minimum u nuli, ali ondje nema derivaciju. Na rubu domene zaključak ne vrijedi: funkcija $f(x) = x$ na $[0, 1]$ ima minimum u 0, a njezina je desna derivacija ondje jednaka 1.

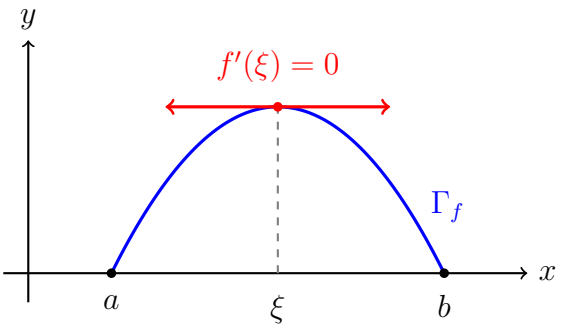
Teorem 4.3.3 (Rolleov teorem srednje vrijednosti)**.** *Neka su $a < b$, a funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Ako je $f(a) = f(b)$, postoji $\xi \in \langle a, b\rangle$ takav da je*

$$f'(\xi) = 0.$$

Dokaz. Prema teoremu 3.4.1 funkcija f postiže najmanju i najveću vrijednost na $[a, b]$. Ako je konstantna, možemo uzeti bilo koji $\xi \in \langle a, b\rangle$. Inače postoji $c \in \langle a, b\rangle$ za koji je $f(c) \neq f(a)$.

Ako je $f(c) > f(a) = f(b)$, najveća je vrijednost strogo veća od obiju rubnih vrijednosti. Zato se postiže u nekoj unutarnjoj točki ξ. Ta je točka lokalni maksimum, pa je prema Fermatovu teoremu $f'(\xi) = 0$. Ako je $f(c) < f(a) = f(b)$, isti argument primijenimo na najmanju vrijednost. □

Geometrijski, graf koji započinje i završava na istoj visini mora imati barem jednu horizontalnu tangentu između tih krajeva. Oduzimanjem konstante $f(a)$ možemo pretpostaviti da su obje rubne vrijednosti jednake nuli, kao na slici.



Derivacije u krajevima segmenta nisu potrebne, kao ni neprekidnost funkcije f'. No neprekidnost funkcije f na cijelom segmentu i derivabilnost u njegovoj unutrašnjosti ne smijemo izostaviti. Funkcija $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$ ima jednake rubne vrijednosti, ali nema nijednu točku u kojoj joj je derivacija nula. Funkcija definirana s $f(0) = 0$ i $f(x) = x - 1$ za $0 < x \leqslant 1$ ima jednake rubne vrijednosti i derivaciju 1 u svakoj unutarnjoj točki; u tom primjeru nedostaje neprekidnost u 0.

Primjer 4.3.4. Neka su $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ako polinom

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

ima strogo pozitivnu nultočku c, onda i polinom $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ima strogo pozitivnu nultočku. Doista, $P(0) = P(c) = 0$, a $P' = Q$. Rolleov teorem na $[0, c]$ daje $\xi \in \langle 0, c\rangle$ za koji je $Q(\xi) = 0$. Općenito, između svake dvije različite nultočke derivabilne funkcije nalazi se barem jedna nultočka njezine derivacije.

Propozicija 4.3.5 (Rolleov teorem na polupravcu)**.** *Neka je $f\colon [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna, derivabilna na $\langle a, +\infty\rangle$ i neka je*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a).$$

Tada postoji $\xi > a$ takav da je $f'(\xi) = 0$.

Dokaz. Oduzimanjem konstante $f(a)$ svodimo se na slučaj $f(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ako je f identički nula, tvrdnja je neposredna. Inače postoji $c > a$ s $f(c) \neq 0$; zamjenom f s $-f$ po potrebi možemo uzeti $f(c) > 0$. Zbog limesa u beskonačnosti postoji $b > c$ takav da je $|f(b)| < f(c)$. Na segmentu $[a, b]$ funkcija postiže maksimum, a on se ne može postići ni u a ni u b, jer je $f(c)$ veći od obiju rubnih vrijednosti. U unutarnjoj točki maksimuma derivacija je nula. □

Važno je da nismo primjenjivali teorem o postizanju maksimuma na neomeđenom intervalu. U dokazu smo najprije odabrali prikladan segment. Zamjenom argumenta x s $-x$ dobivamo i odgovarajuću tvrdnju za polupravac $\langle -\infty, b]$.

4.3.2. Lagrangeov teorem

Teorem 4.3.6 (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti)**.** *Neka su $a < b$, a funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Tada postoji $\xi \in \langle a, b\rangle$ takav da je*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{4.3}$$

Dokaz. Od funkcije oduzmimo afinu funkciju čiji graf prolazi njezinim rubnim točkama. Tako dobivamo pomoćnu funkciju

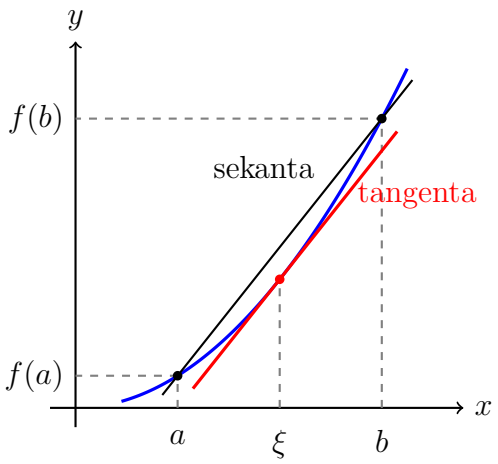
$$F(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a).$$

Ona je neprekidna na $[a, b]$, derivabilna na $\langle a, b\rangle$ i zadovoljava $F(a) = F(b) = 0$. Prema Rolleovu teoremu postoji $\xi \in \langle a, b\rangle$ s

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Množenjem s $b - a$ dobivamo traženu jednakost. □

Broj $(f(b) - f(a))/(b - a)$ nagib je sekante kroz rubne točke grafa. Teorem kaže da je neka tangenta paralelna toj sekanti. Točka ξ ne mora biti jedinstvena i općenito nije polovište segmenta. Umjesto nje ponekad pišemo $a + \vartheta(b - a)$, gdje je $0 < \vartheta < 1$.



Ako je $s(t)$ položaj tijela na pravcu, onda je $(s(b) - s(a))/(b - a)$ njegova prosječna brzina između vremena a i b. Uz pretpostavke teorema u nekom trenutku trenutna brzina $s'(\xi)$ jednaka je toj prosječnoj brzini. Ta interpretacija zahtijeva postojanje derivacije u svim unutarnjim trenucima, baš kao i matematički iskaz.

Korolar 4.3.7. *Uz pretpostavke Lagrangeova teorema, ako za svaki* $t \in \langle a, b\rangle$ *vrijedi* $|f'(t)| \leqslant M$*, onda je*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b - a).$$

Dokaz. Uzmimo apsolutne vrijednosti u (4.3) i upotrijebimo $|f'(\xi)| \leqslant M$. □

Primjer 4.3.8. Kako je $(\sin t)' = \cos t$ i $|\cos t| \leqslant 1$, za svake $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

Ako je $x \neq y$, primijenimo prethodni korolar na segment s krajevima x i y; za $x = y$ nejednakost je neposredna. Na isti način dobivamo $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$.

Lema 4.3.9 (Derivacija u rubu segmenta)**.** *Neka je* $a < b$*, a funkcija* f *neprekidna na* $[a, b]$ *i derivabilna na* $\langle a, b\rangle$*. Ako postoji* $\lim_{t\to a+} f'(t) = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*, onda je*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

Za konačan L *to znači da postoji desna derivacija* $f'_+(a) = L$*. Ako je* L *beskonačan, tada i kvocijent ima taj beskonačni limes. Analogna tvrdnja vrijedi u desnom rubu* b*, s limesima slijeva.*

Dokaz. Za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ Lagrangeov teorem na $[a, x]$ daje $\xi_x \in \langle a, x\rangle$ takav da je

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_x).$$

Kako je $0 < \xi_x - a < x - a$, za $x \to a+$ slijedi $\xi_x \to a+$, pa desna strana teži L. Argument jednako vrijedi za konačan i za beskonačan L. Za rub b primijenimo isti teorem na $[x, b]$ i pustimo $x \to b-$. □

Posebno, neprekidna proširenja derivacija kojima je definirana klasa $C^n([a, b])$ doista daju odgovarajuće jednostrane derivacije u krajevima. To dobivamo uzastopnom primjenom leme na funkcije $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$, koristeći njihova neprekidna proširenja.

4.3.3. Cauchyjev teorem

U Lagrangeovu teoremu promjenu funkcije uspoređujemo s promjenom argumenta. Cauchyjev teorem omogućuje da usporedimo promjene dviju funkcija. Najprije ćemo ga zapisati bez dijeljenja, kako ne bismo prešutjeli mogućnost da je neki nazivnik jednak nuli.

Teorem 4.3.10 (Cauchyjev teorem srednje vrijednosti)**.** *Neka su $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidne na $[a, b]$ i derivabilne na $\langle a, b\rangle$, gdje je $a < b$. Tada postoji $\xi \in \langle a, b\rangle$ takav da je*

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(\xi). \tag{4.4}$$

Ako je dodatno $g'(t) \neq 0$ za svaki $t \in \langle a, b\rangle$, onda je $g(b) \neq g(a)$ i za neku takvu točku ξ vrijedi

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{4.5}$$

Dokaz. Definirajmo

$$H(t) = \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(t) - g(a)\big) - \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(t) - f(a)\big).$$

Funkcija H neprekidna je na segmentu, derivabilna u njegovoj unutrašnjosti i zadovoljava $H(a) = H(b) = 0$. Rolleov teorem daje unutarnju točku ξ u kojoj je $H'(\xi) = 0$, a to je upravo (4.4).

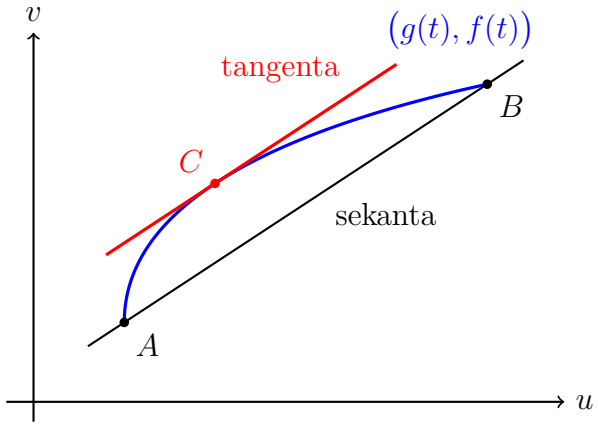
Pretpostavimo sada da g' nigdje nije nula u unutrašnjosti. Kad bi bilo $g(a) = g(b)$, Rolleov teorem primijenjen na g dao bi unutarnju nultočku od g', što je proturječje. Zato su oba nazivnika u (4.5) različita od nule te smijemo podijeliti jednakost (4.4) njihovim umnoškom. □

Za $g(t) = t$ dobivamo Lagrangeov teorem. Njegov poseban slučaj $f(a) = f(b)$ jest Rolleov teorem, a Rolleov teorem upravo nam je poslužio za dokaz Cauchyjeva teorema. U tom su smislu ova tri rezultata ekvivalentna.

Geometrijski promatramo parametarski zadanu krivulju

$$t \longmapsto \big(g(t), f(t)\big).$$

Ako su njezine rubne točke različite i vektor $(g'(\xi), f'(\xi))$ nije nula, jednakost (4.4) kaže da je taj vektor paralelan spojnici rubnih točaka. On određuje smjer tangente na krivulju. Uz uvjet $g' \neq 0$ vektor je sigurno nenult, a tangenta nije vertikalna; tada (4.5) izražava jednakost nagiba. Bez uvjeta nenultosti vektora sama jednakost dvaju umnožaka ne bi jamčila postojanje tangentnoga smjera.



Na slici je $(g(t), f(t)) = (1 + t^2, 1 + 2t - t^2/4)$ za $0 \leqslant t \leqslant 2$. Rubne točke su $A = (1, 1)$ i $B = (5, 4)$, pa je nagib sekante $3/4$. Za $\xi = 1$ dobivamo $C = (2, 11/4)$ i $f'(1)/g'(1) = (3/2)/2 = 3/4$, što opravdava nacrtanu tangentu.

Dvije odvojene primjene Lagrangeova teorema ne daju odmah Cauchyjev teorem: one bi dale točke ξ_1 i ξ_2 koje mogu biti različite. Bit Cauchyjeva teorema jest da se obje derivacije računaju u *istoj* točki.

Primjer 4.3.11 (IMC 2025, drugi dan, zadatak 6)**.** Neka je $0 < a < b$, a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Tada postoji $\xi \in \langle a, b\rangle$ za koji je

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

Doista, na funkcije $u(t) = f(t)/t$ i $v(t) = 1/t$ možemo primijeniti Cauchyjev teorem jer je $v'(t) = -1/t^2 \neq 0$. Za dobivenu točku ξ slijedi

$$\frac{u'(\xi)}{v'(\xi)} = f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{f(b)/b - f(a)/a}{1/b - 1/a} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

Izbor pomoćnih funkcija važan je dio primjene teorema. Ovdje deriviranje kvocijenta $f(t)/t$ prirodno stvara izraz iz tvrdnje.

4.3.4. Taylorov teorem i ocjena ostatka

Lagrangeov teorem uspoređuje funkciju s afinom funkcijom. Za bolju aproksimaciju koristimo polinome višega stupnja. Ovdje i dalje radimo s *konačnim* polinomima; beskonačni Taylorovi redovi zahtijevat će zasebno ispitivanje konvergencije.

Definicija 4.3.12. *Ako su definirane vrijednosti* $f^{(k)}(a)$ *za* $0 \leqslant k \leqslant n$*, pri čemu je* $f^{(0)} = f$*, polinom*

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nazivamo Taylorovim polinomom reda n funkcije f u točki a*. Razliku*

$$R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$$

nazivamo ostatkom*. Za* $a = 0$ *govorimo i o* Maclaurinovu polinomu*.*

Red n ne mora biti stupanj polinoma: neki vodeći koeficijenti mogu biti nula. Neposrednim deriviranjem dobivamo

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

To je jedini polinom stupnja najviše n s tim svojstvom. Naime, za polinom zapisan u obliku $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$ vrijedi $P^{(k)}(a) = k!c_k$, pa su svi koeficijenti jednoznačno određeni.

Teorem 4.3.13 (Taylorov teorem srednje vrijednosti)**.** *Neka su* $a, x \in \mathbb{R}$*,* $a \neq x$*,* $n \in \mathbb{N}_0$ *i neka je* J *segment s krajevima* a *i* x*. Pretpostavimo da je* $f \in C^n(J)$ *i da* $f^{(n+1)}$ *postoji u unutrašnjosti segmenta* J*. Tada postoji* ξ *strogo između* a *i* x *takav da je*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{4.6}$$

Posljednji član nazivamo Lagrangeovim oblikom ostatka*.*

U oznaci $C^n(J)$ traži se neprekidnost funkcije i njezinih derivacija do reda n na segmentu; rubne vrijednosti derivacija tumače se kao vrijednosti njihovih neprekidnih proširenja. Za $n = 0$ pretpostavka znači samo neprekidnost funkcije na J. Najviša derivacija $f^{(n+1)}$ ne mora biti neprekidna, niti mora postojati u krajevima segmenta. Te pretpostavke, primjerice, vrijede ako f ima $(n+1)$ derivacija na otvorenom intervalu koji sadrži J.

Dokaz. Fiksirajmo $x \neq a$ i stavimo

$$K = \frac{f(x) - T_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}, \qquad F(t) = f(t) - T_{n,a}(t) - K(t-a)^{n+1}.$$

Tada je $F(x) = 0$ i

$$F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0.$$

Pretpostavimo najprije $a < x$. Primjenom Rolleova teorema na F u segmentu $[a, x]$ dobivamo točku $c_1 \in \langle a, x\rangle$ s $F'(c_1) = 0$. Ako je $n \geqslant 1$, vrijedi i $F'(a) = 0$, pa primjenom Rolleova teorema na F' u $[a, c_1]$ dobivamo $c_2 \in \langle a, c_1\rangle$ s $F''(c_2) = 0$. Nastavljajući, nakon ukupno $n + 1$ primjena dobivamo $\xi \in \langle a, x\rangle$ za koji je $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Svaka je primjena opravdana: za $0 \leqslant j \leqslant n$ funkcija $F^{(j)}$ neprekidna je na pripadnom segmentu, derivabilna u njegovoj unutrašnjosti i ima nulu u oba njegova kraja. Za $n = 0$ potrebna je samo prva primjena.

Ako je $x < a$, prvu primjenu provodimo na $[x, a]$, a svaku sljedeću na segmentu $[c_j, a]$. Dobivene točke opet ostaju strogo između x i a, pa zaključak ostaje isti.

Budući da je $T_{n,a}$ stupnja najviše n, vrijedi

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n + 1)!K.$$

Iz $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ slijedi $K = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$. Uvrštavanje u definiciju broja K daje (4.6), s izvornim predznakom potencije $(x - a)^{n+1}$ i kada je $x < a$. □

Za $n = 0$ formula postaje

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a),$$

pa je Lagrangeov teorem njezin poseban slučaj. Za $x = a$ jednakost $f(a) = T_{n,a}(a)$ vrijedi neposredno; u tom slučaju ne tražimo točku strogo između jednakih krajeva.

[Druga pomoćna funkcija] Taylorov teorem možemo dobiti i samo jednom primjenom Rolleova teorema. Uz fiksirani $x \neq a$ definirajmo

$$G(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k, \qquad H(t) = G(t) - G(a)\frac{(x - t)^{n+1}}{(x - a)^{n+1}}.$$

Tada je $H(a) = H(x) = 0$. Deriviranjem konačne sume poništavaju se susjedni članovi, pa u unutrašnjosti segmenta vrijedi

$$G'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n,$$

$$H'(t) = (x - t)^n \left(-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} + \frac{(n + 1)G(a)}{(x - a)^{n+1}}\right).$$

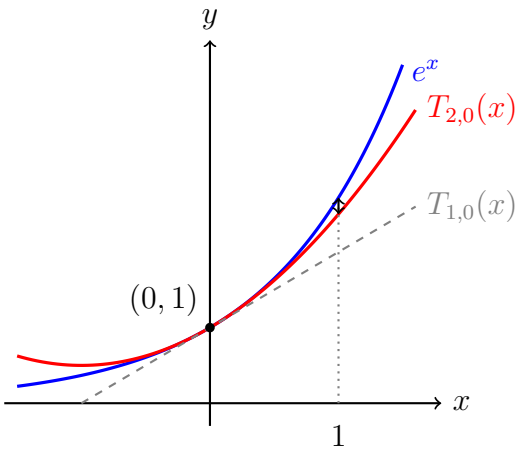
Za točku ξ koju daje Rolleov teorem imamo $\xi \neq x$, pa $H'(\xi) = 0$ daje $G(a) = f^{(n+1)}(\xi)(x - a)^{n+1}/(n + 1)!$. Kako je $G(a) = R_{n,a}(x)$, to je traženi ostatak.

Korolar 4.3.14. *Uz pretpostavke Taylorova teorema, ako je $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ za sve t strogo između a i x, onda je*

$$|R_{n,a}(x)| \leqslant \frac{M}{(n + 1)!}|x - a|^{n+1}.$$

Dokaz. U izraz za apsolutnu vrijednost ostatka uvrstimo $|f^{(n+1)}(\xi)| \leqslant M$. □

Točku ξ najčešće ne znamo izračunati. Za procjenu pogreške dovoljno je omeđiti derivaciju na cijelom segmentu koji je može sadržavati. Pri promjeni broja x mijenja se i dopuštena točka ξ; teorem ne tvrdi da postoji jedna zajednička točka za sve x.



Za eksponencijalnu funkciju svi koeficijenti u točki 0 imaju jednostavan oblik. Na slici uspoređujemo e^x s polinomima $T_{1,0}(x) = 1 + x$ i $T_{2,0}(x) = 1 + x + x^2/2$. Oba polinoma imaju istu vrijednost i istu prvu derivaciju kao e^x u nuli, a drugi dodatno ima i istu drugu derivaciju.

Primjer 4.3.15. Za eksponencijalnu funkciju Taylorova formula u nuli daje

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_{3,0}(x), \qquad |R_{3,0}(x)| \leqslant \frac{e}{24}|x|^4 \quad (|x| \leqslant 1).$$

Doista, četvrta je derivacija ponovno e^t, a na segmentu između 0 i x vrijedi $e^t \leqslant e$. Kako već znamo $e < 3$, za $x = 0.1$ dobivamo

$$\left| e^{0.1} - \left(1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^3}{6}\right)\right| < 0.0000125.$$

Ta je procjena pogreške opravdanje aproksimacije, a ne samo usporedba s decimalnim ispisom kalkulatora.

Za sinus i kosinus odgovarajuće derivacije omeđene su s 1 na cijeloj realnoj osi, pa Taylorove formule redova 4 i 5 daju

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + r(x), \qquad |r(x)| \leqslant \frac{|x|^5}{120},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + s(x), \qquad |s(x)| \leqslant \frac{|x|^6}{720}.$$

Nulti koeficijenti objašnjavaju zašto smo primijenili teorem s redom većim od stupnja prikazanoga polinoma.

Za $f(x) = \ln(1+x)$ vrijedi $f'''(t) = 2/(1+t)^3$. Stoga za svaki fiksirani $0 < r < 1$ i svaki $|x| \leqslant r$ imamo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R_{2,0}(x), \qquad |R_{2,0}(x)| \leqslant \frac{|x|^3}{3(1-r)^3}.$$

Uvjet $r < 1$ drži cijeli promatrani segment unutar domene logaritma i daje pozitivan donji omeđitelj za $1 + t$.

4.3.5. Peanov oblik i primjene Taylorova teorema

Ocjena ostatka korisna je kada znamo omeđitelj za sljedeću derivaciju. Za usporedbu pri $x \to a$ često je dovoljan i slabiji opis koji koristi samo derivacije do reda n. Pišemo $r(x) = o((x-a)^n)$ za $x \to a$ ako

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Za $n = 0$ to jednostavno znači $r(x) \to 0$.

Teorem 4.3.16 (Taylorova formula s Peanovim ostatkom)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ i neka je f klase C^n na nekoj otvorenoj okolini točke a. Tada vrijedi*

$$f(x) = T_{n,a}(x) + o((x-a)^n) \qquad (x \to a).$$

Štoviše, $T_{n,a}$ jedini je polinom stupnja najviše n koji ima to svojstvo.

Dokaz. Za $n = 0$ prva tvrdnja slijedi iz neprekidnosti u a. Za $n \geqslant 1$ primijenimo Taylorov teorem reda $n-1$ na segment s krajevima a i $x \neq a$, gdje je x dovoljno blizu točki a. Dobivamo ξ_x strogo između a i x takav da je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}(x-a)^n.$$

Prema tome,

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi_x) - f^{(n)}(a)}{n!} \longrightarrow 0,$$

jer $|\xi_x - a| < |x-a|$ i $f^{(n)}$ je neprekidna u a.

Neka je P još jedan polinom stupnja najviše n za koji je $f(x) - P(x) = o((x-a)^n)$. Oduzimanjem slijedi $P(x) - T_{n,a}(x) = o((x-a)^n)$. Kad bi razlika bila nenulti polinom, za najmanji indeks m s nenultim koeficijentom mogli bismo pisati

$$P(x) - T_{n,a}(x) = c_m(x-a)^m + \cdots + c_n(x-a)^n, \qquad c_m \neq 0.$$

Nakon dijeljenja s $(x-a)^m$ lijeva bi strana težila $c_m \neq 0$, a desni opis $o((x-a)^n)/(x-a)^m$ težio bi nuli jer je $n - m \geqslant 0$. To je proturječje, pa je $P = T_{n,a}$. □

Jedinstvenost u teoremu precizira smisao najbolje lokalne polinomijalne aproksimacije: tražimo da pogreška podijeljena s $(x-a)^n$ teži nuli. Ne tvrdimo da isti polinom daje najmanju moguću pogrešku na nekom unaprijed zadanom većem segmentu.

Primjer 4.3.17. Iz Taylorove formule za sinus slijedi

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Jednako tako,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Red polinoma odabrali smo tako da doseže prvi nenulti član razlike.

Primjer 4.3.18. Neka je f dvaput derivabilna na $\langle a, +\infty\rangle$ i neka su

$$M_0 = \sup_{x>a} |f(x)| < +\infty, \qquad M_2 = \sup_{x>a} |f''(x)| < +\infty.$$

Tada je i f' omeđena te vrijedi

$$\sup_{x>a} |f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Za dokaz fiksirajmo $x > a$ i $h > 0$. Taylorov teorem reda 1 daje $\xi \in \langle x, x+h\rangle$ takav da je

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(\xi) h^2.$$

Zato

$$|f'(x)| \leqslant \frac{|f(x+h)| + |f(x)|}{h} + \frac{h}{2}|f''(\xi)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

Ako su $M_0, M_2 > 0$, odaberimo $h = 2\sqrt{M_0/M_2}$. Dobivamo $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$, neovisno o x, pa ista ocjena vrijedi i za supremum. Ako je $M_0 = 0$, funkcija je identički nula. Ako je $M_2 = 0$, u prethodnoj ocjeni možemo pustiti $h \to +\infty$ i opet dobiti $f'(x) = 0$. Time su obuhvaćeni i rubni slučajevi bez dijeljenja nulom.

Primjer 4.3.19. Neka je $f \in C^1([0,1])$, neka f'' postoji na $\langle 0, 1\rangle$ i neka je

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad \min_{x\in[0,1]} f(x) = -1.$$

Tada postoji $\xi \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $f''(\xi) \geqslant 8$. Doista, minimum se postiže u nekoj točki $c \in \langle 0, 1\rangle$, pa je $f(c) = -1$ i prema Fermatovu teoremu $f'(c) = 0$. Taylorov teorem reda 1, primijenjen iz točke c prema svakom kraju segmenta, daje $\xi_1 \in \langle 0, c\rangle$ i $\xi_2 \in \langle c, 1\rangle$ za koje vrijedi

$$0 = -1 + \frac{1}{2} f''(\xi_1) c^2, \qquad 0 = -1 + \frac{1}{2} f''(\xi_2)(1-c)^2.$$

Ako je $c \leqslant 1/2$, onda je $f''(\xi_1) = 2/c^2 \geqslant 8$. Ako je $c \geqslant 1/2$, vrijedi $f''(\xi_2) = 2/(1-c)^2 \geqslant 8$. Konstanta 8 ne može se povećati: za $f(x) = 4x(x-1)$ vrijede sve pretpostavke i $f''(x) = 8$ za svaki x.

4.3.6. Zadaci

Zadatak 4.3.1. Neka je $a < b$ i neka su f, g, h neprekidne na $[a, b]$ i derivabilne na $\langle a, b\rangle$. Dokažite da postoji $\xi \in \langle a, b\rangle$ takav da je

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Uputa: zamijenite prvi redak s $(f(t), g(t), h(t))$ i primijenite Rolleov teorem na dobivenu funkciju varijable t.

Zadatak 4.3.2. Neka je $f\colon [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna, derivabilna na $\langle 0, +\infty\rangle$, $f(0) = 1$ i $|f(x)| \leqslant e^{-x}$ za $x > 0$. Dokažite da postoji $\xi > 0$ takav da je $f'(\xi) = -e^{-\xi}$. *Uputa:* primijenite Rolleov teorem na polupravcu na funkciju $e^{-x} - f(x)$.

Zadatak 4.3.3. Neka je $a < b$, neka je f neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b\rangle$ te neka su zadani $M, \delta, \varepsilon > 0$ s $M\delta < \varepsilon$. Pretpostavimo da postoje točke $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ za koje vrijedi

$$x_k - x_{k-1} \leqslant \delta, \qquad f(x_k) \geqslant \varepsilon, \qquad |f'(x)| \leqslant M \quad (a < x < b).$$

Dokažite da je $f(x) > 0$ za svaki $x \in [a, b]$. Objasnite kako ocjena derivacije dopušta da pozitivnost na cijelom segmentu potvrdimo provjerom konačno mnogo vrijednosti.

Zadatak 4.3.4. Neka je $f \in C^2([-1, 1])$, neka f''' postoji na $\langle -1, 1\rangle$ i neka vrijedi

$$f(-1) = f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad f'(0) = 0.$$

Dokažite da za neku točku $\xi \in \langle -1, 1\rangle$ vrijedi $f'''(\xi) \geqslant 3$. *Uputa:* razvijte $f(-1)$ i $f(1)$ oko nule do reda 2 te oduzmite dobivene jednakosti.

Zadatak 4.3.5 (Za dodatni rad: Hermiteovi polinomi)**.** Za $n \in \mathbb{N}_0$ definirajmo

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Dokažite da je H_n polinom stupnja n te da ima točno n različitih realnih nultočaka. *Uputa:* najprije izvedite $H_0 = 1$ i $H_{n+1} = 2xH_n - H_n'$, odakle je $H_1(x) = 2x$. Za funkcije $f_n = (e^{-x^2})^{(n)}$ vrijedi $f_n = (-1)^n H_n e^{-x^2}$ i $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$. Između susjednih nultočaka od f_n primijenite Rolleov teorem, a izvan krajnjih nultočaka njegovu inačicu za polupravce. Objasnite zašto stupanj polinoma isključuje dodatne nultočke i višestruke nultočke.

4.4. Posljedice teorema srednje vrijednosti

Teoremi srednje vrijednosti omogućuju da informacije o derivaciji pretvorimo u zaključke o samoj funkciji. Najprije ćemo proučiti monotonost, zatim pokazati da derivacija ima svojstvo međuvrijednosti čak i kada nije neprekidna, a na kraju izvesti L'Hospitalovo pravilo.

4.4.1. Monotonost i derivacija

Teorem 4.4.1. *Neka je I interval s barem dvije točke i neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna na I i derivabilna u svim unutarnjim točkama. Tada vrijedi:*

1. *f je rastuća na I ako i samo ako je $f'(x) \geqslant 0$ u svakoj unutarnjoj točki;*
2. *f je padajuća na I ako i samo ako je $f'(x) \leqslant 0$ u svakoj unutarnjoj točki;*
3. *f je konstantna na I ako i samo ako je $f'(x) = 0$ u svakoj unutarnjoj točki.*

Ako je $f'(x) > 0$ u svim unutarnjim točkama, funkcija strogo raste; ako je $f'(x) < 0$, strogo pada.

Dokaz. Ako f raste, za unutarnju točku c i dovoljno malen $h \neq 0$ kvocijent $(f(c+h) - f(c))/h$ nenegativan je: za $h > 0$ brojnik je nenegativan, a za $h < 0$ nepozitivan. Prijelazom na limes slijedi $f'(c) \geqslant 0$. Obratno, neka su $x < y$ u I. Funkcija je neprekidna na $[x, y]$ i derivabilna na $\langle x, y\rangle$, pa Lagrangeov teorem daje $\xi \in \langle x, y\rangle$ takav da

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

Ako je $f' \geqslant 0$, desna strana nenegativna je; ako je $f' > 0$, strogo je pozitivna. Dobivamo rast odnosno strogi rast. Padajući slučajevi slijede primjenom na $-f$. Funkcija je konstantna ako i samo ako je istodobno rastuća i padajuća, što daje treću tvrdnju. □

Pretpostavka da je domena interval bitna je. Funkcija $f(x) = 0$ za $x < 0$, $f(x) = 1$ za $x > 0$, ima derivaciju nula na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ali nije konstantna na cijeloj domeni. Zaključak o konstantnosti vrijedi zasebno na svakom od dvaju intervala. Ako interval uključuje kraj, neprekidnost u njemu također ne smijemo izostaviti: promjena samo rubne vrijednosti ne mijenja derivaciju u unutrašnjosti, ali može uništiti monotonost na cijelom intervalu.

Korolar 4.4.2. *Ako su dvije funkcije neprekidne na intervalu, derivabilne u njegovoj unutrašnjosti i ondje imaju jednake derivacije, razlikuju se za konstantu.*

Dokaz. Derivacija njihove razlike jednaka je nuli. Primijenimo prethodni teorem. □

Pozitivnost derivacije dovoljna je za strogi rast, ali nije nužna. Funkcija x^3 strogo raste na $\mathbb{R}$, iako joj je derivacija u nuli jednaka nuli. Sljedeći rezultat daje točan kriterij.

Teorem 4.4.3. *Uz pretpostavke teorema 4.4.1, funkcija f strogo raste na I ako i samo ako je $f' \geqslant 0$ u unutrašnjosti intervala i ne postoji neprazan otvoren podinterval na kojem je f' identički nula. Analogno vrijedi za strogi pad, uz $f' \leqslant 0$.*

Dokaz. Strogi rast povlači rast, pa je $f' \geqslant 0$. Kad bi derivacija bila nula na otvorenom podintervalu, funkcija bi na njemu bila konstantna, protivno strogom rastu. Obratno, iz

$f' \geqslant 0$ slijedi da f raste. Kad bi za neke $x < y$ u I bilo $f(x) = f(y)$, onda bi za svaki $z \in [x, y]$ vrijedilo

$$f(x) \leqslant f(z) \leqslant f(y) = f(x).$$

Funkcija bi bila konstantna na $[x, y]$, pa bi $f' = 0$ na $\langle x, y\rangle$, protivno pretpostavci. Za pad primijenimo dokazano na $-f$. □

Primjer 4.4.4. Podatak $f'(c) > 0$ u samo jednoj točki ne jamči monotonost u njezinoj okolini. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Iz $f(h)/h = 1 + 2h\sin(1/h) \to 1$ slijedi $f'(0) = 1$. Za $x \neq 0$ računamo

$$f'(x) = 1 + 4x\sin(1/x) - 2\cos(1/x).$$

U točkama $x_n = 1/(2\pi n) \to 0$ derivacija je jednaka -1. Prema nužnom dijelu kriterija monotonosti funkcija ne može biti rastuća ni u jednoj okolini nule. Ne može biti ni padajuća, jer je $f'(0) > 0$.

4.4.2. Međuvrijednosti i prekidi derivacije

Neprekidna funkcija na intervalu poprima sve međuvrijednosti. Iznenađujuće je da derivacija ima to svojstvo bez pretpostavke vlastite neprekidnosti.

Teorem 4.4.5 (Darbouxovo svojstvo derivacije)**.** *Neka je f derivabilna na otvorenom intervalu I, neka su $a < b$ u I i neka je λ strogo između $f'(a)$ i $f'(b)$. Tada postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f'(c) = \lambda$. Posebno, slika intervala derivacijom jest interval.*

Dokaz. Najprije neka je $f'(a) < \lambda < f'(b)$ i stavimo $g(x) = f(x) - \lambda x$. Funkcija g neprekidna je na $[a, b]$, pa ondje postiže minimum. Vrijedi $g'(a) < 0$ i $g'(b) > 0$. Prema lemi 4.1.12, za neke točke $x > a$ dovoljno blizu a vrijedi $g(x) < g(a)$, a za neke $y < b$ dovoljno blizu b vrijedi $g(y) < g(b)$. Zato nijedan kraj nije točka minimuma. Minimum se, dakle, postiže u nekoj unutarnjoj točki c. Fermatov teorem daje $g'(c) = 0$, odnosno $f'(c) = \lambda$. Ako je $f'(a) > \lambda > f'(b)$, primijenimo upravo dokazani slučaj na $-f$ i broj $-\lambda$. Za tvrdnju o slici uzmemo bilo koje dvije njezine različite vrijednosti i njihove argumente te primijenimo dokazano na segment između njih. □

Propozicija 4.4.6. *Ako je f derivabilna na otvorenom intervalu I i u točki $c \in I$ postoji jednostrani limes njezine derivacije, konačan ili beskonačan, taj je limes nužno konačan i jednak $f'(c)$. Zato derivacija ne može imati uklonjivi prekid ni skok.*

Dokaz. Pretpostavimo, primjerice, da postoji $L = \lim_{x\to c+} f'(x)$. Lema 4.3.9, primijenjena na mali segment s lijevim krajem c, daje

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = L.$$

No lijeva strana jednaka je konačnom broju $f'(c)$ zbog derivabilnosti u c. Jedinstvenost limesa zato daje $L = f'(c)$. Za lijevi limes dokaz je jednak. Kad bi derivacija imala uklonjivi prekid ili skok, oba bi jednostrana limesa postojala, a dokazano svojstvo prisililo bi ih da budu jednaki vrijednosti derivacije u toj točki. Tada bi ona bila neprekidna. □

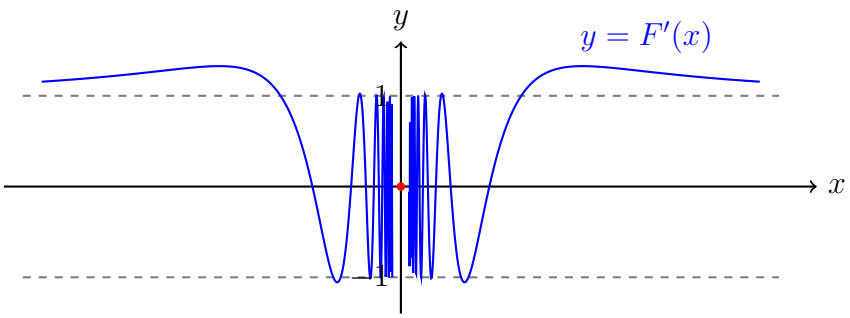
Primjer 4.4.7. Funkcija

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

derivabilna je na $\mathbb{R}$. U nuli vrijedi $F'(0) = \lim_{h\to 0} h \sin(1/h) = 0$, a drugdje

$$F'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Za $x_n = 1/(2\pi n)$ vrijedi $F'(x_n) = -1$, a za $y_n = 1/((2n+1)\pi)$ vrijedi $F'(y_n) = 1$. Zato F' nije neprekidna u 0 i nema desni limes ondje. Darbouxov teorem ipak vrijedi: derivacija između takvih argumenata poprima i sve vrijednosti između -1 i 1.



Slika prikazuje konačan dio oscilacija. U svakoj okolini nule postoje nove oscilacije, što smo dokazali dvama izričitim nizovima.

4.4.3. L'Hospitalovo pravilo

Ako brojnik i nazivnik teže nuli, pravilo za limes količnika ne određuje rezultat. Derivacije katkad omogućuju da problem svedemo na jednostavniji limes. Nužno je provjeriti pretpostavke prije primjene.

Teorem 4.4.8 (L'Hospitalovo pravilo za oblik 0/0)**.** *Neka su f i g derivabilne na intervalu $\langle c, c+r\rangle$, gdje su $c \in \mathbb{R}$ i $r > 0$, i neka je ondje $g'(x) \neq 0$. Pretpostavimo*

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \lim_{x\to c+} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to c+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

gdje je $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Tada je $g(x) \neq 0$ na tom intervalu i

$$\lim_{x\to c+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Analogna tvrdnja vrijedi za lijevi limes, za dvostrani limes uz pretpostavke na objema stranama, te za $x \to \pm\infty$.

Dokaz. Definirajmo $f(c) = g(c) = 0$. Dobivene funkcije neprekidne su u c i na svakom segmentu $[c, x]$, gdje je $c < x < c + r$. Ako bi za neki takav x bilo $g(x) = 0$, Rolleov teorem na $[c, x]$ dao bi $\xi \in \langle c, x\rangle$ s $g'(\xi) = 0$, što je nemoguće. Zato je $g(x) \neq 0$. Cauchyjev teorem srednje vrijednosti daje točku $\xi_x \in \langle c, x\rangle$ takvu da

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Kako je $0 < \xi_x - c < x - c$, iz $x \to c+$ slijedi $\xi_x \to c+$. Pretpostavljeni limes omjera derivacija zato daje tvrdnju, za konačan i za beskonačan L. Lijevi slučaj dokazuje se na segmentu $[x, c]$, a dvostrani spajanjem jednakih jednostranih limesa.

Za beskonačnost stavimo $x = 1/t$, s $t \to 0+$ za $+\infty$ i $t \to 0-$ za $-\infty$. Lančano pravilo daje

$$\frac{\frac{d}{dt} f(1/t)}{\frac{d}{dt} g(1/t)} = \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}.$$

Primijenimo već dokazani jednostrani slučaj u nuli. □

Ne tražimo derivabilnost u samoj točki c, niti neprekidnost funkcija f' i g'. Dovoljno je da pretpostavke vrijede dovoljno blizu promatrane granice. Za dvostrani limes omjer derivacija mora imati isti limes s obiju strana.

Korolar 4.4.9 (Ponovljena primjena)**.** *Neka za neki $n \in \mathbb{N}$ funkcije f, g imaju n derivacija u području približavanja promatranoj granici i neka za $k = 0, \ldots, n-1$ vrijedi*

$$f^{(k)}(x) \longrightarrow 0, \qquad g^{(k)}(x) \longrightarrow 0.$$

Ako su $g', g'', \ldots, g^{(n)}$ ondje nenulte i $f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x) \to L$ u proširenom smislu, onda $f(x)/g(x) \to L$.

Dokaz. Primijenimo prethodni teorem najprije na $f^{(n-1)}$ i $g^{(n-1)}$. Dobivamo limes njihova omjera, zatim postupak ponovimo za prethodni red derivacije, sve do f/g. Nenuliranje svakoga nazivnika osigurava se istim teoremom. □

Teorem 4.4.10 (L'Hospitalovo pravilo za beskonačan nazivnik)**.** *Neka su f, g derivabilne na otvorenom intervalu J, neka je $g' \neq 0$ na J i neka se argument približava jednom kraju toga intervala, konačnom ili beskonačnom. Ako u tom smjeru vrijedi*

$$|g(x)| \longrightarrow +\infty, \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

onda je $f(x)/g(x) \to L$. Za brojnik nije potrebno zasebno pretpostavljati postojanje limesa.

Dokaz. Najprije neka je L konačan i neka je $\varepsilon > 0$. Dovoljno blizu promatranog kraja vrijedi $|f'(z)/g'(z) - L| < \varepsilon$. Fiksirajmo jednu točku t u tom području i uzmimo x između t i promatranog kraja. Cauchyjev teorem, uz Rolleovo opravdanje $g(x) \neq g(t)$, daje

$$Q(x) := \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)},$$

gdje je ξ_x između x i t. Zato je $|Q(x) - L| < \varepsilon$. Za x dovoljno blizu kraja imamo $g(x) \neq 0$, a identitet

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = (Q(x) - L)\left(1 - \frac{g(t)}{g(x)}\right) + \frac{f(t) - Lg(t)}{g(x)}$$

pokazuje da je apsolutna vrijednost lijeve strane najviše $2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$ za sve dovoljno bliske x. Naime, prvi faktor u zagradi teži 1, a posljednji razlomak nuli, jer su $t, f(t), g(t)$ sada fiksni. Zamjenom ε s trećinom zadane točnosti dobivamo traženi konačan limes.

Ako je $L = +\infty$, za zadani $M > 0$ odaberimo područje u kojem je $f'/g' > 2(M + 1)$ i fiksirajmo t u njemu. Kao prije, za x bliže kraju vrijedi $Q(x) > 2(M + 1)$. Za dovoljno bliske x još je $1 - g(t)/g(x) > 1/2$ i $|f(t)/g(x)| < 1$. Zato

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x)\left(1 - \frac{g(t)}{g(x)}\right) + \frac{f(t)}{g(x)} > M.$$

Za $L = -\infty$ primijenimo dokazano na $-f$ i g. □

Primjer 4.4.11. Sada smijemo pisati

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Prva dva omjera imaju oblik $0/0$, a derivacije njihovih nazivnika nenulte su za $x \neq 0$ dovoljno blizu nule. Isti rezultat slijedi i iz Taylorove formule. Također,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

U posljednja dva računa nazivnici teže $+\infty$.

L'Hospitalovo pravilo daje dovoljan uvjet, a ne nužan. Za $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x$, kada $x \to +\infty$, vrijedi $f(x)/g(x) \to 1$, iako $f'(x)/g'(x) = 1 + \cos x$ nema limes. Ako pretpostavke o obliku početnog omjera izostanu, zaključak može biti pogrešan: za $x \to 0$ omjer $(1 + x)/x$ nema dvostrani limes, a omjer derivacija jednak je 1.

Limes $\sin x/x \to 1$ ne smijemo prvi put dokazivati deriviranjem sinusa ako smo upravo taj limes upotrijebili za dokaz formule $(\sin x)' = \cos x$. Raniji geometrijski dokaz iz poglavlja o limesima osigurava da naša konstrukcija nema takve kružnosti.

Za funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ kažemo da je *Lipschitzova* s konstantom $M \geqslant 0$ ako vrijedi

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \qquad (x, y \in I).$$

Ocjena prirasta iz Lagrangeova teorema pokazuje da neprekidna funkcija na intervalu s $|f'| \leqslant M$ u unutrašnjosti ima upravo to svojstvo.

Zadatak 4.4.1. Neka je f derivabilna na $\mathbb{R}$ i $f'(x) \geqslant m > 0$ za svaki x. Dokažite $|f(y) - f(x)| \geqslant m|y - x|$ i zaključite da je inverz na slici Lipschitzov s konstantom $1/m$.

Zadatak 4.4.2. Dokažite da funkcija jednaka 0 za $x < 0$ i 1 za $x \geqslant 0$ ne može biti derivacija nijedne funkcije derivabilne na $\mathbb{R}$. Može li funkcija iz primjera 4.4.7 imati derivaciju neprekidnu samo izvan nule? Obrazložite razliku.

