Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odsjek

Franka Miriam Brückler, Vedran Čačić,
Marko Doko, Mladen Vuković

ZBIRKA ZADATAKA IZ TEORIJE SKUPOVA

Zagreb, 2009.

Sadržaj

Predgovor

Ova zbirka sadrži zadatke s vježbi iz kolegija Teorija skupova, te zadatke koji su se (dugi) niz godina pojavljivali na pismenim ispitima i kolokvijima iz spomenutog kolegija. Ovaj materijal je prije svega namijenjen studentima koji slušaju kolegij Teorija skupova, odnosno trebaju polagati ispit iz tog kolegija. Želimo istaknuti da u pravilu u ovoj zbirci nema zadataka koji su strikno vezani uz teoriju (kao što su npr. zadaci s dokazivanjem skupovnih identiteta, ili pak zadaci s određivanjem zavisnosti među aksiomima Zermelo–Fraenkelove teorije skupova). Takvi zadaci su dani u skripti za kolegij Teorija skupova.

Svaki ispravak, ili pak sugestiju, koji bi mogli doprinijeti poboljšanju ovog teksta, rado ćemo prihvatiti.

U Zagrebu, srpanj, 2009. autori

Poglavlje 1

Osnovno o skupovima, relacijama i funkcijama

1.1 Skupovi

Ako je x element skupa A tada to označavamo s $x \in A$. Ako pak x nije element skupa A tada kratko pišemo $x \notin A$.

Ako su A i B skupovi tada kažemo da je A **podskup** skupa B, te to označavamo s $A \subseteq B$, ako za svaki $x \in A$ vrijedi $x \in B$. Tada kažemo i da je B **nadskup** skupa A, te pišemo $B \supseteq A$.

Ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$ tada kažemo da je A **pravi podskup** skupa B, odnosno da je B **pravi nadskup** skupa A. To označavamo s $A \subset B$, ili s $B \supset A$.

Ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ tada kažemo da su skupovi A i B jednaki, te to označavamo s $A = B$.

Skup koji nema elemenata nazivamo prazan skup, te ga označavamo s $\emptyset$.

Skup svih podskupova skupa A nazivamo **partitivni skup** skupa A, te ga označavamo s $\mathcal{P}(A)$.

Neka su A i B proizvoljni skupovi. Tada redom definiramo:

– **uređeni par** skupova A i B, u oznaci (A, B), je skup koji je definiran s

$$(A, B) \ = \ \{\{A\},\ \{A, B\}\}$$

– **Kartezijev produkt skupova** A i B, u oznaci $A \times B$, je skup definiran s

$$A \times B \ = \ \{(x, y) \ : x \in A \ \text{ i } \ y \in B\}$$

– **presjek skupova** A i B je skup koji označavamo s $A \cap B$, a definiran je s

$$A \cap B \;=\; \{x \;:\; x \in A \;\text{ i }\; x \in B\}$$

– **unija skupova** A i B je skup koji označavamo s $A \cup B$, a definiran je s

$$A \cup B \;=\; \{x \;:\; x \in A \;\text{ ili }\; x \in B\}$$

– **razlika skupova** A i B je skup koji označavamo s $A \setminus B$, a definiran je s

$$A \setminus B \;=\; \{x \;:\; x \in A \;\text{ i }\; x \notin B\}$$

– **simetrična razlika** skupova A i B je skup koji označavamo s $A \Delta B$, a definiran je s

$$A \Delta B \;=\; (A \setminus B) \;\cup\; (B \setminus A)$$

Ako je U neki skup, te $A \subseteq U$, tada je **komplement skupa** A (u odnosu na skup U) skup koji označavamo s A^c, a definiran je s

$$A^c \;=\; \{x \;:\; x \in U \;\text{ i }\; x \notin A\}$$

Za skupove A i B kažemo da su **disjunktni** ako vrijedi $A \cap B = \emptyset$.

Neka je X proizvoljan skup. **Uniju skupa** X, odnosno **presjek skupa** X, redom definiramo s:

$$\bigcup X = \{x \;:\; \exists y (x \in y \in X)\} \qquad \text{i} \qquad \bigcap X = \{x : (\forall y \in X)\ (x \in y)\}$$

Za svaki skup A svaki podskup $\mathcal{A}$ od $\mathcal{P}(A)$ nazivamo **familija skupova**.

Skup prirodnih brojeva $\{0, 1, 2, \ldots\}$ označavamo s $\mathbb{N}$.
Skup cijelih brojeva $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ označavamo s $\mathbb{Z}$.
Skup racionalnih brojeva $\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ označavamo s $\mathbb{Q}$.
Skup realnih brojeva označavamo s $\mathbb{R}$, a skup kompleksnih brojeva s $\mathbb{C}$.

Zadaci.

Zadatak 1. Neka je U proizvoljan skup, te $A, B, C \subseteq U$. Dokažite:

a) $A \cap B \subseteq C$ ako i samo ako $A \subseteq B^c \cup C$

b) $A \subseteq B \cup C$ ako i samo ako $A \cap B^c \subseteq C$

Zadatak 2. Neka je U proizvoljan skup, te $A, B, C \subseteq U$. Ispitajte odnos među skupovima. Navedite dokaze, odnosno kontraprimjere, za pojedine inkluzije.

1. $(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A)$ i $B \Delta (C \cup A)$
2. $(A \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C))$ i $(A \setminus (B \setminus C)) \cup (B \setminus C)$
3. $(A \cup B) \setminus (C \cup A)$ i $B \setminus (A \cup C)$
4. $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ i $(A \cap C) \setminus B$
5. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ i $(B \cap C) \cup A$
6. $(A \cap (B \cup C)) \setminus B$ i $(A \cap C) \setminus B$
7. $(B \cup C) \setminus (A \cup B)$ i $C \setminus (B \cup A)$
8. $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)$ i $(B \cap A) \setminus C$
9. $(B \cup C) \cap (B \cup A)$ i $(C \cap A) \cup B$
10. $(B \cap (C \cup A)) \setminus C$ i $(B \cap A) \setminus C$
11. $(C \cup A) \setminus (B \cup C)$ i $A \setminus (C \cup B)$
12. $(C \setminus A) \setminus (C \setminus B)$ i $(C \cap B) \setminus A$
13. $(C \cup A) \cap (C \cup B)$ i $(A \cap B) \cup C$
14. $(C \cap (A \cup B) \setminus A$ i $(C \cap B) \setminus A$
15. $A \setminus (B \cup C)$ i $(A \setminus B) \setminus C$
16. $A \cup (B \setminus C)$ i $(A \cup B) \setminus C$
17. $(A \setminus B) \cup C$ i $(A \cup C) \setminus B$
18. $(B \setminus A) \cup (A \setminus C)$ i $B \setminus C$
19. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ i $A \setminus C$
20. $A \cap (B \setminus C)$ i $(A \cap B) \setminus C$
21. $(C \cup A) \setminus (B \cup C)$ i $A \setminus (C \cup B)$
22. $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ i $(A \cap C) \setminus B$
23. $(A \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C))$ i $(A \setminus (B \setminus C)) \cup (B \setminus C))$
24. $(A \setminus (B \cup C)) \cup ((A \cap B) \setminus C)$ i $C \setminus A$

25. $(C \cap (B \setminus A)) \cup (A \setminus B)$ i $A \cup (B \cap C)$

26. $(A \setminus (B \cup C)) \cup (C \setminus A)$ i $C \setminus (A \cap C)$

27. $(A \cup B) \setminus (C \cap B)$ i $A \cup (B \setminus C)$

Zadatak 3. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ skupovi. Dokažite da se skup $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$ sastoji od onih elemenata koji pripadaju A_i za neparno mnogo indeksa i.

