

Treće i četvrte vježbe : Skupovi

Teorijski podsjetnik

- Za skup S i element x pišemo $x \in S$ ako je x element od S i $x \notin S$ ako nije. **Prazan skup** $\emptyset$ je skup koji ne sadrži nijedan element.
- Za skupove A i B kažemo da je A **podskup** od B (oznaka $A \subseteq B$) ako je svaki element od A ujedno i element od B . Kažemo da su A i B **jednaki** ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.
- Skup svih podskupova skupa S nazivamo **partitivnim skupom** od S , oznaka je $\mathcal{P}(S)$.
- Za skupove A i B definiramo sljedeće skupovne operacije:
 - **unija** $A \cup B$, vrijedi $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$,
 - **presjek** $A \cap B$, vrijedi $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$,
 - **razlika** $A \setminus B$, vrijedi $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$,
 - **simetrična razlika** $A \triangle B$, vrijedi $x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$,
 - ako je $\mathcal{U}$ univerzalni skup i $A \subseteq \mathcal{U}$, **komplement** od A u odnosu na $\mathcal{U}$ je skup $A^c = \mathcal{U} \setminus A$.
- Kažemo da su skupovi A i B **disjunktni** ako vrijedi $A \cap B = \emptyset$.
- **Kartezijev produkt** skupova A i B je skup $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

1. Za skupove $A = \{1, 2\}$ i $B = \{1, \{1, 2\}\}$ ispitajte istinitost sljedećih tvrdnji:

- | | | |
|-------------------------|-----------------------------|------------------------------------|
| (a) $1 \in B$ | (e) $A \subseteq B$ | (i) $\emptyset \in \mathcal{P}(B)$ |
| (b) $\{1\} \in B$ | (f) $\{A\} \subseteq B$ | (j) $A \in \mathcal{P}(B)$ |
| (c) $\{1\} \subseteq B$ | (g) $\emptyset \in B$ | (k) $\{A\} \in \mathcal{P}(B)$ |
| (d) $A \in B$ | (h) $\emptyset \subseteq B$ | (l) $\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(B)$ |

2. Neka je $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ i $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Odredite skupove $A \cup B$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $(A \cup B)^c$, $C \setminus (A \cup B)$.

3. Neka je $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. Ako postoji, navedite primjer skupa $A \subseteq \mathbb{N}$ takvog da:

- (a) A je konačan i A^c je beskonačan;
- (b) A je beskonačan i A^c je konačan;
- (c) A i A^c su oba beskonačni;
- (d) A i A^c su oba konačni.

4. Dokažite da za skupove A i B vrijedi $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ ako i samo ako je $A \subseteq B$.

5. Neka su A i B podskupovi univerzalnog skupa $\mathcal{U}$. Dokažite da su A i B disjunktni ako i samo ako je $A \subseteq B^c$.

6. Neka su A, B, C, D skupovi. Ispitajte odnos skupova:

- (a) $A \triangle B$ i $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$,
- (b) $A \setminus (B \setminus C)$ i $(A \setminus B) \setminus C$,
- (c) $(A \setminus B) \cup C$ i $(A \cup C) \setminus B$,
- (d) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$ i $(A \cup C) \setminus (B \cup D)$,

(e) $(A \cup B) \triangle C$ i $(A \triangle C) \cup B$.

7. Neka su A, B, C skupovi takvi da je $C \subseteq A$. Dokažite da vrijedi

$$A \cap (B \triangle C) = ((A \cap B) \setminus C) \cup (C \setminus B).$$

8. Za skupove X i Y ispitajte odnos skupova $\mathcal{P}(Y \setminus X)$ i $\mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{P}(X)$.

9. Dokažite da su skupovi A i B disjunktni ako i samo ako vrijedi $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$.

10. Neka su A i B podskupovi od $\mathbb{N}$. Dokažite:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall C \subseteq \mathbb{N})(C \neq \emptyset \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C).$$

11. Neka su A, B i C skupovi. Dokažite da vrijedi $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

12. Neka su A, B, C i D skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$((A \setminus C) \times (B \setminus D)) \cup ((C \setminus A) \times (D \setminus B)) \quad \text{i} \quad (A \times B) \triangle (C \times D).$$

13. Neka su A, B, C i D skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$(B \times C) \cup ((A \setminus B) \times (C \setminus D))$$

i

$$((A \triangle B) \times (C \setminus D)) \cup (B \times (C \cap D)).$$

14. Dokažite da su skupovi A i B disjunktni ako i samo ako su skupovi $A \times B$ i $B \times A$ disjunktni.

15. Zadana je tvrdnja:

“Bilo koji podskup od $\mathbb{N}$ takav da svaki prirodan broj veći od 1 ima djelitelja u tom skupu sadrži 1 kao element.”

Napišite simbolima zadanu tvrdnju te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji. Odredite istinitost zadane i svih dobivenih tvrdnji.

16. Zadana je tvrdnja:

“Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako je njihova simetrična razlika neprazna, onda je simetrična razlika njihovih komplementa neprazna.”

Napišite simbolima zadanu tvrdnju te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji. Odredite istinitost zadane i svih dobivenih tvrdnji.

17. Neka je $S \subseteq \mathbb{Z}$ podskup skupa cijelih brojeva. Zadana je tvrdnja:

Za svaki cijeli broj vrijedi: ako je on element skupa S , onda je i svaki njegov djelitelj element skupa S .

- Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji.
- Odredite jedan primjer skupa S za koji je zadana tvrdnja istinita te jedan primjer skupa S za koji je ona neistinita. Obrazložite svoje odgovore.
- Dokažite: ako je zadana tvrdnja istinita za skupove S_1 i S_2 , onda je istinita i za $S_1 \cup S_2$.