Zadatak 4.4.3. Izračunajte limese

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}.$$

Pri svakoj primjeni L'Hospitalova pravila provjerite njegove pretpostavke. Usporedite prvi i drugi račun s Taylorovom formulom.

4.5. Konveksne funkcije

Derivacija opisuje nagib grafa, a promjena tog nagiba njegovu zakrivljenost. Ipak, konveksnost ćemo najprije definirati geometrijski, bez pretpostavke postojanja derivacije. Tako ćemo obuhvatiti i funkcije s kutovima na grafu, a potom izvesti kriterije koji se koriste pri ispitivanju funkcija. U ovom odjeljku intervali su neprazni, a kada govorimo o njihovoj unutrašnjosti, pretpostavljamo da sadrže barem dvije točke.

4.5.1. Tetive grafa i Jensenova nejednakost

Definicija 4.5.1. *Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ jest* konveksna *ako*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in I,\ 0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{4.7}$$

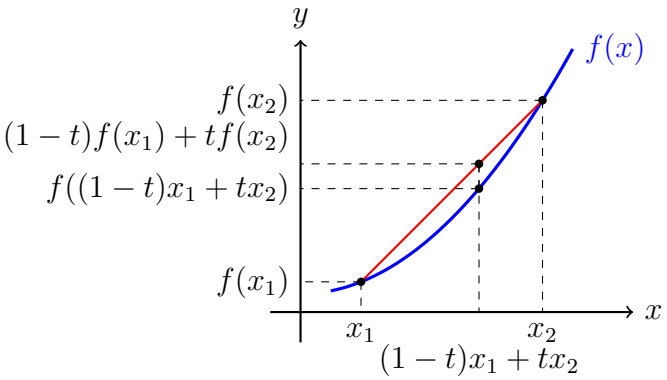
Ona je konkavna *ako vrijedi obrnuta nejednakost. Kažemo da je f* strogo konveksna*, odnosno* strogo konkavna*, ako je odgovarajuća nejednakost stroga kad god su $x_1 \neq x_2$ i $0 < t < 1$.*

Funkcija je polovišno konveksna *ako*

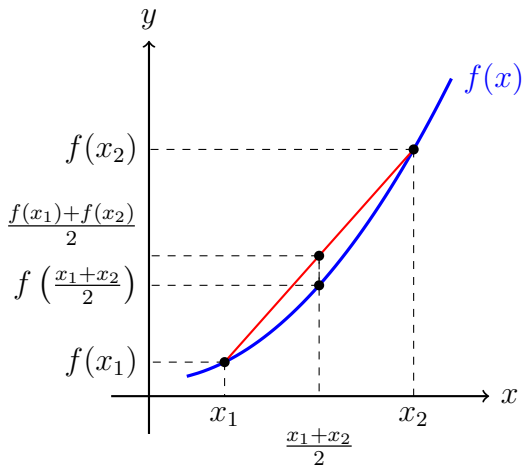
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad (x_1, x_2 \in I), \tag{4.8}$$

a polovišno konkavna *ako vrijedi obrnuta nejednakost.*

Interval je prirodna domena u ovoj definiciji: zajedno s x_1, x_2 on sadrži sve brojeve $(1-t)x_1 + tx_2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Graf konveksne funkcije između dviju svojih točaka leži ispod ili na tetivi koja ih spaja. Kod konkavne funkcije leži iznad tetive. Za $x_1 = x_2$ te za $t = 0$ ili $t = 1$ uvijek imamo jednakost.



Oznaka $x_t = (1-t)x_1 + tx_2$ označava točku na vodoravnoj osi, a dvije točke iznad nje uspoređuju visinu grafa i visinu tetive. Polovišna konveksnost traži tu usporedbu samo u sredini svake tetive.



Svaka konveksna funkcija polovišno je konveksna. Sve tvrdnje o konkavnosti mogu se dobiti primjenom odgovarajućih konveksnih tvrdnji na $-f$. Afine funkcije $f(x) = ax + b$ istodobno su konveksne i konkavne. Funkcija $x \mapsto x^2$ strogo je konveksna jer

$$(1-t)x_1^2 + tx_2^2 - ((1-t)x_1 + tx_2)^2 = t(1-t)(x_1 - x_2)^2.$$

Funkcija $x \mapsto |x|$ konveksna je prema nejednakosti trokuta, ali nije strogo konveksna na $\mathbb{R}$: na svakom pozitivnom intervalu ona je afina.

[Konveksnost epigrafa] Skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ zovemo *konveksnim* ako zajedno sa svake dvije točke P_1, P_2 sadrži dužinu

$$\overline{P_1P_2} = \{((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}, \qquad P_j = (x_j, y_j).$$

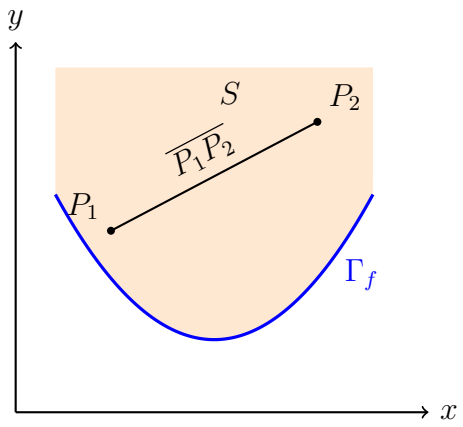
Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ konveksna je ako i samo ako je konveksan njezin *epigraf*, skup

$$S = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y \geqslant f(x)\}.$$

Doista, ako su $y_j \geqslant f(x_j)$, konveksnost funkcije daje

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \leqslant (1-t)y_1 + ty_2,$$

pa cijela dužina ostaje u S. Obratno, primijenimo konveksnost skupa S na točke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$.



Osjenčan je dio epigrafa unutar nacrtanoga prozora; epigraf se iznad tog prozora nastavlja neograničeno.

Propozicija 4.5.2. *Neka je f konveksna na I i neka su $a < b$ iz I. Ako u (4.7) za $x_1 = a$, $x_2 = b$ jednakost vrijedi za jedan $t \in \langle 0, 1\rangle$, tada vrijedi za svaki $t \in [0, 1]$. Drugim riječima, f je na $[a, b]$ afina.*

Dokaz. Neka je ℓ afina funkcija čiji graf prolazi kroz $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ te stavimo $g = f - \ell$. Funkcija g konveksna je, $g \leqslant 0$ na $[a, b]$, $g(a) = g(b) = 0$ i po pretpostavci $g(c) = 0$ za neki $a < c < b$. Ako je $a < x < c$, zapišimo $c = (1-s)x + sb$, gdje je $0 < s < 1$. Tada $0 = g(c) \leqslant (1-s)g(x) + sg(b) = (1-s)g(x) \leqslant 0$, pa je $g(x) = 0$. Ako je $c < x < b$, na isti način zapišemo $c = (1-s)a + sx$. Slijedi $g = 0$ na cijelom segmentu. □

Lema 4.5.3. *Ako je f polovišno konveksna, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_{2^k} \in I$ vrijedi*

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{2^k})}{2^k}. \tag{4.9}$$

Dokaz. Za $k = 1$ to je definicija. Aritmetička sredina 2^{k+1} brojeva jest polovina zbroja sredine prvih 2^k i sredine posljednjih 2^k brojeva. Primijenimo polovišnu konveksnost na te dvije sredine, a zatim induktivnu pretpostavku na svaku polovinu. Time dobivamo nejednakost za $k + 1$. □

Propozicija 4.5.4. *Ako je funkcija na intervalu neprekidna i polovišno konveksna, onda je konveksna. Analogna tvrdnja vrijedi za konkavnost.*

Dokaz. Fiksirajmo $x_1, x_2 \in I$. U (4.9) uzmimo $2^k - j$ kopija broja x_1 i j kopija broja x_2. Dobivamo

$$f((1-q)x_1 + qx_2) \leqslant (1-q)f(x_1) + qf(x_2) \quad \text{za } q = \frac{j}{2^k}, \quad 0 \leqslant j \leqslant 2^k.$$

Za bilo koji $t \in [0,1]$ stavimo $q_k = 2^{-k}\lfloor 2^k t \rfloor$. Tada je $0 \leqslant t - q_k < 2^{-k}$, pa $q_k \to t$. Neprekidnost u točki $(1-t)x_1 + tx_2$ omogućuje prijelaz na limes u posljednjoj nejednakosti i daje (4.7). Za konkavnost primijenimo rezultat na $-f$. □

Bez dodatne pretpostavke polovišna konveksnost ne povlači konveksnost. Postoje diskontinuirane aditivne funkcije $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za koje je $A(x+y) = A(x) + A(y)$; one zadovoljavaju (4.8) s jednakošću, ali nisu konveksne. Njihova standardna konstrukcija koristi bazu $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ i izlazi iz okvira ove skripte. U nastavku ćemo dokazati da bi konveksnost takve funkcije na $\mathbb{R}$ povlačila neprekidnost.

Teorem 4.5.5 (Jensenova nejednakost)**.** *Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ konveksna, neka su $x_1, \ldots, x_n \in I$ te $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ i $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Tada*

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j). \tag{4.10}$$

Ako je f strogo konveksna, jednakost vrijedi ako i samo ako su svi brojevi x_j s pozitivnim težinama λ_j jednaki. Za konkavnu funkciju nejednakost se obrće.

Dokaz. Članove s težinom nula izostavimo. Za jedan član tvrdnja je jednakost, a za dva je definicija. Pretpostavimo da vrijedi za $n-1$ članova i neka $n \geqslant 2$. Za $s = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} = 1 - \lambda_n > 0$ broj $y = \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j/s) x_j$ pripada I. Definicija i induktivna pretpostavka daju

$$f(sy + \lambda_n x_n) \leqslant sf(y) + \lambda_n f(x_n) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

Time je indukcija dovršena.

Za strogo konveksnu f jednakost očito vrijedi kada su svi aktivni x_j jednaki. Inače stavimo $a = \min_j x_j$ i zbrojimo u μ sve težine uz $x_j = a$. Tada $0 < \mu < 1$, a ponderirana sredina b preostalih brojeva strogo je veća od a. Stroga konveksnost daje $f(\mu a + (1-\mu)b) < \mu f(a) + (1-\mu) f(b)$. Na posljednji član primijenimo već dokazanu Jensenovu nejednakost za preostale brojeve. Tako i (4.10) postaje stroga. □

Zadatak 4.5.1. Pokažite da već polovišna konveksnost, bez neprekidnosti, povlači nejednakost

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Uputa: Odaberite $2^k \geqslant n$ i dopunite zadane brojeve s $2^k - n$ kopija njihove aritmetičke sredine. Primijenite lemu 4.5.3 i presložite nejednakost.

4.5.2. Nagibi sekanti i jednostrane derivacije

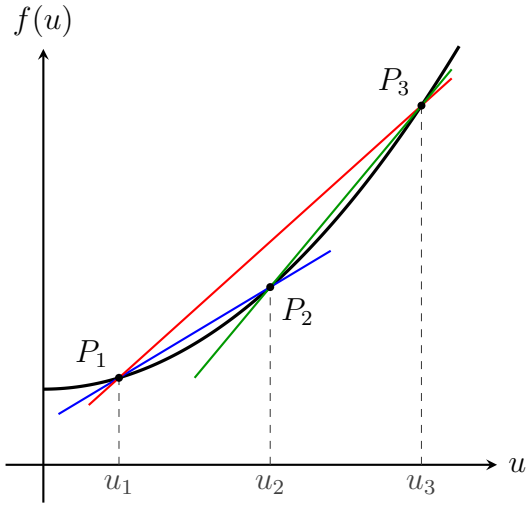
Nejednakost tetive možemo zapisati bez parametra t. Za $u_1 < u_2 < u_3$ u I uvrštavanje $t = (u_2 - u_1)/(u_3 - u_1)$ daje

$$f(u_2) \leqslant \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1} f(u_1) + \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} f(u_3). \tag{4.11}$$

Množenjem pozitivnim nazivnicima i preslagivanjem vidimo da je to ekvivalentno paru nejednakosti

$$\frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} \leqslant \frac{f(u_3) - f(u_1)}{u_3 - u_1} \leqslant \frac{f(u_3) - f(u_2)}{u_3 - u_2}. \tag{4.12}$$

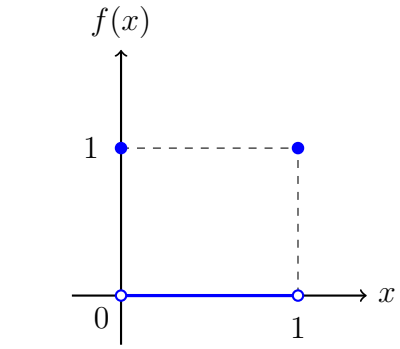
Obratno, svaki $x_1 < x_2$ i $0 < t < 1$ daje takvu trojku, pa su (4.11) i (4.12) ekvivalentni kriteriji konveksnosti. Za strogu konveksnost obje su nejednakosti u (4.12) stroge. Grafički uspoređujemo nagibe triju sekanti.

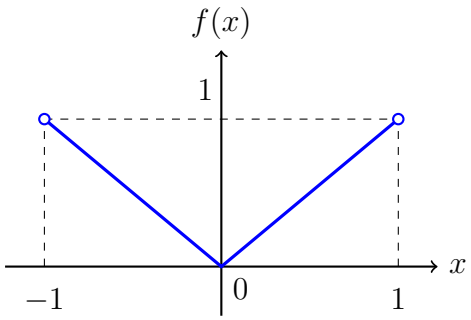


Primjer 4.5.6. Konveksna funkcija na segmentu ne mora biti neprekidna na njegovim rubovima. Primjer je

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Ako je netrivijalna konveksna kombinacija dviju različitih točaka u unutrašnjosti, lijeva strana (4.7) jest nula, a desna je nenegativna. U ostalim slučajevima imamo jednakost. Dakle, f je konveksna, ali nije neprekidna u 0 ni u 1. S druge strane, funkcija $|x|$ na $\langle -1, 1\rangle$ neprekidna je i konveksna, ali nije derivabilna u 0.





Podsjetimo se da su jednostrane derivacije konačni limesi

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \qquad f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Derivacija $f'(c)$ postoji ako i samo ako oba limesa postoje i jednaka su. Oznake $f'_-(c), f'_+(c)$ ne znače jednostrane limese funkcije f'; jednostrane derivacije mogu postojati i kada $f'(c)$ ne postoji.

Teorem 4.5.7. *Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ konveksna na otvorenom intervalu I.*

(a) U svakoj točki $c \in I$ postoje konačne derivacije $f'_-(c)$ i $f'_+(c)$ te vrijedi $f'_-(c) \leqslant f'_+(c)$.

(b) Za $a < b$ u I vrijedi

$$f'_-(a) \leqslant f'_+(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'_-(b) \leqslant f'_+(b). \tag{4.13}$$

Posebno su f'_- i f'_+ rastuće funkcije.

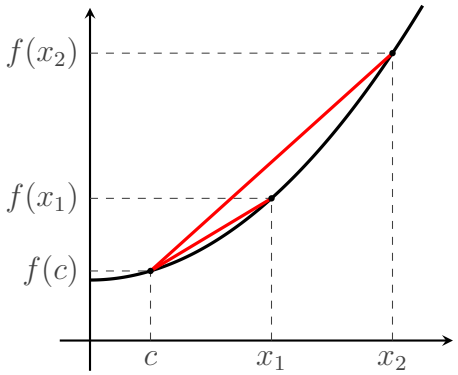
(c) Funkcija f neprekidna je na I i derivabilna u svim točkama osim na najviše prebrojivom skupu.

(d) Funkcija f'_- neprekidna je slijeva, a funkcija f'_+ neprekidna je zdesna na I.

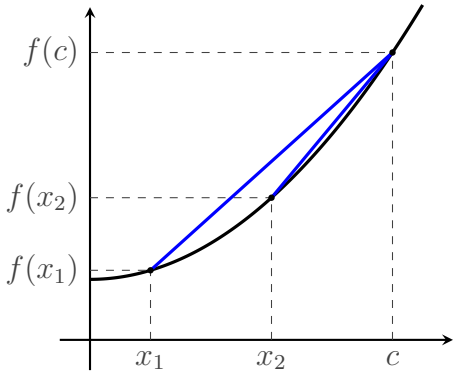
Dokaz. (a) Fiksirajmo $c \in I$ i promatrajmo

$$\Phi(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad (x > c), \qquad \Psi(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad (x < c).$$

Za $c < x_1 < x_2$, iz (4.12) slijedi $\Phi(x_1) \leqslant \Phi(x_2)$, pa je Φ rastuća.

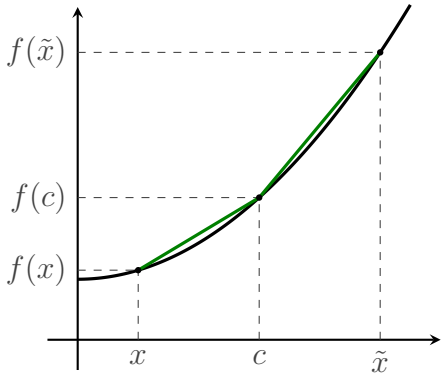


Za $x_1 < x_2 < c$ ista nejednakost daje $\Psi(x_1) \leqslant \Psi(x_2)$, pa je i Ψ rastuća.



Konačno, za $x < c < y$ imamo

$$\Psi(x) \leqslant \Phi(y). \tag{4.14}$$



Odaberimo $a < c < b$ iz I. Za $c < y < b$ vrijedi $\Psi(a) \leqslant \Phi(y) \leqslant \Phi(b)$, a za $a < x < c$ vrijedi $\Psi(a) \leqslant \Psi(x) \leqslant \Phi(b)$. Monotonost i ove konačne ograde daju konačne limese

$$f'_+(c) = \inf_{y \in I,\, y > c} \Phi(y), \qquad f'_-(c) = \sup_{x \in I,\, x < c} \Psi(x).$$

Prijelazom na jednostrane limese u (4.14) dobivamo $f'_-(c) \leqslant f'_+(c)$.

(b) Za $a < x < b$ imamo

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

U prvoj nejednakosti pustimo $x \to a^+$, a u drugoj $x \to b^-$. Zajedno s (a) to daje cijeli lanac (4.13).

(c) Na svakoj strani točke c pišemo

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c).$$

Prvi faktor ima konačan jednostrani limes, a drugi teži nuli. Zato oba jednostrana limesa od $f(x)$ iznose $f(c)$, pa je f neprekidna u c.

Neka je E skup točaka u kojima f nije derivabilna. Prema (a), za svaki $c \in E$ interval $J_c = \langle f'_-(c), f'_+(c) \rangle$ neprazan je. Prema (b) ti su intervali međusobno disjunktni. Fiksirajmo jedno nabrajanje racionalnih brojeva $q_1, q_2, \ldots$. Za $c \in E$ neka je $m(c)$ najmanji indeks za koji je $q_{m(c)} \in J_c$; takav indeks postoji zbog gustoće $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$. Disjunktnost intervala pokazuje da je $c \mapsto m(c)$ injekcija iz E u $\mathbb{N}$. Stoga je E najviše prebrojiv.

(d) Budući da je f'_+ rastuća i lokalno omeđena prema (b), postoji konačan limes

$$L = \lim_{x \to c^+} f'_+(x) \geqslant f'_+(c).$$

Za fiksni $y > c$ i $c < x < y$, iz (b) imamo

$$f'_+(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Najprije pustimo $x \to c^+$ i koristimo neprekidnost od f: $L \leqslant (f(y) - f(c))/(y - c)$. Zatim pustimo $y \to c^+$ te dobijemo $L \leqslant f'_+(c)$. Zato je $L = f'_+(c)$.

Za lijevu derivaciju stavimo $M = \lim_{x \to c^-} f'_-(x)$. Monotonost daje $M \leqslant f'_-(c)$. Za fiksni $y < c$ i $y < x < c$ vrijedi $(f(x) - f(y))/(x - y) \leqslant f'_-(x)$. Prijelazi $x \to c^-$, a zatim $y \to c^-$ daju $f'_-(c) \leqslant M$, pa vrijedi i lijeva neprekidnost. □

Korolar 4.5.8. *Funkcija na otvorenom intervalu konveksna je ako i samo ako je polovišno konveksna i neprekidna.*

Dokaz. Jedan smjer slijedi iz definicije i prethodnog teorema, a drugi je propozicija 4.5.4. □

Propozicija 4.5.9. *Konveksna funkcija na otvorenom intervalu lokalno je Lipschitzova. Preciznije, za svaki segment $[u, v] \subseteq I$ postoji $L \geqslant 0$ takav da je $|f(y) - f(x)| \leqslant L|y - x|$ za sve $x, y \in [u, v]$.*

Dokaz. Odaberimo $a < u \leqslant v < b$ iz I. Višekratna primjena (4.12) za $u \leqslant x < y \leqslant v$ daje

$$\frac{f(u) - f(a)}{u - a} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(b) - f(v)}{b - v}.$$

Za L uzmemo maksimum apsolutnih vrijednosti krajnjih nagiba. Tada slijedi tražena ocjena za $x < y$, a ostali slučajevi slijede zamjenom x, y ili su trivijalni. □

4.5.3. Kriteriji pomoću derivacija i tangenti

Teorem 4.5.10. *Neka je f derivabilna na otvorenom intervalu I. Ona je konveksna ako i samo ako je f' rastuća, a strogo konveksna ako i samo ako je f' strogo rastuća. Konkavnost, odnosno stroga konkavnost, ekvivalentna je padu, odnosno strogom padu derivacije.*

Dokaz. Ako je f konveksna, iz (4.13) i $f'_- = f'_+ = f'$ slijedi da je f' rastuća.

Obratno, neka je f' rastuća i neka su $u_1 < u_2 < u_3$ iz I. Prema Lagrangeovu teoremu 4.3.6 postoje $\xi \in \langle u_1, u_2 \rangle$ i $\zeta \in \langle u_2, u_3 \rangle$ za koje je

$$\frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} = f'(\xi) \leqslant f'(\zeta) = \frac{f(u_3) - f(u_2)}{u_3 - u_2}.$$

Preslagivanjem dobivamo (4.11), dakle konveksnost. Ako je f' strogo rastuća, nejednakost je stroga i slijedi stroga konveksnost.

Preostaje strogi obrat. Ako je f strogo konveksna, već znamo da je f' rastuća. Kada bi za neke $a < b$ vrijedilo $f'(a) = f'(b)$, monotonost bi dala $f'(x) = f'(a)$ na $[a, b]$. Prema Lagrangeovu teoremu f bi tada bila afina na $[a, b]$, što proturječi strogoj konveksnosti. Za konkavne funkcije primijenimo dokazane tvrdnje na $-f$. □

Propozicija 4.5.11 (Graf i tangenta)**.** *Derivabilna funkcija f na otvorenom intervalu I konveksna je ako i samo ako njezin graf leži iznad svake svoje tangente, to jest*

$$f(x) \geqslant f(c) + f'(c)(x - c) \qquad (c, x \in I). \tag{4.15}$$

Stroga konveksnost ekvivalentna je strogoj nejednakosti za svaki $x \neq c$.

Dokaz. Ako je f konveksna, za $x > c$ iz (4.13) imamo $(f(x) - f(c))/(x - c) \geqslant f'(c)$. Za $x < c$ dobivamo $(f(c) - f(x))/(c - x) \leqslant f'(c)$. Oba slučaja daju (4.15). Za strogo konveksnu f njezina je derivacija strogo rastuća, pa Lagrangeov teorem na segmentu s krajevima x, c daje strogu inačicu nejednakosti.

Obratno, neka vrijedi (4.15). Za $c = (1-t)x_1 + tx_2$ primijenimo je na x_1 i x_2, pomnožimo redom s $1 - t$ i t te zbrojimo. Članovi s $f'(c)$ poništavaju se i ostaje $f(c) \leqslant (1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$. Ako su $x_1 \neq x_2$ i $0 < t < 1$, obje početne nejednakosti u strogoj inačici stroge su, pa slijedi i stroga konveksnost. □

I bez derivabilnosti konveksna funkcija ima potporni pravac u svakoj unutarnjoj točki c. Za svaki $m \in [f'_-(c), f'_+(c)]$ vrijedi

$$f(x) \geqslant f(c) + m(x-c) \qquad (x \in I).$$

To slijedi iz (4.13), posebno za $x < c$ i $x > c$. Primjerice, za $f(x) = |x|$ i $c = 0$ dopušten je svaki nagib $m \in [-1, 1]$.

Korolar 4.5.12. *Neka je f dvaput derivabilna na otvorenom intervalu I. Tada*

$$f \text{ je konveksna na } I \iff f''(x) \geqslant 0 \text{ za sve } x \in I.$$

Za konkavnost odgovarajući je uvjet $f'' \leqslant 0$. Ako je $f'' > 0$ na I, funkcija je strogo konveksna; ako je $f'' < 0$, ona je strogo konkavna.

Dokaz. Ako je f konveksna, prema teoremu 4.5.10 njezina je derivacija f' rastuća. Zato su kvocijenti $(f'(x+h) - f'(x))/h$ nenegativni za oba predznaka od h, pa je i njihov limes $f''(x)$ nenegativan.

Obratno, neka je $f'' \geqslant 0$. Za $x < y$ Lagrangeov teorem primijenjen na f' daje $f'(y) - f'(x) = f''(\xi)(y-x) \geqslant 0$ za neki $x < \xi < y$. Dakle, f' je rastuća, pa je f konveksna. Ako je $f'' > 0$, ista je razlika strogo pozitivna i slijedi stroga konveksnost. Ostale tvrdnje dobivamo primjenom na $-f$. □

Primjer 4.5.13. Uvjet $f'' > 0$ dovoljan je, ali nije nužan za strogu konveksnost. Za $f(x) = x^4$ derivacija $f'(x) = 4x^3$ strogo je rastuća na $\mathbb{R}$, pa je f strogo konveksna, iako je $f''(0) = 0$. Ne treba pretpostaviti neprekidnost druge derivacije ni u nestrogom kriteriju iz prethodnog korolara.

Primjer 4.5.14 (Nejednakosti iz konveksnosti)**.** Budući da je $(e^x)'' = e^x > 0$, eksponencijalna funkcija strogo je konveksna. Njezina tangenta u 0 daje $e^x \geqslant 1 + x$, s jednakošću samo za $x = 0$. Kako je $(\ln x)'' = -1/x^2 < 0$ za $x > 0$, logaritam je strogo konkavan. Jensenova nejednakost za pozitivne brojeve $a_1, \ldots, a_n$ i težine $\lambda_j \geqslant 0$ zbroja 1 zato daje

$$\ln\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ln a_j = \ln\left(\prod_{j=1}^{n} a_j^{\lambda_j}\right).$$

Strogi rast eksponencijalne funkcije daje ponderiranu aritmetičko-geometrijsku nejednakost

$$\prod_{j=1}^{n} a_j^{\lambda_j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j.$$

Jednakost vrijedi točno kada su svi a_j s pozitivnim težinama jednaki.

Zadatak 4.5.2. Neka je f dvaput derivabilna na otvorenom intervalu I. Pokažite da je f strogo konveksna ako i samo ako je $f'' \geqslant 0$ i f'' nije identički nula ni na jednom nepraznom otvorenom podintervalu od I.

4.5.4. Infleksija i ispitivanje zakrivljenosti

Definicija 4.5.15. *Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom intervalu I i neprekidna u točki $c \in I$. Broj c zovemo* točkom infleksije *ili* prijevojnom točkom *ako postoji $\delta > 0$ s $[c-\delta, c+\delta] \subseteq I$ takav da je f strogo konveksna na $\langle c-\delta, c\rangle$ i strogo konkavna na $\langle c, c+\delta\rangle$, ili obratno. Tada je $(c, f(c))$* točka infleksije grafa.

Uvjet neprekidnosti u c osigurava da doista govorimo o promjeni zakrivljenosti pri prolasku kroz jednu točku grafa. Samo ponašanje na dvama otvorenim intervalima ne određuje vrijednost $f(c)$. Stroge uvjete koristimo da afini dijelovi grafa sami po sebi ne stvaraju točke infleksije.

Propozicija 4.5.16. *Ako je f derivabilna na okolini točke infleksije c, njezina derivacija f' ima u c strogi lokalni ekstrem. Ako uz to postoji $f''(c)$, tada je $f''(c) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f strogo konveksna lijevo i strogo konkavna desno od c. Tada f' strogo raste lijevo i strogo pada desno od c. Pokažimo da su oba jednostrana limesa od f' jednaka $f'(c)$. Monotonost jamči postojanje tih limesa, zasad možda beskonačnih. Za $x < c$ Lagrangeov teorem daje $\xi_x \in \langle x, c\rangle$ takav da je

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(\xi_x).$$

Kada $x \to c^-$, vrijedi $\xi_x \to c^-$, pa limes lijeve strane $f'(c)$ mora biti jednak lijevom limesu od f'. Isti argument vrijedi zdesna.

Za svaki $x < c$ dovoljno blizak c odaberimo y s $x < y < c$. Strogi rast daje $f'(x) < f'(y) \leqslant f'(c)$. Slično je $f'(x) < f'(c)$ za $x > c$ dovoljno blizak c. Dakle, f' ima strogi lokalni maksimum u c. Obrnuti raspored konveksnosti daje strogi lokalni minimum. Ako postoji $f''(c)$, nužni uvjet za ekstrem funkcije f' daje $f''(c) = 0$. □

Teorem 4.5.17. *Neka je f dvaput neprekidno derivabilna na otvorenom intervalu I i neka je $c \in I$ izolirana nultočka od f''. To znači da je $f''(c) = 0$ i da za neki $\delta > 0$ vrijedi $f''(x) \neq 0$ kad je $0 < |x - c| < \delta$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) c je točka infleksije;

(ii) f'' mijenja predznak pri prolasku kroz c;

(iii) f' ima strogi lokalni ekstrem u c.

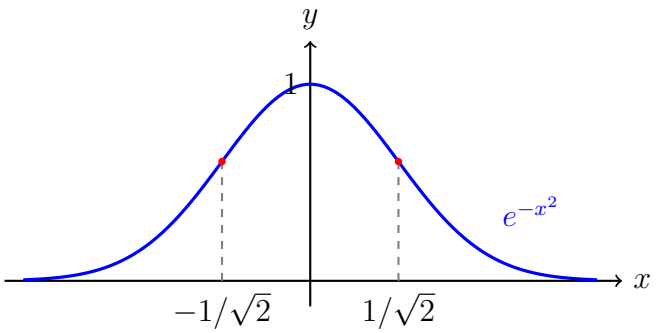
Dokaz. Prema teoremu o međuvrijednosti, f'' na svakoj strani točke c ima stalan strogi predznak: neprekidna je i nigdje nije nula. Ako su predznaci suprotni, kriterij druge derivacije daje strogu konveksnost s jedne i strogu konkavnost s druge strane, pa vrijedi (ii)⇒(i). Prethodna propozicija daje (i)⇒(iii). Ako bi oba predznaka bila pozitivna, f' bi strogo rasla na cijeloj dovoljno maloj okolini c; to slijedi iz Lagrangeova teorema na svakoj strani i neprekidnosti od f' u c. Ako bi oba bila negativna, f' bi strogo padala. Ni jedno ponašanje ne dopušta lokalni ekstrem u c. Zato (iii) povlači suprotne predznake, odnosno (ii). □

Sama jednakost $f''(c) = 0$ ne jamči infleksiju: $f(x) = x^4$ nema infleksiju u 0. Nasuprot tome, $f(x) = x^3$ ima infleksiju u 0, a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ također ima infleksiju u 0, iako ondje nema konačnu prvu ni drugu derivaciju. Za posljednju funkciju vrijedi $f''(x) = -2/(9x^{5/3})$ kad je $x \neq 0$, pa je ona strogo konveksna lijevo i strogo konkavna desno od 0. U tom izrazu $x^{5/3} = (\sqrt[3]{x})^5$ i za negativne x.

Primjer 4.5.18. Za $f(x) = e^{-x^2}$ računamo

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \qquad f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

Funkcija strogo raste na $\langle -\infty, 0\rangle$ i strogo pada na $\langle 0, +\infty\rangle$, pa ima strogi globalni maksimum $f(0) = 1$. Pozitivnost eksponencijalnog faktora pokazuje da je strogo konveksna na $\langle -\infty, -1/\sqrt{2}\rangle$ i $\langle 1/\sqrt{2}, +\infty\rangle$, a strogo konkavna na $\langle -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle$. Točke infleksije grafa jesu $(-1/\sqrt{2}, e^{-1/2})$ i $(1/\sqrt{2}, e^{-1/2})$.



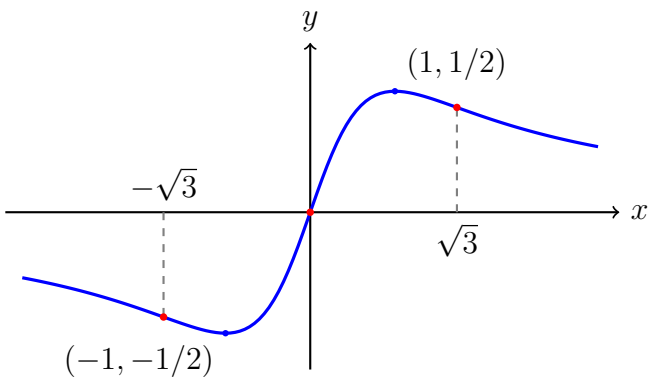
Primjer 4.5.19. Za $g(x) = x/(1 + x^2)$ imamo

$$g'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}, \qquad g''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}.$$

Predznak prve derivacije daje strogi lokalni minimum $g(-1) = -1/2$ i strogi lokalni maksimum $g(1) = 1/2$. Oni su ujedno globalni jer iz $2|x| \leqslant 1 + x^2$ slijedi $|g(x)| \leqslant 1/2$. Druga derivacija negativna je na $\langle -\infty, -\sqrt{3}\rangle$ i $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$, a pozitivna na $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$ i $\langle \sqrt{3}, +\infty\rangle$. Na tim je intervalima, poredanima slijeva nadesno, g redom strogo konkavna, strogo konveksna, strogo konkavna i strogo konveksna. Infleksije su

$$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), \qquad (0, 0), \qquad \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Predznake određujemo iz faktora, za svaki cijeli interval; pritom $g''(0) = 0$ nije znak negativnosti ili pozitivnosti.



Primjer 4.5.20. Za funkciju $f(x) = x + 1/x$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Prema korolaru 4.5.12 funkcija je strogo konkavna na $\langle -\infty, 0\rangle$, a strogo konveksna na $\langle 0, +\infty\rangle$. U nuli nema infleksije jer nula ne pripada domeni, pa ondje nema ni točke grafa. Njezine ekstreme i asimptote obradit ćemo u primjeru 4.6.7.

Zadatak 4.5.3. Neka je $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna. Pretpostavimo da za svake različite $x, y \in \langle a, b\rangle$ postoji jedinstveni $z \in \langle a, b\rangle$ takav da je

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z).$$

Dokažite da je f ili strogo konveksna ili strogo konkavna. Uočite da pretpostavka zahtijeva jedinstvenost u cijeloj domeni, a ne samo između x i y.

Zadatak 4.5.4. Neka je f dvaput derivabilna na otvorenom intervalu I. Dokažite

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c-h) - 2f(c) + f(c+h)}{h^2}.$$

Potom dajte alternativni dokaz korolara 4.5.12: u smjeru od konveksnosti upotrijebite ovaj limes, a u obratu Taylorov teorem 4.3.13 u oblicima

$$\begin{aligned} f(c-h) &= f(c) - f'(c)h + \tfrac{1}{2}f''(\xi)h^2, \\ f(c+h) &= f(c) + f'(c)h + \tfrac{1}{2}f''(\zeta)h^2, \end{aligned}$$

gdje su $c-h < \xi < c < \zeta < c+h$. *Uputa:* Stavite $R(t) = f(c+t) - f(c) - f'(c)t$. Cauchyjev teorem primijenjen na $R(t)$ i t^2 između 0 i h daje broj $\theta_h \in \langle 0, 1\rangle$ takav da

$$\frac{R(h)}{h^2} = \frac{f'(c+\theta_h h) - f'(c)}{2\theta_h h} \longrightarrow \frac{f''(c)}{2}.$$

Zbrojite izraze za h i $-h$. Bez neprekidnosti od f'' ne smije se iz $\xi \to c$ naprosto zaključiti $f''(\xi) \to f''(c)$.

Zadatak 4.5.5. Ispitajte u okolini 0 funkciju

$$F(x) = \begin{cases} x^5 + x^6 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pokažite da je dvaput neprekidno derivabilna, da F' ima strogi lokalni minimum u 0, ali da 0 nije točka infleksije. Objasnite zašto ovo ne proturječi teoremu 4.5.17.

4.6. Ekstremi i asimptote

Derivacije omogućuju da lokalno ponašanje funkcije opisujemo pomoću predznaka. Limesi pritom opisuju ponašanje blizu rubova domene i u beskonačnosti. Povezat ćemo te podatke u postupak ispitivanja funkcije i crtanja njezina grafa.

4.6.1. Određivanje lokalnih ekstrema

Prema Fermatovu teoremu 4.3.2, unutarnja točka lokalnog ekstrema u kojoj postoji derivacija mora biti *stacionarna*, odnosno mora vrijediti $f'(c) = 0$. Taj nužan uvjet nije dovoljan: za $f(x) = x^3$ vrijedi $f'(0) = 0$, ali je funkcija strogo rastuća na $\mathbb{R}$ i u 0 nema lokalni ekstrem.

Teorem 4.6.1 (Kriterij predznaka prve derivacije)**.** *Neka je $\delta > 0$, neka je f neprekidna na $\langle c - \delta, c + \delta \rangle$ i diferencijabilna u svim točkama toga intervala osim možda u c.*

1. *Ako je $f'(x) > 0$ za $c - \delta < x < c$ i $f'(x) < 0$ za $c < x < c + \delta$, onda f u c ima strogi lokalni maksimum.*
2. *Ako je $f'(x) < 0$ za $c - \delta < x < c$ i $f'(x) > 0$ za $c < x < c + \delta$, onda f u c ima strogi lokalni minimum.*
3. *Ako je f' strogo pozitivna na oba navedena intervala, ili strogo negativna na oba, onda f u c nema lokalni ekstrem.*

Dokaz. Pretpostavimo uvjete prve tvrdnje. Za $x < c$ dovoljno blizu c primijenimo Lagrangeov teorem na segment $[x, c]$. Za neki t između x i c vrijedi

$$f(c) - f(x) = f'(t)(c - x) > 0.$$

Za $x > c$ dovoljno blizu c isti teorem na $[c, x]$ daje

$$f(x) - f(c) = f'(t)(x - c) < 0.$$

Dakle, u oba slučaja $f(x) < f(c)$. Druga tvrdnja slijedi primjenom prve na $-f$.

Ako je $f' > 0$ s obje strane, iste jednakosti daju $f(x) < f(c)$ lijevo od c i $f(x) > f(c)$ desno od c. Zato nema lokalnog ekstrema. Slučaj $f' < 0$ svodi se na taj slučaj promjenom predznaka funkcije. □

Derivacija u samoj točki c nije potrebna za ovaj kriterij. Primjerice, funkcija $|x|$ u 0 nije diferencijabilna, a kriterij daje njezin strogi lokalni minimum. Ako derivacija u c postoji, Fermatov teorem već jamči $f'(c) = 0$ u prva dva slučaja.

Zamijenimo li stroge nejednakosti u prva dva uvjeta slabima, dobivamo lokalni ekstrem koji ne mora biti strog. Također, neprekidnost u c ne smijemo izostaviti: promjenom samo vrijednosti $f(c)$ možemo promijeniti postojanje ekstrema, a predznaci derivacije izvan c ostaju isti.

Teorem 4.6.2 (Kriterij prve nenulte derivacije)**.** *Neka je I otvoren interval, $c \in I$, $m \geqslant 2$ i $f \in C^m(I)$. Pretpostavimo da je*

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0, \qquad f^{(m)}(c) \neq 0.$$

Ako je m paran, onda f u c ima strogi lokalni minimum za $f^{(m)}(c) > 0$, a strogi lokalni maksimum za $f^{(m)}(c) < 0$. Ako je m neparan, onda f u c nema lokalni ekstrem.

Dokaz. Taylorova formula s Peanovim ostatkom, teorem 4.3.16, daje

$$f(c+h) - f(c) = h^m \left(\frac{f^{(m)}(c)}{m!} + r(h) \right), \qquad \lim_{h \to 0} r(h) = 0.$$

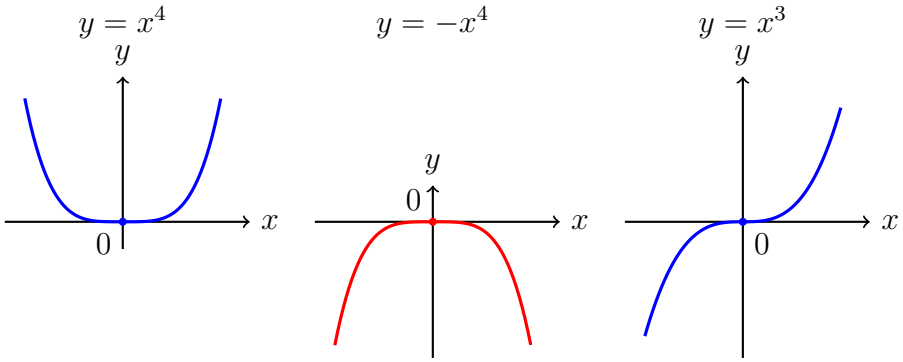
Za dovoljno malen $|h| > 0$ možemo postići

$$|r(h)| < \frac{|f^{(m)}(c)|}{2m!}.$$

Tada izraz u zagradi ima isti predznak kao $f^{(m)}(c)$. Za paran m vrijedi $h^m > 0$ s obje strane nule, pa znak razlike $f(c+h) - f(c)$ daje navedeni strogi ekstrem. Za neparan m ta razlika ima suprotne predznake s različitih strana nule, što isključuje lokalni ekstrem. □

Za $m = 2$ dobivamo uobičajeni kriterij druge derivacije: uz $f'(c) = 0$, nejednakost $f''(c) > 0$ daje strogi lokalni minimum, a $f''(c) < 0$ strogi lokalni maksimum. Ako je $f''(c) = 0$, taj kriterij ne daje zaključak.

Primjer 4.6.3. Funkcije x^4, $-x^4$ i x^3 u nuli imaju prve dvije derivacije jednake nuli. Ipak, prva u nuli ima strogi lokalni minimum, druga strogi lokalni maksimum, a treća nema lokalni ekstrem. Kod prve dvije funkcije odlučuje četvrta derivacija, a kod treće treća derivacija. Posebno, uvjet $f''(c) > 0$ nije nužan za strogi lokalni minimum.



strogi minimum strogi maksimum bez ekstrema

Primjer 4.6.4 (Sve derivacije jednake nuli)**.** Definirajmo

$$F(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Funkcija F ima u nuli strogi globalni minimum, jer je $F(x) > 0 = F(0)$ za svaki $x \neq 0$. Pokazat ćemo da je pritom $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ i $F^{(j)}(0) = 0$ za svaki $j \in \mathbb{N}$.

Za svaki polinom P vrijedi

$$\lim_{x \to 0} P(1/x)e^{-1/x^2} = 0. \tag{4.16}$$

Naime, uz $t = 1/x^2 \to +\infty$ postoji cijeli $M \geqslant 0$ i konstanta $C > 0$ tako da je $|P(1/x)| \leqslant Ct^M$ za dovoljno malen $|x| > 0$. Sada koristimo propoziciju 3.2.8.

Izvan nule uzastopno deriviranje daje

$$F^{(j)}(x) = P_j(1/x)e^{-1/x^2}, \qquad P_0(t) = 1,$$

pri čemu je

$$P_{j+1}(t) = -t^2 P_j'(t) + 2t^3 P_j(t).$$

Time su svi P_j polinomi. Najprije je F neprekidna u nuli prema (4.16). Ako je derivacija reda j već definirana na cijeloj $\mathbb{R}$ i $F^{(j)}(0) = 0$, tada

$$\frac{F^{(j)}(h) - F^{(j)}(0)}{h} = \frac{1}{h} P_j(1/h)e^{-1/h^2} \longrightarrow 0.$$

Stoga postoji i $F^{(j+1)}(0) = 0$. Formula izvan nule i (4.16) zatim pokazuju neprekidnost te nove derivacije u nuli. Indukcija, počevši od $j = 0$, dokazuje sve navedene tvrdnje.

Dakle, prva nenulta derivacija u točki ne mora postojati, čak ni za glatku funkciju sa strogim lokalnim ekstremom.

Pri traženju *globalnih* ekstrema na segmentu treba usporediti vrijednosti u svim kandidatima: u unutarnjim stacionarnim točkama, u unutarnjim točkama gdje derivacija ne postoji te na krajevima segmenta. Neprekidnost na segmentu jamči postojanje globalnog minimuma i maksimuma prema teoremu 3.4.1. Ako kandidata ima beskonačno mnogo, njihovo određivanje samo po sebi još nije konačan postupak.