Zadatak 4. Izrazite operacije $\cup$, $\cap$, $\setminus$ redom pomoću:

1. Δ, $\cap$

2. Δ, $\cup$

3. $\setminus$, Δ

Zadatak 5. Dokažite da

1. operacija $\setminus$ nije izraziva pomoću operacija $\cap$ i $\cup$

2. operacija $\cup$ nije izraziva pomoću operacija $\cap$ i $\setminus$

Zadatak 6. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Riješite skupovne sustave, te odredite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost rješenja.

1. $A \cup X = B \cap X$ i $A \cap X = C \cup X$;

2. $A \setminus X = X \setminus B$ i $X \setminus A = C \setminus X$;

3. $A \cap X = B \setminus X$ i $C \cup X = X \setminus A$.

Zadatak 7. Za niz skupova (A_n) definiramo

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} A_n \qquad \text{i} \qquad \overline{\lim} A_n = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n > m} A_n$$

Dokažite da za sve nizove skupova (A_n) vrijedi $\underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$. Zatim, odredite te "limese" za niz skupova (A_n), pri čemu je $A_n = [0, n] \subseteq \mathbb{R}$.

Zadatak 8. Neka su (A_n) i (B_n) nizovi skupova za koje vrijedi

$$(\bigcap_{n>0} A_n) \cap (\bigcap_{n>0} B_n) = \emptyset \qquad \text{i} \qquad (\bigcup_{n>0} A_n) \cup (\bigcup_{n>0} B_n) \subseteq B_0.$$

Dokažite da tada vrijedi

$$\bigcap_{n>0} A_n \subseteq \bigcup_{n>0} [A_n \cap (B_{n-1} \setminus B_n)]$$

1.2 Relacije

Neka su A i B proizvoljni skupovi. Svaki podskup R od $A \times B$ nazivamo (binarna) **relacija**. Činjenicu $(x, y) \in R$ zapisujemo i xRy.

Neka je $R \subseteq A \times B$ proizvoljna relacija. Skup $\{x : x \in A$ i postoji $y \in B$ takav da $xRy\}$ nazivamo **domena relacije** R, te ga označavamo s $Dom(R)$. Skup $\{y : y \in B$ i postoji $x \in A$ takav da $xRy\}$ nazivamo **slika relacije** R, te ga označavamo s $Rng(R)$. Relaciju $\{(y, x) : (x, y) \in R\}$ nazivamo **inverzna relacija** od R, te je označavamo s R^{-1}.

Neka su $R \subseteq A \times B$ i $Q \subseteq B \times C$ proizvoljne relacije. **Kompoziciju relacija** R i Q, u oznaci $Q \circ R$, definiramo s

$$Q \circ R \;=\; \{(x, z) \;:\; \text{postoji } \; y \in B \; \text{ takav da } \; (x, y) \in R \; \text{ i } \; (y, z) \in Q\}$$

Za svaki skup A s I_A označavamo binarnu relaciju $\{(x, x) : x \in A\}$.

Neka je $R \subseteq A \times A$ proizvoljna relacija. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ rekuzivno definiramo relaciju R^n ovako:

$$\begin{aligned} R^0 &= I_A \\ R^{n+1} &= R \circ R^n \end{aligned}$$

Neka je $R \subseteq A \times A$ proizvoljna relacija. Kažemo da je relacija R:

- **refleksivna**, ako za sve $x \in A$ vrijedi xRx
- **irefleksivna**, ako ne postoji $x \in A$ tako da vrijedi xRx
- **simetrična**, ako za sve $x, y \in A$ koji imaju svojstvo xRy vrijedi yRx
- **antisimetrična**, ako za sve $x, y \in A$ koji imaju svojstvo xRy i yRx vrijedi $x = y$
- **tranzitivna**, ako za sve $x, y, z \in A$ koji imaju svojstvo xRy i yRz vrijedi xRz

– **relacija ekvivalencije**, ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna; za svaki $x \in A$ skup $\{y \in A : xRy\}$ nazivamo **klasa ekvivalencije**, i označavamo ga s $[x]$.

Neka je R relacija ekvivalencije na skupu A. Tada za sve $x, y \in A$ vrijedi: $[x] = [y]$ ili $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Neka je $A \neq \emptyset$ proizvoljan skup. Kažemo da je familija skupova $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ **particija skupa** A ako vrijedi:

a) za sve $x \in \mathcal{A}$ je $x \neq \emptyset$;

b) za sve $x, y \in \mathcal{A}$, takve da $x \neq y$, vrijedi $x \cap y = \emptyset$;

c) $\bigcup\limits_{x \in \mathcal{A}} x = A$.

Svaka relacija ekvivalencije definira jednu particiju skupa. Vrijedi i obratno, tj. svaka particija skupa definira jednu relaciju ekvivalencije.

Zadaci.

Zadatak 9. Neka $A \neq \emptyset$, te R, R' i Q binarne relacija na A. Dokažite da vrijedi:

a) ako $R \subseteq Q$ tada $R \circ R' \subseteq Q \circ R'$

b) ako $R' \subseteq Q$ tada $R \circ R' \subseteq R \circ Q$

Zadatak 10. Neka $A \neq \emptyset$ i $R \subseteq A \times A$. Dokažite da vrijedi:
$R = I_A$ ako i samo ako $(\forall Q \subseteq A \times A)(R \circ Q = Q \circ R = Q)$.

Zadatak 11. Neka su R_1, R_2 i R_3 binarne relacije na skupu A. Dokažite da vrijedi:

a) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

b) $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 \subseteq (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$

Odredite primjere relacija za koje ne vrijede jednakosti.