4.6.2. Asimptote

Definicija 4.6.5. *Neka je $f\colon D \to \mathbb{R}$. Pravac $x = c$ zovemo* okomitom asimptotom *grafa funkcije f ako barem jedan od jednostranih limesa u c, uz približavanje kroz domenu, iznosi $+\infty$ ili $-\infty$. Pritom se podrazumijeva da postoje točke domene proizvoljno blizu c s promatrane strane.*

Ako je D neomeđen odozgo, pravac $y = kx + b$, gdje su $k, b \in \mathbb{R}$, zovemo asimptotom u $+\infty$ *ako je*

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in D}} \big(f(x) - kx - b\big) = 0.$$

Za $k = 0$ asimptota je horizontalna, *a za $k \neq 0$* kosa. *Analogno definiramo asimptotu u $-\infty$ za domenu neomeđenu odozdo.*

Udaljenost točke $(x, f(x))$ od pravca $y = kx + b$ jednaka je

$$\frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Zato definicija upravo kaže da se ta udaljenost približava nuli u promatranom smjeru. Asimptote u $+\infty$ i $-\infty$ mogu biti različite. Graf smije sjeći asimptotu, čak i beskonačno mnogo puta.

Za okomitu asimptotu vrijednost $f(c)$ nije bitna, ako je uopće definirana. Primjerice, funkcija jednaka $1/x^2$ za $x \neq 0$ i jednaka 0 u nuli ima okomitu asimptotu $x = 0$.

Propozicija 4.6.6. *Pravac $y = kx + b$ asimptota je grafa funkcije f u $+\infty$ ako i samo ako vrijedi*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx\big) = b \in \mathbb{R}.$$

U tom je smjeru takva asimptota jedinstvena. Isti zaključci vrijede za $-\infty$.

Dokaz. Ako je $f(x) - kx - b \to 0$, onda je $f(x) - kx \to b$ i

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{f(x) - kx}{x} \longrightarrow k.$$

Obratno, drugi navedeni limes neposredno daje $f(x) - kx - b \to 0$. Jedinstvenost k slijedi iz jedinstvenosti prvog limesa, a zatim jedinstvenost b iz drugoga. Dokaz u $-\infty$ jednak je. □

Postojanje samo prvog limesa nije dovoljno za asimptotu. Za $f(x) = x + \sqrt{x}$ na $\langle 0, +\infty\rangle$ vrijedi $f(x)/x \to 1$, ali $f(x) - x = \sqrt{x} \to +\infty$, pa nema kose ni horizontalne asimptote u $+\infty$.

Limes derivacije također nije nužan za postojanje asimptote. Za

$$f(x) = x + \frac{\sin(x^2)}{x}, \qquad x > 0,$$

vrijedi $|f(x) - x| \leqslant 1/x$, pa je $y = x$ asimptota u $+\infty$. Međutim,

$$f'(x) = 1 + 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

Za nizove $x_n = \sqrt{2\pi n}$ i $y_n = \sqrt{(2n+1)\pi}$ imamo $f'(x_n) = 3$ i $f'(y_n) = -1$. Zato f' nema limes u $+\infty$. Pri računanju asimptote osnovni su limesi iz propozicije 4.6.6.

4.6.3. Ispitivanje funkcije i crtanje grafa

Najprije odredimo domenu, nultočke i moguće simetrije. Zatim ispitujemo limese na rubovima domene i u beskonačnosti, intervale monotonosti i lokalne ekstreme, pa konveksnost, konkavnost i moguće infleksije. Dobivene podatke povezujemo u skicu. Predznak derivacije određujemo na cijelom promatranom intervalu: vrijednost u jednoj točki dovoljna je tek kada je već opravdano da se predznak na tom intervalu ne mijenja.

Primjer 4.6.7. Ispitajmo funkciju

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}, \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Funkcija je neparna i nema nultočaka jer je $x^2 + 1 > 0$. Njezini jednostrani limesi u nuli su

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Dakle, $x = 0$ okomita je asimptota. Budući da je $f(x) - x = 1/x \to 0$ za $x \to \pm\infty$, pravac $y = x$ kosa je asimptota u oba smjera.

Prva derivacija je

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Nazivnik je pozitivan na domeni, pa je $f'(x) > 0$ za $|x| > 1$, a $f'(x) < 0$ za $0 < |x| < 1$. Dobivamo tablicu

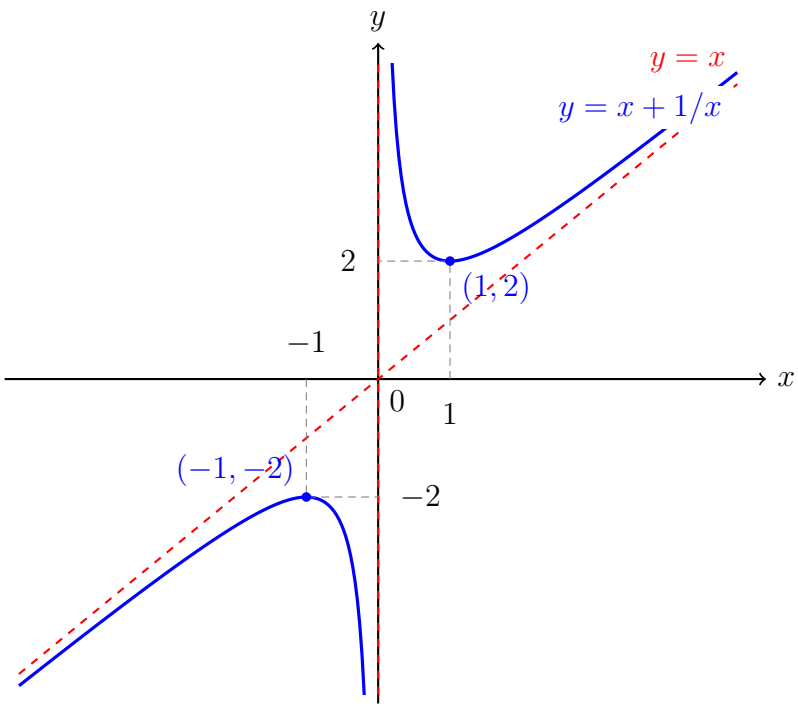
x	$\langle -\infty, -1\rangle$	$\langle -1, 0\rangle$	$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 1, +\infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Prema teoremu 4.6.1, u $x = -1$ je strogi lokalni maksimum s vrijednošću -2, a u $x = 1$ strogi lokalni minimum s vrijednošću 2. To nisu globalni ekstremi na cijeloj domeni, jer je funkcija neomeđena i odozgo i odozdo.

Zakrivljenost ove funkcije već smo proučili u primjeru 4.5.20.

Na pozitivnom dijelu domene vrijedi $f(x) \geqslant 2$, a na negativnom $f(x) \leqslant -2$. Iz neprekidnosti i navedenih limesa slijedi da je slika funkcije

$$f(D) = \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle.$$



Zadatak 4.6.1. Odredite sve lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 1.$$

Zatim odredite njezin globalni minimum i maksimum na segmentu $[-2, 5]$. Obrazložite zašto popis kandidata na segmentu mora sadržavati i njegove krajeve.

Zadatak 4.6.2. Za $f(x) = x^4 e^{-x^2}$ odredite stacionarne točke i sve lokalne ekstreme. Za ekstrem u nuli upotrijebite teorem 4.6.2 i razvoj $e^{-x^2} = 1 + o(1)$ kada $x \to 0$. Usporedite taj postupak s kriterijem prve derivacije. Odredite i globalne ekstreme.

Zadatak 4.6.3. Ispitajte funkciju

$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}.$$

Odredite domenu, nultočke, asimptote, intervale monotonosti, ekstreme. Skicirajte graf koristeći i zapis $g(x) = x + 2 + 1/(x - 2)$.

4.7. Interpolacija i Newtonova metoda

Derivacije ne služe samo za opisivanje ponašanja funkcije. One omogućuju i ocjenjivanje pogreške kada funkciju zamijenimo jednostavnijom funkcijom ili kada njezinu nultočku računamo približno. Razmotrit ćemo interpolaciju polinomima i metodu tangenti.

4.7.1. Lagrangeov interpolacijski polinom

Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. S $\mathcal{P}_n$ označavamo skup polinoma oblika

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Neki od posljednjih koeficijenata smiju biti jednaki nuli; posebno, u $\mathcal{P}_n$ pripada i nulpolinom.

Definicija 4.7.1. *Neka su $x_0, \ldots, x_n$ međusobno različiti realni brojevi i neka su zadane vrijednosti $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Polinom $p \in \mathcal{P}_n$ za koji je*

$$p(x_i) = y_i \qquad (i = 0, \ldots, n)$$

zovemo interpolacijskim polinomom *zadanih podataka. Brojevi $x_0, \ldots, x_n$ jesu* čvorovi interpolacije.

Za dva različita čvora tražimo pravac kroz dvije zadane točke, a za tri različita čvora polinom stupnja najviše dva. U drugom slučaju graf može biti i pravac: stupanj interpolacijskog polinoma nije nužno jednak broju čvorova umanjenom za jedan.

Lema 4.7.2. *Polinom koji nije nulpolinom i ima stupanj najviše n ima najviše n različitih realnih nultočaka.*

Dokaz. Ako je c nultočka polinoma p, iz identiteta

$$x^k - c^k = (x - c)(x^{k-1} + x^{k-2}c + \cdots + c^{k-1}) \qquad (k \geqslant 1)$$

slijedi da je $p(x) = p(x) - p(c) = (x - c)q(x)$ za neki polinom q stupnja za jedan manjeg od stupnja p. Svaka druga nultočka od p nultočka je od q. Tvrdnja sada slijedi indukcijom po stupnju: nenulti konstantni polinom nema nultočaka, a izdvajanjem jednog faktora broj mogućih preostalih nultočaka smanjuje se za jedan. □

Teorem 4.7.3 (Lagrangeov interpolacijski polinom)**.** *Za $n+1$ međusobno različitih čvorova $x_0, \ldots, x_n$ i proizvoljne vrijednosti $y_0, \ldots, y_n$ postoji točno jedan interpolacijski polinom $p \in \mathcal{P}_n$. Dan je formulom*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x), \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{4.17}$$

Za $n = 0$ produkt u ovoj formuli prazan je i jednak 1.

Dokaz. Nazivnici u (4.17) nisu nula jer su čvorovi različiti. Svaki L_i polinom je stupnja najviše n i zadovoljava

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

Uistinu, za $k = i$ svi faktori jednaki su 1, a za $k \neq i$ jedan od brojnika jednak je nuli. Zato polinom iz navedene formule pripada $\mathcal{P}_n$ i u čvoru x_k poprima vrijednost y_k. Time smo dokazali postojanje.

Ako bi p i q bila dva takva polinoma, polinom $p - q \in \mathcal{P}_n$ imao bi $n + 1$ različitih nultočaka. Prema lemi 4.7.2 mora biti nulpolinom, pa je $p = q$. □

Primjer 4.7.4. Interpolirajmo funkciju $f(x) = 1/x$ u čvorovima $1, 2, 3$. Pripadajući polinomi L_i jesu

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{2}, \qquad L_1(x) = -(x-1)(x-3), \qquad L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}.$$

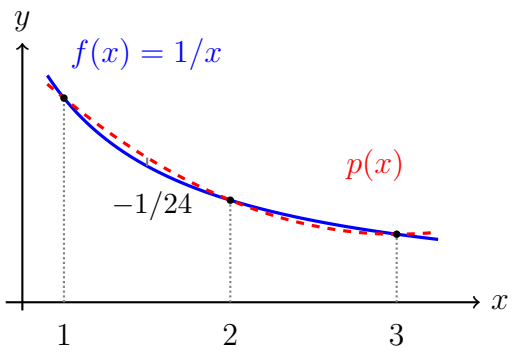
Stoga je traženi polinom

$$p(x) = L_0(x) + \frac{1}{2}L_1(x) + \frac{1}{3}L_2(x) = \frac{x^2}{6} - x + \frac{11}{6}.$$

U čvorovima su vrijednosti funkcije i polinoma jednake. Između čvorova općenito nisu jednake; primjerice,

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}, \qquad p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{24}.$$

Razlika je $-1/24$.



Polinom je određen samo vrijednostima u čvorovima. Koliko dobro aproksimira funkciju izvan čvorova, ovisi i o ponašanju funkcije između njih.

4.7.2. Pogreška interpolacije

Uvedimo *čvorni polinom*

$$\omega(x) := \prod_{j=0}^{n}(x - x_j).$$

Njegov stupanj jednak je $n + 1$, a vodeći koeficijent jednak 1, pa je $\omega^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

Teorem 4.7.5 (Pogreška interpolacije)**.** *Neka je $a < b$, neka su $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ međusobno različiti i neka je f neprekidna na $[a, b]$ te $n + 1$ puta derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Neka $p \in \mathcal{P}_n$ interpolira vrijednosti $f(x_i)$. Za svaki $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ postoji ξ između najmanjeg i najvećeg od brojeva $x, x_0, \ldots, x_n$ takav da je*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j). \tag{4.18}$$

U čvorovima je pogreška jednaka nuli.

Dokaz. Fiksirajmo x koji nije čvor. Budući da je $\omega(x) \neq 0$, možemo definirati broj

$$A := \frac{f(x) - p(x)}{\omega(x)}$$

i pomoćnu funkciju, sada s varijablom t,

$$G(t) := f(t) - p(t) - A\omega(t).$$

Funkcija G iščezava u svih $n+1$ čvorova i u točki x, dakle ima $n+2$ različitih nultočaka. Poredajmo te nultočke po veličini. Prema Rolleovu teoremu 4.3.3, između svake dvije susjedne nultočke nalazi se nultočka od G'. Tako dobivamo $n + 1$ različitih nultočaka od G'. Ponovimo li postupak, dobivamo n različitih nultočaka od G'', i tako redom. Napokon postoji točka ξ strogo između krajnjih početnih nultočaka u kojoj je $G^{(n+1)}(\xi) = 0$. Sve naredne primjene Rolleova teorema odvijaju se na segmentima unutar $\langle a, b\rangle$; potrebna neprekidnost odgovarajućih derivacija ondje slijedi iz postojanja njihovih sljedećih derivacija.

Kako je $p^{(n+1)} = 0$, slijedi

$$0 = G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - A(n + 1)!.$$

Uvrstimo dobiveni izraz za A u njegovu definiciju. Time dobivamo (4.18). Za $x = x_i$ jednakost $f(x) - p(x) = 0$ slijedi iz interpolacijskih uvjeta. □

Točka x u ovom teoremu smije biti i izvan najmanjeg segmenta koji sadrži čvorove, pod uvjetom da ostaje u $[a, b]$. Tada se točka ξ također može nalaziti izvan segmenta čvorova. Zato za ocjenu pogreške trebamo kontrolirati derivaciju na cijelom segmentu koji sadrži i čvorove i točku x.

Ako je $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ za $t \in \langle a, b\rangle$, iz prethodnog teorema slijedi ocjena

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} |\omega(x)| \qquad (x \in [a, b]).$$

Ona vrijedi i u čvorovima, jer su tada obje strane jednake nuli. Ako je $f \in C^{n+1}([a, b])$, za M možemo uzeti $\max_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Lema 4.7.6. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ i $x_j = x_0 + jh$ za $j = 0, \ldots, n$. Tada za svaki $x \in [x_0, x_n]$ vrijedi*

$$|\omega(x)| < n! h^{n+1}.$$

Dokaz. U čvorovima je tvrdnja očita jer je $\omega(x) = 0$. Ako x nije čvor, postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x_{i-1} < x < x_i$. Za čvorove lijevo i desno od x imamo

$$0 < x - x_j < (i - j)h \qquad (0 \leqslant j \leqslant i - 1),$$

$$0 < x_j - x < (j - i + 1)h \qquad (i \leqslant j \leqslant n).$$

Množenjem dobivamo

$$|\omega(x)| < i!(n + 1 - i)! h^{n+1}.$$

Preostaje primijetiti da je $i!(n + 1 - i)! \leqslant n!$. Uistinu, budući da je $n \geqslant i$, vrijedi

$$i! = \prod_{j=1}^{i-1} (j + 1) \leqslant \prod_{j=1}^{i-1} (n + 1 - i + j) = \frac{n!}{(n + 1 - i)!}.$$

Za $i = 1$ oba produkta prazna su i jednaka 1. □

U uvjetima ove leme, ako je $|f^{(n+1)}| \leqslant M$ na intervalu između krajnjih čvorova, slijedi

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{M}{n + 1} h^{n+1} \qquad (x \in [x_0, x_n]).$$

Uvjet $x \in [x_0, x_n]$ bitan je: čvorni polinom ne može biti omeđen istom konstantom na cijelom realnom pravcu. Ova ocjena također sama po sebi ne dokazuje da interpolacija konvergira kada broj čvorova raste. Tada se mijenja i red derivacije koju treba ocijeniti.

Zadatak 4.7.1. Za polinome L_i iz (4.17) dokažite

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1, \qquad \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x) = x^k \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Uputa: Primijenite jedinstvenost interpolacijskog polinoma.

Zadatak 4.7.2. Neka su $x_0, \ldots, x_n$ različiti pozitivni čvorovi, a p interpolacijski polinom funkcije $f(x) = 1/x$. Dokažite da za $x \neq 0$ vrijedi točan identitet

$$\frac{1}{x} - p(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x\, x_0 x_1 \cdots x_n} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Uputa: Polinom $1 - xp(x)$ iščezava u svim čvorovima. Njegovu konstantu uz čvorni polinom odredite u točki 0. Provjerite pogrešku u primjeru 4.7.4.

4.7.3. Metoda tangenti

Želimo približno riješiti jednadžbu $f(x) = 0$. Ako je x_0 početna aproksimacija, funkciju u njezinoj blizini zamjenjujemo linearnom aproksimacijom

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Nultočka te linearne funkcije, kada je $f'(x_0) \neq 0$, jest

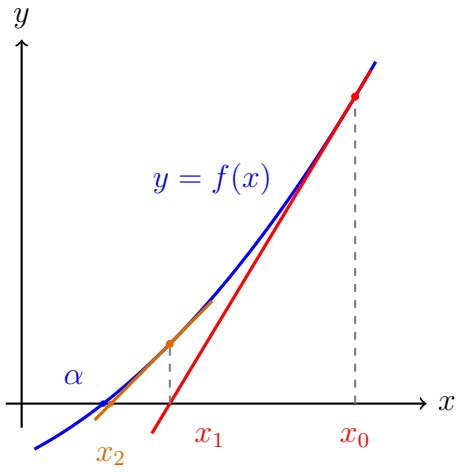
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Geometrijski, x_1 je apscisa sjecišta tangente na graf u točki $(x_0, f(x_0))$ s osi apscisa.

Definicija 4.7.7. Newtonova metoda*, ili* metoda tangenti*, zadaje niz aproksimacija rekurzijom*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Svaki korak zahtijeva da je x_n u domeni derivacije i da je $f'(x_n) \neq 0$. Ako je $f(x_n) = 0$, nultočka je pronađena i postupak možemo zaustaviti.



Na slici je $f(x) = x^2 - 2$, $x_0 = 3$, $x_1 = 11/6$ i $x_2 = 193/132$. Tangente daju sve bliže aproksimacije nultočke $\alpha = \sqrt{2}$. Za opću funkciju takvo ponašanje treba dokazati.

4.7.4. Konvergencija Newtonove metode

Teorem 4.7.8. *Neka je $a < b$, $f \in C^2([a, b])$ i neka vrijedi*

$$f(a)f(b) < 0, \qquad f'(x) \neq 0, \qquad f''(x) \neq 0 \quad (x \in [a, b]).$$

Tada f ima jedinstvenu nultočku $\alpha \in \langle a, b\rangle$. Odaberimo $x_0 \in [a, b]$ tako da je

$$f(x_0)f''(x_0) > 0.$$

Takav izbor moguć je na jednom od krajeva segmenta. Newtonovi iterati dobro su definirani, ostaju između x_0 i α te monotono konvergiraju prema α. Ako stavimo

$$m := \min_{x\in[a,b]} |f'(x)| > 0, \qquad M := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|,$$

vrijedi ocjena pogreške

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{M}{2m}|x_n - \alpha|^2 \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{4.19}$$

Dokaz. Postojanje nultočke slijedi iz teorema o međuvrijednostima. Neprekidne funkcije f' i f'' ne iščezavaju, pa svaka ima stalan predznak na $[a, b]$. Iz stalnog predznaka f' slijedi da je f strogo monotona, pa je nultočka jedinstvena. Vrijednosti $f(a)$ i $f(b)$ suprotnih su predznaka; jedna zato ima isti predznak kao f''. Taj kraj segmenta možemo izabrati za x_0.

Dokazat ćemo da svaki korak približava iterat nultočki i zadržava ga na istoj strani nultočke. Neka je $x \in [a, b] \setminus \{\alpha\}$ i neka $f(x)$ ima isti predznak kao f''. Pišimo $x^+ = x - f(x)/f'(x)$. Taylorov teorem 4.3.13 daje

$$0 = f(\alpha) = f(x) + f'(x)(\alpha - x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(\alpha - x)^2$$

za neki ξ između x i α. Preuređivanjem slijedi točan identitet

$$x^+ - \alpha = \frac{f''(\xi)}{2f'(x)}(x - \alpha)^2. \tag{4.20}$$

Prema Lagrangeovu teoremu 4.3.6, $f(x) = f'(\eta)(x - \alpha)$ za neki η između x i α. Budući da f' ima stalan predznak, izraz $x - \alpha$ ima isti predznak kao $f(x)/f'(x)$. Zbog pretpostavke o predznaku $f(x)$, to je ujedno predznak desne strane (4.20). Dakle, x^+ je na istoj strani nultočke kao x. S druge strane,

$$x^+ - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

ima suprotan predznak od $x - \alpha$. Stoga x^+ leži strogo između x i α.

Na cijelom dijelu segmenta između x_0 i α, osim u samoj nultočki, f ima isti predznak kao $f(x_0)$. Početni uvjet zato omogućuje da upravo dokazani korak primjenjujemo induktivno. Svi iterati ostaju u segmentu i derivacija u njima nije nula. Ako je $x_0 > \alpha$, niz strogo pada i omeđen je odozdo s α; ako je $x_0 < \alpha$, strogo raste i omeđen je odozgo s α. U oba slučaja postoji limes $\ell \in [a, b]$.

Iz rekurzije imamo

$$f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1}).$$

Prijelazom na limes, uz neprekidnost f i f', dobivamo $f(\ell) = 0$. Jedinstvenost nultočke daje $\ell = \alpha$.

Neprekidnost na segmentu jamči postojanje minimuma m i maksimuma M; minimum m strogo je pozitivan jer f' nigdje ne iščezava. Uvrštavanjem $x = x_n$ u (4.20) i uzimanjem apsolutnih vrijednosti dobivamo (4.19). □

Ocjenu oblika $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant C|x_n - \alpha|^2$ nazivamo *kvadratnom ocjenom pogreške*. Ona opisuje veliku brzinu konvergencije kada je pogreška već mala. Sama po sebi, bez dodatnog uvjeta na početnu pogrešku, ne jamči da pogreške padaju. U prethodnom teoremu konvergenciju smo najprije dokazali monotonošću i omeđenošću iterata.

U računalnom računanju ocjena vrijedi za idealne iteracije s točnim računskim operacijama. Zaokruživanje naposljetku ograničava točnost koja se može postići.

Ako je $f(x) = Ax + B$ i $A \neq 0$, druga derivacija jednaka je nuli, ali Newtonova metoda odmah daje točno rješenje:

$$x_1 = x_0 - \frac{Ax_0 + B}{A} = -\frac{B}{A}.$$

Uvjet stalnog predznaka druge derivacije dovoljan je za prethodni izbor početne točke na cijelom segmentu. Za početnu točku dovoljno blisku jednostavnoj nultočki taj uvjet nije potreban.

Teorem 4.7.9 (Lokalna konvergencija Newtonove metode)**.** *Neka je I otvoren interval, $f \in C^2(I)$, $\alpha \in I$, $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$. Postoji $\rho > 0$ takav da za svaki $x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ Newtonova metoda ostaje u tom segmentu i konvergira prema α. Pritom vrijedi kvadratna ocjena pogreške s konstantom koja ne ovisi o izboru x_0 u tom segmentu.*

Dokaz. Zbog neprekidnosti f' odaberimo $r > 0$ tako da je $J = [\alpha - r, \alpha + r] \subseteq I$ i da f' ne iščezava na J. Stavimo

$$m = \min_J |f'| > 0, \qquad M = \max_J |f''|, \qquad K = \frac{M}{2m},$$

pa odaberimo $0 < \rho \leqslant r$ tako da je $K\rho \leqslant 1/2$. Ako je $K = 0$, svaki $0 < \rho \leqslant r$ zadovoljava taj uvjet. Za $|x - \alpha| \leqslant \rho$ Taylorov identitet (4.20) daje

$$|x^+ - \alpha| \leqslant K|x - \alpha|^2 \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha| \leqslant \rho.$$

Za $x = \alpha$ ista ocjena vrijedi jer je $x^+ = \alpha$. Dakle, novi iterat ostaje u manjem segmentu. Indukcijom svi iterati ostaju u njemu i vrijedi

$$|x_n - \alpha| \leqslant 2^{-n}|x_0 - \alpha| \longrightarrow 0.$$

Prva nejednakost u prethodnoj ocjeni ujedno daje traženu kvadratnu ocjenu s konstantom K. □

Primjer 4.7.10. Bez prikladnog izbora početne točke Newtonova metoda može zakazati. Za $f(x) = x^3 - 2x + 2$ i $x_0 = 0$ dobivamo

$$x_1 = 0 - \frac{2}{-2} = 1, \qquad x_2 = 1 - \frac{1}{1} = 0.$$

Iterati se zauvijek izmjenjuju između 0 i 1. Derivacija u tim točkama nije nula, ali niz ne konvergira. Funkcija ipak ima nultočku između -2 i -1. Ako pak za $f(x) = x^2 - 1$ uzmemo $x_0 = 0$, već prvi korak nije definiran jer je $f'(0) = 0$.

4.7.5. Računanje korijena i provjera točnosti

Korolar 4.7.11. *Neka je $b > 0$ i $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Ako je $b \neq 1$, niz zadan s*

$$x_0 = \max\{1, b\}, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{m}\left((m-1)x_n + \frac{b}{x_n^{m-1}}\right)$$

strogo pada prema $\sqrt[m]{b}$ i zadovoljava kvadratnu ocjenu pogreške. Za $b = 1$ isti je niz konstantno jednak 1.

Dokaz. Za $b \neq 1$ primijenimo teorem 4.7.8 na funkciju $f(x) = x^m - b$ na segmentu

$$[\min\{1, b\}, \max\{1, b\}].$$

Vrijednost funkcije na lijevom kraju strogo je negativna, a na desnom strogo pozitivna. Na tom pozitivnom segmentu vrijedi

$$f'(x) = mx^{m-1} > 0, \qquad f''(x) = m(m-1)x^{m-2} > 0.$$

Desni kraj zato zadovoljava početni uvjet teorema. Newtonova rekurzija nakon sređivanja ima navedeni oblik, a njezin je limes jedinstveni pozitivni broj čija je m-ta potencija b. Za $b = 1$ rekurzija odmah daje $x_n = 1$ za svaki n. □

Postojanje korijena dokazali smo ranije iz potpunosti realnih brojeva. Ovdje smo dobili postupak za njegovo računanje i ocjenu brzine tog postupka. Za $m = 1$ korijen je sam broj b, pa iteriranje nije potrebno.

Za provjeru postignute točnosti korisna je i *naknadna ocjena*. Ako su x i nultočka α u segmentu na kojem je $|f'| \geqslant m > 0$, Lagrangeov teorem daje

$$f(x) = f'(\eta)(x - \alpha), \qquad |x - \alpha| \leqslant \frac{|f(x)|}{m}.$$

Desna strana može se izračunati bez poznavanja α. Mala vrijednost $|f(x)|$ daje korisnu ocjenu pogreške tek kada imamo i pozitivnu donju ogradu za $|f'|$.

Primjer 4.7.12. Računajmo $\sqrt[3]{5}$ pomoću $f(x) = x^3 - 5$. Na segmentu $[1, 2]$ imamo

$$f(1) = -4 < 0 < f(2) = 3, \qquad f'(x) = 3x^2 > 0, \qquad f''(x) = 6x > 0.$$

Možemo zato početi s $x_0 = 2$ i računati

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{5}{x_n^2}\right).$$

Ovdje je $m = 3$ i $M = 12$, pa

$$|x_{n+1} - \sqrt[3]{5}| \leqslant 2|x_n - \sqrt[3]{5}|^2, \qquad |x_n - \sqrt[3]{5}| \leqslant \frac{|x_n^3 - 5|}{3}.$$

Prvih nekoliko iterata prikazano je u tablici.

n	x_n (zaokruženo)	gornja ograda za $\lvert x_n - \sqrt[3]{5}\rvert$
0	2.000000000000000000	1
1	1.750000000000000000	0.12
2	1.710884353741496599	0.0027
3	1.709976428916974793	$1.5 \cdot 10^{-6}$
4	1.709975946676832989	$4 \cdot 10^{-13}$
5	1.709975946676696989	$3.2 \cdot 10^{-26}$

Ograde su dobivene iz $|x_n^3 - 5|/3$ i zaokružene naviše. Odnose se na točne iterate rekurzije, a ne na njihove zaokružene zapise u srednjem stupcu. Svi su ti iterati racionalni brojevi, pa se ograde mogu provjeriti i točnim računanjem s razlomcima.

Zadatak 4.7.3. Za $b > 0$ i $x_0 > \sqrt{b}$ Newtonova metoda daje

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right).$$

Izravno dokažite identitet

$$x_{n+1} - \sqrt{b} = \frac{(x_n - \sqrt{b})^2}{2x_n}.$$

Pomoću njega dokažite da iterati ostaju iznad $\sqrt{b}$ i da strogo padaju prema tom broju. Dobiva li se isti zaključak ako je $0 < x_0 < \sqrt{b}$?

Zadatak 4.7.4. Primijenite Newtonovu metodu na $f(x) = (x - \alpha)^m$, gdje je $m \geqslant 2$, i počnite s $x_0 \neq \alpha$. Izračunajte točan izraz za $x_n - \alpha$. Objasnite zašto ovdje konvergencija nije kvadratna i koja pretpostavka teorema 4.7.9 nije zadovoljena.

Poglavlje 5

Riemannov integral

Derivacijom opisujemo lokalnu promjenu funkcije. Integral nastaje zbrajanjem doprinosa na malim dijelovima intervala. Površina ispod grafa i rad promjenjive sile dva su prirodna primjera takva postupka.

Najprije ćemo integral definirati pomoću donjih i gornjih aproksimacija, bez pozivanja na primitivne funkcije. Potom ćemo dokazati vezu integrala i derivacije, razviti metode računanja te ih primijeniti u geometriji. Na kraju ćemo definiciju proširiti na neograničene intervale i na funkcije koje nisu ograničene blizu nekoga kraja intervala.

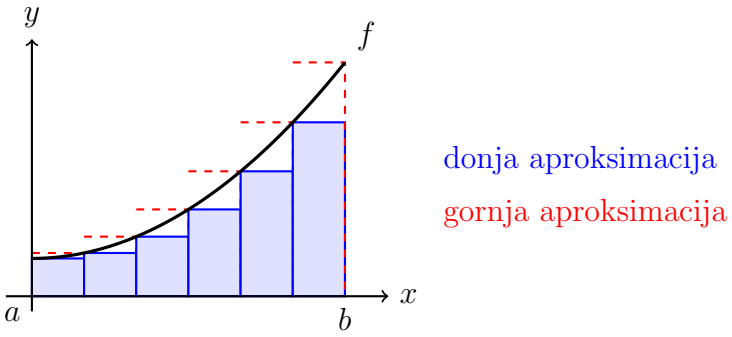
5.1. Darbouxove i Riemannove sume

5.1.1. Površina i rad kao motivacija

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena nenegativna funkcija. Želimo odrediti površinu skupa

$$E_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Podijelimo interval $[a,b]$ na manje intervale. Nad svakim od njih možemo upisati pravokutnik čija visina ne prelazi nijednu vrijednost funkcije, odnosno opisati pravokutnik čija je visina barem svaka vrijednost funkcije na tom intervalu. Zbrojevi površina tih pravokutnika daju donju i gornju aproksimaciju.



Ako se te aproksimacije mogu proizvoljno približiti, određuju jedinstven broj koji uzimamo za površinu. Taj ćemo postupak najprije provesti analitički. Time ne pretpostavljamo da smo već definirali površinu svakoga podskupa ravnine ili razvili opću teoriju mjere.

Slično, neka $f(x)$ označava komponentu sile u smjeru koordinatne osi. Za konstantnu silu c rad pri pomaku od a do $b > a$ jest $c(b-a)$. Za promjenjivu silu na svakom malom intervalu uzmemo jednu njezinu vrijednost te zbrojimo približne doprinose radu. Sila i rad mogu biti negativni: znak izražava odnos smjera sile i smjera pomaka. Stoga ćemo integral definirati i za funkcije koje mijenjaju predznak.

5.1.2. Podjele, sume i profinjenja

U ovom odjeljku uvijek pretpostavljamo $a < b$ i da je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija.

Definicija 5.1.1. Podjela *ili* subdivizija *segmenta* $[a,b]$ *jest konačan skup točaka*

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Pišemo $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Norma podjele *jest duljina njezina najvećega dijela:*

$$\|P\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k.$$

Za svako k *odaberimo* označenu točku $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. *Pripadna* Riemannova suma *jest*

$$\sigma(f; P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Označene točke mogu biti krajevi intervala ili njihove unutarnje točke. Broj dijelova sam po sebi ne mjeri finoću podjele: možemo dodavati točke samo u lijevoj polovini segmenta i ostaviti desnu polovinu nepodijeljenu. Za približavanje integralom bit će važan uvjet $\|P\| \to 0$.

Definicija 5.1.2. *Za podjelu* P *stavimo*

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f, \qquad M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f.$$

Donja *i* gornja Darbouxova suma *jesu brojevi*

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \qquad U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k.$$

Za neprazan skup $J \subseteq [a,b]$ *broj*

$$\omega(f; J) = \sup_J f - \inf_J f$$

zovemo oscilacijom *funkcije* f *na* J.

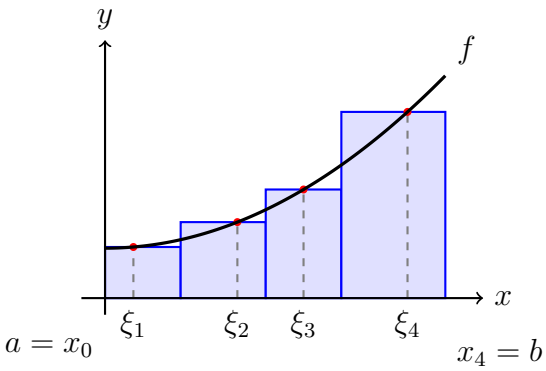
Infimum i supremum postoje kao konačni brojevi zbog ograničenosti funkcije i potpunosti $\mathbb{R}$. Ne moraju biti dosegnuti. Zato ih u definiciji ne smijemo bez dodatnih pretpostavki zamijeniti minimumom i maksimumom.

Ako su $m = \inf_{[a,b]} f$ i $M = \sup_{[a,b]} f$, tada

$$m(b-a) \leqslant L(f,P) \leqslant \sigma(f;P,\xi) \leqslant U(f,P) \leqslant M(b-a). \tag{5.1}$$

Također vrijedi

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \omega(f;[x_{k-1},x_k])\Delta x_k.$$



Na slici su visine pravokutnika vrijednosti $f(\xi_k)$. Riemannova suma zato općenito nije ni donja ni gornja aproksimacija.

Definicija 5.1.3. *Podjela Q je* profinjenje *podjele P ako je $P \subseteq Q$, odnosno ako se dobiva dodavanjem točaka podjeli P.*

Lema 5.1.4. *Ako je Q profinjenje podjele P, tada*

$$L(f,P) \leqslant L(f,Q) \leqslant U(f,Q) \leqslant U(f,P).$$

Za bilo koje dvije podjele P i Q vrijedi

$$L(f,P) \leqslant U(f,Q).$$

Dokaz. Najprije dodajmo samo jednu točku $c \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle$. Infimumi na $[x_{k-1}, c]$ i $[c, x_k]$ barem su m_k, a supremumi su najviše M_k. Stoga se pribrojnik $m_k \Delta x_k$ u donjoj sumi zamjenjuje zbrojem koji je barem

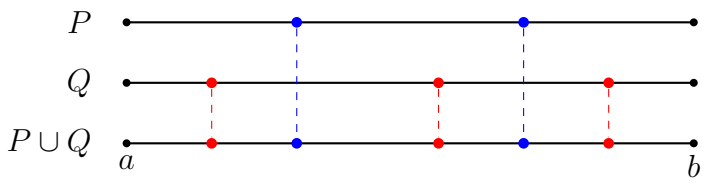
$$m_k(c - x_{k-1}) + m_k(x_k - c) = m_k \Delta x_k.$$

Jednako se dokazuje da gornja suma ne raste. Dodavanjem preostalih točaka jedne po jedne dobivamo prvu tvrdnju.

Za drugu tvrdnju uzmemo zajedničko profinjenje $P \cup Q$. Tada

$$L(f,P) \leqslant L(f,P \cup Q) \leqslant U(f,P \cup Q) \leqslant U(f,Q).$$

□



Važno je razlikovati profinjenje od podjele s manjom normom. Iz $\|Q\| < \|P\|$ ne slijedi $P \subseteq Q$, pa se prva tvrdnja leme ne može primijeniti samo na temelju usporedbe normi.

5.1.3. Definicija integrala i Darbouxov kriterij

Definicija 5.1.5. Donji *i* gornji integral *ograničene funkcije* f *na* $[a,b]$ *definirani su s*

$$\underline{I}(f) = \sup_P L(f,P), \qquad \overline{I}(f) = \inf_P U(f,P),$$

gdje P *prolazi svim podjelama segmenta* $[a,b]$. *Funkcija je* Riemannovo integrabilna *na* $[a,b]$ *ako je* $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. *Zajedničku vrijednost zovemo* Riemannovim integralom *i označavamo*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Skup svih takvih funkcija označavamo s $\mathcal{R}([a,b])$.

Skupovi svih donjih i svih gornjih suma neprazni su i ograničeni prema (5.1). Njihov supremum i infimum zato postoje. Iz leme 5.1.4 slijedi

$$L(f,P) \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f) \leqslant U(f,P) \qquad \text{za svaku podjelu } P.$$

Naime, svaka donja suma manja je ili jednaka svakoj gornjoj sumi, pa je i supremum donjih suma najviše infimum gornjih suma.

Varijabla integracije samo je pomoćna oznaka:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

U ovoj definiciji dx dio je oznake za integral; nismo uveli beskonačno male realne brojeve.

Teorem 5.1.6 (Darbouxov kriterij)**.** *Ograničena funkcija* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna je ako i samo ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji podjela* P *takva da je*

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Dokaz. Ako takva podjela postoji za svaki $\varepsilon > 0$, onda

$$0 \leqslant \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leqslant U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Stoga je $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$.

Obratno, neka je ta zajednička vrijednost I. Po definiciji supremuma i infimuma postoje podjele P_1, P_2 za koje je

$$L(f, P_1) > I - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad U(f, P_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Na zajedničkom profinjenju $P = P_1 \cup P_2$ vrijedi

$$U(f, P) - L(f, P) \leqslant U(f, P_2) - L(f, P_1) < \varepsilon.$$

□

Primjer 5.1.7. Ako je $f(x) = c$ za sve $x \in [a, b]$, gdje je $c \in \mathbb{R}$, onda su na svakoj podjeli obje Darbouxove sume jednake $c(b - a)$. Zato

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a).$$

Nema potrebe pretpostavljati $c \geqslant 0$.

Primjer 5.1.8. Dirichletova funkcija na $[0, 1]$, definirana s

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nije Riemannovo integrabilna. Svaki interval pozitivne duljine sadrži racionalan i iracionalan broj, pa je na svakoj podjeli $L(d, P) = 0$ i $U(d, P) = 1$.

Jedna posebno odabrana vrsta Riemannovih suma ne može riješiti pitanje integrabilnosti: za racionalne označene točke sve su sume jednake 1, a za iracionalne jednake 0, neovisno o finoći podjele.

5.1.4. Zašto Riemannove sume konvergiraju

Darbouxov kriterij govori o postojanju povoljne podjele. Za primjene trebamo jaču tvrdnju: *svaka* dovoljno fina podjela mora davati dobru aproksimaciju, uz *svaki* izbor označenih točaka.

Lema 5.1.9. *Ako je $f \in \mathcal{R}([a, b])$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$\|P\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Dokaz. Odaberimo $B \geqslant 0$ tako da je $|f| \leqslant B$ i fiksirajmo podjelu $P_0 = \{t_0, \ldots, t_m\}$ za koju je $U(f, P_0) - L(f, P_0) < \varepsilon/2$.

Intervale proizvoljne podjele P razdijelimo u dvije skupine. U prvoj su oni koji u svojoj unutrašnjosti sadrže neku unutarnju točku $t_1, \ldots, t_{m-1}$. Takvih intervala ima najviše $m-1$; zbroj njihovih duljina najviše je $(m-1)\|P\|$, a oscilacija na svakome najviše $2B$.

Svaki preostali interval sadržan je u nekom $[t_{j-1}, t_j]$. Njegova oscilacija ne prelazi oscilaciju na tom većem intervalu. Zbrajanjem po svim tim manjim intervalima dobivamo ukupni doprinos najviše $U(f, P_0) - L(f, P_0)$. Slijedi

$$U(f,P) - L(f,P) \leqslant U(f,P_0) - L(f,P_0) + 2B(m-1)\|P\|.$$

Sada je, primjerice, dovoljno odabrati $\delta = \varepsilon/[4(B+1)(m+1)]$. □

Teorem 5.1.10 (Kriterij Riemannovih suma)**.** *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena i neka je $I \in \mathbb{R}$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

1. *$f \in \mathcal{R}([a,b])$ i $\int_a^b f = I$;*
2. *za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaku podjelu P s $\|P\| < \delta$ i svaki izbor označenih točaka vrijedi*
$$|\sigma(f;P,\xi) - I| < \varepsilon;$$
3. *za svaki niz podjela (P_n) s $\|P_n\| \to 0$ i svaki niz izbora označenih točaka $\xi^{(n)}$ vrijedi*
$$\sigma(f;P_n,\xi^{(n)}) \longrightarrow I.$$

Dokaz. Ako vrijedi prva tvrdnja, i integral i svaka Riemannova suma leže između $L(f,P)$ i $U(f,P)$. Prethodna lema zato daje drugu tvrdnju.

Za obrat primijetimo da je za *fiksiranu* podjelu P

$$\inf_{\xi} \sigma(f;P,\xi) = L(f,P), \qquad \sup_{\xi} \sigma(f;P,\xi) = U(f,P).$$

Doista, za svaki $\eta > 0$ u svakom intervalu možemo izabrati točku u kojoj je vrijednost funkcije manja od $m_k + \eta/(b-a)$. Tada je suma manja od $L(f,P) + \eta$. Analogno se gornja suma aproksimira vrijednostima većima od $M_k - \eta/(b-a)$.

Ako vrijedi druga tvrdnja, odaberimo dovoljno finu podjelu za točnost $\varepsilon/3$. Prelaskom na infimum i supremum po oznakama dobivamo

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant L(f,P) \leqslant U(f,P) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Darbouxov kriterij daje integrabilnost. Označimo dobiveni integral s J. Iz iste procjene slijedi $|J - I| \leqslant \varepsilon/3$ za svaki $\varepsilon > 0$, pa je $J = I$.

Druga tvrdnja neposredno povlači treću. Ako druga ne vrijedi, postoji $\varepsilon_0 > 0$ takav da za svaki n možemo naći podjelu P_n norme manje od $1/n$ i označene točke za koje je $|\sigma(f;P_n,\xi^{(n)}) - I| \geqslant \varepsilon_0$. To proturječi trećoj tvrdnji. □

Za integrabilnu funkciju na bilo kojem nizu podjela s normom koja teži nuli vrijedi i

$$L(f, P_n) \longrightarrow \int_a^b f, \qquad U(f, P_n) \longrightarrow \int_a^b f.$$

Te sume ne moraju biti monotone. Monotonost je zajamčena kada je svaka sljedeća podjela profinjenje prethodne, primjerice pri uzastopnom raspolavljanju svih intervala.

5.1.5. Prvi izračuni iz definicije

Primjer 5.1.11. Za $f(x) = x$ na bilo kojem segmentu $[a, b]$ uzmimo jednoliku podjelu na n dijelova duljine $h = (b-a)/n$. Funkcija raste, pa je

$$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)h)h = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n},$$
$$U(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} (a + kh)h = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Razlika suma teži nuli, a obje sume teže istom broju. Zato

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Izračun vrijedi i kada segment sadrži negativne brojeve.

Primjer 5.1.12. Za $f(x) = x^2$ na $[0, 1]$ jednolika podjela daje

$$L(f, P_n) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3},$$

$$U(f, P_n) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Obje sume teže $1/3$, pa je

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Koristili smo konačnu jednakost $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, koja se dokazuje indukcijom. Nismo pretpostavili da je integral jednak prirastu neke primitivne funkcije; tu ćemo vezu tek dokazati.

Zadatak 5.1.1. Izračunajte donje i gornje sume za $f(x) = x^2$ na $[a, b]$ uz $0 \leqslant a < b$ i jednoliku podjelu. Dokažite iz definicije da je $\int_a^b x^2\,dx = (b^3 - a^3)/3$.