Zadatak 12. Neka su $R, Q \subseteq A \times B$ proizvoljne relacije. Dokažite da tada vrijedi:

a) ako $R \subseteq Q$ tada je $R^{-1} \subseteq Q^{-1}$

b) $(R \cup Q)^{-1} = R^{-1} \cup Q^{-1}$

c) $(R \cap Q)^{-1} = R^{-1} \cap Q^{-1}$

d) $(R^{-1})^{-1} = R$

Zadatak 13. Neka je $R \subseteq A \times A$ proizvoljna relacija. Dokažite da vrijedi:

a) relacija R je refleksivna ako i samo ako $I_A \subseteq R$;

b) relacija R je irefleksivna ako i samo ako $R \cap I_A = \emptyset$;

c) relacija R je simetrična ako i samo ako $R \subseteq R^{-1}$;

d) relacija R je antisimetrična ako i samo ako $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;

e) relacija R je tranzitivna ako i samo ako $R \circ R \subseteq R$;

f) relacija R je relacija ekvivalencije ako i samo ako vrijedi $(R \circ R^{-1}) \cup I_A = R$.

Zadatak 14. Neka su R_1 i R_2 refleksivne relacije. Dokažite da su tada i relacije $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1} i $R_2 \circ R_1$ refleksivne. Vrijede li analogne tvrdnje za simetričnost?

Zadatak 15. Neka su R_1 i R_2 irefleksivne relacije. Dokažite da su tada i relacije $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ i R_1^{-1} irefleksivne. Nađite primjer relacija R_1 i R_2 koje su irefleksivne, a $R_2 \circ R_1$ nije irefleksivna relacija.

Zadatak 16. Neka $A \neq \emptyset$ i R binarna relacija na A. Dokažite da je relacija $R \cup R^{-1}$ najmanja simetrična relacija koja sadrži R.

Zadatak 17. Neka su R_1 i R_2 antisimetrične relacije na skupu A. Dokažite ili opovrgnite:

a) relacija $R_1 \cup R_2$ je antisimetrična ako i samo ako vrijedi $R_1 \cap R_2^{-1} \subseteq I_A$;

b) relacija $R_1 \cup R_2$ je antisimetrična ako i samo ako $R_1 \cap R_2 \subseteq I_A$.

Zadatak 18. Neka je R simetrična i tranzitivna relacija na skupu A koja ima svojstvo da je $Dom(R) \cup Rng(R) = A$. Je li tada nužno R relacija ekvivalencije?

Zadatak 19. Neka su R_1 i R_2 relacije ekvivalencije na skupu A. Dokažite:

a) $R_1 \cup R_2$ je relacija ekvivalencije ako i samo ako $R_1 \cup R_2 = R_2 \circ R_1$;

b) $R_2 \circ R_1$ je relacija ekvivalencije ako i samo ako $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$;

c) $R_1 \circ R_1 = A^2$ ako i samo ako $R_1 = A^2$;

d) $R_1 \circ R_2 = A^2$ ako i samo ako $R_2 \circ R_1 = A^2$;

Zadatak 20. Definirajte relaciju ekvivalencije na skupu $\mathbb{R}$ tako da pripadni kvocijenti skup možemo poistovjetiti s $[0, 2\rangle$, tj. svaka klasa ekvivalencije ima točno jednog reprezentanta u skupu $[0, 2\rangle$ i svaki element od $[0, 2\rangle$ pripada točno jednoj klasi ekvivalencije.

Zadatak 21. Neka je R binarna relacija na skupu A. Dokažite da postoji refleksivna i tranzitivna relacija R^T takva da $R \subseteq R^T$, te je R^T najmanja takva relacija, tj. ako je $Q \supseteq R$ refleksivna i tranzitivna relacija tada $R^T \subseteq Q$. Relaciju R^T nazivamo **refleksivno i tranzitivno zatvorenje** relacije R.

Zadatak 22. Neka je $R \subseteq A \times A$ proizvoljna relacija. Dokažite:

a) najmanja refleksivna relacija koja sadrži relaciju R je $R \cup I_A$;

b) najmanja simetrična relacija koja sadrži relaciju R je $R \cup R^{-1}$;

c) najmanja tranzitivna relacija koja sadrži relaciju R je $\cup_{n=1}^{\infty} R^n$;

d) najmanja refleksivna i tranzitivna relacija koja sadrži relaciju R, tj. refleksivno i tranzitivno zatvorenje R^T, je relacija $I_A \cup (\cup_{n=1}^{\infty} R^n)$;

e) najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži relaciju R je $(R \cup R^{-1})^T$.

Zadatak 23. Dokažite da za sve relacije $R, Q \subseteq A \times A$ vrijedi:

a) $(R^T)^T = R^T$;

b) ako $R \subseteq Q$ tada $R^T \subseteq Q^T$;

c) ako $Q \subseteq R \subseteq Q^T$ tada $R^T = Q^T$;

d) $(R \cup Q)^T = (R^T \circ Q^T)^T$.

Zadatak 24. Neka $A \neq \emptyset$, $R \subseteq A \times A$ i $B \subseteq A$. Kažemo da je skup B R–**zatvoren** ako $Rng(R|_B) \subseteq B$, tj. vrijedi $(\forall x \in B)(\forall y \in A)(\ xRy \Rightarrow y \in B)$. Dokažite da je skup B R–zatvoren ako i samo ako je skup B R^T–zatvoren.

Zadatak 25. Neka je R binarna relacija na skupu A. Za svaki $B \subseteq A$ s $Cl_R(B)$ označavamo najmanji R–zatvoreni podskup od A koji sadrži skup B (takav postoji!). Dokažite da za svaki $B \subseteq A$ vrijedi $Rng(R^T|_B) = Cl_R(B)$.

Zadatak 26. Neka je $A \neq \emptyset$, te neka je na $\mathcal{P}(A)$ definirana relacija R s: XRY ako i samo ako $(\exists a \in A)\ Y = X \cup \{a\}$. Dokažite da je familija svih konačnih podskupova od A jednaka $Cl_R(\emptyset)$.

1.3 Funkcije

Relaciju $f \subseteq A \times B$ nazivamo **funkcija** ako vrijedi $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)\ xfy$. Funkciju $f \subseteq A \times B$ označavamo s $f : A \to B$.

Skup A nazivamo **domena funkcije** f, a skup B nazivamo **kodomena funkcije** f. Umjesto xfy pišemo $f(x) = y$. Skup $Rng(f) = \{f(x) \ : \ x \in A\}$ nazivamo **slika funkcije** f, a skup $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : \ x \in A\}$ nazivamo **graf funkcije** f.

Skup svih funkcija $f : A \to B$ označavamo s ${}^A B$.

Neka je $f : A \to B$ proizvoljna funkcija. Za funkciju f kažemo da je:

- **identiteta**, ako je $A = B$ i $f(x) = x$, za sve $x \in A$. Obično identitetu označavamo s id_A.
- **konstantna funkcija**, ako postoji $b \in B$ tako da za sve $x \in A$ vrijedi $f(x) = b$
- **injekcija**, ako vrijedi $(\forall x, y \in A)\ (x \neq y \ \Rightarrow f(x) \neq f(y))$
- **surjekcija**, ako vrijedi $(\forall y \in B)\ (\exists x \in A)\ f(x) = y$, tj. $Rng(f) = B$
- **bijekcija**, ako je injekcija i surjekcija

Neka su $f : A \to B$ i $g : C \to D$ funkcije, te neka vrijedi $Rng(g) \subseteq A$. **Kompozicija funkcija** f i g je funkcija koju označavamo s $f \circ g$, a definirana je s $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Neka je $f : A \to B$ proizvoljna funkcija. Za funkciju $g : B \to A$ kažemo da je **inverzna funkcija** od f ako vrijedi $f \circ g = id_B$ i $g \circ f = id_A$. Inverznu funkciju funkcije f označavamo s f^{-1}.