Zadatak 5.1.2. Nađite podjele P_n segmenta $[0,1]$ kojima broj dijelova teži u beskonačnost, ali norma ne teži nuli. Za funkciju $f(x) = x$ odaberite označene točke tako da pripadne sume ne konvergiraju prema $1/2$.

Zadatak 5.1.3. Neka su P_n podjele takve da je $P_n \subseteq P_{n+1}$ i $\|P_n\| \to 0$. Za svaku ograničenu funkciju f dokažite

$$L(f, P_n) \longrightarrow \underline{I}(f), \qquad U(f, P_n) \longrightarrow \overline{I}(f).$$

Uputa: Usporedite P_n s jednom fiksiranom podjelom, kao u dokazu leme 5.1.9.

5.2. Osnovna svojstva integrala

Darbouxov kriterij omogućuje da integrabilnost novih funkcija izvedemo iz integrabilnosti već poznatih. U dokazima je korisna oscilacija na podsegmentu J:

$$\omega(f; J) = \sup_J f - \inf_J f.$$

Ona je ujedno supremum brojeva $|f(x) - f(y)|$, gdje su $x, y \in J$. Zato se svaka ocjena razlike dviju vrijednosti može pretvoriti u ocjenu oscilacije.

5.2.1. Računske operacije i usporedba

Teorem 5.2.1 (Linearnost integrala)**.** *Neka su $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemannovo integrabilne i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada je $\alpha f + \beta g$ integrabilna i*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

Dokaz. Za svaki podsegment J vrijedi

$$\omega(\alpha f + \beta g; J) \leqslant |\alpha|\omega(f; J) + |\beta|\omega(g; J),$$

jer za $x, y \in J$ trokutna nejednakost daje

$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| \leqslant |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||g(x) - g(y)|.$$

Za zadani $\varepsilon > 0$ odaberimo podjele za koje su razlike Darbouxovih suma za f, odnosno g, manje od $\varepsilon/(1+|\alpha|+|\beta|)$. Na njihovu zajedničkom profinjenju P te se razlike ne povećavaju. Množenjem ocjene oscilacija duljinama podsegmenata i zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned} U(\alpha f + \beta g, P) - L(\alpha f + \beta g, P) &\leqslant |\alpha|\big(U(f,P) - L(f,P)\big) \\ &\quad + |\beta|\big(U(g,P) - L(g,P)\big) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Darbouxov kriterij dokazuje integrabilnost.

Da bismo izračunali integral, uzmimo, primjerice, ekvidistantne podjele s n podsegmenata i njihove desne krajeve kao oznake. Svaka pripadna Riemannova suma za $\alpha f + \beta g$ jednaka je α puta sumi za f plus β puta sumi za g. Prema teoremu 5.1.10, sve tri sume konvergiraju odgovarajućim integralima kada $n \to \infty$. Prelaskom na limes dobivamo traženu jednakost. Dokaz obuhvaća i negativne i nulte koeficijente. □

Za negativan α ne vrijedi $\inf_J(\alpha f) = \alpha \inf_J f$, nego

$$\inf_J(\alpha f) = \alpha \sup_J f, \qquad \sup_J(\alpha f) = \alpha \inf_J f.$$

Apsolutne vrijednosti koeficijenata u ocjeni oscilacije upravo uzimaju u obzir tu zamjenu uloga supremuma i infimuma.

Teorem 5.2.2. *Ako su $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilne, onda su integrabilne funkcije $|f|$, fg, $\max\{f,g\}$ i $\min\{f,g\}$. Ako uz to postoji $m > 0$ takav da je $|g(x)| \geqslant m$ za svaki $x \in [a,b]$, tada su integrabilne i $1/g$ te f/g.*

Dokaz. Obrnuta trokutna nejednakost daje

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant |f(x) - f(y)|, \qquad \omega(|f|; J) \leqslant \omega(f; J).$$

Stoga je razlika Darbouxovih suma za $|f|$ najviše jednaka odgovarajućoj razlici za f. Slijedi integrabilnost od $|f|$.

Stavimo $M_f = \sup_{[a,b]} |f|$ i $M_g = \sup_{[a,b]} |g|$. Iz

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leqslant |f(x)|\,|g(x) - g(y)| + |g(y)|\,|f(x) - f(y)| \\ &\leqslant M_f\omega(g; J) + M_g\omega(f; J) \end{aligned}$$

za $x, y \in J$ dobivamo

$$\omega(fg; J) \leqslant M_f\omega(g; J) + M_g\omega(f; J).$$

Odabirom zajedničkoga profinjenja kao u prethodnom dokazu, s pojedinačnim razlikama manjima od $\varepsilon/(1 + M_f + M_g)$, Darbouxov kriterij daje integrabilnost umnoška.

Tvrdnje o maksimumu i minimumu slijede iz jednakosti

$$\max\{f,g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \qquad \min\{f,g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

Naposljetku, uz $|g| \geqslant m > 0$ vrijedi

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| \leqslant \frac{|g(x) - g(y)|}{m^2}.$$

Ponovno primjenjujemo kriterij oscilacija da bismo dobili integrabilnost od $1/g$, a zatim tvrdnju o umnošku za f/g. □

Teorem 5.2.3 (Monotonost i ocjene integrala)**.** *Neka su $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilne, pri čemu je $a < b$. Ako je $f(x) \leqslant g(x)$ za svaki $x \in [a,b]$, onda je*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Posebno, ako je $m \leqslant f(x) \leqslant M$, onda je

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Vrijede i ocjene

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant (b-a)\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Dokaz. Ako je $h \geqslant 0$, sve su njegove donje Darbouxove sume nenegativne, pa je i njegov integral nenegativan. To primjenjujemo na $h = g - f$ i koristimo linearnost. Integral konstantne funkcije jednak je njezinoj vrijednosti puta $b-a$, što slijedi izravno iz Darbouxovih suma. Time je dokazana druga tvrdnja.

Budući da je $|f|$ integrabilna i da vrijedi $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, monotonost daje

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Posljednja ocjena slijedi usporedbom s konstantom $\sup_{[a,b]} |f|$. □

Supremum u posljednjoj ocjeni odnosi se na $|f|$. Bez apsolutne vrijednosti tvrdnja bi bila pogrešna već za $f(x) = -1$. Također, iz integrabilnosti $|f|$ ne slijedi integrabilnost f: funkcija koja je 1 na racionalnim, a -1 na iracionalnim brojevima segmenta $[0,1]$ nije integrabilna, iako joj je apsolutna vrijednost konstantna.

5.2.2. Podsegmenti i orijentacija

Teorem 5.2.4 (Aditivnost po intervalu)**.** *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena i $a < c < b$. Funkcija f integrabilna je na $[a,b]$ ako i samo ako je integrabilna na oba segmenta $[a,c]$ i $[c,b]$. U tom slučaju vrijedi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.2}$$

Posebno, restrikcija integrabilne funkcije na svaki nedegenerirani podsegment također je integrabilna.

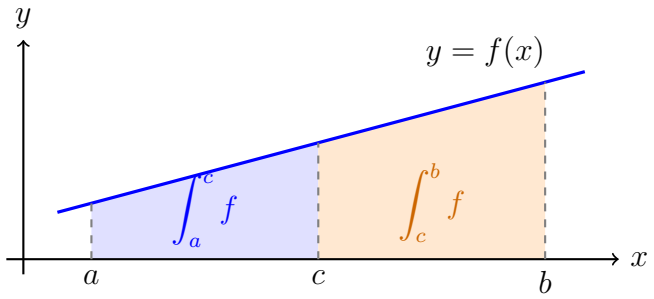
Dokaz. Pretpostavimo najprije da je f integrabilna na $[a,b]$. Za zadani $\varepsilon > 0$ odaberimo podjelu s razlikom Darbouxovih suma manjom od ε te joj dodajmo točku c. Neka su P_1, P_2 dijelovi tako dobivene podjele na $[a,c]$ i $[c,b]$. Zbroj njihovih razlika Darbouxovih suma manji je od ε. Obje su razlike nenegativne, pa je svaka zasebno manja od ε. Darbouxov kriterij daje integrabilnost na oba podsegmenta. Uzastopnim rezanjem dobivamo tvrdnju za proizvoljan podsegment.

Obratno, ako je f integrabilna na oba podsegmenta, odaberimo na svakom podjelu za koju je razlika suma manja od $\varepsilon/2$. Njihova unija P jest podjela $[a,b]$, a

$$L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2),$$
$$U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2).$$

Zato je $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$, pa je f integrabilna na $[a,b]$.

Za ovakvu podjelu i integral na cijelom segmentu i zbroj dvaju integrala na podsegmentima leže između istih brojeva $L(f,P)$ i $U(f,P)$. Njihova je razlika po apsolutnoj vrijednosti manja od ε. Kako to vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, ta su dva broja jednaka. □



Slika prikazuje aditivnost za nenegativnu funkciju. Dokaz je jednako valjan i kada funkcija mijenja predznak; geometrijska predodžba tada koristi predznačene površine.

Definicija 5.2.5 (Orijentirani integral)**.** *Dogovaramo*

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \quad (a < b).$$

Uz taj dogovor jednakost (5.2) vrijedi za bilo koji poredak točaka a, b, c, ako je funkcija integrabilna na segmentu koji sadrži sve tri točke. To provjeravamo primjenom teorema na tri točke poredane od najmanje do najveće i premještanjem članova. Primjerice, za $a < b < c$ jednakost $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ daje $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Linearnost vrijedi za oba poretka krajeva. Monotonost u iskazanom obliku zahtijeva $a < b$: zamjenom krajeva smjer nejednakosti se okreće. Za bilo koje u, v vrijedi praktična ocjena

$$\left| \int_u^v f(x)\,dx \right| \leqslant |v-u| \sup_{x \in [\min\{u,v\}, \max\{u,v\}]} |f(x)|. \tag{5.3}$$

Za $u = v$ lijeva je strana nula; taj slučaj tumačimo zasebno.

Zadatak 5.2.1. Neka su f, g integrabilne na $[a,b]$, $a<b$. Dokažite

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b g\right| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f-g|.$$

Zatim dokažite da iz $\sup_{[a,b]}|f_n - f| \to 0$, uz integrabilnost svih f_n i f, slijedi $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

Zadatak 5.2.2. Dokažite Cauchy–Schwarzovu nejednakost za integrabilne funkcije:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right).$$

Uputa: Za svaki $t\in\mathbb{R}$ integral funkcije $(f+tg)^2$ je nenegativan. Posebno obradite slučaj $\int_a^b g^2 = 0$.

5.3. Integrabilne funkcije i skupovi mjere nula

Darbouxov kriterij pretvara pitanje integrabilnosti u pitanje o oscilacijama funkcije na malim podsegmentima. Najprije ćemo ga primijeniti na monotone i neprekidne funkcije. Zatim ćemo vidjeti da integrabilna funkcija može imati i beskonačno mnogo prekida, čak i u skupu koji je gust u cijelom segmentu. Na kraju ćemo precizno opisati koji su skupovi prekida dopušteni.

U ovom odjeljku uvijek pretpostavljamo $a<b$. Neprekidnost u krajevima segmenta shvaćamo relativno prema segmentu: u a promatramo samo desni, a u b samo lijevi prilaz.

5.3.1. Monotone i neprekidne funkcije

Teorem 5.3.1. *Svaka monotona funkcija $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemannovo je integrabilna.*

Dokaz. Neka je najprije f rastuća, pri čemu dopuštamo i jednakost njezinih vrijednosti. Tada je ograničena jer $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$. Za ekvidistantnu podjelu

$$x_k = a+kh, \qquad h=\frac{b-a}{n}, \qquad k=0,\dots,n,$$

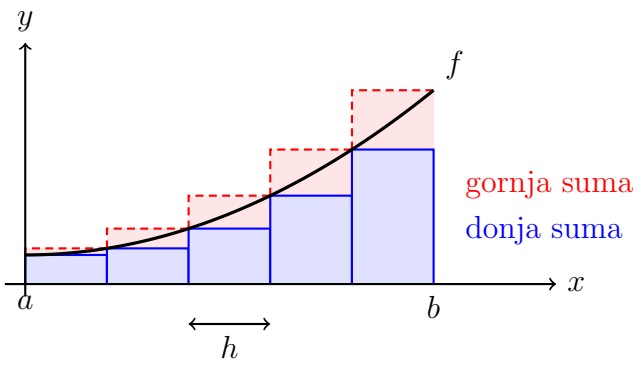
vrijedi

$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_{k-1}), \qquad \sup_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_k).$$

Zato se razlika Darbouxovih suma pojednostavljuje:

$$\begin{aligned} U(f,P)-L(f,P) &= h\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)\\ &= \frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Tvrdnja slijedi iz teorema 5.1.6. Ako je f padajuća, primijenimo dokazano na $-f$ i upotrijebimo linearnost integrala. □



Na slici razlika gornje i donje sume odgovara ukupnoj površini crvenih pravokutnika. Za rastuću funkciju zbroj njihovih visina jednak je $f(b)-f(a)$, neovisno o broju podsegmenata.

Teorem 5.3.2. *Svaka neprekidna funkcija $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ Riemannovo je integrabilna.*

Dokaz. Neprekidna funkcija na segmentu ograničena je, a prema Heine–Cantorovu teoremu 3.4.8 i jednoliko neprekidna. Za zadani $\varepsilon>0$ zato postoji $\delta>0$ takav da za $x,y\in[a,b]$ vrijedi

$$|x-y|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Odaberimo podjelu P s $\|P\|<\delta$. Na svakom njezinu podsegmentu $J_k=[x_{k-1},x_k]$ oscilacija je najviše $\varepsilon/(2(b-a))$. Slijedi

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_k \omega(f;J_k)(x_k-x_{k-1})\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Primijenimo Darbouxov kriterij. □

Dokaz pokazuje zašto je korisna *jednolika* neprekidnost: ista duljina podsegmenta dovoljna je da oscilacije budu male na svim dijelovima podjele.

5.3.2. Konačno mnogo iznimnih točaka

Propozicija 5.3.3. *Ako se funkcije $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ razlikuju samo u konačno mnogo točaka, tada je jedna Riemannovo integrabilna ako i samo ako je druga Riemannovo integrabilna. U tom slučaju*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da funkcija h koja je jednaka nuli izvan konačnoga skupa E ima integral nula. Neka je E sastavljen od N točaka i neka je $|h|\leqslant H$ za neki $H>0$. Svaka točka pripada najviše dvama podsegmentima podjele P. Zato najviše $2N$ podsegmenata može sadržavati neku točku skupa E; na ostalima je h identički nula. Odatle

$$|L(h,P)|\leqslant 2NH\|P\|,\qquad |U(h,P)|\leqslant 2NH\|P\|.$$

Za podjele čija norma teži nuli obje Darbouxove sume teže nuli. Darbouxov kriterij i omeđivanje integrala tim sumama daju integrabilnost i $\int_a^b h = 0$. Za $N = 0$ tvrdnja je neposredna. Sada uzmemo $h = g - f$ i primijenimo linearnost integrala, u jednom pa u drugom smjeru. □

Lema 5.3.4. *Ako je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena i neprekidna na $\langle a,b\rangle$, tada je Riemannovo integrabilna na $[a,b]$. Ne zahtijevamo postojanje jednostranih limesa u a i b.*

Dokaz. Odaberimo $H > 0$ tako da je $|f| \leqslant H$. Za zadani $\varepsilon > 0$ izaberimo

$$0 < r < \frac{b-a}{2}, \qquad 4Hr < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Na segmentu $[a+r, b-r]$ funkcija je neprekidna i stoga integrabilna. Postoji njegova podjela Q za koju je $U(f,Q) - L(f,Q) < \varepsilon/2$. Dopunimo Q krajevima a, b. Oscilacija na svakom od preostalih dvaju segmenata najviše je $2H$, a svaki ima duljinu r. Zato za dobivenu podjelu P vrijedi

$$U(f,P) - L(f,P) \leqslant 4Hr + U(f,Q) - L(f,Q) < \varepsilon.$$

□

Korolar 5.3.5. *Svaka ograničena funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ koja ima najviše konačno mnogo točaka prekida Riemannovo je integrabilna.*

Dokaz. Točke prekida koje leže u unutrašnjosti segmenta uvrstimo u podjelu $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$. Na svakom otvorenom intervalu $\langle c_{j-1}, c_j\rangle$ funkcija je neprekidna. Prethodna lema daje integrabilnost na svakom $[c_{j-1}, c_j]$, a teorem 5.2.4 integrabilnost na cijelom segmentu. □

Ovdje prekidi ne moraju biti prve vrste. Primjerice, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

integrabilna je na $[0,1]$, iako u nuli nema desni limes. Ograničenost se, međutim, ne smije izostaviti: funkcija jednaka $1/x$ za $x > 0$ i proizvoljno definirana u nuli nije Riemannovo integrabilna na $[0,1]$.

Kažemo da je funkcija *neprekidna po dijelovima* ako postoji konačna podjela takva da se njezina restrikcija na unutrašnjost svakoga podsegmenta može neprekidno proširiti na taj podsegment. Vrijednosti izvorne funkcije u točkama podjele smiju se razlikovati od vrijednosti tih proširenja. Takva je funkcija ograničena i ima najviše konačno mnogo prekida, pa je integrabilna.

Slično, ograničena funkcija koja je monotona na unutrašnjosti svakoga podsegmenta neke konačne podjele integrabilna je. Za rastuću restrikciju u lijevom kraju podsegmenta možemo kao vrijednost proširenja uzeti njezin infimum, a u desnom supremum; za padajuću restrikciju obrnuto. Dobivamo monotone funkcije na zatvorenim podsegmentima. Primijenimo teorem 5.3.1, propoziciju o konačnim promjenama i aditivnost integrala po intervalima.

5.3.3. Thomaeova funkcija

Primjer 5.3.6. Definirajmo $T\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ formulom

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \quad \gcd(p,q) = 1. \end{cases}$$

Uvijek uzimamo skraćen zapis s pozitivnim nazivnikom. Posebno, $0 = 0/1$ i $1 = 1/1$, pa je $T(0) = T(1) = 1$. Ovu funkciju zovemo *Thomaeovom funkcijom*, a često i *Riemannovom funkcijom*.

Za svaki $\eta > 0$ skup

$$F_\eta := \{x \in [0,1] : T(x) > \eta\}$$

konačan je: za njegove racionalne elemente vrijedi $q < 1/\eta$, a za svaki takav nazivnik postoji samo konačno mnogo mogućih brojnika $0 \leqslant p \leqslant q$.

Pokažimo da je, za svaki $c \in [0,1]$,

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in [0,1],\ x \neq c}} T(x) = 0.$$

Za zadani $\varepsilon > 0$ izaberemo dovoljno malu okolinu točke c koja ne sadrži nijednu točku konačnoga skupa $F_{\varepsilon/2} \setminus \{c\}$. Za $x \neq c$ u toj okolini vrijedi $0 \leqslant T(x) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$. Prema tome, T je neprekidna točno u iracionalnim točkama, a ima prekid u svakoj racionalnoj točki segmenta, uključujući 0 i 1.

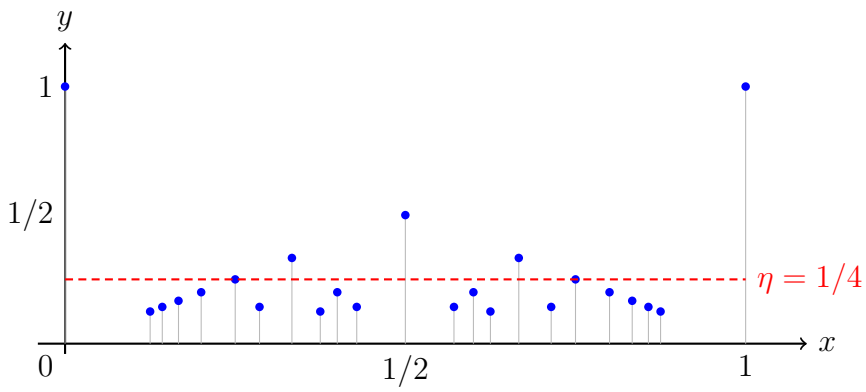
Unatoč gustom skupu prekida, T je Riemannovo integrabilna i

$$\int_0^1 T(x)\,dx = 0.$$

Doista, svaka je donja Darbouxova suma nula, jer svaki nedegenerirani podsegment sadrži iracionalan broj. Za zadani $\varepsilon > 0$ neka $F_{\varepsilon/2}$ ima N elemenata. Uzmimo ekvidistantnu podjelu na m dijelova, gdje je $m > 4N/\varepsilon$. Najviše $2N$ podsegmenata sadrži neku točku toga skupa. Njihov ukupni doprinos gornjoj sumi najviše je $2N/m$, jer je $T \leqslant 1$. Na svim ostalim podsegmentima vrijedi $T \leqslant \varepsilon/2$. Zato

$$0 \leqslant U(T,P) \leqslant \frac{2N}{m} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ako je $N > 0$. Ako je $N = 0$, izravno imamo $U(T,P) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$. Darbouxov kriterij završava dokaz.



Prikazane su vrijednosti $T(p/q)$ za skraćene razlomke s $q \leqslant 8$. Sive dužine služe samo lakšem očitavanju visina; nisu dio grafa. Iznad svake pozitivne vodoravne razine nalazi se samo konačno mnogo točaka grafa. U dokazu integrabilnosti broj $2N$ bitan je jer točka podjele pripada dvama susjednim zatvorenim podsegmentima.

5.3.4. Skupovi mjere nula

Broj točaka prekida nije dovoljan opis za integrabilnost. Potreban je pojam koji izražava da se skup može prekriti intervalima proizvoljno male ukupne duljine.

Definicija 5.3.7. *Skup $E \subseteq \mathbb{R}$ ima* mjeru nula *ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ili prebrojiva familija otvorenih omeđenih intervala $I_j = \langle \alpha_j, \beta_j \rangle$ takva da je*

$$E \subseteq \bigcup_j I_j, \qquad \sum_j (\beta_j - \alpha_j) < \varepsilon.$$

Ako familija ima beskonačno mnogo članova, ovdje zbroj nenegativnih duljina definiramo kao

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j - \alpha_j) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j),$$

uz mogućnost vrijednosti $+\infty$. Za ovu definiciju nije nam potrebna opća teorija redova. Jednaku vrijednost dobijemo uzimanjem supremuma zbrojeva po svim konačnim skupovima indeksa, pa poredak intervala nije bitan. Prazan skup ima mjeru nula; dovoljan je prazan pokrivač.

Propozicija 5.3.8. *Vrijede sljedeće tvrdnje.*

1. *Svaki podskup skupa mjere nula ima mjeru nula.*
2. *Svaki najviše prebrojiv skup ima mjeru nula.*
3. *Konačna ili prebrojiva unija skupova mjere nula ima mjeru nula.*

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi uzimanjem istoga pokrivača. Za drugu tvrdnju nabrojimo elemente skupa kao $c_1, c_2, \ldots$ (za konačan skup postupak zaustavimo) i točku c_j pokrijemo otvorenim intervalom duljine $\varepsilon/2^{j+1}$. Za svaki n vrijedi konačna geometrijska formula

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2}(1 - 2^{-n}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ukupna duljina pokrivača stoga je najviše $\varepsilon/2 < \varepsilon$.

Za treću tvrdnju neka su $E_1, E_2, \ldots$ skupovi mjere nula. Svaki E_j pokrijemo intervalima ukupne duljine manje od $\varepsilon/2^{j+1}$. Svi ti intervali zajedno čine najviše prebrojivu familiju i pokrivaju $\bigcup_j E_j$. Za svaku konačnu potfamiliju zbroj duljina najviše je $\sum_{j\geqslant 1} \varepsilon/2^{j+1} = \varepsilon/2$. Uzimanjem supremuma dobivamo ukupnu duljinu najviše $\varepsilon/2 < \varepsilon$. □

Posebno, $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ ima mjeru nula, iako je gust u $[a, b]$. Gustoća i mjera nula opisuju različita svojstva skupa. S druge strane, ne smijemo tvrditi da svaka ograničena funkcija koja iščezava izvan skupa mjere nula ima Riemannov integral: indikatorska funkcija racionalnih brojeva već je protuprimjer.

Za dokaz općega kriterija integrabilnosti trebat će nam sljedeća posljedica potpunosti realnih brojeva. Skup $K \subseteq [a, b]$ zovemo *zatvorenim u* $[a, b]$ ako za svaki niz (c_n) iz K koji konvergira prema $c \in [a, b]$ vrijedi $c \in K$.

Lema 5.3.9 (Konačni potpokrivač)**.** *Neka je $K \subseteq [a, b]$ zatvoren i neka ga pokriva familija otvorenih intervala. Tada ga pokriva već konačno mnogo intervala iz te familije. Štoviše, postoji $\delta > 0$ takav da je svaki podsegment $J \subseteq [a, b]$ duljine manje od δ koji siječe K sadržan u jednom od intervala početne familije.*

Dokaz. Pretpostavimo da ne postoji konačni potpokrivač. Raspolovimo $[a, b]$. Barem jedan od dobivenih segmenata J_1 ima svojstvo da $K \cap J_1$ nema konačni potpokrivač; inače bismo spajanjem dvaju konačnih potpokrivača dobili takav pokrivač za K. Nastavljajući dobivamo ugniježđene segmente J_n duljina $(b-a)/2^n$ s istim svojstvom. Njihov je presjek jedna točka c. Odaberemo $c_n \in K \cap J_n$; ti su skupovi neprazni, jer prazan skup ima konačni potpokrivač. Budući da $c_n \to c$, zatvorenost daje $c \in K$. Neki interval početne familije sadrži c, pa, zbog otvorenosti i smanjivanja duljina, sadrži cijeli J_n za dovoljno velik n. To je konačni pokrivač za $K \cap J_n$, što je proturječje.

Za drugu tvrdnju za svaki $c \in K$ odaberemo $r_c > 0$ tako da je $\langle c - 2r_c, c + 2r_c\rangle$ sadržan u nekom intervalu početne familije. Intervali $\langle c - r_c, c + r_c\rangle$ pokrivaju K, pa prema prvom dijelu dovoljan je konačan izbor središta $c_1, \ldots, c_s$. Stavimo $\delta = \min_i r_{c_i} > 0$. Ako J siječe K, neka je $y \in J \cap K$ i odaberimo i takav da je $|y - c_i| < r_{c_i}$. Za svaki $z \in J$ tada je

$$|z - c_i| \leqslant |z - y| + |y - c_i| < \delta + r_{c_i} \leqslant 2r_{c_i},$$

pa je J sadržan u odgovarajućem intervalu početne familije. Za $K = \emptyset$ obje su tvrdnje neposredne. □

5.3.5. Lebesgueov kriterij integrabilnosti

Za ograničenu funkciju $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiramo *oscilaciju u točki* $c \in [a,b]$ kao broj

$$\omega_f(c) := \inf_{r>0} \omega\big(f; [a,b] \cap \langle c-r, c+r\rangle\big).$$

Ovdje za svaki neprazan skup $A \subseteq [a,b]$ koristimo istu oznaku $\omega(f;A) = \sup_A f - \inf_A f$. Dakle, $\omega_f(c)$ mjeri kolika oscilacija preostaje i u proizvoljno malim okolinama točke c.

Lema 5.3.10. *Funkcija f neprekidna je u c ako i samo ako je $\omega_f(c) = 0$. Za svaki $\eta > 0$ skup*

$$D_\eta := \{c \in [a,b] : \omega_f(c) \geqslant \eta\}$$

zatvoren je u $[a,b]$.

Dokaz. Ako je f neprekidna u c, u dovoljno maloj okolini vrijedi $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$. Razlika bilo kojih dviju vrijednosti u toj okolini zato je manja od ε, pa je njezina oscilacija najviše ε. Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, $\omega_f(c) = 0$. Obratno, ako je $\omega_f(c) = 0$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina u kojoj je oscilacija manja od ε. Ta okolina sadrži i c, pa je u njoj $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Neka $c \notin D_\eta$. Postoji $r > 0$ tako da je oscilacija na $[a,b] \cap \langle c-r, c+r\rangle$ manja od η. Za svaku dovoljno blisku točku $y \in [a,b]$ njezina dovoljno mala okolina sadržana je u toj okolini točke c. Stoga je $\omega_f(y) < \eta$, odnosno $y \notin D_\eta$. To pokazuje da niz točaka iz D_η ne može konvergirati prema točki izvan D_η, što je tražena zatvorenost. □

Teorem 5.3.11 (Lebesgueov kriterij)**.** *Ograničena funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemannovo je integrabilna ako i samo ako skup svih njezinih točaka prekida ima mjeru nula.*

Dokaz. Skup točaka prekida označimo s D. Prema prethodnoj lemi

$$D = \{c : \omega_f(c) > 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_{1/m}.$$

Nužnost. Pretpostavimo da je f integrabilna. Za fiksirane $\eta > 0$ i $\varepsilon > 0$ odaberimo podjelu P takvu da je

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\eta\varepsilon}{4}.$$

Izdvojimo podsegmente $J_k = [x_{k-1}, x_k]$ na kojima je $\omega(f; J_k) \geqslant \eta$ i nazovimo ih lošima. Njihova ukupna duljina zadovoljava

$$\sum_{J_k \text{ loš}} (x_k - x_{k-1}) \leqslant \frac{U(f,P) - L(f,P)}{\eta} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ako točka $c \in D_\eta$ nije točka podjele, nalazi se u unutrašnjosti nekog J_k. Dovoljno mala okolina točke c tada je sadržana u J_k, pa je $\omega(f; J_k) \geqslant \omega_f(c) \geqslant \eta$. Dakle, c pripada lošem podsegmentu.

Svaki od konačno mnogo loših segmenata možemo malo proširiti u otvoren interval tako da ukupna duljina ostane manja od $\varepsilon/2$. Konačno mnogo točaka podjele pokrijemo intervalima ukupne duljine manje od $\varepsilon/2$. Time je D_η pokriven intervalima ukupne duljine manje od ε. Zato D_η ima mjeru nula. Kako je D prebrojiva unija takvih skupova, i D ima mjeru nula.

Dovoljnost. Pretpostavimo da D ima mjeru nula. Odaberimo $H > 0$ tako da je $|f| \leqslant H$. Za zadani $\varepsilon > 0$ stavimo

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

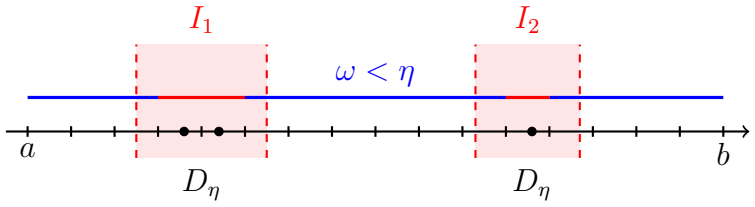
Zatvoren skup $D_\eta \subseteq D$ ima mjeru nula, pa ga pokrivaju otvoreni intervali ukupne duljine manje od $\varepsilon/(4H)$. Prema lemi o konačnom potpokrivaču možemo zadržati samo konačno mnogo njih, recimo $I_1, \ldots, I_s$. Neka je $G = I_1 \cup \cdots \cup I_s$ i $K = [a,b] \setminus G$. Skup K zatvoren je: ako niz iz K konvergira prema c i c pripada nekom otvorenom I_j, i članovi niza od nekoga mjesta pripadaju tom intervalu, što je proturječje.

Za svaki $c \in K$ vrijedi $\omega_f(c) < \eta$, pa postoji otvoren interval V_c oko c takav da je $\omega(f; V_c \cap [a,b]) < \eta$. Drugi dio leme 5.3.9 daje $\delta > 0$ takav da svaki podsegment duljine manje od δ koji siječe K leži u nekom V_c. Odaberimo podjelu P s $\|P\| < \delta$.

Podsegmenti koji sijeku K imaju oscilaciju manju od η. Svi ostali sadržani su u G, a oscilacija im je najviše $2H$. Ukupna duljina tih ostalih podsegmenata najviše je $\sum_{j=1}^{s} |I_j|$, gdje $|\langle \alpha, \beta \rangle| = \beta - \alpha$. To je elementarna nejednakost za duljine: ako sve intervale rasiječemo u njihovim krajevima, svaki mali dio iz unije podsegmenata pokriven je barem jednim I_j, pa se pri zbrajanju duljina intervala I_j računa barem jednom. Stoga

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\leqslant \eta(b-a) + 2H \sum_{j=1}^{s} |I_j| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

To je Darbouxov kriterij integrabilnosti. Ako su D_η ili K prazni, isti dokaz vrijedi s praznim pokrivačem, odnosno bez podsegmenata koji sijeku K. □



Slika prikazuje ideju drugoga dijela dokaza. Podsegmenti koji se ne nalaze cijeli u crvenom pokrivaču imaju malu oscilaciju. Na preostalima oscilacija može biti velika, ali njihova je ukupna duljina mala.

Korolar 5.3.12. *Svaka ograničena funkcija na segmentu koja ima najviše prebrojivo mnogo točaka prekida Riemannovo je integrabilna.*

Time smo dobili i drugi dokaz integrabilnosti Thomaeove funkcije. Lebesgueov kriterij pritom govori o skupu *točaka prekida*, a ne o skupu točaka u kojima je funkcija različita od nule.

Zadatak 5.3.1. Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rastuća. Dokažite da za svaku podjelu P, ne samo za ekvidistantnu, vrijedi

$$U(f,P) - L(f,P) \leqslant \|P\|\big(f(b) - f(a)\big).$$

Primijenite tu ocjenu za ograničavanje pogreške lijevih i desnih pravokutnih suma za integral $\int_0^1 x^2\,dx$.

Zadatak 5.3.2. Za $c \in [0,1]$ definirajmo $f_c(c) = 0$, a $f_c(x) = \sin(1/(x-c))$ za $x \neq c$. Dokažite integrabilnost f_c na $[0,1]$ bez upotrebe Lebesgueova kriterija. Koji se dio argumenta mijenja ako sinus zamijenimo funkcijom $t \mapsto t$?

Zadatak 5.3.3. Neka je (a_q) niz nenegativnih realnih brojeva takav da $a_q \to 0$. Na iracionalnim točkama $[0,1]$ stavimo $F(x) = 0$, a za skraćen razlomak $x = p/q$ stavimo $F(x) = a_q$. Dokažite da je F integrabilna s integralom nula. Odredite u kojim je racionalnim točkama F neprekidna.

Zadatak 5.3.4. Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna i $f \geqslant 0$. Ako je $\int_a^b f = 0$, dokažite da je $f(c) = 0$ u svakoj točki c u kojoj je f neprekidna. Vrijedi li zaključak $f = 0$ na cijelom segmentu bez pretpostavke neprekidnosti?

Zadatak 5.3.5. Neka su $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ obje Riemannovo integrabilne i neka skup $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ ima mjeru nula. Dokažite da imaju jednak integral.

Uputa: Najprije iz leme o konačnom potpokrivaču i elementarne nejednakosti za duljine zaključite da nijedan nedegenerirani interval nema mjeru nula. Zato na svakom podsegmentu možete odabrati označenu točku u kojoj je $f = g$. Primijenite teorem 5.1.10. Objasnite zašto je pretpostavka integrabilnosti obiju funkcija važna.

5.4. Integral i primitivna funkcija

Integral smo definirali pomoću gornjih i donjih suma, ne koristeći derivaciju. Sada ćemo dokazati vezu između tih dvaju pojmova. Ta će veza istodobno dati postupak za računanje integrala i način konstruiranja funkcije kojoj je derivacija unaprijed zadana.

5.4.1. Primitivne funkcije i konstanta integriranja

Definicija 5.4.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$. Funkciju $F\colon I \to \mathbb{R}$ zovemo* primitivnom funkcijom *ili* antiderivacijom *funkcije f na I ako je derivabilna i zadovoljava*

$$F'(x) = f(x) \qquad (x \in I).$$

Primjerice, $F(x) = x^3/3$ primitivna je funkcija od $f(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$. Istu derivaciju imaju i sve funkcije $x^3/3 + C$, gdje je $C \in \mathbb{R}$. Sljedeća tvrdnja kaže da smo time dobili sve primitivne funkcije na tom intervalu.

Propozicija 5.4.2. *Ako su F i G primitivne funkcije od f na otvorenom intervalu I, postoji $C \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x) = F(x) + C$ za svaki $x \in I$.*

Dokaz. Funkcija $H = G - F$ zadovoljava $H' = 0$. Za bilo koje $u < v$ iz I cijeli segment $[u, v]$ sadržan je u I, pa Lagrangeov teorem daje $c \in \langle u, v\rangle$ takav da je

$$H(v) - H(u) = H'(c)(v - u) = 0.$$

Prema tome, H je konstantna na I. □

Definicija 5.4.3. *Ako f ima primitivnu funkciju F na intervalu I, njezin* neodređeni integral *označava obitelj svih primitivnih funkcija:*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Broj C zovemo konstantom integriranja.

Određeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ realan je broj, a neodređeni integral označava obitelj funkcija. U računskim formulama zapis $F(x) + C$ znači da proizvoljnu konstantu treba dodati tek dobivenoj primitivnoj funkciji.

Pretpostavka da je domena interval bitna je za jedinstvenu konstantu. Na skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ primitivne funkcije od $1/x$ imaju oblik

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + C_-, & x < 0, \\ \ln|x| + C_+, & x > 0, \end{cases}$$

gdje su C_- i C_+ neovisne konstante. Na svakoj povezanoj komponenti domene dobivamo zasebnu konstantu.

5.4.2. Integral s promjenjivom gornjom granicom

Teorem 5.4.4. *Neka je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemannovo integrabilna i definirajmo*

$$A(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in [a, b]).$$

Tada je A Lipschitzova, pa posebno neprekidna funkcija. Točnije, za $M = \sup_{[a,b]} |f|$ vrijedi

$$|A(y) - A(x)| \leqslant M|y - x| \qquad (x, y \in [a, b]).$$

Ako je f neprekidna u $c \in \langle a, b\rangle$, tada je A derivabilna u c i $A'(c) = f(c)$. Ako je f neprekidna u kraju segmenta, vrijedi odgovarajuća jednostrana jednakost: $A'_+(a) = f(a)$, odnosno $A'_-(b) = f(b)$.

Dokaz. Integrabilnost na svakom podsegmentu i orijentacija integrala pokazuju da je A dobro definirana te da je

$$A(y) - A(x) = \int_x^y f(t)\,dt.$$

Ocjena (5.3) sada daje Lipschitzovu ocjenu.

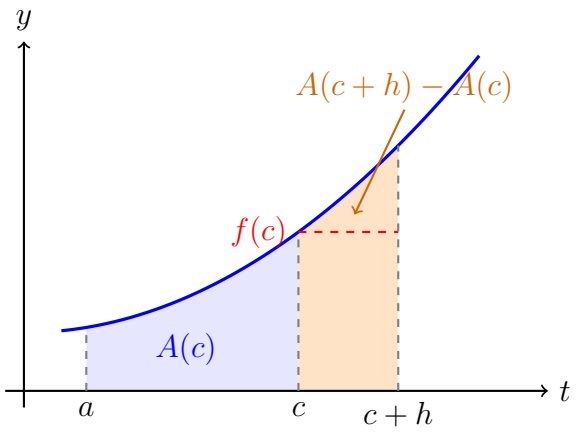
Neka je f neprekidna u c. Za $h \neq 0$ takav da $c + h \in [a, b]$ vrijedi

$$\frac{A(c+h) - A(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \big(f(t) - f(c)\big)\,dt.$$

Ako je J_h segment s krajevima c i $c + h$, tada je

$$\left|\frac{A(c+h) - A(c)}{h} - f(c)\right| \leqslant \sup_{t\in J_h} |f(t) - f(c)|. \tag{5.4}$$

Za zadani $\varepsilon > 0$ neprekidnost daje $\delta > 0$ takav da je $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$ kad je $|t - c| < \delta$ i $t \in [a, b]$. Ako je $0 < |h| < \delta$, desna strana u (5.4) najviše je ε. Slijedi traženi limes. U krajevima segmenta isti dokaz vrijedi samo za dopušteni predznak od h. □



Za $h > 0$ kvocijent $(A(c+h) - A(c))/h$ jest prosječna vrijednost funkcije f na $[c, c+h]$. Neprekidnost jamči da se ta prosječna vrijednost približava broju $f(c)$ kada se interval sužava. Ocjena u dokazu vrijedi i za $h < 0$ te za funkcije oba predznaka.

Teorem 5.4.5 (Postojanje primitivne funkcije)**.** *Svaka neprekidna funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ na otvorenom intervalu I ima primitivnu funkciju. Za proizvoljnu čvrstu točku $a \in I$ jedna je takva funkcija*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in I).$$

Dokaz. Prema teoremu 5.3.2, f je integrabilna na svakom segmentu sadržanom u I. Zato je F definirana za sve $x \in I$, i za $x < a$. Za zadani $c \in I$ odaberimo segment $[u, v] \subseteq I$ koji u svojoj unutrašnjosti sadrži i a i c. Na tom segmentu

$$F(x) = \int_u^x f(t)\,dt - \int_u^a f(t)\,dt.$$

Drugi član ne ovisi o x, pa teorem 5.4.4 daje $F'(c) = f(c)$. □

Teorem 5.4.6 (Newton–Leibnizova formula)**.** *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemannovo integrabilna. Ako je $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a,b]$, derivabilna na $\langle a,b\rangle$ i*

$$F'(x) = f(x) \qquad (a < x < b),$$

onda vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.5}$$

Dokaz. Za bilo koju podjelu $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ primijenimo Lagrangeov teorem na svaki segment $[x_{k-1}, x_k]$. Postoje $\xi_k \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle$ takvi da je

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Zbrajanjem i poništavanjem međučlanova dobivamo

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Desna je strana Riemannova suma, pa leži između $L(f,P)$ i $U(f,P)$. Izaberemo li podjele čije norme teže nuli, teorem 5.1.10 daje (5.5). □

Razliku na desnoj strani često pišemo kao $[F(x)]_a^b$. U teoremu ne tražimo derivaciju u krajevima segmenta, a vrijednosti $f(a)$ i $f(b)$ ne pojavljuju se u dokazu. Također, ne zahtijevamo neprekidnost od f: dovoljni su njezina integrabilnost i postojanje navedene funkcije F. Neprekidnost od F na cijelom segmentu ipak je potrebna, jer se njegove vrijednosti u krajevima pojavljuju u formuli.

Primjer 5.4.7. Za $f(x) = x^2$ i $F(x) = x^3/3$ dobivamo

$$\int_a^b x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Konstanta u primitivnoj funkciji nestaje pri oduzimanju: $(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. Zbog dogovora o orijentaciji ista formula vrijedi i za $a > b$.

5.4.3. Integralni teoremi srednje vrijednosti

Teorem 5.4.8. *Ako je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i $a < b$, postoji $c \in \langle a,b\rangle$ takav da je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Dokaz. Funkcija $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ neprekidna je na $[a,b]$ i derivabilna u unutrašnjosti, uz $A' = f$. Lagrangeov teorem daje $c \in \langle a,b\rangle$ takav da je $A(b) - A(a) = A'(c)(b-a)$, što je tražena jednakost. □

Broj

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

zovemo *prosječnom vrijednošću* funkcije na $[a,b]$. Za neprekidnu funkciju ta je vrijednost dosegnuta u unutrašnjoj točki segmenta. Za integrabilnu funkciju s prekidom ne mora biti vrijednost funkcije ni u jednoj točki.

Teorem 5.4.9 (Težinski teorem srednje vrijednosti)**.** *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna, a $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna i nenegativna. Postoji $c \in [a,b]$ takav da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Ako je $\int_a^b g > 0$, to znači da je težinska prosječna vrijednost

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

jednaka nekoj vrijednosti funkcije f.

Dokaz. Umnožak fg integrabilan je prema teoremu 5.2.2. Neka su m i M minimum i maksimum od f na $[a,b]$. Iz $mg \leqslant fg \leqslant Mg$ slijedi

$$m\int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M\int_a^b g.$$

Ako je $\int_a^b g = 0$, tada je i $\int_a^b fg = 0$, pa odgovara bilo koji $c \in [a,b]$. Ako je taj integral pozitivan, podijelimo s njime. Dobiveni kvocijent leži u $[m,M]$, pa ga neprekidna funkcija f poprima prema teoremu o međuvrijednosti. □

Ista tvrdnja vrijedi za nepozitivnu težinu g, primjenom teorema na $-g$. Pretpostavku o predznaku ne smijemo izostaviti: za $f(x) = g(x) = x$ na $[-1,1]$ vrijedi $\int_{-1}^1 g = 0$, a $\int_{-1}^1 fg = 2/3$.

Teorem 5.4.10 (Cauchyjev integralni teorem srednje vrijednosti)**.** *Ako su* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidne i* $a < b$*, postoji* $c \in \langle a, b\rangle$ *takav da je*

$$g(c)\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Dokaz. Primijenimo Cauchyjev teorem srednje vrijednosti na funkcije $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ i $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. One su neprekidne na segmentu i derivabilne u unutrašnjosti, uz $F' = f$ i $G' = g$. Dobivena jednakost

$$G'(c)\big(F(b) - F(a)\big) = F'(c)\big(G(b) - G(a)\big)$$

jest upravo tražena tvrdnja. □

Ovaj iskaz ne zahtijeva predznak od g. Međutim, dijeljenje s $g(c)$ ili s $\int_a^b g$ dopušteno je samo ako smo zasebno opravdali da odgovarajući nazivnik nije nula.