Neka su A i B proizvoljni skupovi, te $f : A \to B$ proizvoljna funkcija. Neka je $X \subseteq A$. **Slika skupa** X, u oznaci $f[X]$, je skup definiran s $f[X] = \{f(x) \ : \ x \in X\}$. Neka je $Y \subseteq B$. **Praslika skupa** Y, u oznaci $f^{-1}[Y]$, je skup definiran s $f^{-1}[Y] = \{x \in A \ : \ f(x) \in Y\}$.

Ako su A i I neki skupovi, tada svaku funkciju $f : I \to \mathcal{P}(A)$ nazivamo **indeksirana familija skupova**. Često ćemo govoriti samo familija skupova, tj. nećemo naglašavati da se radi o indeksiranoj familiji. Obično umjesto $f(i)$ pišemo A_i, pa onda indeksiranu familiju skupova označavamo s $\{A_i : i \in I\}$. Skup I nazivamo **skup indeksa familije**.

Neka je $\{A_i : i \in I\}$ neka familija skupova. Kartezijev produkt dane familije skupova je skup koji označavamo s $\prod_{i \in I} A_i$, a definiran je s

$$\prod_{i \in I} A_i \; = \; \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \;\text{ tako da za sve }\; i \in I \;\text{ vrijedi }\; f(i) \in A_i\}$$

Zadaci.

Zadatak 27. Za proizvoljnu funkciju $f : A \to A$ definiramo rekurzivno funkciju f^n ovako:

$$\begin{cases} f^1 = f \\ f^{n+1} = f^n \circ f \end{cases}$$

Neka je $A \neq \emptyset$ i $f : A \to A$ funkcija takva da za svaki $n \in \mathbb{N},\; n \geq 2$, vrijedi $f^n = id_A$. Dokažite da je funkcija f bijekcija.

Zadatak 28. Neka je $h : A \to A$. Dokažite:

1. funkcija h je surjekcija ako i samo ako za sve $f, g : A \to A$ vrijedi da $f \circ h = g \circ h$ povlači $f = g$.

2. funkcija h je injekcija ako i samo ako za sve $f, g : A \to A$ vrijedi da $h \circ f = h \circ g$ povlači $f = g$.

Zadatak 29. Neka su funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$ bijekcije. Dokažite da tada vrijedi $(f^{-1})^{-1} = f$ i $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Zadatak 30. Za proizvoljnu funkciju $h : A \to B$ skup $\{(x, y) : h(x) = h(y)\}$ nazivamo jezgra funkcije h i označavamo ga s $Ker\ h$. Dokažite da je jezgra svake funkcije relacija ekvivalencije. Zatim, dokažite da je svaka relacija ekvivalencije jezgra neke funkcije.

Zadatak 31. Neka su $f : A \to A$ i $g : B \to B$ proizvoljne funkcije. Neka su $u, v : A \to B$ funkcije za koje vrijedi: ako $y = f(x)$ tada $u(y) = g(u(x))$ i $v(y) = g(v(x))$. Dokažite da za sve $x \in A$, takve da je $u(x) = v(x)$, vrijedi $u(f(x)) = v(f(x))$.

Zadatak 32. Neka su $\{A_i : i \in I\}$ i $\{B_j : j \in J\}$ familije skupova. Dokažite da vrijedi:

$$\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i \cap B_j)$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i \cup B_j)$$

Zadatak 33. Neka je R binarna relacija na skupu A, te $\{R_i : i \in I\}$ familija binarnih relacija na skupu A. Dokažite da vrijedi:

a) $R \circ (\bigcap_{i\in I} R_i) \subseteq \bigcap_{i\in I}(R \circ R_i)$

b) $(\bigcup_{i\in I} R_i) \circ R \subseteq \bigcup_{i\in I}(R_i \circ R)$

Odredite primjere relacija za koje ne vrijede jednakosti.

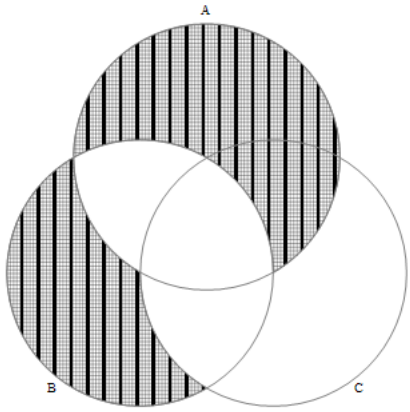
Zadatak 34. Neka je $f : X \to Y$ proizvoljna funkcija. Dokažite da postoji relacija ekvivalencije R na skupu X, te postoji surjekcija $\Phi : X \to X/R$ i postoji injekcija $\Psi : X/R \to Y$ tako da vrijedi $\Psi \circ \Phi = f$.

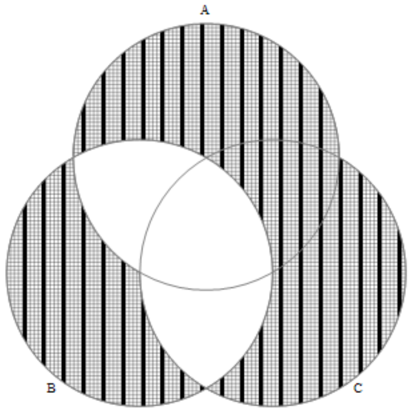
Zadatak 35. Neka je S neprazan skup i $f : S \to \mathcal{P}(S)$ injekcija. Označimo sa Z skup $\{s \in S \ : \ s \notin f(s)\}$. Dokažite da ne postoji $z \in S$ tako da je $Z = f(z)$.

Rješenja.

Rješenje 2.

1. Na sljedećoj slici su dani Vennovi dijagrami koji ilustriraju zadane skupove.





$(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A)$ $\qquad\qquad$ $B \triangle (C \cup A)$

Iz slike zaključujemo da bi trebalo vrijediti $(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A) \subseteq B\Delta(C \cup A)$, što onda moramo i dokazati. Raspisivanjem slijedi:

$$(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A) = (A \cap B^c) \cup ((B \cap C^c) \cap A^c)$$

$$\begin{aligned} B\Delta(C \cup A) &= (B \setminus (C \cup A)) \cup ((C \cup A) \setminus B) = \\ &= (B \cap (C \cup A)^c) \cup ((C \cup A) \cap B^c) = \\ &= (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c) \cup (A \cap B^c). \end{aligned}$$

Odavde naša tvrdnja očito slijedi. Da obratna inkluzija ne mora vrijediti zaključujemo iz primjera $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, za koje je $(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A) = \{1, 2\}$ i $B\Delta(C \cup A) = \{1, 2, 3\}$.

2. Jer je $B \supseteq B \setminus C$ to je $A \setminus B \subseteq A \setminus (B \setminus C)$. Jer je $A \cup C \supseteq C$ to je $B \setminus (A \cup C) \subseteq B \setminus C$. Zato je $(A \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C)) \subseteq (A \setminus (B \setminus C)) \cup (B \setminus C)$.
   Obratna inkluzija općenito ne vrijedi. Na primjer ako uzmemo $A = B = C = \{1\}$, tada je $(A \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C)) = \emptyset$ i $(A \setminus (B \setminus C)) \cup (B \setminus C) = \{1\}$.

Rješenje 3. Iz definicije simetrične razlike vidimo da tvrdnja vrijedi za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, te pogledajmo što se događa u slučaju kada imamo simetričnu razliku $n + 1$ skupova. Neka je

$$x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots A_n \triangle A_{n+1} = (A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots A_n) \triangle A_{n+1}$$

Po definiciji simetrične razlike imamo dva slučaja:

1° $x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots A_n$ i $x \notin A_{n+1}$
Tada po pretpostavci slijedi da se x nalazi u neparnom broju skupova $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

2° $x \notin A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots A_n$ i $x \in A_{n+1}$
Iz pretpostavke slijedi da se x nalazi u parnom broju skupova $A_1, \ldots, A_n$, pa se (zbog $x \in A_{n+1}$) nalazi u neparnom broju skupova $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Primjenom aksioma matematičke indukcije slijedi da tvrdnja vrijedi za svaki $n \geq 2$.

Rješenje 4.

1. $A \cup B = A\Delta B\Delta(A \cap B), \quad A \setminus B = A\Delta(A \cap B)$
2. $A \cap B = (A \cup B)\Delta A\Delta B, \quad A \setminus B = (A \cup B)\Delta B$
3. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \quad A \cup B = A\Delta B\Delta[A \setminus (A \setminus B)]$

Rješenje 5.

1. Za skup A označimo s A' proizvoljan skup koji je definiran pomoću A primjenom konačno mnogo operacija $\cap$ i $\cup$. Za skup A' sa $s(A')$ označimo ukupan broj skupovnih operacija $\cap$ i $\cup$ koje se pojavljuju u njegovoj definiciji pomoću skupa A. Za zadani skup A lako je indukcijom po $s(A')$ dokazati da za sve A' vrijedi $A' = A$. Ako je $A \neq \emptyset$ proizvoljan tada je $\emptyset = A \setminus A \neq A'$, za svaki definirani skup A'.

2. Za skupove A i B s $A\%B$ označimo proizvoljan skup koji je definiran pomoću skupova A i B primjenom konačno mnogo operacija $\cap$ i $\setminus$. Za skup $A\%B$ sa $s(A\%B)$ označimo ukupan broj skupovnih operacija $\cap$ i $\setminus$ koje se pojavljuju u njegovoj definiciji pomoću skupova A i B. Za zadane skupove A i B lako je indukcijom po $s(A\%B)$ dokazati da za sve skupove $A\%B$ vrijedi $A\%B \subseteq A$ ili $A\%B \subseteq B$. Pošto općenito ne vrijedi da je $A \cup B \subseteq A$ ili $A \cup B \subseteq B$, tada operaciju $\cup$ nije moguće izraziti pomoću skupovnih operacija $\cap$ i $\setminus$.

Rješenje 6.

1. Iz prve jednadžbe imamo $x \in A \Rightarrow x \in A \cup X = B \cap X \Rightarrow x \in X$, odnosno $A \subseteq X$. Iz druge imamo $x \in X \Rightarrow x \in C \cup X = A \cap X \Rightarrow x \in A$, odnosno $X \subseteq A$. Iz toga zaključujemo da je jedini kandidat za rješenje $X = A$, samo još treba vidjeti kada to zaista jest rješenje. Uvrstivši $X = A$ u sustav, dobijemo $A = B \cap A$ i $A = C \cup A$, odnosno $C \subseteq A \subseteq B$. Zaključujemo: ako vrijedi $C \subseteq A \subseteq B$, jedinstveno rješenje je $X = A$; inače sustav nema rješenja.

2. Pogledajmo prvu jednadžbu. Njena lijeva i desna strana su očito disjunktne (za sve x iz lijeve strane vrijedi $x \notin X$, dok za sve x iz desne strane vrijedi $x \in X$), a jedini skup disjunktan sa samim sobom je prazan skup. Zaključujemo $A \backslash X = \emptyset$, odnosno $A \subseteq X$. Na jednak način (disjunktnost jednakih skupova) iz druge jednadžbe zaključujemo $X \subseteq A$, pa opet imamo da je jedini kandidat za rješenje $X = A$. Uvrštavanjem dobivamo uvjet pod kojim je to zaista i rješenje, i to je $A \backslash B = C \backslash A = \emptyset$, odnosno, kao i u prethodnom zadatku, $C \subseteq B \subseteq A$.

3. Kao u prošlom zadatku, lijeva i desna strana prve jednadžbe su disjunktne (za sve x iz lijeve strane vrijedi $x \in X$, dok za sve x iz desne strane vrijedi $x \notin X$). Zaključujemo $A \cap X = B \backslash X = \emptyset$, odnosno X je disjunktan s A, te je nadskup od B. Za takav skup vrijedi $X \backslash A = X$, pa druga jednadžba postaje $C \cup X = X$, dakle $C \subseteq X$. Sveukupno, uvjeti na X su: disjunktan s A, te nadskup od $B \cup C$. Uvjet da takav X postoji je, dakako, da $B \cup C$ bude disjunktan s A. Zaključak: ako je $A \cap (B \cup C) \neq \emptyset$, sustav nema rješenje. U suprotnom, sustav ima rješenje (na primjer, $B \cup C$ je jedno rješenje), i ono nikada nije jedinstveno: za proizvoljni $y \notin A \cup B \cup C$, skup $B \cup C \cup \{y\}$ je također rješenje.

Rješenje 20. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to [0, 2\rangle$ sa

$$f(x) = \begin{cases} x - [x], & \text{ako je } [x] \text{ neparan} \\ x - [x] + 1, & \text{ako je } [x] \text{ paran} \end{cases}$$

Zatim definiramo relaciju $\sim \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sa: $x \sim y$ ako i samo ako $f(x) = f(y)$. Lako je provjeriti da je $\sim$ relacija ekvivalencije koja zadovoljava uvjete zadatka.