Korolar 5.4.11. *Ako je* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna i nenegativna,* $a < b$*, onda je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 0 \text{ za svaki } x \in [a,b].$$

Dokaz. Jedan smjer je neposredan. Ako bi bilo $f(c) > 0$ u nekoj točki $c \in [a,b]$, neprekidnost bi dala nedegenerirani podsegment $[u,v] \subseteq [a,b]$ na kojem je $f(x) \geqslant f(c)/2$. To vrijedi i kada je c kraj segmenta, uz jednostranu okolinu. Nenegativnost, aditivnost i monotonost integrala tada daju

$$\int_a^b f \geqslant \int_u^v f \geqslant \frac{f(c)}{2}(v-u) > 0,$$

što je proturječje. □

Za opću neprekidnu funkciju jedan nulti integral ne znači da je funkcija nula: primjerice, $\int_{-1}^1 x\,dx = 0$. Ako su, međutim, integrali neprekidne funkcije po *svim* nedegeneriranim podsegmentima jednaki nuli, funkcija mora biti nula. Doista, iz $f(c) \neq 0$ neprekidnost daje podsegment na kojem funkcija ima stalan predznak i apsolutnu vrijednost veću od $|f(c)|/2$, pa integral po tom podsegmentu nije nula.

5.4.4. Integrabilnost i postojanje primitivne funkcije

Primjer 5.4.12. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Riemannovo je integrabilna, ali nema primitivnu funkciju na $\langle -1, 1\rangle$. Naime, derivacije imaju Darbouxovo svojstvo (teorem 4.4.5), a ova funkcija između vrijednosti 0 i 1 ne poprima vrijednost 1/2. Njezina je funkcija integrala

$$A(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \max\{x, 0\}.$$

Ona je neprekidna, ali nije derivabilna u nuli. To je u skladu s teoremom 5.4.4, koji jednakost $A'(c) = f(c)$ jamči u točkama neprekidnosti od f.

Primjer 5.4.13. Postojanje primitivne funkcije samo po sebi ne jamči Riemannovu integrabilnost njezine derivacije. Definirajmo na $\mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Za $x \neq 0$ vrijedi

$$H'(x) = 2x \sin(1/x^2) - \frac{2}{x}\cos(1/x^2),$$

a iz $|H(h)/h| \leqslant |h|$ slijedi $H'(0) = 0$. Derivacija nije ograničena na $[-1, 1]$: za $x_n = (2\pi n)^{-1/2}$ vrijedi $H'(x_n) = -2/x_n \to -\infty$. Zato H' nije Riemannovo integrabilna na tom segmentu, iako joj je H primitivna funkcija na cijelom realnom pravcu.

Zadatak 5.4.1. Neka je f neprekidna na otvorenom intervalu I, $a \in I$, a $u, v\colon J \to I$ derivabilne na otvorenom intervalu J. Pomoću funkcije $F(y) = \int_a^y f(t)\,dt$ dokažite

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Objasnite zašto formula vrijedi i kad se međusobni poredak brojeva $u(x)$ i $v(x)$ mijenja.

Zadatak 5.4.2. Neka je f neprekidna na $[a, b]$, $a < b$. Dokažite da vrijedi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ako i samo ako je $f \geqslant 0$ na cijelom segmentu ili je $f \leqslant 0$ na cijelom segmentu. *Uputa:* Primijenite korolar 5.4.11 na jednu od funkcija $|f| - f$ i $|f| + f$.

5.5. Metode integriranja

Primitivnu funkciju tražimo tako da pravila za deriviranje čitamo u obrnutom smjeru. Linearnost derivacije daje direktno integriranje, pravilo za derivaciju kompozicije daje supstituciju, a pravilo za derivaciju produkta daje parcijalnu integraciju. Kada tako nađemo

primitivnu funkciju, određeni integral računamo Newton–Leibnizovom formulom, uz provjeru njezinih pretpostavaka.

Svaka neprekidna funkcija na otvorenom intervalu ima primitivnu funkciju, ali ona ne mora biti elementarna. Primjerice, primitivna funkcija od e^{-x^2} ne može se izraziti konačnim kombiniranjem elementarnih funkcija; tu činjenicu navodimo bez dokaza. Postojanje primitivne funkcije zato treba razlikovati od mogućnosti njezina zapisivanja elementarnom formulom.

Neodređene integrale promatramo na intervalima. Konstanta C proizvoljan je realan broj. Na različitim komponentama domene možemo je odabrati neovisno. Skraćenu oznaku

$$[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$$

upotrebljavat ćemo za razliku vrijednosti primitivne funkcije.

5.5.1. Osnovna tablica i direktno integriranje

Sljedeća tablica dobiva se provjerom derivacija iz prethodnoga poglavlja. U stupcu s primitivnom funkcijom izostavljena je aditivna konstanta.

$f(x)$	$F(x)$	Područje valjanosti
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$x \neq 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$\cos x \neq 0$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$	$\sin x \neq 0$

Hiperbolne i inverzne funkcije daju sljedeće formule:

$f(x)$	$F(x)$	Područje valjanosti
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$	$x \neq 0$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\lvert x\rvert < 1$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsh} x$	$x \in \mathbb{R}$

Za preostale dvije hiperbolne formule važno je razdvojiti intervale:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \begin{cases} \operatorname{arth} x + C, & |x| < 1, \\ \operatorname{arcth} x + C, & |x| > 1, \end{cases}$$

i

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C = \begin{cases} \operatorname{arch} x + C, & x > 1, \\ -\operatorname{arch}(-x) + C, & x < -1. \end{cases}$$

Drugi redak posljednje formule nije $\operatorname{arch} x$: ta realna funkcija nije definirana za $x < -1$. U prvom retku tablice uvjet $x > 0$ osigurava da proizvoljna realna potencija bude definirana. Za nenegativne cjelobrojne eksponente formula vrijedi na cijeloj $\mathbb{R}$, a za negativne cjelobrojne eksponente različite od -1 na svakom intervalu koji ne sadrži nulu. Druge realne domene racionalnih potencija provjeravamo zasebno.

Propozicija 5.5.1 (Linearnost primitivnih funkcija)**.** *Neka su F i G primitivne funkcije od f i g na otvorenom intervalu I. Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funkcija $\alpha F + \beta G$ primitivna je funkcija od $\alpha f + \beta g$ na I.*

Dokaz. Vrijedi $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$. □

U uobičajenome računu neodređenih integrala zato pišemo

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C.$$

Jedna proizvoljna konstanta na desnoj strani dovoljna je za sve primitivne funkcije na promatranom intervalu.

Primjer 5.5.2. Za $x > 0$ najprije pojednostavimo izraz:

$$\frac{x^5 - 2x^4 + 3\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + 5}{\sqrt{x}} = x^{9/2} - 2x^{7/2} + 3 - x^{1/6} + 5x^{-1/2}.$$

Integriranjem svakoga pribrojnika dobivamo

$$\frac{2}{11}x^{11/2} - \frac{4}{9}x^{9/2} + 3x - \frac{6}{7}x^{7/6} + 10\sqrt{x} + C.$$

Prije primjene tablice često je korisnije urediti podintegralnu funkciju nego odmah uvoditi novu varijablu.

5.5.2. Supstitucija ili uvođenje nove varijable

Teorem 5.5.3 (Supstitucija)**.** *Neka su I, J otvoreni intervali, $F' = f$ na I, a $\varphi\colon J \to I$ derivabilna. Tada je $F \circ \varphi$ primitivna funkcija od $(f \circ \varphi)\varphi'$ na J.*

Ako je, dodatno, f neprekidna na I i $\varphi \in C^1(J)$, onda za sve $\alpha, \beta \in J$ vrijedi

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx. \tag{5.6}$$

Nije potrebno da φ bude monotona. Određeni oblik vrijedi i kada je f neprekidna samo na segmentu K koji sadrži sliku segmenta integriranja, a φ klase C^1 na segmentu s krajevima α, β.

Dokaz. Prva je tvrdnja pravilo za derivaciju kompozicije:

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Uz dodatne pretpostavke obje podintegralne funkcije u (5.6) neprekidne su na segmentima integriranja, pa su integrabilne. Prema teoremu 5.4.6 obje su strane jednake $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Za obrnuti poredak granica koristimo orijentaciju integrala.

Za posljednju tvrdnju proširimo f sa segmenta $K = [p, q]$ na neprekidnu funkciju na $\mathbb{R}$, uzimajući vrijednost $f(p)$ lijevo od p i vrijednost $f(q)$ desno od q. To proširenje ima primitivnu funkciju na $\mathbb{R}$. Isti dokaz sada primjenjujemo na kompoziciju te primitivne funkcije s φ na segmentu integriranja. □

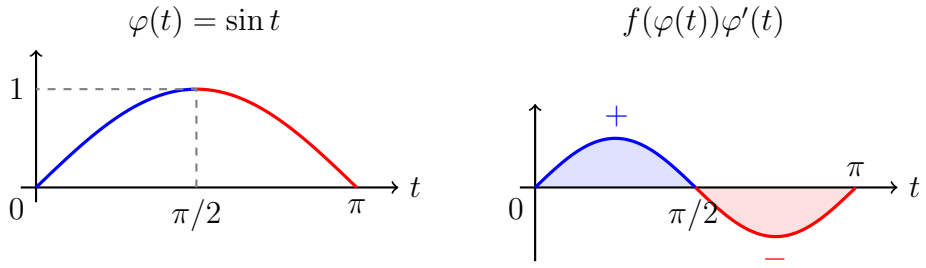
Tvrdnja o primitivnoj funkciji i tvrdnja o određenom integralu imaju različite pretpostavke. Sama derivabilnost φ i postojanje primitivne funkcije F ne osiguravaju postojanje Riemannovih integrala u (5.6). Neprekidnost iz druge tvrdnje možemo zamijeniti izravnom pretpostavkom da oba integrala postoje: uz pretpostavke prve tvrdnje tada opet primjenjujemo Newton–Leibnizovu formulu.

Oznake $x = \varphi(t)$ i $dx = \varphi'(t)\,dt$ sažimaju upravo (5.6). Pri računanju određenog integrala istodobno mijenjamo podintegralni izraz i granice. Ako je φ bijekcija s J na I te $\varphi' \neq 0$, možemo se nakon računanja neodređenog integrala vratiti na $t = \varphi^{-1}(x)$; pravilo za derivaciju inverza tada opravdava i taj postupak.

Primjer 5.5.4. Za $f(x) = x$ i $\varphi(t) = \sin t$ na $[0, \pi]$ dobivamo

$$\int_0^{\pi} \sin t \cos t \, dt = \int_0^0 x \, dx = 0.$$

Funkcija φ najprije raste od 0 do 1, a zatim pada od 1 do 0. Faktor φ' vodi računa o promjeni orijentacije. Bez tog faktora dobili bismo drukčiji integral.



Primjer 5.5.5. Ako je q derivabilna i nema nultočaka na otvorenom intervalu, onda

$$\int \frac{q'(x)}{q(x)} \, dx = \ln |q(x)| + C.$$

Posebno,

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} \, dx = \ln |ax^2 + bx + c| + C$$

na svakom intervalu na kojem nazivnik ne iščezava. Formula obuhvaća i linearne te nenulte konstantne nazivnike. Za $x > 0$ supstitucija $t = \ln x$ daje

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

Za cijeli $n \geqslant 0$ slično dobivamo

$$\int \sin^n x \cos x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C.$$

Primjer 5.5.6. Neka je $a > 0$. Izračunajmo

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}, \qquad |x| > a.$$

Domena ima dvije komponente. Za $t = a/x$ vrijedi

$$\sqrt{x^2 - a^2} = |x| \sqrt{1 - t^2},$$

pa se apsolutna vrijednost ne smije izostaviti. Na $x > a$ supstitucija daje $-a^{-1}\int(1-t^2)^{-1/2}\,dt$, a na $x < -a$ daje $a^{-1}\int(1-t^2)^{-1/2}\,dt$. Zato je rezultat

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{a}\arcsin\dfrac{a}{x} + C_+, & x > a, \\ \dfrac{1}{a}\arcsin\dfrac{a}{x} + C_-, & x < -a. \end{cases}$$

Oba slučaja možemo zapisati jednim izrazom

$$\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|} + C,$$

pri čemu konstanta može biti različita na dvjema komponentama. Deriviranjem zasebno za $x > a$ i $x < -a$ provjeravamo rezultat.

Za uklanjanje korijena često koristimo sljedeće supstitucije:

korijen	supstitucija	izbor intervala	
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin t$	$-\pi/2 < t < \pi/2$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\,\mathrm{sh}\,t$	$t \in \mathbb{R}$	$(a > 0)$.
$\sqrt{x^2-a^2},\ x > a$	$x = a\,\mathrm{ch}\,t$	$t > 0$	
$\sqrt{x^2-a^2},\ x < -a$	$x = -a\,\mathrm{ch}\,t$	$t > 0$	

Na naznačenim intervalima poznajemo predznak izraza koji izlazi iz korijena. Alternativno, za $\sqrt{a^2+x^2}$ možemo uzeti $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$, a za pozitivnu granu $\sqrt{x^2-a^2}$ uzeti $x = a/\cos t$, $0 < t < \pi/2$.

Primjer 5.5.7. Supstitucija $x = \mathrm{tg}\,t$, $|t| < \pi/2$, daje

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int \cos t\,dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Predznak je opravdan uvjetom $\cos t > 0$. Za $r > 0$ supstitucijom $x = r\sin t$ izravno u određenom integralu računamo

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \frac{r^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Ovdje su funkcije neprekidne i na krajevima, pa nulta derivacija supstitucije u $t = \pi/2$ ne smeta primjeni određenog oblika formule.

Primjer 5.5.8. Za $m, n \in \mathbb{N}$ formula za produkt sinusa daje

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\big(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\big).$$

Ako je $m \neq n$, slijedi

$$\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{\sin((m-n)x)}{2(m-n)} - \frac{\sin((m+n)x)}{2(m+n)} + C.$$

Za $m = n$ potrebno je računati zasebno:

$$\int \sin^2(mx)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2mx)}{4m} + C.$$

Posebno,

$$\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi/2, & m = n. \end{cases}$$

5.5.3. Parcijalna integracija i redukcijske formule

Teorem 5.5.9 (Parcijalna integracija)**.** *Neka su $u, v \in C^1([a,b])$. Tada*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Općenitije, dovoljno je da su u, v neprekidne na $[a,b]$, derivabilne na $\langle a,b\rangle$, te da produkti uv' i $u'v$ imaju Riemann-integrabilna proširenja na $[a,b]$.

Dokaz. Funkcija uv neprekidna je na segmentu, a na njegovoj unutrašnjosti vrijedi $(uv)' = u'v + uv'$. Zbroj s desne strane integrabilan je prema pretpostavkama. Newton–Leibnizova formula i linearnost integrala daju

$$[uv]_a^b = \int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b u'v + \int_a^b uv',$$

što je tražena jednakost. Pretpostavka $u, v \in C^1([a,b])$ osigurava sve navedene uvjete. □

Neodređeni oblik zapisujemo kao

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Dovoljna je derivabilnost u, v i postojanje jedne od dviju primitivnih funkcija; tada drugi izraz dobivamo iz pravila za produkt. Na kraju dodajemo jednu proizvoljnu konstantu. Primjerice,

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C,$$

a za $x > 0$ vrijedi

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C.$$

U prvom primjeru deriviranjem pojednostavljujemo faktor x; u drugom integrand promatramo kao produkt $\ln x \cdot 1$.

Primjer 5.5.10. Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tražimo $\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$. Ako je $\beta \neq 0$, dvostruka parcijalna integracija daje, uz izbor konstanti usklađen u međukoracima,

$$I = \frac{e^{\alpha x}\sin(\beta x)}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}J, \qquad J = -\frac{e^{\alpha x}\cos(\beta x)}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}I.$$

Uvrštavanjem druge jednakosti u prvu rješavamo jednadžbu za I. Rezultat glasi

$$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\big(\alpha\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x)\big) + C \quad \text{ako } (\alpha,\beta) \neq (0,0).$$

Za $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, ista formula slijedi izravno iz $\int e^{\alpha x}\,dx = e^{\alpha x}/\alpha + C$. Za $\alpha = \beta = 0$ integrand je 1, pa je rezultat $x + C$. Tako su obuhvaćene i vrijednosti parametara za koje se u izvođenju ne smije dijeliti s β.

Primjer 5.5.11. Kako bismo izbjegli nejasnoće s aditivnim konstantama, definirajmo

$$J_n(x) := \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$J_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\big(J_n(x) - J_{n+1}(x)\big).$$

Dakle,

$$J_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}J_n(x), \qquad J_1(x) = \arctan x. \tag{5.7}$$

To je *redukcijska formula*: integral s većim indeksom izražava pomoću onoga s manjim indeksom. Primjerice,

$$J_2(x) = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x.$$

Budući da smo rabili orijentirane integrale od 0 do x, formule vrijede i za negativan x.

5.5.4. Integriranje racionalnih funkcija

Neka je P/Q racionalna funkcija s realnim koeficijentima i $Q \neq 0$. Dijeljenjem polinoma pišemo

$$P = SQ + R, \qquad \deg R < \deg Q, \qquad \frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}.$$

Ako je $R = 0$, preostaje samo integriranje polinoma. Inače je dovoljno integrirati *pravu racionalnu funkciju*, kojoj je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika.

Upotrijebit ćemo algebarsku činjenicu da se svaki realan nekonstantan polinom može rastaviti na realne linearne i ireducibilne kvadratne faktore. Ona slijedi iz osnovnog teorema

algebre grupiranjem kompleksno konjugiranih nultočaka; ovdje je prihvaćamo bez dokaza. Nakon izdvajanja vodećeg koeficijenta nazivnik stoga ima oblik

$$Q(x) = c\prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{s}(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}, \qquad c\neq 0, \quad p_j^2<4q_j,$$

pri čemu su navedeni monični faktori međusobno različiti. Ako jedne vrste faktora nema, odgovarajući produkt jednak je 1.

Teorem 5.5.12 (Rastav na parcijalne razlomke)**.** *Neka su $Q_1,\dots,Q_m$ nekonstantni polinomi, u parovima relativno prosti, te neka je $Q=Q_1\cdots Q_m$. Ako je $\deg P<\deg Q$, postoje jedinstveni polinomi P_i, $\deg P_i<\deg Q_i$, za koje je*

$$\frac{P}{Q}=\sum_{i=1}^{m}\frac{P_i}{Q_i}. \tag{5.8}$$

Ako je q polinom stupnja $d\geqslant 1$ i $\deg P<kd$, tada se P/q^k jedinstveno rastavlja kao

$$\frac{P}{q^k}=\sum_{j=1}^{k}\frac{R_j}{q^j}, \qquad \deg R_j<d. \tag{5.9}$$

Nulti polinomi dopušteni su među brojnicima.

Dokaz. Podsjetimo na dvije posljedice dijeljenja polinoma. Euklidov algoritam za relativno proste polinome A,B daje polinome U,V takve da je $UA+VB=1$. Zato, ako A dijeli BC i relativno je prost s B, množenjem te jednakosti s C vidimo da A dijeli C. Iz toga indukcijom slijedi i da produkt u parovima relativno prostih polinoma dijeli svaki polinom koji je djeljiv svakim od njih.

Stavimo $X_i=Q/Q_i$. Budući da su X_i,Q_i relativno prosti, postoje A_i,B_i za koje je

$$A_iX_i+B_iQ_i=1.$$

Neka je P_i ostatak pri dijeljenju PA_i s Q_i. Tada je $\deg P_i<\deg Q_i$, a P_iX_i-P djeljiv je s Q_i. Za $j\neq i$ i P_jX_j djeljiv je s Q_i. Prema tome, svaki Q_i dijeli polinom

$$D=P-\sum_{j=1}^{m}P_jX_j.$$

Zato Q dijeli D. No $\deg D<\deg Q$, osim ako je $D=0$, pa nužno vrijedi $D=0$. Dijeljenjem s Q dobivamo (5.8) na domeni racionalne funkcije.

Za jedinstvenost oduzmimo dva rastava. Množenjem s Q i promatranjem djeljivosti s Q_i slijedi da Q_i dijeli $(P_i-\widetilde{P}_i)X_i$, pa dijeli $P_i-\widetilde{P}_i$. Stupanj te razlike manji je od $\deg Q_i$, dakle razlika je nula.

Za drugu tvrdnju uzastopno dijelimo P s q:

$$P = qS_1 + R_k, \quad S_1 = qS_2 + R_{k-1}, \quad \ldots, \qquad \deg R_j < d.$$

Nakon najviše k koraka kvocijent je nula jer je $\deg P < kd$. Dobivamo $P = R_k + qR_{k-1} + \cdots + q^{k-1}R_1$ i zatim (5.9). Jedinstvenost ostatka i kvocijenta pri svakom dijeljenju daje jedinstvenost rastava. □

Relativno prosti polinomi nemaju zajednički nekonstantni djelitelj. Nije dovoljno provjeriti samo zajedničke realne nultočke: primjerice, x^2+1 i $(x^2+1)^2$ nemaju realnih nultočaka, ali nisu relativno prosti.

Primjenom teorema prvo na potencije različitih ireducibilnih faktora, a zatim na pojedinu potenciju, svaki pravi racionalni izraz svodimo na zbroj izraza

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad p^2 < 4q.$$

Prvu vrstu integriramo formulama

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C, \qquad \int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad (n \geqslant 2).$$

Za drugu vrstu stavimo

$$q_0(x) := x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + d^2, \qquad d := \sqrt{q - p^2/4} > 0.$$

Brojnik rastavljamo kao

$$Ax + B = \frac{A}{2}(2x + p) + B - \frac{Ap}{2}.$$

Dio proporcionalan derivaciji nazivnika integrira se izravno:

$$\int \frac{Ax+B}{q_0(x)}\,dx = \frac{A}{2}\ln q_0(x) + \frac{B - Ap/2}{d}\arctan\frac{x+p/2}{d} + C,$$

a za $n \geqslant 2$ dobivamo

$$\int \frac{Ax+B}{q_0(x)^n}\,dx = -\frac{A}{2(n-1)q_0(x)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) d^{1-2n} J_n\left(\frac{x+p/2}{d}\right) + C.$$

Posljednja formula slijedi supstitucijom $t = (x + p/2)/d$ i redukcijom (5.7). Time je svaki integral racionalne funkcije sveden na polinome, racionalne funkcije, logaritme i arkus tangense.

Primjer 5.5.13. Izračunajmo, na svakom intervalu koji ne sadrži 1,

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx.$$

Tražimo rastav oblika

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Množenje zajedničkim nazivnikom daje polinomni identitet

$$2x^3-x^2+2x+1=A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Usporedbom koeficijenata dobivamo $A=1$, $B=2$, $C=1$, $D=0$; vrijednost $B=2$ možemo odmah čitati uvrštavanjem $x=1$. Stoga je integral jednak

$$\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Dobiveni rastav možemo provjeriti vraćanjem na zajednički nazivnik, a primitivnu funkciju deriviranjem.

5.5.5. Integralni oblik Taylorova ostatka

Taylorov teorem iz prethodnoga poglavlja daje ostatak u Lagrangeovu obliku, s derivacijom u jednoj nepoznatoj međutočki. Uz neprekidnost najviše derivacije ostatak možemo zapisati kao određeni integral.

Teorem 5.5.14 (Taylorova formula s integralnim ostatkom)**.** *Neka je I otvoren interval, $n\in\mathbb{N}_0$, $f\in C^{n+1}(I)$ i $c\in I$. Za svaki $x\in I$ vrijedi*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k+\frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Ako je $|f^{(n+1)}(t)|\leqslant M$ na segmentu s krajevima c,x, onda za ostatak $R_n(x)$ vrijedi

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}.$$

Dokaz. Za $n=0$ formula je Newton–Leibnizova jednakost $f(x)=f(c)+\int_c^x f'(t)\,dt$. Pretpostavimo da formula vrijedi za red n i uzmimo $f\in C^{n+2}(I)$. Parcijalna integracija, s x kao fiksnim parametrom, daje

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt&=\left[-\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_c^x\\&\quad+\frac{1}{(n+1)!}\int_c^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt\\&=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}\int_c^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivamo tvrdnju za red $n+1$. Parcijalna integracija vrijedi i za obrnute granice, pa dokaz obuhvaća $x < c$, $x = c$ i $x > c$.

Za ocjenu stavimo $a = \min\{c, x\}$ i $b = \max\{c, x\}$. Trokutna nejednakost za integral daje

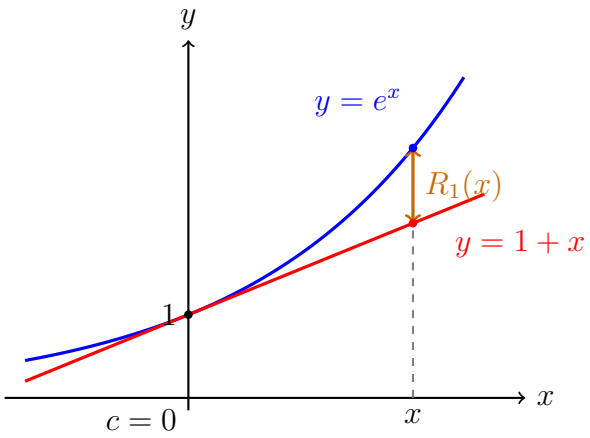
$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{n!} \int_a^b |x-t|^n \, dt = \frac{M}{(n+1)!} |x-c|^{n+1}.$$

□

Posebno, za $n = 1$ imamo

$$f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) = \int_c^x f''(t)(x-t) \, dt.$$

To je točan izraz za pogrešku aproksimacije tangentom. Na slici su prikazani $f(x) = e^x$, $c = 0$ i vrijednost ostatka za jedan pozitivan x.



Primjer 5.5.15. Za $f(x) = e^x$, $c = 0$ i $|x| \leqslant r$ iz prethodnoga teorema slijedi

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \qquad |R_n(x)| \leqslant e^r \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Na desnoj strani imamo eksplicitnu ocjenu pogreške konačne polinomne aproksimacije; za njezinu primjenu ne treba unaprijed raspolagati teorijom redova funkcija.

Zadatak 5.5.1. Izračunajte primitivne funkcije, navodeći intervale na kojima vrijede vaši rezultati:

$$\frac{\ln|x|}{x}, \qquad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}, \qquad \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

U posljednja dva primjera zasebno provjerite negativnu komponentu domene.

Zadatak 5.5.2. Supstitucijom $x = \sin t$ izračunajte $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t \, dt$. Objasnite zašto nije potrebna injektivnost supstitucije. Usporedite s integralom $\int_0^{2\pi} |\cos t| \, dt$ i odredite na koliko je intervala prirodno podijeliti računanje drugoga integrala.

Zadatak 5.5.3. Za $n \in \mathbb{N}_0$ stavite $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$. Parcijalnom integracijom dokažite

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n \geqslant 2),$$

te pomoću $I_0 = \pi/2$ i $I_1 = 1$ izračunajte I_4 i I_5.

Zadatak 5.5.4. Rastavite na parcijalne razlomke i integrirajte

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}, \qquad \frac{1}{x^4-1}, \qquad \frac{x+2}{(x^2+2x+5)^2}.$$

Navedite sve intervale na kojima je definirana pojedina racionalna funkcija. Pritom konstante integriranja na odvojenim intervalima ne moraju biti jednake.

Zadatak 5.5.5. Primijenite Taylorovu formulu s integralnim ostatkom na $f(x) = \ln(1+x)$ u točki $c = 0$, za $|x| \leqslant 1/2$ i $n = 2$. Dobijte polinom $x - x^2/2$ i eksplicitnu ocjenu pogreške. Zatim pomoću predznaka integranda odredite predznak ostatka za $0 < x \leqslant 1/2$ i za $-1/2 \leqslant x < 0$.

5.6. Primjene integrala u geometriji

Integral ćemo sada povezati s površinom ravninskoga lika, volumenom rotacijskoga tijela, duljinom krivulje i površinom rotacijske plohe. U svakom je slučaju važno razlikovati geometrijsku veličinu od njezine aproksimacije. Konačan zbroj pravokutnika, valjaka ili dužina još nije tražena veličina; treba objasniti zašto odgovarajuće aproksimacije imaju jedinstvenu graničnu vrijednost.

5.6.1. Površina ravninskoga lika

Površinu pravokutnika definiramo kao umnožak duljina njegovih stranica. Površina konačne unije pravokutnika kojima se unutrašnjosti ne sijeku jest zbroj njihovih površina. Za lik omeđen neprekidnim grafovima koristit ćemo pravokutnike koji su sadržani u liku i pravokutnike koji ga pokrivaju. Ako se donje i gornje aproksimacije mogu proizvoljno približiti, njihovu zajedničku graničnu vrijednost zovemo površinom lika. Rubovi pravokutnika ne utječu na njihove površine.

Teorem 5.6.1. *Neka su $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije i neka je $a < b$. Površina lika između njihovih grafova jednaka je*

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

Posebno, ako je $g \leqslant f$ *na* $[a,b]$*, tada je*

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Dokaz. Najprije pretpostavimo $g \leqslant f$. Uzmimo podjelu $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ i na $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ označimo

$$m_k^f = \min_{I_k} f, \quad M_k^f = \max_{I_k} f, \qquad m_k^g = \min_{I_k} g, \quad M_k^g = \max_{I_k} g.$$

Vanjski pravokutnik nad I_k ima visinu $M_k^f - m_k^g$. Visina unutarnjega pravokutnika jest

$$\max\{0, m_k^f - M_k^g\}.$$

Ako je ta visina nula, pravokutnik ne doprinosi površini. Razlika visina vanjskoga i unutarnjega pravokutnika nije veća od

$$(M_k^f - m_k^f) + (M_k^g - m_k^g).$$

To slijedi neposrednim oduzimanjem ako je $m_k^f \geqslant M_k^g$; u suprotnom koristimo $m_k^f < M_k^g$.

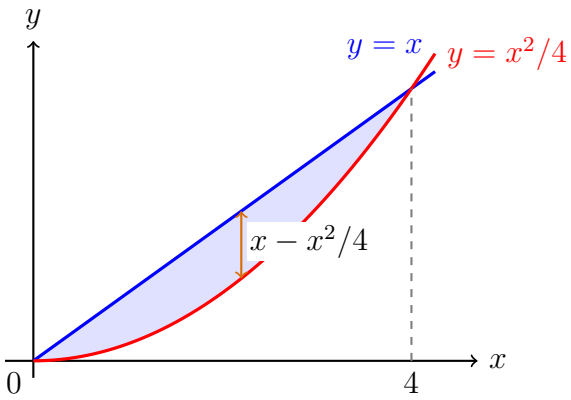
Zbog jednolike neprekidnosti funkcija f i g, za svaki $\varepsilon > 0$ možemo izabrati podjelu dovoljno sitnu da su obje oscilacije na svakom I_k manje od ε. Razlika ukupne vanjske i unutarnje površine tada je manja od $2\varepsilon(b-a)$. Svaka unutarnja aproksimacija ima površinu najviše jednaku svakoj vanjskoj aproksimaciji; to možemo provjeriti prelaskom na zajedničku podjelu pravokutnika. Zato su supremum unutarnjih i infimum vanjskih površina jednaki.

Za svaki odabir $\xi_k \in I_k$ vrijedi

$$\max\{0, m_k^f - M_k^g\} \leqslant f(\xi_k) - g(\xi_k) \leqslant M_k^f - m_k^g.$$

Pripadna Riemannova suma leži između unutarnje i vanjske površine, a njezin je limes $\int_a^b (f-g)$. Time je dokazana formula za površinu.

U općem slučaju primijenimo dokazano na neprekidne funkcije $u = \min\{f,g\}$ i $v = \max\{f,g\}$. Kako je $v - u = |f - g|$, dobivamo traženu formulu. □



Primjer 5.6.2. Grafovi funkcija $x \mapsto x$ i $x \mapsto x^2/4$ sijeku se za $x = 0$ i $x = 4$. Između tih točaka vrijedi $x^2/4 \leqslant x$, pa je površina omeđenoga lika

$$P = \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \frac{8}{3}.$$

Za neprekidnu funkciju f integral $\int_a^b f$ jednak je površini dijela između grafa i osi x koji leži iznad osi, umanjenoj za površinu dijela ispod osi. Geometrijska površina cijeloga lika jest $\int_a^b |f|$. Primjerice,

$$\int_{-1}^1 x \, dx = 0, \qquad \int_{-1}^1 |x| \, dx = 1.$$

Potiranje pozitivnih i negativnih doprinosa svojstvo je integrala, a ne geometrijske površine.

5.6.2. Volumen rotacijskoga tijela

Rotacijom lika $0 \leqslant y \leqslant R(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, oko osi x nastaje tijelo čiji je presjek okomit na tu os krug polumjera $R(x)$. Ako uklonimo središnji dio do polumjera $r(x)$, presjek je kružni vijenac. Koristit ćemo poznatu formulu $\pi\rho^2 h$ za volumen valjka polumjera ρ i visine h. Volumen valjka s kružnim vijencem kao bazom zato je $\pi(R^2 - r^2)h$.

Volumen ćemo odrediti pomoću konačnih unija valjaka sa zajedničkom osi. Za unutarnju aproksimaciju tražimo da je unija sadržana u tijelu, a za vanjsku da ga pokriva. Dijelovi iz susjednih slojeva imaju disjunktne unutrašnjosti, pa im se volumeni zbrajaju.

Teorem 5.6.3. *Neka su $r, R\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne i neka je $0 \leqslant r(x) \leqslant R(x)$ za svaki $x \in [a,b]$. Volumen tijela nastaloga rotacijom lika*

$$\{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ r(x) \leqslant y \leqslant R(x)\}$$

oko osi x jednak je

$$V = \pi \int_a^b \big(R(x)^2 - r(x)^2 \big) \, dx. \tag{5.10}$$

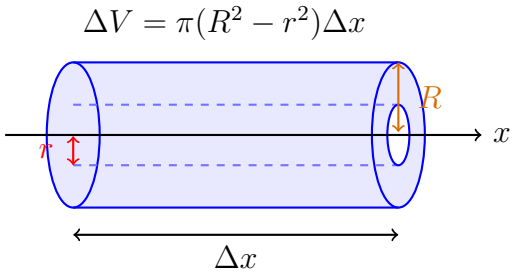
Posebno, za $r = 0$ dobivamo $V = \pi \int_a^b R(x)^2 \, dx$.

Dokaz. Nad intervalom I_k zadane podjele uzmimo vanjski valjak s vanjskim polumjerom $\max_{I_k} R$ i unutarnjim polumjerom $\min_{I_k} r$. Unutarnja aproksimacija ima polumjere $\min_{I_k} R$ i $\max_{I_k} r$ ako je prvi barem jednak drugomu; u suprotnom uzimamo prazan sloj.

Razlika površina baza tih valjaka nije veća od

$$\pi \left(\max_{I_k} R^2 - \min_{I_k} R^2 + \max_{I_k} r^2 - \min_{I_k} r^2 \right).$$

Jednolika neprekidnost R^2 i r^2 pokazuje da se razlika ukupnih vanjskih i unutarnjih volumena može učiniti proizvoljno malom. Stoga oni određuju jedinstven volumen. Riemannova suma funkcije $\pi(R^2 - r^2)$ leži između tih aproksimacija, pa njezin limes daje (5.10). □



Primjer 5.6.4. Za kuglu polumjera $r > 0$ koristimo neprekidnu funkciju $R(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na $[-r, r]$. Tada je

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Za primjenu teorema potrebna je neprekidnost polumjera presjeka; derivabilnost funkcije R na krajevima nije potrebna.

5.6.3. Duljina ravninske krivulje

Parametarskim zapisom ravninske krivulje nazivamo neprekidno preslikavanje

$$\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Za vektor $v = (v_1, v_2)$ pišemo $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Ako su x i y klase C^1, pišemo $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ i kažemo da je parametrizacija klase C^1. Derivacije na krajevima razumijemo jednostrano.

Definicija 5.6.5. *Za podjelu* $D\colon \alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta$ *stavimo*

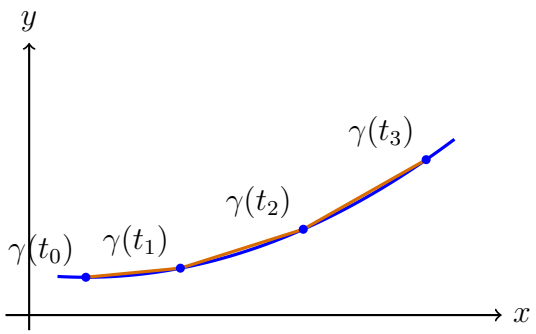
$$\ell(D) = \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|.$$

To je duljina upisane poligonalne crte. Duljina parametrizirane krivulje *jest*

$$L(\gamma) = \sup_D \ell(D).$$

Ako je taj supremum konačan, krivulju zovemo rektifikabilnom.

Dodavanje novih točaka podjele ne smanjuje $\ell(D)$, prema nejednakosti trokuta. Ako parametrizacija prolazi nekim lukom više puta, tako definirana duljina broji sve prolaske. Kod jednostavne krivulje bez ponovljenih prolazaka to je duljina njezina geometrijskog traga. Strogo monotona neprekidna surjektivna promjena parametra ne mijenja duljinu: podjele u jednom parametru odgovaraju podjelama u drugom, uz eventualno obrnut redoslijed.



upisana poligonalna crta

Teorem 5.6.6. *Ako je $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ klase C^1 na $[\alpha, \beta]$, onda je rektifikabilna i*

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt. \tag{5.11}$$

Posebno, ako je $f \in C^1([a,b])$, duljina njezina grafa jest

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Dokaz. Neka je $v(t) = \|\gamma'(t)\|$. Ta je funkcija neprekidna. Pokazat ćemo najprije da za podjele kojima norma teži nuli

$$\ell(D) \longrightarrow \int_\alpha^\beta v(t)\, dt. \tag{5.12}$$

Za proizvoljan $\varepsilon > 0$, jednolika neprekidnost x' i y' daje $\delta > 0$ tako da se svaka od tih derivacija promijeni za manje od ε kada se argument promijeni za manje od δ. Uzmimo podjelu norme manje od δ i odaberimo $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Primjenom Lagrangeova teorema zasebno na x i y dobivamo

$$\left\| \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} - \gamma'(\xi_k) \right\| \leqslant \sqrt{2}\, \varepsilon.$$

Dvije točke iz Lagrangeova teorema ne moraju biti iste; obje su unutar istoga malog intervala, što je dovoljno za ovu procjenu. Iz obrnute nejednakosti trokuta slijedi

$$\left| \ell(D) - \sum_{k=1}^n v(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \right| \leqslant \sqrt{2}\, \varepsilon(\beta - \alpha).$$

Riemannove sume za v konvergiraju njegovu integralu, pa vrijedi (5.12).

Preostaje povezati taj limes sa supremumom iz definicije. Za bilo koju fiksnu podjelu D_0 uzmimo sve finije podjele koje sadrže sve njezine točke. Nejednakost trokuta daje $\ell(D_0) \leqslant \ell(D)$, pa prelaskom na limes dobivamo

$$\ell(D_0) \leqslant \int_\alpha^\beta v(t)\,dt.$$

To vrijedi za svaki D_0, te je i njihov supremum najviše jednak integralu. Obratna nejednakost slijedi iz (5.12), jer je svaka $\ell(D)$ najviše taj supremum. Time je dokazana (5.11). Za graf uzimamo $\gamma(x) = (x, f(x))$. □

Primjer 5.6.7. Kružnicu polumjera $r > 0$ parametriziramo s

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

To je parametrizacija klase C^1 i $\|\gamma'(t)\| = r$, pa je

$$L = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

Za razliku od zapisa polukružnice kao grafa $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, ovaj zapis nema problem s neograničenom derivacijom na krajevima intervala. Zato možemo neposredno primijeniti upravo dokazani teorem.

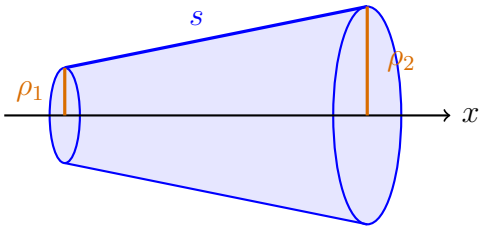
5.6.4. Površina rotacijske plohe

Neka krivulja $\gamma(t) = (x(t), r(t))$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, leži u gornjoj poluravnini, odnosno neka je $r(t) \geqslant 0$. Pretpostavimo da je x strogo monotona, tako da se rotacijom oko osi x pojedini dijelovi nastale plohe ne prekrivaju. Poligonalnoj aproksimaciji krivulje odgovara ploha sastavljena od plašteva krnjih stožaca. Za $r(t_{k-1}) = r(t_k)$ dobivamo valjak, a ako je jedan od polumjera nula, stožac.

Iz elementarne geometrije poznata je formula $\pi(\rho_1 + \rho_2)s$ za površinu plašta krnjega stošca čiji su polumjeri baza ρ_1, ρ_2, a duljina izvodnice s. Zato je površina pripadne aproksimacije

$$A(D) = \pi \sum_{k=1}^{n} \big(r(t_{k-1}) + r(t_k)\big)\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|. \tag{5.13}$$

Površinu rotacijske plohe u ovom odjeljku definiramo kao limes tih aproksimacija kada norma podjele teži nuli, ako taj limes postoji i ne ovisi o izboru podjela. Sljedeći teorem opravdava definiciju za parametrizacije klase C^1.



$$A = \pi(\rho_1 + \rho_2)s$$

Teorem 5.6.8. *Neka je $\gamma(t) = (x(t), r(t))$ klase C^1 na $[\alpha, \beta]$, neka je $r \geqslant 0$ i neka je x strogo monotona. Tada površina rotacijske plohe postoji i jednaka je*

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta r(t)\sqrt{x'(t)^2 + r'(t)^2}\, dt.$$

Posebno, za nenegativnu funkciju $f \in C^1([a, b])$ rotacijom njezina grafa nastaje ploha površine

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Dokaz. Stavimo $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ i $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Procjena iz dokaza teorema 5.6.6 pokazuje da za proizvoljno odabrane $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ vrijedi

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = \big(v(\xi_k) + e_k\big)\Delta t_k, \qquad \max_k |e_k| \longrightarrow 0$$

kada norma podjele teži nuli. Jednolika neprekidnost funkcije r također daje

$$\frac{r(t_{k-1}) + r(t_k)}{2} = r(\xi_k) + d_k, \qquad \max_k |d_k| \longrightarrow 0.$$

Uvrštavanjem u (5.13) dobivamo

$$A(D) = 2\pi \sum_{k=1}^n r(\xi_k)v(\xi_k)\Delta t_k + E(D),$$

gdje, zbog ograničenosti r i v,

$$|E(D)| \leqslant 2\pi(\beta - \alpha)\left(\max_{[\alpha,\beta]} r \max_k |e_k| + \max_{[\alpha,\beta]} v \max_k |d_k| + \max_k |d_k| \max_k |e_k|\right) \longrightarrow 0.$$

Preostala je suma Riemannova suma neprekidne funkcije $2\pi rv$. Time su dokazani postojanje limesa i formula za njega. □

Površina se ne mijenja kada parametar zamijenimo neprekidnom strogo monotonom surjekcijom. Odgovarajuće podjele daju potpuno iste stožaste aproksimacije. Jednolika

neprekidnost promjene parametra i njezina inverza osigurava da norma podjela teži nuli u jednom parametru ako i samo ako tome teži u drugom.

Formula računa površinu plohe nastale rotacijom krivulje. Ako tražimo ukupno oplošje pripadnoga zatvorenog tijela, treba dodati i površine baza koje nisu već sadržane u toj plohi. Na primjer, rotacijom horizontalne dužine dobivamo samo plašt valjka, a ne i njegove dvije baze.

Ovdje smo koristili točno određene aproksimacije krnjim stošcima. Nismo definirali površinu opće plohe proizvoljnim upisanim poliedrima niti smo dokazali da takve aproksimacije uvijek konvergiraju istoj vrijednosti.

Primjer 5.6.9. Za sferu polumjera $r > 0$ rotiramo polukružnicu

$$x(t) = -r\cos t, \qquad \rho(t) = r\sin t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Funkcija x strogo raste na $[0,\pi]$, polumjer ρ je nenegativan, a parametrizacija je klase C^1 na cijelom segmentu. Kako je $\sqrt{x'(t)^2+\rho'(t)^2} = r$, dobivamo

$$A = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t\, dt = 2\pi r^2[-\cos t]_0^\pi = 4\pi r^2.$$

Tako i ovdje izbjegavamo neispravnu primjenu formule za graf na funkciju s neograničenom derivacijom u krajnjim točkama.

5.6.5. Zakrivljenost ravninske krivulje

Duljina mjeri prijeđeni put po krivulji, a zakrivljenost mjeri koliko se brzo duž toga puta mijenja smjer tangente. Neka je $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ klase C^2 na otvorenom intervalu I i neka je

$$\|\gamma'(t)\| > 0 \qquad (t \in I).$$

Takvu parametrizaciju nazivamo *regularnom*. U okolini zadane točke t_0 možemo odabrati kut tangente $\theta(t)$ neprekidno, bez skoka za 2π. Tada je

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)).$$

Za t dovoljno blizu t_0, broj $|\theta(t)-\theta(t_0)|$ jest mali kut između usmjerenih tangenti. Duljina luka između tih parametarskih točaka jest

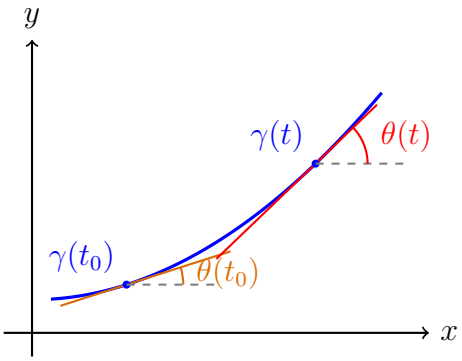
$$\ell(t_0,t) = \left|\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\, du\right|.$$

Apsolutna vrijednost potrebna je i kada je $t < t_0$.

Definicija 5.6.10. Zakrivljenost *regularne krivulje u točki s parametrom* t_0 *definiramo s*

$$\kappa(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{|\theta(t) - \theta(t_0)|}{\ell(t_0, t)},$$

ako taj limes postoji. Po ovoj je definiciji zakrivljenost nenegativna.



Teorem 5.6.11. *Za regularnu parametrizaciju klase* C^2 *vrijedi*

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}. \tag{5.14}$$

Posebno, za graf funkcije $f \in C^2(I)$ *vrijedi*

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Dokaz. U okolini promatrane točke možemo po potrebi zarotirati koordinatne osi tako da je x' različita od nule. Tada je, uz prikladno odabranu konstantu C,

$$\theta(t) = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)} + C, \qquad \theta'(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Rotacija osi ne mijenja normu ni izraz $x'y'' - y'x''$, pa dobivena formula vrijedi i u početnim osima. S druge strane, iz neprekidnosti brzine i teorema o srednjoj vrijednosti integrala slijedi

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\ell(t_0, t)}{|t - t_0|} = \|\gamma'(t_0)\| > 0.$$

Zato limes u definiciji postoji i jednak je

$$\kappa(t_0) = \frac{|\theta'(t_0)|}{\|\gamma'(t_0)\|},$$

što daje (5.14). Za graf je $\gamma(x) = (x, f(x))$, pa su prva i druga derivacija prve komponente jednake 1 i 0. □

Primjer 5.6.12. Za pravac je zakrivljenost nula. Za kružnicu polumjera r uzimamo $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$. Tada su brojnik i nazivnik u (5.14) jednaki r^2 i r^3, pa je $\kappa = 1/r$. Manja kružnica ima veću zakrivljenost. Za parabolu $y = x^2$ dobivamo

$$\kappa(x) = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}.$$

Najveća je zakrivljenost u vrhu parabole.

Izraz bez apsolutne vrijednosti u brojniku opisuje *predznačenu zakrivljenost*, nakon izbora orijentacije. Za graf, uz smjer rastućega x, njezin predznak odgovara predznaku f''. To je korisna dodatna informacija, ali nije nenegativna zakrivljenost iz naše definicije.

Zadatak 5.6.1. Izračunajte površinu lika omeđenoga grafovima $y = x^2$ i $y = 2x$. Zatim izračunajte volumen tijela nastaloga njegovom rotacijom oko osi x. Objasnite zašto treba oduzeti kvadrate polumjera, a ne kvadrirati njihovu razliku.

Zadatak 5.6.2. Izračunajte duljinu luka grafa $f(x) = \operatorname{ch} x$ na $[0, a]$, gdje je $a > 0$. Izračunajte površinu plohe koja nastaje rotacijom toga luka oko osi x.

Uputa: Upotrijebite $1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$ i $\operatorname{ch}^2 x = (1 + \operatorname{ch}(2x))/2$.

Zadatak 5.6.3. Neka je γ parametrizacija klase C^1 na $[\alpha, \beta]$ i neka je $\varphi\colon [c, d] \to [\alpha, \beta]$ strogo monotona surjekcija klase C^1. Primjenom formule za duljinu i zamjene varijable dokažite da je $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$. Provjerite i slučaj kada je φ padajuća.

Zadatak 5.6.4. Elipsa ima parametrizaciju $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, gdje je $a \geqslant b > 0$. Dokažite da joj je zakrivljenost

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}.$$

Odredite najveću i najmanju zakrivljenost te točke u kojima se postižu. Posebno objasnite slučaj $a = b$.

5.7. Nepravi integrali

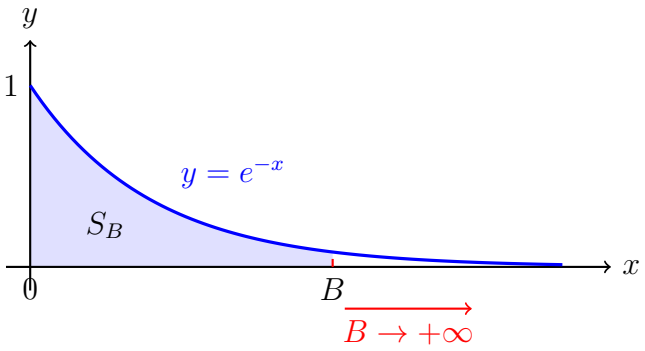
Riemannov integral dosad smo definirali za ograničenu funkciju na segmentu. Želimo obuhvatiti i neograničene intervale te funkcije koje postaju neograničene blizu nekoga kraja intervala. To nećemo učiniti promjenom definicije Riemannova integrala, nego uzimanjem limesa integrala po prikladnim segmentima.

5.7.1. Definicija i osnovni primjeri

Za svaki $B > 0$ vrijedi

$$\int_0^B e^{-x}\,dx = 1 - e^{-B}.$$

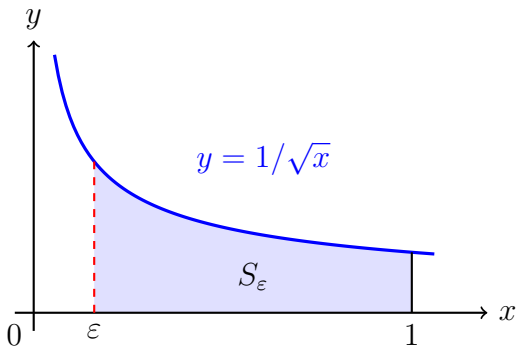
Kada $B \to +\infty$, desna strana teži broju 1. Taj ćemo broj zvati integralom funkcije e^{-x} na neograničenom intervalu $[0, +\infty\rangle$.



Drukčija poteškoća javlja se za $f(x) = 1/\sqrt{x}$ na $\langle 0, 1]$: interval je ograničen, ali funkcija nije ograničena. Za $0 < \varepsilon < 1$ ipak imamo

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) \longrightarrow 2 \qquad (\varepsilon \to 0+).$$

Pritom $1/\sqrt{x} \to +\infty$ kada $x \to 0+$. Neograničenost funkcije sama po sebi ne sprječava postojanje konačnoga limesa njezinih integrala.



Definicija 5.7.1. *Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a < b \leqslant +\infty$ i neka je funkcija $f\colon [a, b\rangle \to \mathbb{R}$ Riemannovo integrabilna na svakom segmentu $[a, B]$, $a < B < b$. Ako postoji konačan limes*

$$\lim_{B \to b-} \int_a^B f(x)\,dx,$$

kažemo da nepravi integral konvergira *i definiramo*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{B\to b-} \int_a^B f(x)\,dx.$$

Za $b = +\infty$ oznaka $B \to b-$ znači $B \to +\infty$. Ako konačan limes ne postoji, kažemo da integral divergira.

Analogno, za $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ definiramo

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{A\to a+} \int_A^b f(x)\,dx,$$

ako je f integrabilna na svakom $[A, b]$ i limes je konačan.

Ako limes iz definicije iznosi $+\infty$ ili $-\infty$, kažemo da integral divergira prema tom beskonačnom limesu. Takav integral nije konvergentan u upravo uvedenom smislu. Posebna oznaka uz krajnju točku nije nužna: iz domene funkcije i teksta bit će jasno kada se integral tumači kao nepravi.

Definicija 5.7.2. *Neka je $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ i neka je f Riemannovo integrabilna na svakom segmentu sadržanom u $\langle a, b\rangle$. Za takvu funkciju kažemo da je* lokalno Riemannovo integrabilna. *Odaberimo $c \in \langle a, b\rangle$. Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira ako oba integrala*

$$\int_a^c f(x)\,dx, \qquad \int_c^b f(x)\,dx$$

konvergiraju; njegovu vrijednost tada definiramo kao njihov zbroj.

Definicija ne ovisi o odabiru c. Doista, zamijenimo li c točkom $d > c$, konačan integral $\int_c^d f$ pribraja se prvom, a oduzima drugom pribrojniku. Aditivnost integrala na segmentima i račun s konačnim limesima pokazuju i istodobnu konvergenciju i jednakost ukupnih vrijednosti.

Ako funkcija ima singularnost u unutarnjoj točki c, integral razdvajamo u toj točki i opet zahtijevamo konvergenciju obaju dijelova. Za konačno mnogo takvih točaka svaki od dobivenih integrala mora zasebno konvergirati.

Primjer 5.7.3. Integral $\int_{-1}^1 dx/x$ ne konvergira, jer

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \ln\varepsilon \to -\infty, \qquad \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = -\ln\varepsilon \to +\infty.$$

Za svaki $\varepsilon > 0$ manji od 1 zbroj tih dvaju integrala ipak je nula. Limes takvih *simetrično odsječenih* zbrojeva zove se Cauchyjeva *glavna vrijednost*; ona ovdje postoji, ali nije konvergentan nepravi integral. Dva neovisna limesa ne smijemo zamijeniti jednim limesom u kojem su odsijecanja međusobno povezana. Posebno, Newton–Leibnizovu formulu ne smijemo primijeniti preko singularnosti $x = 0$.

Primjer 5.7.4. Izračunali smo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Jednako tako,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Prva se jednakost dobiva iz $\arctan B \to \pi/2$, a druga iz $\arcsin A \to -\pi/2$ kada $A \to -1+$. Nasuprot tome, $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$ divergira jer $\int_0^B \cos x\,dx = \sin B$ nema limes kada $B \to +\infty$.

Teorem 5.7.5 (p-integrali)**.** *Za $a > 0$ i $p \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^{-p}\,dx$ *konvergira ako i samo ako je $p > 1$; tada iznosi $a^{1-p}/(p-1)$.*

2. $\displaystyle\int_0^a x^{-p}\,dx$ *konvergira ako i samo ako je $p < 1$; tada iznosi $a^{1-p}/(1-p)$.*

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-p}\,dx$ *divergira za svaki $p \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Za $p \neq 1$ i $0 < A < B$ imamo

$$\int_A^B x^{-p}\,dx = \frac{B^{1-p} - A^{1-p}}{1-p}.$$

Ako $B \to +\infty$ i $A = a$, konačan limes postoji točno kada je $1 - p < 0$. Ako $A \to 0+$ i $B = a$, konačan limes postoji točno kada je $1 - p > 0$. Za $p = 1$ formula je $\ln B - \ln A$, pa oba neprava integrala divergiraju prema $+\infty$. Treća tvrdnja slijedi razdvajanjem integrala u točki a: uvjeti $p > 1$ i $p < 1$ ne mogu istodobno vrijediti. □

Za $p \leqslant 0$ druga tvrdnja zapravo daje običan Riemannov integral nakon neprekidnoga proširenja u nulu. I takav slučaj dopušten je u limitičnoj definiciji. Općenito, ako je f integrabilna na $[a, b]$ s konačnim krajevima, vrijedi

$$\left|\int_B^b f(x)\,dx\right| \leqslant M(b-B) \longrightarrow 0, \qquad |f(x)| \leqslant M,$$

pa limitična definicija daje istu vrijednost kao Riemannov integral.

5.7.2. Kriteriji konvergencije

Teorem 5.7.6 (Cauchyjev kriterij)**.** *Uz pretpostavke definicije 5.7.1 za desni kraj b, integral $\int_a^b f$ konvergira ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $c \in [a, b\rangle$ takav da za sve $c < A < B < b$ vrijedi*

$$\left| \int_A^B f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Analogna tvrdnja vrijedi kod lijevoga kraja intervala.

Dokaz. Stavimo $F(B) = \int_a^B f$. Ako $F(B) \to L \in \mathbb{R}$, za A, B dovoljno blizu b imamo $|F(A) - L| < \varepsilon/2$ i $|F(B) - L| < \varepsilon/2$. Aditivnost integrala i nejednakost trokuta daju traženi uvjet.

Obratno, pretpostavimo navedeni uvjet i odaberimo rastući niz (B_n) u $\langle a, b\rangle$ koji teži b. Tada je $(F(B_n))$ Cauchyjev niz: za dovoljno velike m, n razlika njegovih članova po apsolutnoj je vrijednosti manja od zadanoga ε. Prema potpunosti $\mathbb{R}$ postoji $L = \lim_n F(B_n) \in \mathbb{R}$. Za zadani $\varepsilon > 0$ uzmimo c iz pretpostavljenoga uvjeta s $\varepsilon/2$ te zatim n takav da je $B_n > c$ i $|F(B_n) - L| < \varepsilon/2$. Za svaki $B > c$ razlika $F(B) - F(B_n)$ ima apsolutnu vrijednost manju od $\varepsilon/2$, bez obzira na redoslijed B i B_n. Stoga je $|F(B) - L| < \varepsilon$, pa $F(B) \to L$. □

Teorem 5.7.7 (Usporedba)**.** *Neka su f, g integrabilne na svakom $[a, B] \subseteq [a, b\rangle$ i neka za neki $c \in [a, b\rangle$ vrijedi*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \qquad (c \leqslant x < b).$$

Ako $\int_a^b g$ konvergira, konvergira i $\int_a^b f$. Ako $\int_a^b f$ divergira, divergira i $\int_a^b g$. Ako navedene nejednakosti vrijede na cijelom $[a, b\rangle$ i integrali konvergiraju, tada također vrijedi

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Iste tvrdnje vrijede kod lijevoga kraja intervala.

Dokaz. Za $B \geqslant c$ funkcije

$$F(B) = \int_c^B f(x)\,dx, \qquad G(B) = \int_c^B g(x)\,dx$$

su neopadajuće i vrijedi $0 \leqslant F(B) \leqslant G(B)$. Konvergencija integrala od g znači da je G ograničena odozgo, pa je ograničena i F. Monotona i ograničena funkcija ima konačan limes na kraju intervala; to slijedi uzimanjem supremuma njezinih vrijednosti. Stoga integral od f konvergira. Druga tvrdnja jest kontrapozicija prve. Ako usporedba vrijedi već za $c = a$, prelaskom na limes u $0 \leqslant F(B) \leqslant G(B)$ dobivamo posljednju tvrdnju. □

Za konvergenciju je bitno ponašanje funkcije blizu problematičnoga kraja. Konačan početni dio integrala ne utječe na konvergenciju. Međutim, ako $f \leqslant g$ vrijedi samo na završnom dijelu intervala, iz toga ne slijedi nejednakost njihovih *ukupnih* integrala. Primjerice, na $[0, +\infty\rangle$ uzmimo $g(x) = 0$ i $f(x) = 1$ za $0 \leqslant x \leqslant 1$, odnosno $f(x) = 0$ za $x > 1$. Na $[2, +\infty\rangle$ vrijedi $f = g$, ali su ukupni integrali jednaki 1 i 0.

Korolar 5.7.8 (Granična usporedba)**.** *Neka su f, g lokalno integrabilne kao u prethodnom teoremu te pozitivne dovoljno blizu desnoga kraja b. Pretpostavimo da postoji*

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in [0, +\infty].$$

1. *Ako je $\ell < +\infty$, konvergencija integrala od g povlači konvergenciju integrala od f.*
2. *Ako je $\ell > 0$, konvergencija integrala od f povlači konvergenciju integrala od g.*
3. *Ako je $0 < \ell < +\infty$, oba integrala istodobno konvergiraju ili divergiraju.*

Analogno vrijedi pri lijevom kraju.

Dokaz. Za konačan ℓ dovoljno blizu b vrijedi $f(x) \leqslant (\ell + 1)g(x)$, pa slijedi prva tvrdnja. Ako je $0 < \ell < +\infty$, dovoljno blizu b vrijedi $f(x) \geqslant (\ell/2)g(x)$, što daje drugu tvrdnju. Ako je $\ell = +\infty$, umjesto toga uzimamo $f(x) \geqslant g(x)$. Treća tvrdnja objedinjuje prve dvije. □

Za $\ell = 0$ ne zaključujemo da oba integrala imaju isto ponašanje. Primjerice, omjer x^{-2}/x^{-1} teži nuli u beskonačnosti, a integrali po $[1, +\infty\rangle$ redom konvergiraju i divergiraju. Za $\ell = +\infty$ vrijedi odgovarajuće upozorenje s obrnutim ulogama.

Primjer 5.7.9. Gaussov integral $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ konvergira: na $[0, 1]$ integrand je neprekidan, a za $x \geqslant 1$ vrijedi $0 < e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. Time smo dokazali konvergenciju, ali još nismo izračunali vrijednost integrala. Granična usporedba također pokazuje da

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

konvergira, jer je omjer integranda i x^{-2} jednak $1/\sqrt{1 + x^{-4}} \to 1$.

5.7.3. Apsolutna i uvjetna konvergencija

Definicija 5.7.10. *Za lokalno Riemannovo integrabilnu funkciju f kažemo da nepravi integral $\int_a^b f$* apsolutno konvergira *ako $\int_a^b |f|$ konvergira. Ako $\int_a^b f$ konvergira, ali $\int_a^b |f|$ divergira, kažemo da prvi integral* uvjetno konvergira.

Teorem 5.7.11. *Svaki apsolutno konvergentan nepravi integral konvergira i vrijedi*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dokaz. Najprije razmotrimo samo desni problematični kraj. Apsolutna vrijednost lokalno integrabilne funkcije također je lokalno integrabilna. Za $A < B$ vrijedi

$$\left|\int_A^B f(x)\,dx\right| \leqslant \int_A^B |f(x)|\,dx.$$

Cauchyjev kriterij za $|f|$ stoga daje Cauchyjev kriterij za f. Nejednakost u tvrdnji dobivamo prelaskom na limes u istoj ocjeni s donjim krajem a. Lijevi kraj obrađujemo jednako, a za dva problematična kraja primijenimo rezultat na svaki dio i upotrijebimo nejednakost trokuta. □

Primjer 5.7.12. Integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx \quad (a>0,\ p>1)$$

apsolutno konvergiraju, jer su apsolutne vrijednosti integranada redom omeđene s $1/(1+x^2)$ i x^{-p}.

Primjer 5.7.13. Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

uvjetno konvergira. Za $1 \leqslant A < B$ parcijalnom integracijom na segmentu $[A,B]$ (teorem 5.5.9) dobivamo

$$\int_A^B \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos B}{B} + \frac{\cos A}{A} - \int_A^B \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Stoga

$$\left|\int_A^B \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{B} + \frac{1}{A} + \int_A^B \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{A}.$$

Cauchyjev kriterij dokazuje konvergenciju.

Apsolutna konvergencija ne vrijedi. Za svaki cijeli $k \geqslant 1$ na segmentu

$$J_k = \left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right]$$

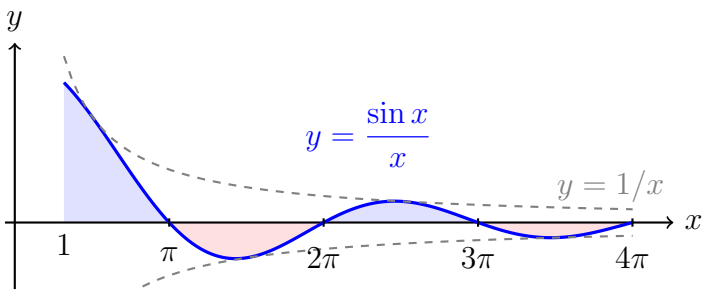
vrijedi $|\sin x| \geqslant 1/2$ i $x \leqslant (k+1)\pi$, pa

$$\int_{J_k} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{2(k+1)\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3(k+1)}.$$

Ovdje integral po J_k označava integral između njegovih krajeva. Za svaki $m \in \mathbb{N}$ segmenti $J_m, \ldots, J_{2m-1}$ sadržani su u $[m\pi, 2m\pi]$ i imaju međusobno disjunktne unutrašnjosti. Pozitivnost i aditivnost zato daju

$$\int_{m\pi}^{2m\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{1}{3(k+1)} \geqslant m \cdot \frac{1}{6m} = \frac{1}{6}.$$

To proturječi Cauchyjevu kriteriju za integral apsolutne vrijednosti. Dokaz ne zahtijeva teoriju beskonačnih redova.



Slika sugerira poništavanje doprinosa različitih predznaka. Samo smanjivanje visina valova nije dokaz konvergencije; u dokazu je presudna jednolika ocjena $2/A$ za sve $B > A$.

5.7.4. Računanje i gama-funkcija

Linearnost se prenosi na neprave integrale kad svi integrali koje zbrajamo konvergiraju. Naime, linearnost vrijedi za svako konačno odsijecanje, a zatim smijemo prijeći na limes. Jednako postupamo s parcijalnom integracijom i zamjenom varijable: formulu najprije primijenimo na segmentu, a tek zatim provjerimo postojanje svih potrebnih limesa.

Propozicija 5.7.14. *Neka su u, v klase C^1 na svakom segmentu $[a, B]$, $B < b$. Ako postoji konačan limes $\ell = \lim_{B\to b-} u(B)v(B)$ i konvergira jedan od integrala $\int_a^b u'v$, $\int_a^b uv'$, tada konvergira i drugi te*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \ell - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Nadalje, neka je f neprekidna na $[a, b\rangle$ i neka je $\varphi\colon [\alpha, \beta\rangle \to [a, b\rangle$ strogo rastuća, klase C^1 na svakom segmentu svoje domene, uz $\varphi(\alpha) = a$ i $\lim_{t\to\beta-} \varphi(t) = b$. Tada integrali na dvjema stranama jednakosti

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

istodobno konvergiraju, a u slučaju konvergencije vrijedi navedena jednakost.

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz parcijalne integracije na $[a, B]$ i prelaska na limes: iz jednakosti triju izraza i postojanja limesa dvaju od njih slijedi postojanje limesa trećega. Za drugu tvrdnju na svakom $[\alpha, T]$ imamo

$$\int_a^{\varphi(T)} f(x)\,dx = \int_\alpha^T f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Zbog neprekidnosti, stroge monotonosti i zadanih krajnjih vrijednosti, φ preslikava $[\alpha, \beta\rangle$ na $[a, b\rangle$. Zato $T \to \beta-$ odgovara upravo $\varphi(T) \to b-$, što dokazuje tvrdnju u oba smjera. □

Analogna pravila vrijede za lijevi problematični kraj. Ako su problematična oba kraja, formulu primjenjujemo odvojeno na oba dijela. U prvoj tvrdnji nije dopušteno oduzimati dva beskonačna limesa: uvjeti su navedeni upravo kako bi se to izbjeglo.

Definicija 5.7.15. *Za $\alpha > 0$ definiramo* gama-funkciju *s*

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx.$$

Prije uporabe te definicije moramo opravdati konvergenciju. Za $0 < x \leqslant 1$ imamo

$$0 < e^{-x} x^{\alpha-1} \leqslant x^{\alpha-1},$$

a integral desne strane od 0 do 1 konvergira upravo za $\alpha > 0$. Za kontrolu u beskonačnosti odaberimo prirodan broj $m > \alpha + 1$. Taylorova formula za eksponencijalnu funkciju daje $e^x \geqslant x^m/m!$ za $x > 0$, pa

$$0 < x^{\alpha+1} e^{-x} \leqslant m! x^{\alpha+1-m} \longrightarrow 0.$$

Stoga za dovoljno velik x vrijedi $e^{-x} x^{\alpha-1} \leqslant x^{-2}$, a usporedba s p-integralom dokazuje konvergenciju i pri beskonačnom kraju. Time je $\Gamma(\alpha)$ dobro definirana za svaki $\alpha > 0$.

Teorem 5.7.16. *Za svaki $\alpha > 0$ vrijedi*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

Nadalje, $\Gamma(1) = 1$ *i*

$$\Gamma(n + 1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Dokaz. Za $0 < \varepsilon < B$ parcijalna integracija daje

$$\int_\varepsilon^B e^{-x} x^\alpha\, dx = -e^{-B} B^\alpha + e^{-\varepsilon} \varepsilon^\alpha + \alpha \int_\varepsilon^B e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx.$$

Oba integrala konvergiraju pri oba kraja, kao što smo upravo dokazali. Također, $e^{-\varepsilon}\varepsilon^\alpha \to 0$ kada $\varepsilon \to 0+$, a $e^{-B} B^\alpha \to 0$ kada $B \to +\infty$, istom ocjenom eksponencijalne funkcije kao gore. Najprije pustimo $\varepsilon \to 0+$ uz fiksan B, a zatim $B \to +\infty$. Dobivamo rekurzivnu formulu. Izravno smo izračunali $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$. Ostatak slijedi indukcijom, uz $0! = 1$. □

Gama-funkcija tako proširuje faktorijele na pozitivne realne argumente, uz pomak argumenta za 1. Za $0 < \alpha < 1$ njezin je integrand neograničen u nuli; zato je bilo potrebno zasebno ispitati oba kraja integracije.

Zadatak 5.7.1. Ispitajte konvergenciju i, kada je moguće, izračunajte

$$\int_0^1 \ln x\, dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

U posljednjem integralu upotrijebite zamjenu $x = t^2$ i obrazložite postupanje s oba kraja.

Zadatak 5.7.2. Za koje $p \in \mathbb{R}$ konvergiraju integrali

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}, \qquad \int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{x|\ln x|^p}?$$

Prikladnom zamjenom svedite oba pitanja na p-integrale.

Zadatak 5.7.3. Neka je $f \geqslant 0$ neprekidna i nerastuća na $[1, +\infty\rangle$, a $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira. Dokažite da $xf(x) \to 0$ kada $x \to +\infty$.

Uputa: Za $x \geqslant 2$ usporedite $\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt$ s $(x/2)f(x)$ te primijenite Cauchyjev kriterij.

Zadatak 5.7.4. Za $c > 0$ i $\alpha > 0$ dokažite

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx} x^{\alpha-1}\,dx = c^{-\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Pomoću zamjene $x = t^2$ zatim pokažite

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Ova jednakost povezuje dva već dokazana konvergentna integrala; ne pretpostavljajte unaprijed njihovu brojčanu vrijednost.

Poglavlje 6

Redovi

Beskonačan decimalni zapis već nas je doveo do zbrojeva s proizvoljno mnogo pribrojnika. Slični se izrazi javljaju kada funkciju želimo aproksimirati polinomima ili trigonometrijskim polinomima. Da bismo im dali precizan smisao, promatrat ćemo niz njihovih konačnih parcijalnih suma.

Prvi dio poglavlja posvećen je redovima brojeva: njihovoj konvergenciji, računanju s njima i procjenama pogreške. Potom ćemo uvesti jednoliku konvergenciju nizova i redova funkcija. Ona će opravdati računanje s redovima potencija, Taylorovim razvojima i integralima. Poglavlje završava izračunom dvaju integrala pomoću redova.

6.1. Red i njegova suma

6.1.1. Parcijalne sume i konvergencija

Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih ili kompleksnih brojeva. Umjesto neodređenoga zahtjeva da odjednom zbrojimo beskonačno mnogo brojeva, najprije zbrajamo konačno mnogo članova:

$$s_0 = 0, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Definicija 6.1.1. *Izraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

zovemo redom*, broj a_n njegovim* općim članom*, a s_n njegovom n-tom* parcijalnom sumom*. Red* konvergira *ako niz (s_n) konvergira prema konačnom broju s. Tada s zovemo* sumom reda *i pišemo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Ako niz parcijalnih suma ne konvergira, red divergira*.*

Ista oznaka upotrebljava se za red i, kada postoji, za njegovu sumu; iz konteksta mora biti jasno o kojem je značenju riječ. Za realan red čije parcijalne sume teže $+\infty$ kažemo da *divergira prema* $+\infty$. Takav red nije konvergentan u smislu prethodne definicije. Analogno vrijedi za $-\infty$.

Često indeksiranje počinje s $n = 0$. Tada su parcijalne sume $\sum_{k=0}^{n} a_k$, a definicija se ne mijenja. Važan je redoslijed pribrojnika; proizvoljno preuređivanje beskonačnoga reda zasad nije dopuštena računska operacija.

Propozicija 6.1.2. *Za $a_n = u_n + iv_n$, gdje su $u_n, v_n \in \mathbb{R}$, red $\sum a_n$ konvergira ako i samo ako konvergiraju oba realna reda $\sum u_n$ i $\sum v_n$. Tada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + i \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Dokaz. Realni i imaginarni dijelovi parcijalnih suma reda $\sum a_n$ upravo su parcijalne sume redova $\sum u_n$ i $\sum v_n$. Primijenimo kriterij konvergencije kompleksnih nizova po komponentama, teorem 2.7.11. □

Primjer 6.1.3 (Teleskopski red)**.** Budući da je

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

vrijedi konačna jednakost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Prelaskom na limes dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Općenitije, ako $b_n \to b$, onda $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - b$. Poništavanje članova najprije provodimo u konačnoj sumi.

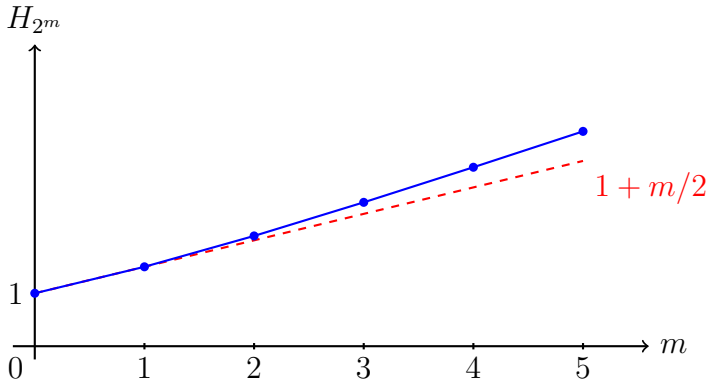
Teorem 6.1.4 (Nužan uvjet konvergencije)**.** *Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada $a_n \to 0$.*

Dokaz. Iz $s_n \to s$ i $a_n = s_n - s_{n-1}$ slijedi $a_n \to s - s = 0$. □

Primjer 6.1.5 (Harmonijski red)**.** Red $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergira prema $+\infty$, iako mu opći član teži nuli. Njegove parcijalne sume $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ rastu. Za svaki $j \geqslant 1$ u bloku s indeksima $2^{j-1} + 1, \ldots, 2^j$ ima 2^{j-1} članova, a svaki je barem 2^{-j}. Zato

$$H_{2^m} = 1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{m}{2} \longrightarrow +\infty.$$

Zbog monotonosti cijeli niz (H_n) teži $+\infty$. Ovaj primjer pokazuje da nužan uvjet nije dovoljan.



Plave točke prikazuju podniz harmonijskih parcijalnih suma, a crvena crta dokazanu donju ogradu. Spojnice plavih točaka služe samo lakšem praćenju vrijednosti.

6.1.2. Geometrijski red i decimalni zapisi

Teorem 6.1.6. *Za $q \in \mathbb{C}$ geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergira ako i samo ako je $|q| < 1$. Tada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \left| \frac{1}{1-q} - \sum_{k=0}^{n} q^k \right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}.$$

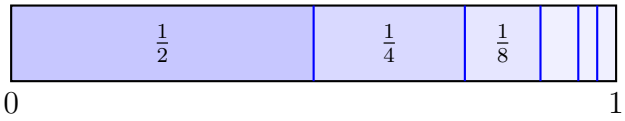
U ovom zapisu prvi je član $q^0 = 1$, također za $q = 0$.

Dokaz. Za $q \neq 1$ množenjem i poništavanjem dobivamo

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Ako je $|q| < 1$, tada $|q^{n+1}| = |q|^{n+1} \to 0$, pa dijeljenje s $1-q$ i prelazak na limes daju obje formule. Ako je $|q| \geqslant 1$, opći član q^n ne teži nuli. Teorem 6.1.4 tada isključuje konvergenciju. □

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$



Slika ilustrira zbroj $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$. Nakon n članova preostaje pravokutnik površine 2^{-n}. Činjenica da taj ostatak teži nuli već je sadržana u konačnoj geometrijskoj formuli.

Primjer 6.1.7. Za $q = 1/10$ dobivamo

$$\frac{1}{9} = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = 0.111\ldots, \qquad 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 0.999\ldots.$$

To je u skladu s ranije uvedenim značenjem decimalnoga zapisa. Općenitije, za znamenke $d_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ parcijalne sume $\sum_{k=1}^{n} d_k 10^{-k}$ rastu i omeđene su odozgo brojem 1. Zato konvergiraju. Njihov limes, pribrojen cijelom dijelu, daje vrijednost zadanoga nenegativnog decimalnog zapisa.

6.1.3. Cauchyjev kriterij i računanje s redovima

Teorem 6.1.8 (Cauchyjev kriterij za redove)**.** *Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, s realnim ili kompleksnim članovima, konvergira ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q \geqslant p \geqslant N) \quad \left| \sum_{k=p}^{q} a_k \right| < \varepsilon.$$

Dokaz. Vrijedi $\sum_{k=p}^{q} a_k = s_q - s_{p-1}$. Traženi uvjet zato je Cauchyjev uvjet za niz parcijalnih suma, uz pomak indeksa za 1. Prema Cauchyjevu kriteriju za realne i kompleksne nizove (teoremi 2.6.3 i 2.7.16) taj je uvjet ekvivalentan konvergenciji. □

U kriteriju duljina bloka $q - p + 1$ nije unaprijed ograničena. Samo uvjet $a_n \to 0$ kontrolira pojedine kasne članove; Cauchyjev kriterij istodobno kontrolira zbroj svakoga kasnog konačnog bloka, koliko god on bio dug.

Propozicija 6.1.9. *Promjena, dodavanje ili uklanjanje konačno mnogo početnih članova ne utječe na konvergenciju reda. Ako red konvergira sa sumom s, za svaki $N \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$r_N := s - s_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k, \qquad r_N \longrightarrow 0.$$

Broj r_N zovemo ostatkom *reda nakon N članova.*

Dokaz. Za $n > N$ vrijedi $s_n = s_N + \sum_{k=N+1}^{n} a_k$. Oduzimanje fiksnoga broja s_N ne mijenja postojanje limesa, a u slučaju konvergencije daje navedenu formulu. Posljednja tvrdnja jest $s - s_N \to 0$. □

Teorem 6.1.10 (Linearnost)**.** *Ako redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergiraju sa sumama A i B, tada za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda A + \mu B.$$

Dokaz. Parcijalne sume lijeve strane jednake su $\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k$. Prijeđimo na limes pomoću pravila za konvergentne nizove. □

Pretpostavke o konvergenciji u prethodnom teoremu bitne su. Iz toga što $\sum(a_n + b_n)$ konvergira ne slijedi da oba reda zasebno konvergiraju: uz $a_n = 1$ i $b_n = -1$ svaki član zbroja jednak je nuli. Ovdje ne smijemo pisati razliku dviju beskonačnih suma kao razliku konačnih brojeva.

Propozicija 6.1.11 (Grupiranje uzastopnih članova)**.** *Neka red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira sa sumom s i neka je $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$ rastući niz cijelih brojeva. Stavimo $b_j = \sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} a_k$. Tada $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergira i ima istu sumu s.*

Dokaz. Parcijalne sume grupiranoga reda jesu s_{m_j}. One čine podniz konvergentnoga niza (s_n), pa također teže s. □

Obrat ne vrijedi: red $1-1+1-1+\cdots$ divergira, iako grupiranje $(1-1)+(1-1)+\cdots$ daje nulti red. Grupiranjem smo u tom slučaju odabrali samo jedan konvergentan podniz parcijalnih suma. Također, grupiranje uzastopnih članova treba razlikovati od promjene njihova redoslijeda.

Zadatak 6.1.1. Izračunajte parcijalne sume i sume redova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n.$$

U svakom primjeru odredite i ostatak nakon prvih N članova.

Zadatak 6.1.2. Dokažite da svaki niz $(s_n)_{n\geqslant 0}$ s $s_0 = 0$ jest niz parcijalnih suma točno jednoga reda. Koji je njegov opći član? Primijenite to na $s_n = n/(n+1)$.

Zadatak 6.1.3. Pretpostavimo $a_n \to 0$ i neka red dobiven grupiranjem u blokove $a_1 + a_2$, $a_3 + a_4$, ... konvergira prema s. Dokažite da tada i izvorni red konvergira prema s. Koja pretpostavka nedostaje u primjeru $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$?

6.2. Uspoređivanje redova i kriteriji konvergencije

6.2.1. Nenegativni članovi i apsolutna konvergencija

Ako su svi članovi reda nenegativni, njegove parcijalne sume ne padaju. Stoga je za konvergenciju dovoljno ustanoviti da ne mogu proizvoljno rasti.

Teorem 6.2.1. *Neka je $a_n \geqslant 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako je niz njegovih parcijalnih suma ograničen. U tom slučaju vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Ako parcijalne sume nisu ograničene, one teže prema $+\infty$.

Dokaz. Za $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ vrijedi $s_{N+1} - s_N = a_{N+1} \geqslant 0$. Tvrdnje slijede iz teorema o monotonim nizovima. □

Govorit ćemo o redovima s *nenegativnim članovima*. Time dopuštamo da neki članovi budu jednaki nuli. Nenegativnost je ovdje bitna: za opći red sama ograničenost parcijalnih suma ne jamči konvergenciju.

Teorem 6.2.2 (Kriterij usporedbe)**.** *Neka su $a_n, b_n \geqslant 0$ i neka postoje $K > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$a_n \leqslant K b_n \qquad (n \geqslant n_0).$$

Ako $\sum b_n$ konvergira, tada konvergira i $\sum a_n$. Ako $\sum a_n$ divergira, tada divergira i $\sum b_n$. Ako nejednakost vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, za konvergentne redove vrijedi i

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant K \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dokaz. Za $N \geqslant n_0$ imamo

$$0 \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant K \sum_{n=n_0}^{N} b_n.$$

Ako red na desnoj strani konvergira, njegove su parcijalne sume ograničene. Tada su ograničene i parcijalne sume reda na lijevoj strani, pa taj red konvergira prema teoremu 6.2.1. Konačno mnogo početnih članova ne utječe na konvergenciju. Druga tvrdnja kontrapozicija je prve, a posljednju dobivamo prijelazom na limes u nejednakosti za parcijalne sume. □

Primjer 6.2.3. Budući da je za $n \geqslant 2$

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

red $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergira usporedbom s teleskopskim redom. Štoviše, njegova je suma najviše 2. Ta ocjena dokazuje konvergenciju, ali ne određuje točnu sumu.

Teorem 6.2.4 (Granični kriterij usporedbe)**.** *Neka su $a_n \geqslant 0$ i $b_n > 0$ za sve dovoljno velike n. Ako je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \qquad 0 < L < +\infty,$$

onda redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ istodobno konvergiraju ili divergiraju. Ako je $L = 0$, iz konvergencije reda $\sum b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum a_n$. Ako je $L = +\infty$, iz divergencije reda $\sum b_n$ slijedi divergencija reda $\sum a_n$.

Dokaz. Za $0 < L < +\infty$ i dovoljno velike n vrijedi

$$\frac{L}{2}b_n \leqslant a_n \leqslant \frac{3L}{2}b_n.$$

Dvaput primijenimo kriterij usporedbe. Za $L = 0$ naposljetku vrijedi $a_n \leqslant b_n$, a za $L = +\infty$ naposljetku vrijedi $b_n \leqslant a_n$. Ponovno primijenimo isti kriterij. □

Uvjet $0 < L < +\infty$ potreban je za zaključak o *istodobnoj* konvergenciji. Ako je $L = 0$, red s manjim članovima može konvergirati i kada red s većim članovima divergira: primjer su $a_n = 1/n^2$ i $b_n = 1/n$.

Definicija 6.2.5. *Red* $\sum a_n$ *realnih ili kompleksnih brojeva* apsolutno konvergira *ako konvergira red* $\sum |a_n|$. *Red* uvjetno konvergira *ako konvergira, a ne konvergira apsolutno.*

Teorem 6.2.6. *Svaki apsolutno konvergentan red realnih ili kompleksnih brojeva konvergira. Pritom vrijedi*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{6.1}$$

Dokaz. Za $q \geqslant p$ nejednakost trokuta daje

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| \leqslant \sum_{n=p}^{q} |a_n|.$$

Ako red $\sum |a_n|$ konvergira, desna je strana proizvoljno mala čim je p dovoljno velik, neovisno o izboru $q \geqslant p$. Cauchyjev kriterij 6.1.8 zato daje konvergenciju reda $\sum a_n$. Konačna nejednakost trokuta vrijedi za svaku parcijalnu sumu; prijelazom na limes dobivamo (6.1). □

Posebno, ako je $|a_n| \leqslant b_n$ za sve dovoljno velike n, pri čemu $b_n \geqslant 0$ i $\sum b_n$ konvergira, onda $\sum a_n$ konvergira apsolutno. U tom slučaju kažemo da je red *majoriziran* konvergentnim redom s nenegativnim članovima.

6.2.2. Alternirajući redovi

Kod članova različitih predznaka konvergencija može nastati poništavanjem. Najjednostavniji su primjer redovi u kojima se predznaci izmjenjuju.

Teorem 6.2.7 (Leibnizov kriterij)**.** *Neka je* (b_n) *nerastući niz nenegativnih brojeva i neka je* $b_n \to 0$. *Tada red*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

konvergira. Za njegove parcijalne sume s_N vrijedi

$$s_{2m} \leqslant S \leqslant s_{2m-1} \qquad (m \in \mathbb{N}),$$

a za ostatak, uz $s_0 = 0$, vrijedi

$$0 \leqslant (-1)^N (S - s_N) \leqslant b_{N+1} \qquad (N \geqslant 0). \tag{6.2}$$

Dakle, pogreška po apsolutnoj vrijednosti nije veća od prvoga izostavljenog člana, a njezin je predznak jednak njegovu predznaku ako pogreška nije nula.

Dokaz. Imamo

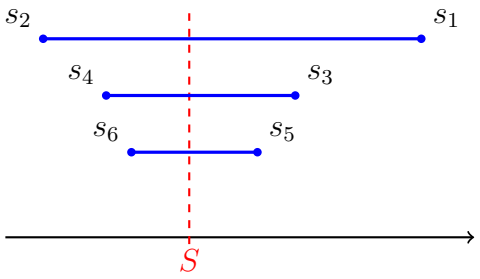
$$s_{2m+2} - s_{2m} = b_{2m+1} - b_{2m+2} \geqslant 0, \qquad s_{2m+1} - s_{2m-1} = -b_{2m} + b_{2m+1} \leqslant 0.$$

Parne parcijalne sume zato ne padaju, a neparne ne rastu. Svaka je parna suma najviše svaka kasnija neparna suma, jer se njihova razlika može grupirati u nenegativne razlike susjednih članova i jedan posljednji nenegativan član. Posebno, $0 \leqslant s_{2m} \leqslant b_1$. Oba podniza stoga konvergiraju. Kako je

$$s_{2m+1} - s_{2m} = b_{2m+1} \longrightarrow 0,$$

njihovi su limesi jednaki istom broju S. Slijedi $s_N \to S$ te $s_{2m} \leqslant S \leqslant s_{2m-1}$.

Ako je N paran, S leži između s_N i $s_{N+1} = s_N + b_{N+1}$. Ako je N neparan, S leži između $s_{N+1} = s_N - b_{N+1}$ i s_N. To daje (6.2); slučaj $N = 0$ slijedi iz $0 \leqslant S \leqslant b_1$. □



Segmenti $[s_{2m}, s_{2m-1}]$ ugniježđeni su i sadrže sumu reda. Njihova duljina b_{2m} teži nuli. Na slici su prikazane parcijalne sume alternirajućega harmonijskog reda.

Primjer 6.2.8. Red

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

konvergira po Leibnizovu kriteriju, ali ne konvergira apsolutno jer harmonijski red divergira. Za njegovu sumu S vrijedi $1/2 \leqslant S \leqslant 1$ i $|S - s_N| \leqslant 1/(N+1)$. Vrijednost sume izračunat ćemo kasnije pomoću reda za logaritam.

Uvjet $b_n \to 0$ bez monotonosti nije dovoljan za Leibnizov zaključak. Primjerice, stavimo

$$b_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad b_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Svi su b_n pozitivni i teže nuli, ali parne parcijalne sume pripadnoga alternirajućeg reda iznose $\sum_{k=1}^{m} 1/(2k)$, pa divergiraju prema $+\infty$. S druge strane, dovoljno je da pretpostavke Leibnizova kriterija vrijede od nekoga indeksa nadalje.

6.2.3. Kriteriji omjera i korijena

Sljedeći kriteriji uspoređuju članove reda s geometrijskim nizom. Za kompleksne članove uvijek promatramo njihove module.

Teorem 6.2.9 (D'Alembertov kriterij omjera)**.** *Neka je $a_n \neq 0$ za sve dovoljno velike n.*

1. *Ako postoje $q < 1$ i n_0 takvi da je*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q \qquad (n \geqslant n_0),$$

   red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

2. *Ako je $|a_{n+1}/a_n| \geqslant 1$ za sve dovoljno velike n, red $\sum a_n$ divergira.*

Posebno, uz oznake

$$r^* = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \qquad r_* = \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

uvjet $r^* < 1$ jamči apsolutnu konvergenciju, a uvjet $r_* > 1$ jamči divergenciju. Ako postoji limes omjera r, dobivamo apsolutnu konvergenciju za $r < 1$ i divergenciju za $r > 1$.