Rješenje 21. Označimo $S = \{R' : R' \subseteq A \times A$ refleksivna i tranzitivna relacija, $R \subseteq R'\}$. Primijetimo da je $S \neq \emptyset$ jer je $A^2 \in S$. Definiramo $R^T := \bigcap_{R' \in S} R'$. Lako je provjeriti da relacija R^T ima tražena svojstva.

Rješenje 35. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $z \in S$ tako da vrijedi $f(z) = Z$. Ako bi vrijedilo $z \in Z$ tada po definiciji skupa Z imamo da $z \notin f(z)$. No, pošto je $f(z) = Z$ tada imamo $z \notin Z$. Time smo dobili kontradikciju. Dakle, mora vrijediti $z \notin Z$. No, iz $z \notin Z$ i $f(z) = Z$ povlači da $z \notin f(z)$. Tada po definiciji skupa Z imamo $z \in Z$, što je opet kontradikcija. Zaključujemo da pretpostavka o egzistenciji $z \in A$ takvog da je $f(z) = Z$ vodi na kontradikciju.

Poglavlje 2

Ekvipotentni skupovi

Za dva skupa A i B kažemo da su **ekvipotentni** ili da imaju istu **kardinalnost** ako postoji bijekcija između njih. To označavamo s $A \sim B$ ili $k(A) = k(B)$.

Za svaki $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ neka je $\mathbb{N}_l = \{1, \ldots, l\}$. Za skup A kažemo da je **konačan** ako je prazan ili ako postoji $l \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $A \sim \mathbb{N}_l$. Inače kažemo da je skup A **beskonačan.**

Teorem 2.1. *Neka je X neki skup. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) skup X je beskonačan;

b) postoji injekcija iz $\mathbb{N}$ u X;

c) postoji injekcija iz X u X koja nije surjekcija;

d) skup X je ekvipotentan s nekim svojim pravim podskupom.

Za skup A kažemo da je **prebrojiv** ako je ekvipotentan sa skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. To označavamo s $k(A) = \aleph_0$. Skupovi $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ su prebrojivi.

Za beskonačan skup koji nije prebrojiv kažemo da je **neprebrojiv**. Ako za neki skup A vrijedi $A \sim \mathbb{R}$ tada to označavamo i s $k(A) = c$. Svaki omeđeni interval realnih brojeva je ekvipotentan sa skupom $\mathbb{R}$.

Ako postoji injekcija iz skupa A u skup B tada to označavamo s $k(A) \leq k(B)$. Ako vrijedi $k(A) \leq k(B)$ i $k(A) \neq k(B)$ tada to označavamo s $k(A) < k(B)$.

Teorem 2.2. Osnovni Cantorov teorem. *Za sve skupove A vrijedi $k(A) < k(\mathcal{P}(A))$.*

Teorem 2.3. Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem. *Ako postoji injekcija $f : A \to B$ i injekcija $g : B \to A$ tada postoji bijekcija između A i B. (Odnosno, ako je $k(A) \leq k(B)$ i $k(B) \leq k(A)$, tada je $k(A) = k(B)$.)*

Teorem 2.4. *Skup* $\mathbb{R}$ *je neprebrojiv.*

Aksiom izbora. Neka je $\{A_i : i \in I\}$ familija nepraznih skupova koji su u parovima disjunktni. Tada postoji skup B tako da je za sve $i \in I$ presjek $B \cap A_i$ jednočlan skup.

Teorem 2.5. *Svaki beskonačan skup sadrži prebrojiv podskup.*

Teorem 2.6. *Prebrojiva unija prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

Teorem 2.7. *Neka je* A *neprebrojiv skup i* $B \subseteq A$ *konačan ili prebrojiv. Tada je* $A \sim A \setminus B$.

Neka su A i B skupovi. Neka je $A' = A \times \{0\}$ i $B' = B \times \{1\}$. Očito su skupovi A' i B' disjunktni, te vrijedi $k(A) = k(A')$ i $k(B) = k(B')$. Tada s $k(A) + k(B)$ označavamo $k(A' \cup B')$. Vrijedi: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ i $c + c = c$.

Neka su A i B proizvoljni skupovi. Tada s $k(A) \cdot k(B)$ označavamo $k(A \times B)$. Vrijedi: $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, $c \cdot c = c$ i $c \cdot \aleph_0 = c$.

Neka su A i B skupovi. Označimo ${}^AB = \{f | f : A \to B\}$. Tada s $k(B)^{k(A)}$ označavamo $k({}^AB)$. Vrijedi: $\aleph_0^k = \aleph_0$, za sve $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $k(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$; $c^k = c$, za sve $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $k(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^c = c^c$ i $2^c \cdot 2^c = 2^c$.

Zadaci.

Zadatak 36. Dokažite da je svaki beskonačan podskup od $\mathbb{N}$ prebrojiv.

Zadatak 37. Odredite kardinalnost skupa svih prirodnih brojeva s neparno mnogo znamenaka.

Zadatak 38. Odredite kardinalnost skupa svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$. Odredite kardinalnost skupa svih beskonačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

Zadatak 39. Odredite kardinalnost skupa svih podskupa od $\mathbb{N}$ kojima je komplement (u $\mathbb{N}$) konačan.

Zadatak 40. Odredite kardinalnost skupa svih particija skupa $\mathbb{N}$.

Zadatak 41. Odredite kardinalnost skupa svih beskonačnih podskupova od $\mathbb{Q}$.

Zadatak 42. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$, takav da postoji $\delta > 0$, tako da za sve $x, y \in A$, $x \neq y$, vrijedi $| x - y | \geq \delta$. Dokažite da je tada skup A konačan ili prebrojiv.

Zadatak 43. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ prebrojiv skup. Postoji li $a \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $\{x + a : x \in A\} \cap A = \emptyset$?

Zadatak 44. Odredite kardinalnost skupa svih realnih brojeva čiji je razlomljeni dio racionalan. (Razlomljeni dio od x se definira kao $x - \lfloor x \rfloor$.)

Zadatak 45. Odredite kardinalnost skupa svih elemenata od $[0, 1]$ koji u zapisu u bazi 4 nemaju znamenku 2. Opišite kako taj skup možemo induktivno konstruirati izbacujući dijelove tog intervala.

Zadatak 46.

a) Dokažite da je skup svih polinoma jedne varijable s cjelobrojnim koeficijentima prebrojiv skup.

b) Dokažite da je skup svih algebarskih realnih brojeva prebrojiv.

c) Dokažite egzistenciju transcendentnih realnih brojeva.

d) Dokažite da je skup svih iracionalnih brojeva ekvipotentan sa skupom svih transcendentnih realnih brojeva.

Zadatak 47. Odredite kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji sadrže skup $\mathbb{N}$.

Zadatak 48. Odredite kardinalnost skupa svih zatvorenih segmenata od $\mathbb{R}$ koji su disjunktni sa $\mathbb{Z}$.

Zadatak 49. Odredite kardinalnost skupa svih zatvorenih segmenata od $\mathbb{R}$ čija je duljina racionalan broj.