Dokaz. U prvom slučaju možemo, povećanjem q ako treba, uzeti $0 < q < 1$. Uzastopnom primjenom pretpostavljene nejednakosti dobivamo

$$|a_{n_0+k}| \leqslant |a_{n_0}| q^k \qquad (k \geqslant 0).$$

Geometrijski red na desnoj strani konvergira, pa kriterij usporedbe daje apsolutnu konvergenciju. U drugom slučaju $|a_n| \geqslant |a_{n_0}| > 0$ za $n \geqslant n_0$. Stoga $a_n \not\to 0$, pa nije ispunjen nužan uvjet konvergencije reda.

Ako je $r^* < 1$, odaberemo $r^* < q < 1$; po svojstvu gornjega limesa omjeri su naposljetku manji od q. Ako je $r_* > 1$, omjeri su naposljetku veći od 1. Tvrdnje o limesu slijede kao posebni slučajevi. □

Teorem 6.2.10 (Cauchyjev kriterij korijena)**.** *Neka je (a_n) niz realnih ili kompleksnih brojeva i neka je*

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty].$$

Ako je $r < 1$, red $\sum a_n$ apsolutno konvergira. Ako je $r > 1$, red divergira. Za $r = 1$ sam ovaj podatak nije dovoljan. Divergenciju također možemo zaključiti ako je $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$ za beskonačno mnogo indeksa n.

Dokaz. Za $r < 1$ odaberimo $r < q < 1$. Tada je naposljetku $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant q$, odnosno $|a_n| \leqslant q^n$. Kriterij usporedbe daje apsolutnu konvergenciju. Za $r > 1$ odaberimo q tako da je $1 < q < r$. Za beskonačno mnogo n vrijedi $\sqrt[n]{|a_n|} > q$, pa je $|a_n| > q^n \geqslant 1$. Članovi reda zato ne teže nuli. Isti zaključak slijedi iz posljednjega uvjeta teorema jer $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$ znači $|a_n| \geqslant 1$. □

Naziv *Cauchyjev kriterij korijena* razlikujemo od Cauchyjeva uvjeta 6.1.8, koji je nužan i dovoljan za konvergenciju svakoga reda.

Primjer 6.2.11. Za članove $a_n = 1/n$ i $b_n = 1/n^2$ limesi omjera i korijena jednaki su 1:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1, \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1,$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1, \qquad \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1.$$

Prvi red divergira, a drugi konvergira. Rubna vrijednost 1 zato ne odlučuje o konvergenciji.

Ako uniformna ocjena omjera $|a_{n+1}/a_n| \leqslant q < 1$ dokazuje apsolutnu konvergenciju, tada je dokazuje i kriterij korijena. Doista, iz $|a_n| \leqslant |a_{n_0}| q^{n-n_0}$ slijedi

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant q < 1.$$

Obrat ne vrijedi. Primjerice, za $k \geqslant 0$ stavimo

$$a_{2k} = 4^{-k}, \qquad a_{2k+1} = 2 \cdot 4^{-k}.$$

Početni član a_0 ne utječe na konvergenciju. Omjeri susjednih članova naizmjence su 2 i 1/8, pa kriterij omjera ne daje odluku. Međutim,

$$\sqrt[2k]{a_{2k}} = \frac{1}{2} \quad (k \geqslant 1), \qquad \sqrt[2k+1]{a_{2k+1}} = \frac{1}{2}\, 2^{2/(2k+1)} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Kriterij korijena zato daje konvergenciju. Ovaj primjer ujedno pokazuje da uvjet

$$\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$$

ne jamči divergenciju. U divergencijskom dijelu kriterija omjera pojavljuje se donji limes.

Primjer 6.2.12. Za svaki $z \in \mathbb{C}$ apsolutno konvergira red

$$E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Za $z = 0$ tvrdnja je neposredna, a za $z \neq 0$ vrijedi

$$\left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \frac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Prema tome, kriterij omjera daje tvrdnju. I redovi

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad C(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

apsolutno konvergiraju: sume modula njihovih članova omeđene su sumom $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n/n!$.

Time smo definirali tri funkcije na $\mathbb{C}$. Njihovu vezu s eksponencijalnom, sinusnom i kosinusnom funkcijom opravdat ćemo nakon obrade Taylorovih redova. Sama sličnost zapisa ili jedna funkcijska jednakost još nije dokaz identifikacije s već uvedenom funkcijom.

6.2.4. Integralni kriterij

Integrali su osobito korisni kada članovi reda sporo teže nuli, pa kriteriji omjera i korijena daju rubnu vrijednost 1.

Teorem 6.2.13 (Integralni kriterij)**.** *Neka je $m \in \mathbb{N}$ i neka je $f\colon [m, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ nerastuća funkcija. Tada red $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ konvergira ako i samo ako konvergira nepravi integral $\int_m^{+\infty} f(x)\,dx$. U slučaju konvergencije vrijedi*

$$\int_m^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \leqslant f(m) + \int_m^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Za ostatak $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)$, $N \geqslant m$, vrijedi

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant R_N \leqslant \int_N^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{6.3}$$

Dokaz. Monotona je funkcija Riemann integrabilna na svakom konačnom segmentu svoje domene, pa su integrali u nastavku dobro definirani. Za $x \in [k, k+1]$ vrijedi

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k).$$

Integriranjem i zbrajanjem dobivamo

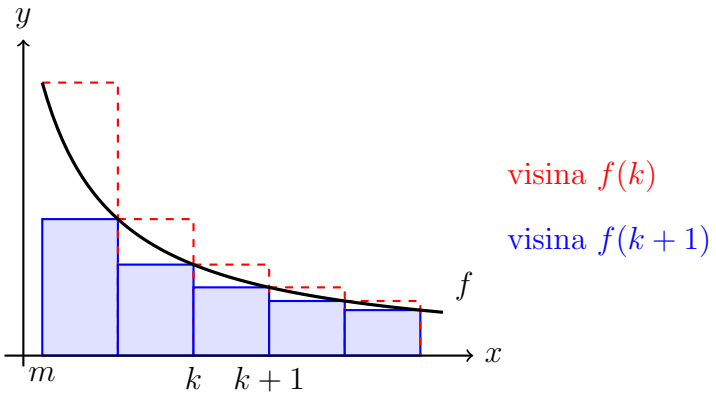
$$\int_m^{N+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=m}^{N} f(n) \leqslant f(m) + \int_m^{N} f(x)\,dx. \tag{6.4}$$

Funkcija $F(t) = \int_m^t f(x)\,dx$ ne pada jer je $f \geqslant 0$. Njezin konačan limes u $+\infty$ postoji ako i samo ako je ona ograničena. Nejednakosti (6.4) pokazuju da je to ekvivalentno ograničenosti parcijalnih suma reda. Pri tome ograničenost vrijednosti $F(N)$ za cjelobrojne N daje ograničenost svih vrijednosti $F(t)$ zahvaljujući monotonosti. Primjenom teorema 6.2.1 slijedi ekvivalencija. Prijelaz na limes u (6.4) daje ocjenu sume.

Za $M > N$ na isti način dobivamo

$$\int_{N+1}^{M+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} f(n) \leqslant \int_N^M f(x)\,dx.$$

Pustimo $M \to \infty$ i dobivamo (6.3). □



Na svakom jediničnom intervalu površina ispod grafa omeđena je površinama dvaju pravokutnika. Neprekidnost funkcije u integralnom kriteriju nije potrebna; monotonost već jamči lokalnu integrabilnost. Dovoljno je i da uvjeti kriterija vrijede tek od nekoga indeksa nadalje.

Primjer 6.2.14 (p-red)**.** Za realan p vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ konvergira} \quad \Longleftrightarrow \quad p > 1.$$

Za $p \leqslant 0$ članovi ne teže nuli. Za $p > 0$ funkcija x^{-p} pozitivna je i padajuća, a za $T > 1$ vrijedi

$$\int_1^T \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{T^{1-p} - 1}{1-p}, & p \neq 1, \\ \ln T, & p = 1. \end{cases}$$

Konačan limes pri $T \to +\infty$ postoji točno za $p > 1$. Tada je

$$\frac{(N+1)^{1-p}}{p-1} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leqslant \frac{N^{1-p}}{p-1}.$$

Tako integralni kriterij daje i konkretnu ocjenu pogreške pri računanju sume.

Primjer 6.2.15. Za svaki realan p red

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

konvergira ako i samo ako je $p > 1$. Za $p \leqslant 0$ to je divergentan red jer su mu članovi za velike n barem $1/n$. Za $p > 0$ funkcija $f(x) = 1/(x(\ln x)^p)$ pada na $[2, +\infty\rangle$. Supstitucija $t = \ln x$ daje

$$\int_2^T \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{\ln T} \frac{dt}{t^p},$$

a posljednji integral ima konačan limes točno za $p > 1$.

Još sporiju granicu između konvergencije i divergencije daje red

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \, (\ln \ln n)^p}.$$

I on konvergira točno za $p > 1$. Za $p \leqslant 0$ usporedimo ga, od dovoljno velikoga indeksa nadalje, s divergentnim redom $\sum 1/(n \ln n)$. Za $p > 0$ pripadna je funkcija pozitivna i padajuća na $[3, +\infty\rangle$, a supstitucija $t = \ln \ln x$ svodi integral na integral funkcije t^{-p}.

Zadatak 6.2.1. Ispitajte apsolutnu i običnu konvergenciju redova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \quad (p \in \mathbb{R}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Za prvi red odredite koliko članova osigurava pogrešku manju od 10^{-3} kada je $p = 2$.

Zadatak 6.2.2. Neka je $a_n > 0$ i neka postoji $r = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n \in [0, +\infty]$. Dokažite da tada postoji i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ te da je jednak r.

Uputa: Za $0 < r < +\infty$ omeđite omjere brojevima $r - \varepsilon$ i $r + \varepsilon$, pri čemu je $0 < \varepsilon < r$, a zatim množite nejednakosti. Slučajeve $r = 0$ i $r = +\infty$ obradite jednostranim ocjenama.

Zadatak 6.2.3. Za $S = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ i $s_N = \sum_{n=1}^{N} 1/n^2$ dokažite

$$s_N + \frac{1}{N+1} \leqslant S \leqslant s_N + \frac{1}{N}.$$

Odredite širinu toga intervala i usporedite je s ocjenom $0 < S - s_N \leqslant 1/N$. Kako to utječe na izbor aproksimacije sume S?

6.3. Produkti i preuređivanja redova

Kod konačnih suma distributivnost dopušta proizvoljno grupiranje i promjenu redoslijeda članova. Kod beskonačnih redova tim se postupcima mijenja niz parcijalnih suma. Zato svaki takav prijelaz moramo opravdati teoremom o konvergenciji.

6.3.1. Cauchyjev produkt

U ovom pododjeljku praktično je indeksiranje započeti od 0.

Definicija 6.3.1. *Za redove* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *definiramo*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n \geqslant 0).$$

Red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *zovemo njihovim* Cauchyjevim produktom.

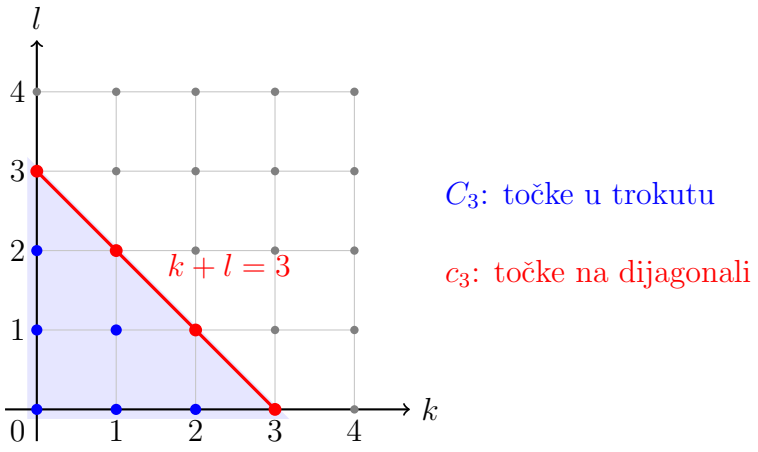
Prvi su članovi

$$c_0 = a_0 b_0, \qquad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \qquad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

Članove dvostrukoga rasporeda $a_k b_l$ zbrajamo duž dijagonala $k + l = n$. Parcijalna suma Cauchyjeva produkta stoga je zbroj po trokutastom skupu indeksa:

$$C_N := \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{\substack{k,l \geqslant 0 \\ k+l \leqslant N}} a_k b_l. \tag{6.5}$$

Nije jednaka produktu odgovarajućih parcijalnih suma $A_N B_N = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} a_k b_l$, u kojem zbrajamo po kvadratu.



Teorem 6.3.2 (Mertensov teorem)**.** *Neka su* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ *konvergentni redovi realnih ili kompleksnih brojeva. Ako barem jedan od njih konvergira apsolutno, njihov Cauchyjev produkt konvergira i ima sumu* AB*.*

Dokaz. Zbog simetrije možemo pretpostaviti $\sum |a_n| < +\infty$. Označimo

$$A_N = \sum_{k=0}^{N} a_k, \qquad B_N = \sum_{k=0}^{N} b_k, \qquad D_N = B_N - B.$$

Tada $A_N \to A$ i $D_N \to 0$, pa postoji $M \geqslant 1$ takav da je $|D_N| \leqslant M$ za svaki $N \geqslant 0$. Preuređivanjem *konačnih* suma u (6.5) dobivamo

$$C_N = \sum_{k=0}^{N} a_k B_{N-k} = BA_N + \sum_{k=0}^{N} a_k D_{N-k}.$$

Dovoljno je dokazati da posljednja suma teži nuli.

Neka je $\varepsilon > 0$. Apsolutna konvergencija daje K takav da je

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Za $N \geqslant K$ podijelimo sumu na početni i završni dio:

$$\left| \sum_{k=0}^{N} a_k D_{N-k} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{K} |a_k| \, |D_{N-k}| + M \sum_{k=K+1}^{N} |a_k|.$$

Drugi je pribrojnik manji od $\varepsilon/2$. Prvi je konačna suma izraza koji za fiksni k teže nuli, pa je i on manji od $\varepsilon/2$ kada je N dovoljno velik. Prema tome, $C_N - BA_N \to 0$, odakle $C_N \to BA$. □

Korolar 6.3.3. *Ako oba reda iz Mertensova teorema konvergiraju apsolutno, tada i njihov Cauchyjev produkt konvergira apsolutno te vrijedi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \right).$$

Dokaz. Nejednakost trokuta i nenegativnost daju za svaki N

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leqslant \sum_{\substack{k,l \geqslant 0 \\ k+l \leqslant N}} |a_k| \, |b_l| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k| \right) \left(\sum_{l=0}^{N} |b_l| \right).$$

Desna je strana omeđena produktom dviju konačnih suma redova modula. Teorem 6.2.1 daje konvergenciju $\sum |c_n|$, a prijelaz na limes daje traženu ocjenu. □

Primjer 6.3.4. Za $|q| < 1$ kvadriranjem geometrijskoga reda dobivamo

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

Zaista, n-ti je član Cauchyjeva produkta $\sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = (n+1)q^n$. Mertensov teorem opravdava množenje jer geometrijski red apsolutno konvergira.

Primjer 6.3.5. Apsolutnu konvergenciju ne možemo izostaviti za oba faktora. Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

konvergira prema Leibnizovu kriteriju, a nije apsolutno konvergentan prema primjeru 6.2.14. Njegov Cauchyjev produkt sa samim sobom ima članove

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Budući da su oba faktora pod korijenom najviše $n+1$, slijedi

$$|c_n| \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Stoga $c_n \not\to 0$ i produkt divergira. Ne radi se o nepostojanju produkta dvaju konačnih brojeva koji su sume polaznih redova, nego o tome da ga ovaj novi red ne predstavlja.

6.3.2. Promjena redoslijeda članova

Definicija 6.3.6. *Neka je $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcija. Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ zovemo* preuređenjem *reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Bijektivnost znači da svaki početni član upotrebljavamo točno jedanput. Nije dovoljno navesti proizvoljan novi niz indeksa: on može neke članove izostaviti ili ponoviti.

Teorem 6.3.7. *Svako preuređenje apsolutno konvergentnoga reda konvergira apsolutno i ima istu sumu kao početni red.*

Dokaz. Neka je $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i neka je σ bijekcija. Za svaki N brojevi $\sigma(1), \ldots, \sigma(N)$ različiti su, pa je

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Parcijalne sume reda modula zato su ograničene, pa preuređeni red apsolutno konvergira.

Dokažimo jednakost suma. Za $\varepsilon > 0$ odaberimo m tako da je $\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon/2$. Surjektivnost daje N_0 takav da se među $\sigma(1), \ldots, \sigma(N_0)$ nalaze svi indeksi $1, \ldots, m$. Za $N \geqslant N_0$ razlika

$$\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{m} a_n$$

jest suma nekih članova s indeksima većim od m, bez ponavljanja. Njezina je apsolutna vrijednost najviše $\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|$. Kako i za izvorni ostatak vrijedi $|S - \sum_{n=1}^{m} a_n| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|$, dobivamo

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} - S \right| \leqslant 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Prema definiciji, suma preuređenoga reda jednaka je S. □

Posebno, suma konvergentnoga reda s nenegativnim članovima ne ovisi o redoslijedu članova. Kod uvjetne konvergencije situacija je drukčija.

Primjer 6.3.8. Neka je

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Znamo da je $A \geqslant 1/2 > 0$. Preuredimo članove tako da uzimamo po dva pozitivna člana, a zatim jedan negativan:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots .$$

To je preuređenje: pozitivni i negativni članovi zadržavaju svaki svoj poredak, a svaki se član naposljetku pojavi. Pokažimo da novi red ima sumu $3A/2$.

Označimo $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$, izvorne parcijalne sume sa s_n, a nove s t_n. Tada je $s_{2m} = H_{2m} - H_m$, dok za novi red vrijedi

$$\begin{aligned} t_{3m} &= \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} \\ &= H_{4m} - \frac{1}{2} H_{2m} - \frac{1}{2} H_m \\ &= s_{4m} + \frac{1}{2} s_{2m} \longrightarrow \frac{3}{2} A. \end{aligned}$$

Razlike $t_{3m+1} - t_{3m} = 1/(4m+1)$ i $t_{3m+2} - t_{3m} = 1/(4m+1) + 1/(4m+3)$ teže nuli. Zato i cijeli niz (t_n) teži prema $3A/2$. Kako je $A > 0$, suma se doista promijenila. Za taj zaključak nismo trebali unaprijed znati točnu vrijednost A.

Prethodni primjer nije iznimka. Uvjetno konvergentan realan red možemo preurediti tako da njegova suma postane bilo koji unaprijed zadani realan broj.

Teorem 6.3.9 (Riemannov teorem o preuređivanju)**.** *Ako red realnih brojeva* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uvjetno konvergira, onda za svaki* $L \in \mathbb{R}$ *postoji bijekcija* $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takva da je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L.$$

Dokaz. Najprije izdvojimo pozitivne i negativne članove. Stavimo

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \qquad a_n^- = \max\{-a_n, 0\},$$

te označimo njihove parcijalne sume s P_N i Q_N. Vrijedi

$$P_N - Q_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \qquad P_N + Q_N = \sum_{n=1}^{N} |a_n|.$$

Druga desna strana teži prema $+\infty$, a prva ima konačan limes. Iz identiteta $2P_N = (P_N + Q_N) + (P_N - Q_N)$ i $2Q_N = (P_N + Q_N) - (P_N - Q_N)$ slijedi $P_N, Q_N \to +\infty$. Posebno, pozitivnih i negativnih članova ima beskonačno mnogo.

Nabrojimo pozitivne članove redom kojim se pojavljuju u polaznom redu kao $p_1, p_2, \ldots$, a module negativnih kao $q_1, q_2, \ldots$. Tada

$$p_j > 0, \quad q_j > 0, \quad p_j, q_j \to 0, \qquad \sum p_j = \sum q_j = +\infty.$$

Konstruiramo novi poredak. Počevši od sume 0, uzimamo neupotrijebljene pozitivne članove po njihovu poretku dok suma ne postane strogo veća od L. Ako je već početna suma veća od L, ovaj je prvi korak prazan. Zatim uzimamo neupotrijebljene negativne članove, opet po njihovu poretku, dok suma ne postane strogo manja od L. Postupak ponavljamo. Svaki je blok konačan jer i zbroj preostalih pozitivnih članova i zbroj modula preostalih negativnih članova divergiraju.

Označimo s U_j sumu na kraju j-toga pozitivnog bloka, a s V_j sumu na kraju sljedećega negativnog bloka. Od drugoga para blokova nadalje oba bloka sadrže barem jedan član. Prelazak preko L događa se tek posljednjim članom, pa je

$$0 < U_j - L \leqslant p_{r_j}, \qquad 0 < L - V_j \leqslant q_{s_j} \qquad (j \geqslant 2),$$

gdje su p_{r_j} i $-q_{s_j}$ posljednji članovi tih blokova. Kako $r_j, s_j \to \infty$, dobivamo $U_j, V_j \to L$. Sve parcijalne sume unutar pozitivnoga bloka leže između V_{j-1} i U_j, a unutar negativnoga između V_j i U_j. Zato cijeli niz parcijalnih suma konvergira prema L.

Preostaje provjeriti da smo dobili preuređenje svih članova. Svaki par blokova nakon prvoga uzima barem jedan novi pozitivni i jedan novi negativni član. Budući da unutar svakoga predznaka čuvamo poredak, svaki nenulti član naposljetku bude upotrijebljen točno jedanput. Ako postoje nulti članovi, nabrojimo i njih po izvornom poretku te nakon j-toga negativnog bloka umetnemo j-ti nulti član, ako postoji. Time se sume ne mijenjaju, a svi članovi budu upotrijebljeni. Dobiveni poredak zato određuje traženu bijekciju σ. □

Zadatak 6.3.1. Za $|q| < 1$ pomoću Cauchyjeva produkta dokažite

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} q^n = \frac{1}{(1-q)^3}.$$

Objasnite zašto se red može pomnožiti s još jednim geometrijskim redom.

Zadatak 6.3.2. Pretpostavite da $\sum a_n$ apsolutno konvergira i da je $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, gdje su I_j neprazni konačni međusobno disjunktni skupovi. Dokažite da red

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n \in I_j} a_n \right)$$

apsolutno konvergira i ima istu sumu kao početni red.

Uputa: Najprije nabrojite indekse po blokovima I_j. Zatim primijenite teorem 6.3.7 i izdvojite odgovarajući podniz parcijalnih suma.

Zadatak 6.3.3. Prilagodite dokaz Riemannova teorema tako da preuređene parcijalne sume teže prema $+\infty$. Potom konstruirajte preuređenje za koje je njihov donji limes $-\infty$, a gornji limes $+\infty$. Pazite da svaki član izvornoga reda bude upotrijebljen točno jedanput.

6.4. Jednolika konvergencija nizova i redova funkcija

Do sada su članovi nizova i redova bili brojevi. Ako svaki član ovisi o varijabli x, limes ili suma također mogu ovisiti o x. Tada se postavlja novo pitanje: čuva li prijelaz na limes neprekidnost, integral ili derivaciju? Pokazat ćemo da sama konvergencija za svako pojedino x za to nije dovoljna. Važna je mogućnost da se ista ocjena pogreške primijeni istodobno na sve točke promatranoga skupa.

6.4.1. Konvergencija po točkama i jednolika konvergencija

Neka je $E \subseteq \mathbb{R}$ neprazan skup i neka su $f_n \colon E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funkcije.

Definicija 6.4.1. *Kažemo da niz* (f_n) konvergira po točkama *na* E *k funkciji* $f \colon E \to \mathbb{R}$ *ako za svaki* $x \in E$ *vrijedi* $f_n(x) \to f(x)$. *Drugim riječima,*

$$(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Kažemo da (f_n) jednoliko *ili* uniformno konvergira *k* f *na* E *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall x \in E) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Jednoliku konvergenciju označavamo s $f_n \rightrightarrows f$ *na* E.

U prvoj definiciji N smije ovisiti i o x i o ε. U drugoj N ovisi o ε, ali vrijedi za sve $x \in E$. Stoga jednolika konvergencija povlači konvergenciju po točkama. Obrat općenito ne vrijedi.

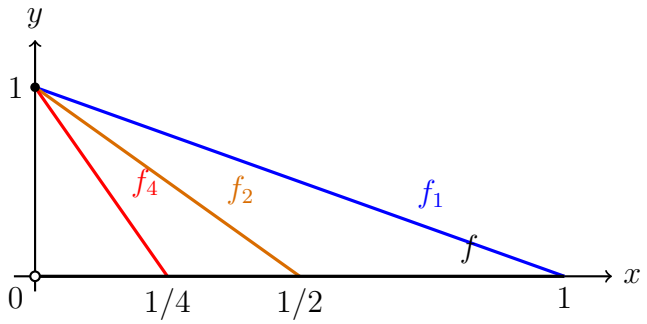
Primjer 6.4.2. Na $[0,1]$ definirajmo neprekidne funkcije

$$f_n(x) = \max\{1 - nx, 0\}.$$

Za $x > 0$ vrijedi $f_n(x) = 0$ čim je $n \geqslant 1/x$, a $f_n(0) = 1$ za svaki n. Prema tome, limes po točkama jest funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Ona nije neprekidna u 0. Konvergencija nije jednolika: za svaki n u točki $x = 1/(2n)$ vrijedi $|f_n(x) - f(x)| = 1/2$. Dakle, već za $\varepsilon = 1/4$ ne postoji zajednički prag N iz druge definicije.



Na slici se dio grafa koji je udaljen od limesa sužava, ali njegova visina ne postaje mala. Za konvergenciju po točkama svaku točku promatramo zasebno; za jednoliku konvergenciju moramo kontrolirati i točke koje se mijenjaju s n.

Za funkciju $h\colon E \to \mathbb{R}$ pišemo

$$\|h\|_E := \sup_{x \in E} |h(x)|,$$

pri čemu dopuštamo vrijednost $+\infty$ ako h nije ograničena. Na prostoru ograničenih funkcija ta se veličina zove *supremumska norma*. Iz definicije slijedi ekvivalencija

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } E \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_n - f\|_E \longrightarrow 0.$$

Doista, točkaste ocjene $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ za sve x daju $\|f_n - f\|_E \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$, a obrat je neposredan. Supremum pritom ne mora biti dosegnut.

Jednolika konvergencija ne zahtijeva da su same funkcije f_n i f ograničene. Primjerice, $f_n(x) = x + 1/n$ jednoliko konvergira k $f(x) = x$ na cijelom skupu $\mathbb{R}$, jer je $\|f_n - f\|_{\mathbb{R}} = 1/n$. Za dovoljno velike n mora biti ograničena njihova *razlika*.

Teorem 6.4.3 (Cauchyjev kriterij za jednoliku konvergenciju)**.** *Niz (f_n) jednoliko konvergira na E k nekoj realnoj funkciji ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \geqslant N)(\forall x \in E) \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{6.6}$$

Dokaz. Ako $f_n \rightrightarrows f$, odaberimo N tako da za $n \geqslant N$ i svaki $x \in E$ vrijedi $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Nejednakost trokuta daje (6.6).

Obratno, pretpostavimo (6.6). Za čvrsti x niz brojeva $(f_n(x))$ jest Cauchyjev, pa po potpunosti $\mathbb{R}$ ima limes. Označimo ga s $f(x)$. Za zadani $\varepsilon > 0$ odaberimo zajednički N za pogrešku $\varepsilon/2$ u (6.6). Fiksirajmo $n \geqslant N$ i $x \in E$ te pustimo $m \to \infty$. Dobivamo

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Budući da je isti N odabran za sve x, konvergencija je jednolika. □

6.4.2. Redovi funkcija i Weierstrassov kriterij

Neka su $u_n \colon E \to \mathbb{R}$ funkcije. Red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira po točkama, odnosno jednoliko, ako njegov niz parcijalnih suma

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

konvergira na odgovarajući način. U tom slučaju limes zovemo *sumom reda funkcija* i pišemo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Jednoliki Cauchyjev kriterij za red glasi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q > p \geqslant N)(\forall x \in E) \quad \left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Posebno, jednolika konvergencija reda povlači $u_n \rightrightarrows 0$, jer je $u_n = s_n - s_{n-1}$ za $n \geqslant 2$. Taj nužan uvjet nije dovoljan, kao što pokazuje red konstantnih funkcija $u_n(x) = 1/n$.

Teorem 6.4.4 (Weierstrassov kriterij majorante)**.** *Pretpostavimo da postoje brojevi $M_n \geqslant 0$ takvi da je*

$$|u_n(x)| \leqslant M_n \qquad (x \in E,\ n \in \mathbb{N})$$

i da red $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergira. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira jednoliko na E i apsolutno u svakoj točki E. Ako je njegova suma f, onda

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} u_k \right\|_E \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k. \tag{6.7}$$

Dokaz. U svakoj čvrstoj točki x usporedba s konvergentnim redom $\sum M_n$ daje apsolutnu konvergenciju reda $\sum u_n(x)$. Time je definirana njegova suma $f(x)$. Za $m > n$ imamo

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} M_k.$$

Puštanjem $m \to \infty$ dobivamo ocjenu $|f(x) - s_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$. Desna strana ne ovisi o x i teži nuli, pa supremum po E daje (6.7) i jednoliku konvergenciju. □

Kriterij se često naziva i *Weierstrassovim M-testom*. To je dovoljan, ali ne i nužan uvjet: red konstantnih funkcija $u_n(x) = (-1)^{n-1}/n$ konvergira jednoliko na svakom nepraznom E, jer pogreška ne ovisi o x, premda ne konvergira apsolutno.

Primjer 6.4.5. Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

konvergira apsolutno i jednoliko na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Naime, $|\sin(nx)/n^2| \leqslant 1/n^2$, a red $\sum 1/n^2$ konvergira. Ista argumentacija vrijedi ako sinus zamijenimo kosinusom. Samo iz toga još ne smijemo zaključiti da se dobiveni redovi mogu derivirati član po član.

Definicije konvergencije po točkama i jednolike konvergencije, Cauchyjev kriterij i Weierstrassov kriterij vrijede i kada je E proizvoljan neprazan skup, primjerice podskup od $\mathbb{C}$, a funkcije imaju vrijednosti u $\mathbb{C}$. Apsolutnu vrijednost tada zamjenjujemo kompleksnim modulom; strukturu domene u tim tvrdnjama nismo koristili. U Cauchyjevu kriteriju postojanje točkastoga limesa tada slijedi primjenom potpunosti $\mathbb{R}$ na realne i imaginarne dijelove. Ostale ocjene ostaju iste.

6.4.3. Neprekidnost i integriranje jednolikog limesa

Teorem 6.4.6. *Ako su $f_n \colon E \to \mathbb{R}$ neprekidne u točki $c \in E$ i $f_n \rightrightarrows f$ na E, onda je i f neprekidna u c. Posebno, jednoliki limes neprekidnih funkcija na E neprekidna je funkcija na E.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo jedan indeks n takav da je

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \qquad (x \in E).$$

Taj indeks sada držimo čvrstim. Zbog neprekidnosti od f_n u c postoji $\delta > 0$ takav da za $x \in E$, $|x - c| < \delta$, vrijedi $|f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon/3$. Za takav x nejednakost trokuta daje

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

To je neprekidnost od f u c, relativno na domenu E. □

Korolar 6.4.7. *Suma jednoliko konvergentnoga reda neprekidnih funkcija na E neprekidna je na E.*

Dokaz. Parcijalne su sume neprekidne kao konačni zbrojevi neprekidnih funkcija. Primijenimo prethodni teorem na njihov niz. □

Za provjeru neprekidnosti dovoljno je imati jednoliku konvergenciju u okolini svake pojedine točke, relativno na E. Nije potrebno da jedan zajednički prag N vrijedi na cijeloj, eventualno neograničenoj domeni. Također, teorem ne tvrdi da je limes *jednoliko* neprekidan na proizvoljnom E.

Teorem 6.4.8. *Neka je $a < b$ i neka su $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemannovo integrabilne. Ako $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$, tada je i f Riemannovo integrabilna te*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{6.8}$$

Štoviše, za svaki $c \in [a,b]$ funkcije

$$F_n(x) = \int_c^x f_n(t)\,dt \quad \textit{jednoliko konvergiraju na } [a,b] \text{ k} \quad F(x) = \int_c^x f(t)\,dt,$$

uz ocjenu, za sve dovoljno velike n,

$$\|F_n - F\|_{[a,b]} \leqslant (b-a)\|f_n - f\|_{[a,b]}. \tag{6.9}$$

Dokaz. Najprije moramo dokazati integrabilnost funkcije f. Izaberimo jedan n za koji je $\|f - f_n\|_{[a,b]} < 1$. Kako je f_n ograničena, iz $|f(x)| \leqslant |f_n(x)| + 1$ slijedi ograničenost od f.

Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo n tako da je

$$\eta := \|f - f_n\|_{[a,b]} < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Za svaku podjelu P nejednakosti $f_n - \eta \leqslant f \leqslant f_n + \eta$ povlače

$$U(f,P) \leqslant U(f_n,P) + \eta(b-a), \qquad L(f,P) \geqslant L(f_n,P) - \eta(b-a).$$

Budući da je f_n integrabilna, Darbouxov kriterij (teorem 5.1.6) daje podjelu P za koju je $U(f_n,P) - L(f_n,P) < \varepsilon/2$. Za tu podjelu vrijedi

$$U(f,P) - L(f,P) \leqslant U(f_n,P) - L(f_n,P) + 2\eta(b-a) < \varepsilon.$$

Ponovna primjena Darbouxova kriterija dokazuje integrabilnost od f.

Sada su razlike $f_n - f$ integrabilne, pa ocjena integrala daje za svaki $x \in [a,b]$

$$\left|\int_c^x (f_n(t) - f(t))\,dt\right| \leqslant |x-c|\|f_n - f\|_{[a,b]} \leqslant (b-a)\|f_n - f\|_{[a,b]}.$$

Desna strana teži nuli neovisno o x. Dobivamo (6.9), a uz $c = a$, $x = b$ i jednakost (6.8). □

Korolar 6.4.9 (Integriranje reda član po član)**.** *Neka su* $u_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemannovo integrabilne funkcije te neka red* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jednoliko konvergira na* $[a,b]$ *k funkciji* f*. Tada za svaki* $c \in [a,b]$ *vrijedi*

$$\int_c^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)\, dt \qquad (x \in [a,b]),$$

a red na desnoj strani konvergira jednoliko na $[a,b]$*.*

Dokaz. Primijenimo teorem 6.4.8 na parcijalne sume $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Njihovi su integrali konačni zbrojevi integrala članova, pa tvrdnja neposredno slijedi. □

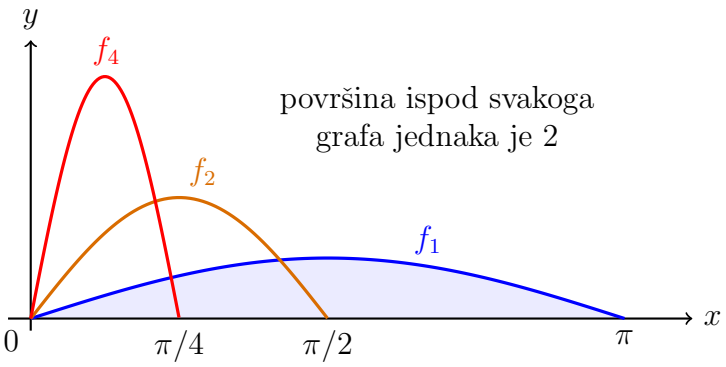
Primjer 6.4.10. Na $[0,\pi]$ definirajmo

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin(nx), & 0 \leqslant x \leqslant \pi/n, \\ 0, & \pi/n < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Svaka je funkcija f_n neprekidna, uključujući spojnu točku π/n. U točki 0 sve su vrijednosti jednake nuli, a za čvrsti $x > 0$ vrijedi $f_n(x) = 0$ čim je $n > \pi/x$. Dakle, $f_n(x) \to 0$ za svaki $x \in [0,\pi]$. Međutim,

$$\int_0^{\pi} f_n(x)\, dx = \int_0^{\pi/n} n\sin(nx)\, dx = [-\cos(nx)]_0^{\pi/n} = 2.$$

Zato je limes integrala 2, dok je integral limesa 0. Konvergencija nije jednolika jer je $f_n(\pi/(2n)) = n$, odnosno $\|f_n\|_{[0,\pi]} = n$.



U ovom primjeru širina dijela na kojem je funkcija pozitivna teži nuli, ali visina raste. Sama konvergencija po točkama ne kontrolira ukupni doprinos takvih dijelova integralu.

6.4.4. Deriviranje limesa i reda

Za integriranje je dovoljna jednolika konvergencija samih funkcija. Za deriviranje postavit ćemo uvjet na njihove derivacije. Pokazat će se da tada konvergenciju funkcija treba unaprijed znati samo u jednoj točki.

Teorem 6.4.11. *Neka je $a < b$ i $f_n \in C^1([a,b])$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da niz (f_n') jednoliko konvergira na $[a,b]$ k funkciji g te da za neku točku $c \in [a,b]$ niz brojeva $(f_n(c))$ konvergira. Tada niz (f_n) jednoliko konvergira na $[a,b]$ k funkciji $f \in C^1([a,b])$ i vrijedi*

$$f'(x) = g(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

U krajevima segmenta derivacije su jednostrane.

Dokaz. Označimo $\ell = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$. Funkcija g neprekidna je prema teoremu 6.4.6, jer su f_n' neprekidne. Zato možemo definirati

$$f(x) = \ell + \int_c^x g(t)\,dt.$$

Teorem o integralu s promjenjivom gornjom granicom (teorem 5.4.4) daje $f \in C^1([a,b])$ i $f' = g$, s jednostranim derivacijama u krajevima segmenta.

Newton–Leibnizova formula primijenjena na f_n daje

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)\,dt.$$

Oduzimanjem slijedi

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(c) - \ell| + (b-a)\|f_n' - g\|_{[a,b]}.$$

Oba člana na desnoj strani teže nuli, a ne ovise o x. Time je dokazana jednolika konvergencija $f_n \rightrightarrows f$. □

Uvjet konvergencije u jednoj točki određuje konstantu integriranja. Bez njega tvrdnja nije istinita: za $f_n(x) = n$ sve su derivacije jednake nuli, ali niz funkcija ne konvergira ni u jednoj točki.

Korolar 6.4.12 (Deriviranje reda član po član)**.** *Neka je $u_n \in C^1([a,b])$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako red $\sum_{n=1}^\infty u_n'$ jednoliko konvergira na $[a,b]$ i red brojeva $\sum_{n=1}^\infty u_n(c)$ konvergira u barem jednoj točki $c \in [a,b]$, tada red $\sum_{n=1}^\infty u_n$ jednoliko konvergira na $[a,b]$. Njegova je suma klase $C^1([a,b])$ i*

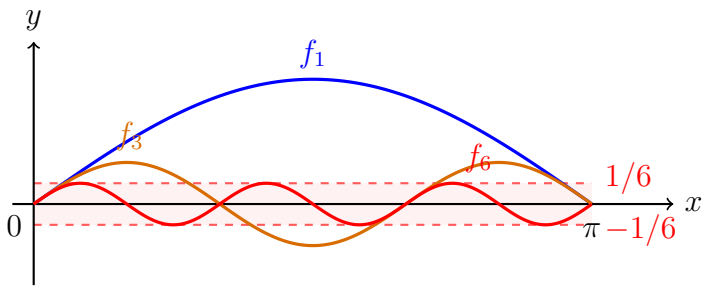
$$\left(\sum_{n=1}^\infty u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^\infty u_n'(x).$$

Dokaz. Primijenimo teorem 6.4.11 na niz parcijalnih suma $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Njihove su derivacije upravo parcijalne sume reda $\sum u_k'$. □

Primjer 6.4.13. Niz funkcija

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \qquad (x \in [-\pi, \pi])$$

jednoliko konvergira k $f = 0$, jer je $\|f_n\|_{[-\pi,\pi]} \leqslant 1/n$. S druge strane, $f_n'(x) = \cos(nx)$. U točki 0 vrijedi $f_n'(0) = 1$, pa limes derivacija u toj točki nije jednak $f'(0) = 0$. U točki π niz derivacija čak ne konvergira, jer je $f_n'(\pi) = (-1)^n$. Dakle, jednolika konvergencija samih funkcija ne dopušta zamjenu redoslijeda limesa i deriviranja.



Grafovi se jednoliko približavaju x-osi, ali njihove oscilacije postaju sve brže. Male vrijednosti funkcije zato ne znače i male vrijednosti njezine derivacije.

Zadatak 6.4.1. Za $f_n(x) = x^n$ odredite limes po točkama na $[0, 1]$. Ispitajte jednoliku konvergenciju na $[0, 1]$, na $[0, r]$ za $0 < r < 1$ te na $[0, 1\rangle$. Izračunajte $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ i integral limesa po točkama. Što taj primjer pokazuje o nužnosti pretpostavke jednolike konvergencije u teoremu 6.4.8?

Zadatak 6.4.2. Dokažite da funkcije $f_n(x) = x/(1 + nx^2)$ jednoliko konvergiraju k nuli na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Točno izračunajte $\|f_n\|_{\mathbb{R}}$.

Uputa: Iz $(\sqrt{n}\,|x| - 1)^2 \geqslant 0$ dobijte gornju ocjenu i odredite kada nastupa jednakost.

Zadatak 6.4.3. Dokažite da red

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$$

definira funkciju klase C^∞ na $\mathbb{R}$ te da se za svaki $m \in \mathbb{N}$ derivacija $f^{(m)}$ dobiva deriviranjem reda član po član.

Uputa: Za svako čvrsto m dokažite konvergenciju reda $\sum n^m/2^n$. Weierstrassov kriterij daje jednoliku konvergenciju svih promatranih redova na $\mathbb{R}$, a teorem o deriviranju primijenite na proizvoljan segment.

Zadatak 6.4.4 (Dinijev teorem)**.** Neka su f_n i f neprekidne funkcije na $[a,b]$. Pretpostavimo da za svaki $x \in [a,b]$ vrijedi $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$ i $f_n(x) \to f(x)$. Dokažite da je konvergencija jednolika.

Uputa: Za zadani $\varepsilon > 0$ skupovi $U_n = \{x \in [a,b] : f_n(x) - f(x) < \varepsilon\}$ relativno su otvoreni, rastu s n i zajedno pokrivaju $[a,b]$. Primijenite kompaktnost segmenta. Objasnite zašto se pretpostavka neprekidnosti limesa ne može izostaviti, koristeći primjer 6.4.2.

6.5. Redovi potencija

Polinomi se mogu derivirati i integrirati član po član. Želimo ustanoviti kada to smijemo učiniti i za beskonačne sume potencija. Pokazat će se da takav red u unutrašnjosti svoga područja konvergencije ima osobito dobra svojstva. Na rubu tog područja ponašanje može biti drukčije, pa ćemo rubne točke uvijek provjeravati zasebno.

6.5.1. Radijus konvergencije

Definicija 6.5.1. *Neka su $c \in \mathbb{C}$ i $a_n \in \mathbb{C}$ za $n \in \mathbb{N}_0$. Izraz*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

nazivamo redom potencija sa središtem u c. *Brojevi a_n njegovi su* koeficijenti. *Konstantni član je a_0; on ima tu vrijednost i za $z = c$.*

Promjenom varijable $w = z - c$ možemo račun svesti na središte 0, ali središte ćemo zadržati u općim formulama. Ako su središte i koeficijenti realni, red možemo promatrati samo na realnom pravcu. Kompleksna varijabla omogućuje jednostavan zajednički opis svih točaka konvergencije.

Neka je

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \text{ konvergira} \right\}.$$

Uvijek je $c \in K$, pa skup nije prazan. Broj

$$R := \sup\{|z-c| \,:, z \in K\} \in [0, +\infty]$$

nazivamo *radijusom konvergencije*. Ako je skup udaljenosti neomeđen, pišemo $R = +\infty$.

Teorem 6.5.2 (Cauchy–Hadamardova formula)**.** *Za red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ stavimo*

$$\rho := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Tada je

$$R = \frac{1}{\rho}, \qquad \frac{1}{0} := +\infty, \qquad \frac{1}{+\infty} := 0.$$

Red apsolutno konvergira za $|z - c| < R$*, a divergira za* $|z - c| > R$*. U potonjem slučaju njegovi članovi čak ne teže prema nuli.*

Dokaz. U središtu se svi članovi osim konstantnoga poništavaju, pa ondje red konvergira. Neka je zato $d := |z - c| > 0$.

Ako je $d < 1/\rho$, možemo odabrati konačan broj q takav da je

$$\rho < q < \frac{1}{d}.$$

To uključuje slučaj $\rho = 0$; za $\rho = +\infty$ ovaj slučaj ne nastupa. Prema definiciji limesa superiora postoji N takav da za $n \geqslant N$ vrijedi $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant q$. Stoga je

$$|a_n(z - c)^n| \leqslant (qd)^n \qquad (n \geqslant N).$$

Kako je $qd < 1$, usporedba s geometrijskim redom daje apsolutnu konvergenciju.

Ako je $d > 1/\rho$, možemo odabrati konačan q takav da je

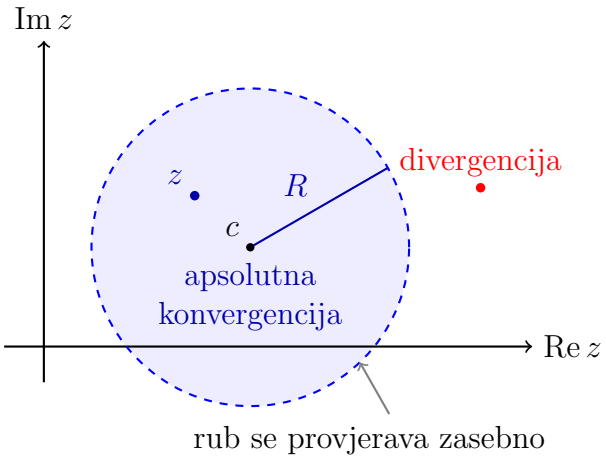
$$\frac{1}{d} < q < \rho.$$

To uključuje slučaj $\rho = +\infty$; za $\rho = 0$ ovaj slučaj ne nastupa. Za beskonačno mnogo indeksa n vrijedi $\sqrt[n]{|a_n|} > q$. Za te indekse imamo

$$|a_n(z - c)^n| > (qd)^n, \qquad qd > 1,$$

pa članovi reda ne teže prema nuli.

Ako je $0 < 1/\rho < +\infty$, upravo dokazane tvrdnje pokazuju da supremum udaljenosti točaka konvergencije iznosi $1/\rho$, neovisno o ponašanju na kružnici. Ako je $\rho = 0$, red konvergira u svakoj točki i $R = +\infty$. Ako je $\rho = +\infty$, konvergira samo u središtu i $R = 0$. □



Za $0 < R < +\infty$ unutrašnjost područja konvergencije jest otvoreni krug $|z - c| < R$. Na kružnici $|z - c| = R$ prethodni teorem ne daje zaključak. Posebno, pri radu s realnom varijablom treba zasebno ispitati točke $c - R$ i $c + R$.

Korolar 6.5.3. *Pretpostavimo da su koeficijenti od nekog indeksa različiti od nule i da postoji prošireni limes*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, +\infty].$$

Tada je $R = 1/\ell$*, uz iste dogovore za* 0 *i* $+\infty$*.*

Dokaz. Za $z \neq c$ omjer apsolutnih vrijednosti uzastopnih članova iznosi

$$\left|\frac{a_{n+1}(z-c)^{n+1}}{a_n(z-c)^n}\right| = |z-c| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

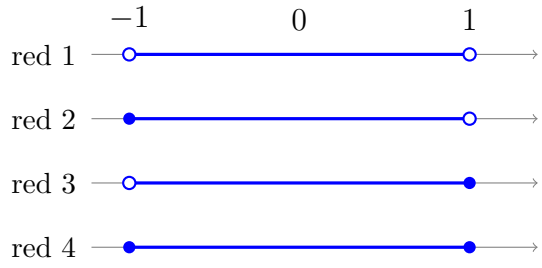
Prema teoremu 6.2.9 red apsolutno konvergira ako je $|z - c|\ell < 1$, a njegovi članovi ne teže prema nuli ako je $|z - c|\ell > 1$. To određuje radijus kao $1/\ell$. Za $\ell = 0$ prvi zaključak vrijedi za svaku konačnu udaljenost, a za $\ell = +\infty$ drugi vrijedi za svaku pozitivnu udaljenost. □

Primjer 6.5.4. Red $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ ima radijus 0, jer je $a_{n+1}/a_n = n + 1 \to +\infty$. Red $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ ima radijus $+\infty$, jer je $a_{n+1}/a_n = 1/(n + 1) \to 0$. Svaki polinom, promatran kao red čiji su gotovo svi koeficijenti jednaki nuli, ima radijus $+\infty$; za njega se prethodni kriterij omjera ne primjenjuje.

Primjer 6.5.5. Sljedeći redovi imaju radijus 1, ali različite skupove konvergencije na realnom pravcu:

red	skup konvergencije
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$\langle -1, 1\rangle$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$[-1, 1\rangle$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$	$\langle -1, 1]$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$	$[-1, 1]$

Za prvi red na oba kraja članovi ne teže prema nuli. Za drugi red u točki 1 dobivamo harmonijski red, a u točki -1 alternirajući red koji konvergira prema Leibnizovu kriteriju 6.2.7. U trećem su redu uloge krajeva zamijenjene. Četvrti red na oba kraja apsolutno konvergira prema primjeru 6.2.14.



6.5.2. Jednolika konvergencija, deriviranje i integriranje

Teorem 6.5.6. *Neka red potencija* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ *ima radijus* $R > 0$. *Za svaki* $0 \leqslant r < R$ *red konvergira jednoliko na zatvorenom krugu* $|z-c| \leqslant r$, *a vrijedi i*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|z-c|\leqslant r} |a_n(z-c)^n| < +\infty.$$

Dokaz. Odaberimo s tako da je $r < s < R$. Red apsolutno konvergira u točki $c+s$, pa je niz $(|a_n|s^n)$ omeđen: postoji $M > 0$ takav da je $|a_n|s^n \leqslant M$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Stavimo $q = r/s < 1$. Za $|z-c| \leqslant r$ imamo

$$|a_n(z-c)^n| \leqslant |a_n|r^n \leqslant Mq^n.$$

Tvrdnja slijedi iz Weierstrassova kriterija 6.4.4. Za $r = 0$ svi članovi osim konstantnoga iščezavaju, pa je zaključak također očit. □

Dokaz ujedno daje ocjenu ostatka, za $0 < r < s < R$ i $N \geqslant 1$:

$$\sup_{|z-c|\leqslant r} \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-c)^n \right| \leqslant \frac{M(r/s)^N}{1-r/s}.$$

Važno je da izaberemo zatvoreni krug strogo unutar radijusa konvergencije. Jednolika konvergencija na cijelom otvorenom krugu općenito ne vrijedi: ostatak geometrijskoga reda $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ne može biti jednoliko malen za $0 \leqslant x < 1$.

Propozicija 6.5.7. *Red potencija i njegovi formalno derivirani i integrirani redovi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1}$$

imaju isti radijus konvergencije, uključujući mogućnosti $R = 0$ *i* $R = +\infty$.

Dokaz. Najprije pokažimo da formalno deriviranje i integriranje ne mogu smanjiti radijus. Ako je $R > 0$, uzmimo $0 < r < s < R$ i kao u prethodnom dokazu M takav da je $|a_n|s^n \leqslant M$. Za $|z-c| \leqslant r$ vrijedi

$$|na_n(z-c)^{n-1}| \leqslant \frac{M}{s}\, n \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1},$$

$$\left|\frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1}\right| \leqslant Mr\left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Oba reda majoranata konvergiraju; za prvi to slijedi iz kriterija omjera, a drugi je geometrijski. Kako je $r < R$ proizvoljan, radijusi izvedenih redova barem su R. Za $R = 0$ ta je tvrdnja automatski istinita. Ovo obrazloženje vrijedi i kada je $R = +\infty$.

Formalni integral formalne derivacije polaznog reda jest polazni red bez konstantnoga člana a_0. Dodavanje ili izostavljanje tog člana ne mijenja područje konvergencije. Primijenimo li već dokazani zaključak o integriranju na derivirani red, dobivamo da njegov radijus ne može biti veći od polaznoga. Slično, formalna derivacija integriranoga reda upravo je polazni red, pa već dokazani zaključak o deriviranju daje i drugu obrnutu nejednakost. □

Riječ *formalno* zasad znači da smo napisali nove koeficijente prema poznatim pravilima za polinome. Tek treba dokazati da je suma formalne derivacije doista derivacija sume. Jednaki radijusi sami po sebi još ne opravdavaju zamjenu deriviranja i beskonačnog zbrajanja.

Teorem 6.5.8. *Ako je $R > 0$ radijus konvergencije reda*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \qquad |z-c| < R,$$

onda za svaku točku u unutar tog kruga vrijedi

$$\lim_{\substack{z\to u\\ z\neq u}} \frac{f(z)-f(u)}{z-u} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(u-c)^{n-1}.$$

Limes vrijedi i kada z prilazi točki u po kompleksnoj ravnini. Posebno, za realno središte i realne koeficijente funkcija f na $\langle c-R, c+R\rangle$ ima neprekidne derivacije svih redova i smije se derivirati član po član.

Dokaz. Izaberimo r takav da je $|u-c| < r < R$. Za $|z-c| \leqslant r$ i $z \neq u$ označimo $w = z-c$ i $v = u-c$. Rastav razlike potencija daje

$$|w^k - v^k| \leqslant kr^{k-1}|w-v| \qquad (k \geqslant 1).$$

Za $n \geqslant 2$ zato vrijedi

$$\begin{aligned}\left|\frac{w^n-v^n}{w-v} - nv^{n-1}\right| &= \left|\sum_{j=0}^{n-1} v^j\left(w^{n-1-j} - v^{n-1-j}\right)\right| \\ &\leqslant |w-v|r^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2}(n-1-j) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}r^{n-2}|w-v|.\end{aligned}$$

Za $n = 0, 1$ odgovarajuće razlike jednake su nuli.

Prema propoziciji 6.5.7, primijenjenoj dvaput, konačan je broj

$$M_2(r) := \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| r^{n-2}.$$

Svi redovi koje oduzimamo apsolutno konvergiraju, pa prethodnu ocjenu smijemo zbrojiti. Dobivamo

$$\left| \frac{f(z) - f(u)}{z - u} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (u-c)^{n-1} \right| \leqslant \frac{1}{2} M_2(r) |z - u|.$$

Desna strana teži prema nuli kada $z \to u$, što dokazuje formulu za derivaciju.

Izvedeni red ima isti radijus, pa postupak možemo ponavljati. Svaki tako dobiveni red konvergira jednoliko na zatvorenim intervalima strogo unutar područja konvergencije; njegove parcijalne sume su polinomi. Zato su sve realne derivacije neprekidne. □

Za realnu varijablu formula za prvu derivaciju može se dobiti i iz korolara 6.4.12: red derivacija jednoliko konvergira na svakom segmentu $[c-r, c+r]$ s $0 < r < R$, a polazni red konvergira u središtu c, koje pripada tom segmentu. Prethodni dokaz dodatno pokazuje da je pogreška u razlikovnom kvocijentu omeđena konstantom puta $|z - u|$ i u kompleksnoj ravnini.

Korolar 6.5.9. *Uz realno središte i realne koeficijente vrijedi*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-c)^{n-k}, \qquad |x - c| < R,$$

te posebno

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Prema tome, prikaz funkcije redom potencija s istim središtem jedinstven je: ako dva takva reda daju istu funkciju na nekoj okolini središta, njihovi su odgovarajući koeficijenti jednaki.

Dokaz. Prvu formulu dobivamo k-strukim deriviranjem član po član. Uvrštavanjem $x = c$ ostaje samo član s $n = k$, što daje drugu formulu, a ona dokazuje jedinstvenost. Za $k = 0$ pod $f^{(0)}$ razumijemo samu funkciju f. □

Korolar 6.5.10. *Neka su c i koeficijenti realni te neka je $R > 0$. Ako je $[\alpha, \beta] \subset \langle c - R, c + R \rangle$, onda*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \big((\beta - c)^{n+1} - (\alpha - c)^{n+1} \big).$$

Posebno, za $|x - c| < R$ vrijedi

$$\int_{c}^{x} f(t) \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}.$$

Dokaz. Zatvoreni interval integriranja sadržan je u nekom intervalu $[c-r, c+r]$ s $r < R$. Teorem 6.5.6 i korolar 6.4.9 dopuštaju integriranje član po član. Integriranjem monoma dobivamo napisane formule. Ako je $x < c$, primjenjujemo isti zaključak na $[x, c]$ i promijenimo predznak integrala. □

Jednakost radijusa ne znači jednakost skupova konvergencije na rubu. Primjerice, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ konvergira u $x = 1$, ali njegov derivirani red $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}/n$ ondje divergira. S druge strane, geometrijski red divergira u $x = -1$, a njegov integrirani red $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}/(n+1)$ ondje konvergira. Ni deriviranje ni integriranje na rubu ne smijemo opravdati samo formulama koje smo dokazali za unutrašnjost.

6.5.3. Abelov teorem i prilaz rubu

Jednolika konvergencija na manjim zatvorenim krugovima ne daje sama po sebi informaciju pri približavanju kružnici radijusa R. Sljedeći rezultat pokazuje što se može zaključiti kada u odabranoj rubnoj točki red konvergira, makar samo uvjetno.

Teorem 6.5.11 (Abelov teorem)**.** *Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, s realnim ili kompleksnim članovima, konvergira i ima sumu s, onda red*

$$F(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

konvergira jednoliko za $t \in [0, 1]$. Posebno, F je neprekidna na tom intervalu, $F(1) = s$ i

$$\lim_{t \to 1^-} F(t) = s.$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema Cauchyjevu kriteriju možemo odabrati $N \geqslant 1$ tako da za sve $k \geqslant m \geqslant N$ vrijedi

$$\left| \sum_{n=m}^{k} a_n \right| < \varepsilon.$$

Fiksirajmo $p \geqslant m \geqslant N$ i označimo $A_k = \sum_{n=m}^{k} a_n$ za $m \leqslant k \leqslant p$. Konačna parcijalna sumacija daje

$$\sum_{n=m}^{p} a_n t^n = A_p t^p + \sum_{k=m}^{p-1} A_k (t^k - t^{k+1}).$$

Za $0 \leqslant t \leqslant 1$ sve su razlike $t^k - t^{k+1}$ nenegativne. Zato

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m}^{p} a_n t^n \right| &\leqslant \varepsilon \left(t^p + \sum_{k=m}^{p-1} (t^k - t^{k+1}) \right) \\ &= \varepsilon t^m \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Ocjena ne ovisi o t, pa uniformni Cauchyjev kriterij 6.4.3 dokazuje jednoliku konvergenciju na $[0,1]$. Parcijalne sume su neprekidne, stoga je i njihova jednolika granica neprekidna. U točki 1 red po pretpostavci ima sumu s, pa slijedi traženi limes. □

Korolar 6.5.12. *Neka red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ ima radijus $0 < R < +\infty$ i neka konvergira u točki ξ za koju je $|\xi - c| = R$. Tada*

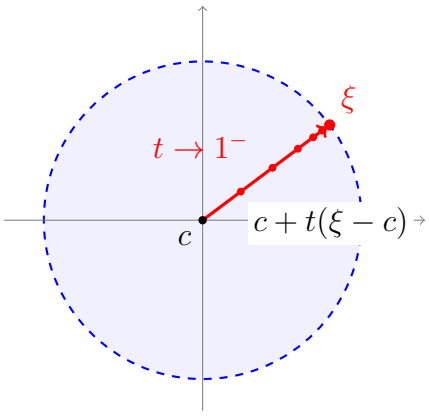
$$\lim_{t\to 1^-} f\big(c + t(\xi - c)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi - c)^n.$$

Za realno središte i realne koeficijente to posebno daje odgovarajući jednostrani limes pri prilazu svakom kraju intervala na kojem red konvergira. Ako konvergira na oba kraja, konvergira jednoliko na cijelom zatvorenom intervalu $[c-R, c+R]$.

Dokaz. Primijenimo Abelov teorem na koeficijente $b_n = a_n(\xi - c)^n$. Za $0 \leqslant t < 1$ vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = f\big(c + t(\xi - c)\big),$$

što daje prvi zaključak. Ako su oba realna kraja točke konvergencije, isti teorem primijenjen na $b_n = a_n R^n$ i na $b_n = a_n(-R)^n$ daje jednoliku konvergenciju na $[c, c+R]$ i na $[c-R, c]$. Za zadanu točnost uzmemo veći od dva potrebna indeksa i dobivamo jednoliku konvergenciju na njihovu uniju. □



prilaz rubnoj točki po polumjeru

U kompleksnoj ravnini upravo smo dokazali limes *po polumjeru*; nismo dokazali limes po svim mogućim putovima do rubne točke. Također, postojanje radijalnog limesa samo po sebi ne povlači konvergenciju reda na rubu. Na primjer, za $0 \leqslant t < 1$ vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad (t \to 1^-),$$

ali red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergira.

Korolar 6.5.13. *Pretpostavimo da redovi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} d_n$$

konvergiraju, a treći je Cauchyjev produkt prvih dvaju, odnosno

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ako su njihove sume redom A, B, D, onda je $D = AB$.

Dokaz. Članovi konvergentnih redova omeđeni su, pa za $0 \leqslant t < 1$ redovi $\sum a_n t^n$ i $\sum b_n t^n$ apsolutno konvergiraju usporedbom s geometrijskim redom. Prema korolaru 6.3.3 zato je

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right).$$

Pustimo $t \to 1^-$ i primijenimo Abelov teorem na sva tri reda. Dobivamo $D = AB$. □

Pretpostavka da Cauchyjev produkt konvergira ovdje je bitna. Ovaj korolar određuje njegovu sumu ako konvergencija već postoji; Mertensov teorem 6.3.2 daje dovoljan uvjet za samu konvergenciju.

Zadatak 6.5.1. Odredite radijus i skup realnih točaka konvergencije svakog reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n^2}.$$

Kod posljednjeg reda smatrajte da su koeficijenti potencija koje se ne pojavljuju jednaki nuli.

Zadatak 6.5.2. Deriviranjem geometrijskoga reda dokažite da za $|x| < 1$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Izračunajte sume

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Obrazložite svaki prijelaz na derivaciju beskonačnog reda.

Zadatak 6.5.3. Neka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ima radijus $R > 0$ i neka $a_n \geqslant 0$ za svaki n. Pretpostavite da je $R < +\infty$ i da je suma reda omeđena za $0 \leqslant x < R$. Dokažite da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konvergira. Zatim Abelovim teoremom odredite njegovu sumu.

Uputa: Svaka konačna parcijalna suma omeđena je istom gornjom međom kao cijela suma za $0 \leqslant x < R$. Najprije pustite $x \to R^-$ uz fiksan broj članova.

Zadatak 6.5.4. Neka dva reda potencija sa središtem $c \in \mathbb{R}$ imaju pozitivne radijuse konvergencije, a njihove su sume jednake u svim točkama nekog niza (x_j) takvog da je $x_j \neq c$ i $x_j \to c$. Dokažite da su odgovarajući koeficijenti jednaki.

Uputa: Ako postoji prvi različiti koeficijent, podijelite razliku redova odgovarajućom potencijom $x - c$ i pustite $x = x_j \to c$.

6.6. Taylorovi redovi

6.6.1. Taylorov red i funkcija koju predstavlja

Taylorov polinom opisuje funkciju u blizini odabrane točke do određenoga reda. Sada se pitamo možemo li povećavanjem stupnja dobiti samu funkciju kao sumu reda. Pritom treba razlikovati postojanje svih derivacija, konvergenciju dobivenoga reda i jednakost njegove sume početnoj funkciji.

Definicija 6.6.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $c \in I$ i $f \in C^\infty(I)$.* Taylorov red *funkcije f oko točke c jest*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Za $c = 0$ nazivamo ga i Maclaurinovim redom. *Njegove parcijalne sume upravo su Taylorovi polinomi*

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

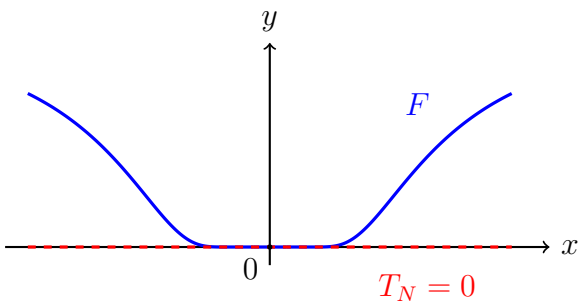
Kažemo da je f realno analitička *na I ako se oko svake točke $c \in I$ na nekoj njezinoj okolini podudara sa sumom konvergentnoga reda potencija.*

Prema korolaru 6.5.9, svaki takav prikaz mora biti upravo Taylorov red. Obratno, sama pretpostavka $f \in C^\infty(I)$ još ne daje prikaz funkcije redom.

Primjer 6.6.2. U primjeru 4.6.4 dokazali smo da je funkcija

$$F(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

beskonačno puta derivabilna i da je $F^{(n)}(0) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Njezin Taylorov red oko nule zato je nul-red. On konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$, ali njegova suma jednaka je $F(x)$ samo za $x = 0$. Funkcija F nije analitička u nuli.



Za dokaz jednakosti $f(x) = \lim_{N\to\infty} T_N(x)$ potrebno je pokazati da Taylorov ostatak teži nuli. Sljedeća dva kriterija to omogućuju pomoću zajedničke ocjene viših derivacija.

Teorem 6.6.3. *Neka je I otvoreni interval, $c \in I$, $f \in C^\infty(I)$ i $J = I \cap \langle c-\delta, c+\delta\rangle$, gdje je $\delta > 0$. Pretpostavimo da postoje $C, M > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takvi da je*

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant CM^n n! \qquad (t \in J,\ n \geqslant n_0).$$

Tada Taylorov red oko c konvergira prema $f(x)$ za svaki $x \in J$ za koji je $M|x-c| < 1$. Konvergencija je jednolika na svakom segmentu $[c-r, c+r] \subseteq J$ s $Mr < 1$.

Dokaz. Za $x \in J$ cijeli segment s krajevima c i x sadržan je u J. Taylorov teorem 4.3.13 za $N+1 \geqslant n_0$ daje točku ξ između c i x takvu da je

$$f(x) - T_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-c)^{N+1}.$$

Za $x = c$ jednakost je neposredna. Stoga u svim slučajevima vrijedi

$$|f(x) - T_N(x)| \leqslant C(M|x-c|)^{N+1}.$$

Desna strana teži nuli kada je $M|x-c| < 1$. Na navedenom segmentu možemo je zamijeniti s $C(Mr)^{N+1}$, neovisno o x, što dokazuje jednoliku konvergenciju. □

Teorem 6.6.4. *Uz iste oznake, pretpostavimo umjesto prethodne ocjene da je*

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant CM^n \qquad (t \in J,\ n \geqslant n_0).$$

Tada Taylorov red oko c konvergira prema f na cijelom J, jednoliko na svakom segmentu sadržanom u J.

Dokaz. Taylorov ostatak sada zadovoljava

$$|f(x) - T_N(x)| \leqslant C\frac{(M|x-c|)^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Za svaki fiksni $R > 0$ niz $R^n/n!$ teži nuli: omjer dvaju uzastopnih članova jednak je $R/(n+1)$ i od nekoga je mjesta najviše $1/2$. Time dobivamo konvergenciju za svaki $x \in J$. Na segmentu $K \subseteq J$ broj $|x-c|$ ima zajedničku konačnu gornju ogradu, pa ista ocjena daje jednoliku konvergenciju na K. □

6.6.2. Eksponencijalna i trigonometrijske funkcije

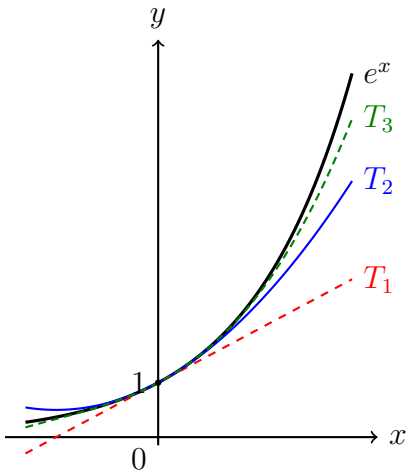
Teorem 6.6.5. *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Red konvergira apsolutno na $\mathbb{R}$ i jednoliko na svakom omeđenom intervalu. Ako je $|x| \leqslant R$, tada

$$\left| e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| \leqslant e^R \frac{R^{N+1}}{(N+1)!}. \tag{6.10}$$

Dokaz. Sve derivacije funkcije e^x jednake su samoj funkciji, a u nuli imaju vrijednost 1. Na $[-R, R]$ njihove su apsolutne vrijednosti najviše e^R. Taylorov teorem daje (6.10), iz čega slijede prikaz i jednolika konvergencija. Apsolutna konvergencija slijedi iz kriterija omjera za $|x|^n/n!$; za $x = 0$ tvrdnja je neposredna. □



Na slici su prva tri nekonstantna Taylorova polinoma funkcije e^x. Ocjena (6.10) pokazuje kako se stupanj može odabrati prema željenoj točnosti na zadanom segmentu.

Teorem 6.6.6. *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Oba reda konvergiraju apsolutno na $\mathbb{R}$ i jednoliko na svakom omeđenom intervalu.

Dokaz. Uzastopne derivacije sinusa i kosinusa ponavljaju se u ciklusima duljine četiri. Njihove apsolutne vrijednosti na realnoj osi najviše su 1. Vrijednosti derivacija u nuli zato daju upravo navedene koeficijente, a teorem 6.6.4 daje jednakost funkcija i suma te jednoliku konvergenciju na omeđenim intervalima. Apsolutnu konvergenciju dobivamo usporedbom s $\sum_{k=0}^{\infty} |x|^k/k!$. □

Propozicija 6.6.7. *Za sve $z \in \mathbb{C}$ vrijede isti razvoji*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Sve tri sume konvergiraju apsolutno i jednoliko na svakom skupu $\{z : |z| \leqslant R\}$, gdje je $R > 0$.

Dokaz. U primjeru 6.2.12 označili smo te sume redom $E(z)$, $S(z)$ i $C(z)$ i dokazali njihovu apsolutnu konvergenciju. Za jednoliku konvergenciju na $|z| \leqslant R$ primjenjujemo Weierstrassov kriterij 6.4.4 s majorantama $R^n/n!$ i odgovarajućim podredovima.

Identifikaciju s ranije definiranim kompleksnim funkcijama treba posebno opravdati. Prema teoremu 6.3.2, za $z, w \in \mathbb{C}$ možemo množiti apsolutno konvergentne redove:

$$E(z)E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = E(z+w).$$

Druga jednakost jest konačna binomna formula. Za realne x, y već dokazani razvoji daju

$$E(x) = e^x, \qquad E(iy) = \cos y + i \sin y.$$

U drugoj jednakosti apsolutna konvergencija dopušta razdvajanje parnih i neparnih članova. Stoga je

$$E(x+iy) = E(x)E(iy) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy},$$

u skladu s definicijom iz poglavlja o nizovima. Napokon, razdvajanjem parnih i neparnih potencija dobivamo

$$\frac{E(iz) - E(-iz)}{2i} = S(z), \qquad \frac{E(iz) + E(-iz)}{2} = C(z).$$

Lijeve strane upravo su ranije definirani $\sin z$ i $\cos z$. □

Tako prikazi redovima nadopunjuju ranije definicije; ne uvodimo nove funkcije s već upotrijebljenim imenima.

Primjer 6.6.8 (Produkt dvaju kosinusnih redova)**.** Za $z, w \in \mathbb{C}$ apsolutna konvergencija daje

$$C(z)C(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{2k} w^{2n-2k}}{(2k)!(2n-2k)!}.$$

Zbrajanjem konačnih binomnih razvoja za $(z+w)^{2n}$ i $(z-w)^{2n}$ poništavaju se članovi s neparnim potencijama od w:

$$(z+w)^{2n} + (z-w)^{2n} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} z^{2k} w^{2n-2k}.$$

Prema tome,

$$2C(z)C(w) = C(z+w) + C(z-w),$$

odnosno $2\cos z \cos w = \cos(z+w) + \cos(z-w)$. Faktor 2 dolazi upravo iz zbrajanja dvaju binomnih razvoja.

6.6.3. Binomni red

Za $\alpha \in \mathbb{R}$ definiramo

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ako je α nenegativan cijeli broj, svi koeficijenti nakon određenoga mjesta jednaki su nuli i dobivamo konačnu binomnu formulu. Taj slučaj valja izdvojiti prije primjene kriterija omjera.

Teorem 6.6.9 (Binomni razvoj)**.** *Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ i $|x| < 1$ vrijedi*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n. \tag{6.11}$$

Ako $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, radijus konvergencije jednak je 1. Ako $\alpha \in \mathbb{N}_0$, desna je strana polinom i dobivamo uobičajenu konačnu binomnu formulu; za $\alpha = 0$ taj je polinom konstanta 1.

Dokaz. Slučaj $\alpha \in \mathbb{N}_0$ poznata je binomna formula. Neka je $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ i označimo $a_n = \binom{\alpha}{n}$. Tada je $a_n \neq 0$ za svaki n, a

$$(n+1)a_{n+1} = (\alpha - n)a_n.$$

Zato

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|\alpha - n|}{n+1}|x| \longrightarrow |x| \qquad (x \neq 0).$$

Red apsolutno konvergira za $|x| < 1$ i divergira za $|x| > 1$. Njegovu sumu na $\langle -1, 1\rangle$ označimo sa $B(x)$.

Prema teoremu 6.5.8 smijemo derivirati član po član. Koristeći rekurziju koeficijenata dobivamo

$$B'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \alpha B(x) - xB'(x).$$

Dakle, $(1+x)B'(x) = \alpha B(x)$ i $B(0) = 1$. Umjesto pozivanja na opći teorem o diferencijalnim jednadžbama, izravno računamo

$$\left(\frac{B(x)}{(1+x)^\alpha}\right)' = \frac{(1+x)B'(x) - \alpha B(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0.$$

Nazivnik je pozitivan jer je $x > -1$. Funkcija u zagradi stoga je konstantna na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, a u nuli ima vrijednost 1. Time je dokazana (6.11) na cijelom tom intervalu. □

Ovaj dokaz ne zahtijeva ocjenu Taylorova ostatka koja bi bila jednako dobra blizu oba kraja intervala.

Propozicija 6.6.10 (Krajevi binomnoga reda)**.** *Neka $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Ponašanje binomnoga reda na krajevima intervala konvergencije jest sljedeće:*

	$x = -1$	$x = 1$
$\alpha > 0$	*apsolutno, suma* 0	*apsolutno, suma* 2^α
$-1 < \alpha < 0$	*divergira*	*uvjetno, suma* 2^α
$\alpha \leqslant -1$	*divergira*	*divergira.*

Dokaz. Stavimo $b_n = \left|\binom{\alpha}{n}\right|$. Ako je $\alpha > 0$, odaberimo prirodan $N > \alpha$. Za $n \geqslant N$ vrijedi $(n+1)b_{n+1} = (n-\alpha)b_n$, pa

$$\alpha \sum_{n=N}^{M} b_n = \sum_{n=N}^{M} \big(nb_n - (n+1)b_{n+1}\big) = Nb_N - (M+1)b_{M+1} \leqslant Nb_N.$$

Red $\sum b_n$ konvergira jer su mu parcijalne sume rastuće i omeđene. Time je dokazana apsolutna konvergencija na oba kraja. Abelov teorem 6.5.12 i $\lim_{x\to -1+}(1+x)^\alpha = 0$ odnosno $\lim_{x\to 1-}(1+x)^\alpha = 2^\alpha$ daju navedene sume.

Neka je sada $-1 < \alpha < 0$ i $\beta = -\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Tada je $a_n = (-1)^n b_n$ i

$$b_{n+1} = \left(1 - \frac{1-\beta}{n+1}\right) b_n.$$

Niz (b_n) pada i teži nuli. Posljednju tvrdnju opravdavamo nejednakošću $\ln(1-u) \leqslant -u$ za $0 \leqslant u < 1$:

$$0 < b_n \leqslant b_1 \exp\left(-(1-\beta)\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) \longrightarrow 0.$$

Upotrijebljena logaritamska nejednakost slijedi, primjerice, iz negativnosti derivacije funkcije $\ln(1-u) + u$ za $u > 0$. Leibnizov kriterij daje konvergenciju u $x = 1$, a Abelov teorem identificira sumu kao 2^α. U $x = -1$ dobivamo $\sum b_n$, koji ne može konvergirati: inače bi Abelov teorem dao konačan limes za

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = (1-r)^\alpha \quad \text{kada } r \to 1-,$$

dok ta funkcija teži $+\infty$. Konvergencija u $x = 1$ zato je uvjetna.

Napokon, ako je $\alpha \leqslant -1$, ista oznaka $\beta = -\alpha \geqslant 1$ daje $b_{n+1}/b_n = (n+\beta)/(n+1) \geqslant 1$. Kako je $b_0 = 1$, članovi reda ni na jednom kraju ne teže nuli. □

6.6.4. Logaritam i inverzne trigonometrijske funkcije

Poznate razvoje možemo integrirati na segmentima koji leže strogo unutar intervala konvergencije. Takav postupak često je jednostavniji od izravnoga računanja svih derivacija. Krajnje točke potom ispitujemo zasebno.

Primjer 6.6.11 (Logaritamski red)**.** Za $|t| < 1$ vrijedi

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

Integriranjem od 0 do x, prema korolaru 6.5.10, dobivamo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1).$$

Isti argument vrijedi za $x < 0$ uz orijentirani integral. U točki $x = -1$ dobivamo negativan harmonijski red, koji divergira prema $-\infty$. U točki $x = 1$ Leibnizov kriterij daje konvergenciju, a Abelov teorem i neprekidnost logaritma daju

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots . \tag{6.12}$$

Dakle, interval konvergencije jest $\langle -1, 1]$; u $x = 1$ konvergencija je uvjetna.

Primjer 6.6.12 (Red za arkus tangens)**.** Iz

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \qquad (|t| < 1)$$

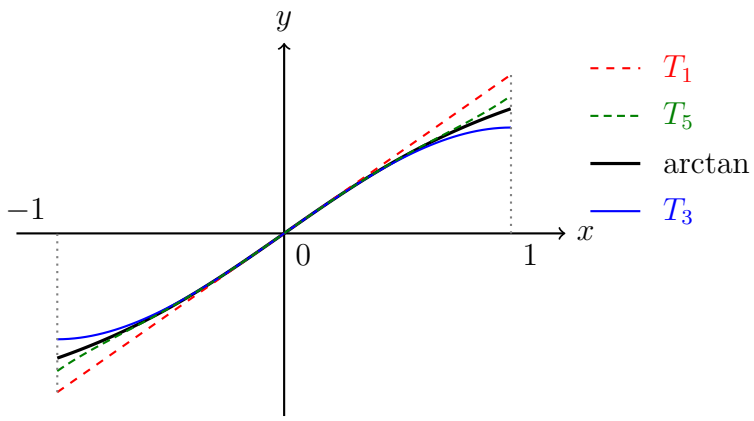
integriranjem dobivamo

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1).$$

Na oba kraja $x = \pm 1$ red konvergira prema Leibnizovu kriteriju. Abelov teorem daje sume $\pm\pi/4$, pa posebno

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

Za $|x| > 1$ članovi ne teže nuli, jer omjer njihovih apsolutnih vrijednosti teži $x^2 > 1$. Interval konvergencije zato je $[-1, 1]$. Na krajevima konvergencija nije apsolutna: $1/(2n+1) \geqslant 1/(2(n+1))$.



Leibnizova ocjena ostatka ovdje daje, za $|x| \leqslant 1$,

$$\left|\arctan x - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}.$$

Posebno je razvoj za $\pi/4$ ispravan, ali njegova ocjena pogreške opada znatno sporije nego kad je $|x| < 1$.

Primjer 6.6.13 (Red za arkus sinus)**.** Primijenimo binomni razvoj s $\alpha = -1/2$ i argumentom $-t^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{2n}, \qquad c_n = (-1)^n \binom{-1/2}{n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (|t| < 1).$$

Posljednja jednakost slijedi razdvajanjem parnih i neparnih faktora u $(2n)!$; za $n = 0$ obje strane jednake su 1. Integriranjem dobivamo

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \qquad (|x| < 1).$$

Pokažimo konvergenciju i na krajevima, prije pozivanja na Abelov teorem. Označimo $d_n = c_n/(2n+1) > 0$. Za svaki $N \in \mathbb{N}_0$ i $0 < r < 1$ vrijedi

$$\sum_{n=0}^{N} d_n r^{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} d_n r^{2n+1} = \arcsin r \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Sada pustimo $r \to 1-$ samo u konačnoj sumi na lijevoj strani. Dobivamo $\sum_{n=0}^{N} d_n \leqslant \pi/2$ za svaki N. Parcijalne sume reda $\sum d_n$ rastu i omeđene su, pa red konvergira. Time je dokazana apsolutna konvergencija u $x = \pm 1$. Tek sada Abelov teorem i neprekidnost arkus sinusa daju

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2},$$

a u $x = -1$ suma je $-\pi/2$. Omjer uzastopnih članova po apsolutnoj vrijednosti za $x \neq 0$ teži x^2, pa izvan $[-1, 1]$ red divergira.

Neprekidnost funkcije na kraju intervala sama po sebi ne dokazuje da njezin red ondje konvergira. U prethodnim primjerima najprije smo dokazali konvergenciju rubnoga reda; Abelov teorem zatim je omogućio identifikaciju sume. Deriviranje potencijskoga reda također je prethodno opravdano samo u unutrašnjosti intervala konvergencije. Primjer arkus sinusa pokazuje zašto je to razlikovanje važno: njegov red konvergira u $x = 1$, ali red njegovih derivacija ondje divergira.

Zadatak 6.6.1. Iz eksponencijalnoga reda izvedite razvoje

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dokažite jednoliku konvergenciju na svakom omeđenom intervalu. Pomoću prva četiri nenulta člana reda za $\operatorname{ch} x$ aproksimirajte $\operatorname{ch}(0.5)$ i dajte dokazanu gornju ogradu pogreške.

Zadatak 6.6.2. Koristeći logaritamski red pokažite da za $|x| < 1$ vrijedi

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Za $0 < x < 1$ dokažite ocjenu

$$0 < \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{2x^{2N+3}}{(2N+3)(1-x^2)}.$$

Primijenite je za računanje $\ln 2$, uz $x = 1/3$, i usporedite ocjenu pogreške s onom za (6.12).

Zadatak 6.6.3. Nađite Taylorove redove oko nule za funkcije

$$\frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \frac{x}{(1-x)^3}, \qquad \ln(1+x^2), \qquad \frac{\sin x}{x}.$$

Posljednjoj funkciji pridružite vrijednost 1 u nuli. Za svaki red odredite radijus i interval konvergencije, uključujući ponašanje na krajevima.

Zadatak 6.6.4. Pomoću binomnoga reda izračunajte prva četiri nenulta člana razvoja $\sqrt{1+x}$ oko nule. Dokažite da red konvergira apsolutno i za $x = -1$ te iz toga izračunajte sumu dobivenoga brojevnog reda. Objasnite zašto ne smijemo zaključiti da derivirani red konvergira u istoj točki.

Zadatak 6.6.5. Dokažite identitet

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.$$

Zatim odaberite konačan broj članova dvaju redova za arkus tangens tako da apsolutna pogreška dobivene aproksimacije broja π bude manja od 10^{-6}. Svaki prijelaz i ocjenu pogreške opravdajte, a ne samo numerički provjerite.

6.7. Dvije neočekivane jednakosti

Sada možemo povezati eksponencijalni red s Riemannovim integralom i izračunati dva integrala čije primitivne funkcije nisu potrebne za ovaj postupak. Poznate jednakosti koje se obično nazivaju *Sophomore's dream*, tj. *san studenta druge godine*, glase

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \qquad \int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}. \tag{6.13}$$

Zapravo ih je još 1697. godine otkrio Johann Bernoulli. Posebno je zanimljiva prva jednakost, jer ona govori da integriranje i sumiranje izraza $1/x^x$ vode k istom broju. Naravno da nije riječ o dubljem pravilu, nego o sretnoj koincidenciji, na koju ukazuje naziv: student koji položi Matematičku analizu 1 i 2 će često dati ispravan intuitivni odgovor.

Dokazat ćemo obje jednakosti istim postupkom. Najprije treba opravdati ponašanje integranada u nuli i integriranje reda član po član, a zatim izračunati integrale pojedinih članova.

6.7.1. Ponašanje u nuli i jednolika konvergencija

Za $0 < x \leqslant 1$ stavimo $h(x) = -x\ln x$, uz $h(0) = 0$. Limes $\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$ pokazuje da je h neprekidna na cijelom segmentu $[0,1]$. Iz

$$h'(x) = -1 - \ln x$$

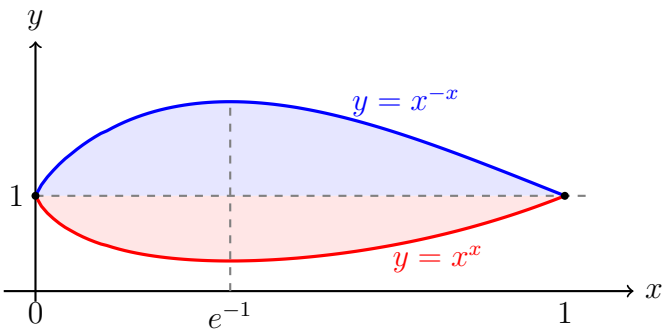
slijedi da raste do točke $x = e^{-1}$, a zatim pada. Stoga

$$0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{1}{e} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{6.14}$$

Za $x > 0$ vrijedi

$$x^{-x} = e^{h(x)}, \qquad x^x = e^{-h(x)}.$$

Obje funkcije imaju desni limes 1 u nuli, pa ćemo ih ondje neprekidno proširiti vrijednošću 1. Integrali u (6.13) zato su obični Riemannovi integrali neprekidnih funkcija. Ova konvencija određuje vrijednost tih dviju funkcija u nuli; njome ne definiramo opći izraz 0^0.



Prikazan je dio ravnine s $y \geqslant 0.55$. Obojeni dijelovi prikazuju odstupanje integranada od konstantne funkcije 1. Gornja funkcija veća je od 1 na $\langle 0, 1\rangle$, a donja je manja od 1.

Prema teoremu 6.6.5, za svaki $x \in [0, 1]$ imamo

$$e^{h(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(x)^k}{k!}, \qquad e^{-h(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k h(x)^k}{k!}.$$

Član s $k = 0$ u oba reda jest konstantna funkcija 1. Iz (6.14) dobivamo zajedničku majorantu

$$\left| \frac{(\pm h(x))^k}{k!} \right| \leqslant \frac{e^{-k}}{k!}.$$

Numerički red na desnoj strani konvergira, primjerice prema omjernom kriteriju. Weierstrassov kriterij 6.4.4 daje jednoliku konvergenciju obaju funkcijskih redova na $[0, 1]$. Njihovi su članovi neprekidni, pa ih prema korolaru 6.4.9 smijemo integrirati član po član.

6.7.2. Izračun integrala pojedinih članova

Za $k \in \mathbb{N}_0$ označimo

$$J_k := \int_0^1 x^k (-\ln x)^k \, dx.$$

Podintegralnu funkciju za $k = 0$ shvaćamo kao konstantu 1, a za $k > 0$ u nuli je neprekidno proširujemo vrijednošću 0. Zamjenu $x = e^{-t}$ najprije provedemo na segmentu $[e^{-T}, 1]$, gdje je $T > 0$. Tada je

$$\int_{e^{-T}}^1 x^k (-\ln x)^k \, dx = \int_0^T t^k e^{-(k+1)t} \, dt.$$

Kad $T \to +\infty$, lijeva strana teži prema J_k. Na desnoj strani dobivamo nepravi integral koji se, zamjenom $u = (k + 1)t$, svodi na već izračunat integral:

$$J_k = \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \int_0^\infty u^k e^{-u} \, du = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}.$$

Posljednja jednakost slijedi iz teorema 5.7.16; ona se za cjelobrojni k dobiva i uzastopnom parcijalnom integracijom, počevši od $\int_0^\infty e^{-u} \, du = 1$.

Integriranjem prethodnih eksponencijalnih redova sada slijedi

$$\int_0^1 x^{-x} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}},$$

$$\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k J_k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}.$$

Preimenovanjem indeksa $n = k + 1$ dobivamo obje jednakosti (6.13). Oba numerička reda apsolutno konvergiraju jer za $n \geqslant 2$ vrijedi $n^{-n} \leqslant 2^{-n}$.

6.7.3. Procjena pogreške i približne vrijednosti

Za $N \geqslant 1$ ostatak pozitivnoga reda zadovoljava

$$0 < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^n} = \frac{1}{N(N+1)^N}.$$

Ista je ograda valjana i za apsolutnu vrijednost ostatka alternirajućeg reda. Za njega Leibnizova ocjena daje još jednostavniju ogradu $(N+1)^{-(N+1)}$. Već za $N = 12$ zajednička je ograda manja od $4 \cdot 10^{-15}$. Računanjem prvih dvanaest članova i zaokruživanjem na dvanaest decimalnih mjesta dobivamo

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx \approx 1.291285997063, \qquad \int_0^1 x^{x}\,dx \approx 0.783430510712.$$

Prva je vrijednost veća od 1, a druga manja od 1, u skladu s prethodnom slikom.

Zadatak 6.7.1. Za svaki $t \in \mathbb{R}$ dokažite

$$\int_0^1 x^{-tx}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)^{k+1}},$$

pri čemu integrand u nuli proširujemo vrijednošću 1. Objasnite zašto je za svaki fiksni t funkcijski red kojim razvijamo integrand jednoliko konvergentan s obzirom na $x \in [0,1]$.

Bibliografija

[1] B. Guljaš, *Matematička analiza 1&2*, skripta, `https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/MATANALuR.pdf`.

[2] S. Kurepa, *Matematička analiza 1: diferenciranje i integriranje*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza 2: funkcije jedne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[4] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru. Prvi dio: brojevi, konvergencija, neprekidnost*, 3. izd., Školska knjiga, Zagreb, 1988.