Zadatak 50. Neka je $\{A_i : i \in \mathbb{R}\}$ familija konačnih nepraznih u parovima disjunktnih skupova. Dokažite da je tada skup $\cup_{i \in \mathbb{R}} A_i$ ekvipotentan sa skupom $\mathbb{R}$.

Zadatak 51. Neka je $\{A_i : i \in \mathbb{R}\}$ familija prebrojivih u parovima disjunktnih skupova. Dokažite da je tada skup $\cup_{i \in \mathbb{R}} A_i$ ekvipotentan sa $\mathbb{R}$.

Zadatak 52. Neka je $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ familija u parovima disjunktnih skupova takvih da je $A_i \sim \mathbb{R}$, za sve $i \in \mathbb{N}$. Dokažite da je tada skup $\cup_{i \in \mathbb{R}} A_i$ ekvipotentan sa skupom $\mathbb{R}$.

Zadatak 53. Neka je $\{A_i : i \in \mathbb{R}\}$ familija u parovima disjunktnih skupova takvih da je $A_i \sim \mathbb{R}$, za sve $i \in \mathbb{R}$. Dokažite da je tada skup $\cup_{x \in \mathbb{R}} A_x$ ekvipotentan sa skupom $\mathbb{R}$.

Zadatak 54. Odredite redom particije $\{A_i : i \in I\}$ skupa $\mathbb{R}$ tako da je:

a) za sve $i \in I$ skup A_i konačan;

b) za sve $i \in I$ skup A_i prebrojiv;

c) za sve $i \in I$ skup A_i neprebrojiv, te je skup indeksa I prebrojiv;

d) za sve $i \in I$ skup A_i neprebrojiv, te je skup indeksa I neprebrojiv.

Zadatak 55. Odredite redom kardinalnost skupova svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji su:

a) konačni

b) komplement im je konačan, tj. kofinitni su

c) beskonačni

d) komplement im je beskonačan

e) ekvipotentni sa skupom $\mathbb{R}$

f) prebrojivi

g) komplement im je prebrojiv.

Zadatak 56. Odredite kardinalnost skupa svih uređenih parova (A, B) za koje vrijedi $A \subset B \subseteq \mathbb{R}$.

Zadatak 57. Dokažite da je kardinalnost skupa svih otvorenih podskupova od $\mathbb{R}$ jednaka c.

Zadatak 58. Odredite kardinalnost skupa svih zatvorenih podskupova od $\mathbb{R}$.

Zadatak 59. Dokažite da je kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{R}$, koji nisu ni zatvoreni ni otvoreni, veća od c.

Zadatak 60. Odredite kardinalnost skupa svih neprebrojivih zatvorenih podskupova od $\mathbb{R}$.

Zadatak 61. Odredite kardinalnost skupa svih Borelovih skupova u $\mathbb{R}$. Borelovi skupovi su skupovi koji se mogu dobiti operacijama prebrojivih unija, prebrojivih presjeka i komplementiranja (u odnosu na $\mathbb{R}$) iz otvorenih i zatvorenih skupova u $\mathbb{R}$.

Zadatak 62. Dokažite da ravnina nije jednaka niti jednoj uniji prebrojivo mnogo pravaca.

Zadatak 63.* Odredite redom particije $\{A_i : i \in I\}$ skupa $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tako da je:

a) za sve $i \in I$ skup A_i konačan

b) za sve $i \in I$ skup A_i prebrojiv

c) za sve $i \in I$ skup A_i kardinalnosti c

d) za sve $i \in I$ skup A_i kardinalnosti 2^c, te je skup indeksa I prebrojiv

e) za sve $i \in I$ skup A_i kardinalnosti 2^c, te je skup indeksa I kardinalnosti c

f) za sve $i \in I$ skup A_i kardinalnosti 2^c, te je skup indeksa I kardinalnosti 2^c

Zadatak 64. Odredite redom kardinalnost skupova svih podskupova od $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ koji su: konačni; beskonačni; prebrojivi; neprebrojivi; ekvipotentni s $\mathbb{R}$; ekvipotentni s $\mathcal{P}(\mathbb{R})$; komplement im je konačan (beskonačan; prebrojiv; neprebrojiv).

Zadatak 65. Odredite kardinalnost skupa svih kompleksnih brojeva čiji je modul racionalan.

Zadatak 66. Neka je zadan $r > 0$. Koliko najviše elemenata ima skup $S \subseteq \mathbb{C}$ koji ima sljedeće svojstvo: za sve $u, z \in S$, $u \neq z$, su krugovi radijusa r oko točaka z i u disjunktni?

Zadatak 67. Odredite kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{C}$ čiji je broj elemenata neki prosti broj.

U sljedećim zadacima razmatramo nizove. Prvo navodimo nekoliko činjenica koje ćemo koristiti u više zadataka. Skupovi svih nizova prirodnih, cijelih i racionalnih brojeva su ekvipotentni sa skupom ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$*, pa je njihova kardinalnost jednaka* $\aleph_0^{\aleph_0}$*, tj.* c*. Skupovi svih nizova realnih i kompleksnih brojeva ekvipotentni su s* ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$*, pa je njihova kardinalnost jednaka* $c^{\aleph_0}$*, tj.* c*.*

Zadatak 68. Odredite kardinalnost skupa svih surjektivnih nizova cijelih brojeva (tj. surjekcija s $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Z}$).

Zadatak 69. Odredite kardinalnost skupa svih aritmetičkih nizova cijelih brojeva.

Zadatak 70. Odredite kardinalnost skupa svih padajućih (ne strogo) nizova prirodnih brojeva.

Zadatak 71. Odredite kardinalnost skupa svih monotonih konačnih nizova racionalnih brojeva.

Zadatak 72. Odredite kardinalnost skupa svih realnih nizova koji konvergiraju prema π. ($\pi = 3,14\ldots$)

Zadatak 73. Odredite kardinalnost skupa svih nizova realnih brojeva koji divergiraju prema $-\infty$.

Zadatak 74. Odredite kardinalnost skupa svih realnih nizova koji nemaju gomilište.

Zadatak 75. Odredite kardinalnost skupa svih realnih nizova koji imaju točno prebrojivo mnogo gomilišta.

Zadatak 76. Odredite kardinalnost skupa svih realnih nizova koji imaju kao gomilišta sve realne brojeve.

Zadatak 77. Odredite kardinalnost skupa svih nizova kompleksnih brojeva koji konvergiraju k $1 + 2i$.

Zadatak 78. Odredite kardinalnost skupa svih nizova kompleksnih brojeva koji su neograničeni po apsolutnoj vrijednosti.

Zadatak 79. Odredite kardinalnost skupa svih kompleksnih nizova koji imaju točno n gomilišita, gdje je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zadan.

Zadatak 80. Za niz prirodnih brojeva (b_n) kažemo da brže raste od niza (a_n) ako vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$. Dokažite da vrijedi:

a) za svaki niz prirodnih brojeva postoji niz koji brže raste od njega,

b) ako neki skup A nizova prirodnih brojeva ima svojstvo da za svaki niz prirodnih brojeva (a_n) postoji neki niz u skupu A koji brže raste od niza (a_n), tada je skup A neprebrojiv.

U sljedećim zadacima razmatramo redove. Prvo navodimo jednu činjenicu koju ćemo koristiti u više zadataka. Pošto je svaki red $\sum a_n$ realnih brojeva određen sa svojim nizom općih članova (a_n) tada je skup $\mathcal{R}$ svih redova realnih brojeva ekvipotentan s ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$. Pošto je $k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = c^{\aleph_0} = c$, tada je $k(\mathcal{R}) = c$.

Zadatak 81. Odredite kardinalnost skupa svih redova realnih brojeva kojima je suma 2.

Zadatak 82. Odredite kardinalnost skupa svih konvergentnih redova realnih brojeva.

Zadatak 83. Odredite kardinalnost skupa svih divergentnih redova realnih brojeva.

Zadatak 84. Odredite kardinalnost skupa svih apsolutno konvergentnih redova realnih brojeva.

Zadatak 85. Kolika je kardinalnost skupa svih uvjetno konvergentih redova realnih brojeva?

Zadatak 86. Odredite kardinalnost skupa svih redova realnih brojeva čiji konvergenciju možemo dokazati primjenom Cauchyjevog kriterija za konvergenciju redova.

Zadatak 87. Odredite kardinalnost skupa svih redova realnih brojeva čiju konvergenciju možemo dokazati primjenom D'Alambertovog kriterija za konvergenciju redova.

Zadatak 88. Odredite kardinalnost skupa svih redova kompleksnih brojeva kojima je suma jednaka e^i.

Zadatak 89. Odredite kardinalnost skupa svih redova potencija oko nule koji konvergiraju na cijelom skupu $\mathbb{R}$.

Zadatak 90. Odredite kardinalnost skupa svih redova potencija (s realnim koeficijentima) oko točke -2 koji apsolutno konvergiraju na intervalu $\langle -3, -1\rangle$.

U zadacima koji slijede promatramo skupove funkcija. Naglasimo još jednom: $k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}) = \aleph_0^{\aleph_0} = c,\ \ k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = c^{\aleph_0} = c,\ \ k({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}) = k({}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}) = 2^c$.

Zadatak 91. Odredite kardinalnost skupa svih bijekcija (injekcija; surjekcija) s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$.

Zadatak 92. Za $f \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ definirajmo $s(f) = \{x : x \in \mathbb{N},\ f(x) \neq 0\}$. Zatim, neka je $\mathcal{F} = \{f : f \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N},\ \text{ skup } \ s(f)\ \text{ je konačan}\}$. Odredite kardinalnost skupa $\mathcal{F}$.

Zadatak 93. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s najviše konačno mnogo nul–točaka.

Zadatak 94. Odredite kardinalnost skupa svih aditivnih funkcija sa $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{Z}$. (funkcija f je aditivna ako za sve x i y iz domene vrijedi $f(x+y) = f(x) + f(y)$.)

Zadatak 95. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koje beskonačno mnogo puta poprimaju vrijednost $\sqrt{2}$.

Zadatak 96. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koje imaju neprebrojivo mnogo nul–točaka.

Zadatak 97. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koje svaku vrijednost iz intervala $\langle 0, 1\rangle$ poprimaju beskonačno mnogo puta.

Zadatak 98. Odredite kardinalnost skupa svih ograničenih realnih funkcija jedne varijable.

Zadatak 99. Odredite kardinalnost skupa svih periodičkih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

Zadatak 100. Dokažite da je skup svih periodičkih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ekvipotentan sa skupom svih neperiodičkih funkcija.

Zadatak 101. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje imaju horizontalne asimptote na obje strane.

Zadatak 102. Odredite kardinalnost skupa svih neprekidnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

Zadatak 103. Odredite kardinalnost skupa svih neprekidnih funkcija s $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$.

Zadatak 104. Odredite kardinalnost skupa svih neprekidnih konveksnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna ako za sve $x, y \in \mathbb{R}$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, takve da je $\alpha + \beta = 1$, vrijedi $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$.)

Zadatak 105. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje imaju prekid u točki 1.

Zadatak 106. Dokažite da je skup točaka prekida proizvoljne monotone funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ najviše prebrojiv.

Zadatak 107. Odredite kardinalnost skupa svih realnih rastućih funkcija realne varijable.

Zadatak 108. Odredite kardinalnost skupa svih monotonih realnih funkcija.

Zadatak 109. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje su derivabilne u točki 1.

Zadatak 110. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje su neprekidne na $\mathbb{R}$, ali ne i derivabilne u točki u 8.

Zadatak 111. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje su u točki 1 derivabilne samo jednom (postoji $f'(1)$, ali ne postoji $f''(1)$).

Zadatak 112. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koje su klase C^1 na $\mathbb{R}^- = \langle -\infty, 0\rangle$, a klase C^2 na $\mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty\rangle$.

Zadatak 113. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje nemaju prve parcijalne derivacije u točki $(0, 0)$.

Zadatak 114. Neka je f cijela funkcija, tj. kompleksna funkcija holomorfna na čitavom $\mathbb{C}$, i neka je f različita od nul–funkcije. Dokažite da f ima najviše prebrojivo mnogo nul–točaka.

U zadacima koji slijede promatramo skupove matrica. Pošto je za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ očito $M_n(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{n\cdot n}$, tada je $k(M_n(\mathbb{R})) = c$, te $k(M_n(\mathbb{C})) = c$.

Zadatak 115. Odredite kardinalnost skupa svih realnih matrica 2×2 čija je determinanta jednaka 1.

Zadatak 116. Odredite kardinalnost skupa svih simetričnih 3×3 realnih matrica. (Matrica $A \in M_3(\mathbb{R})$ je simetrična ako vrijedi $A = A^T$.)

Zadatak 117. Odredite kardinalnost skupa $S = \{(A, B) \ : \ A, B \in M_2(\mathbb{R}),\ AB = BA\}$.

Zadatak 118. Odredite kardinalnost skupa $S = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : (\exists k \in \mathbb{N})\ A^k = 0\}$.

Zadatak 119. Odredite kardinalnost skupa svih dijagonalnih matrica (bilo kojeg reda) nad $\mathbb{C}$.

Zadatak 120. Odredite kardinalnost skupa svih normalnih kompleksnih matrica reda 3. (Matrica $A \in M_3(\mathbb{C})$ je normalna ako je $AA^* = A^*A$, gdje je A^* adjungirana matrica od A.)

Zadatak 121. Odredite kardinalnost skupa svih kompleksnih unitarnih matrica reda 5. (Matrica A je unitarna ako je $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I$.)

Zadatak 122. Odredite kardinalnost skupa svih matrica iz $M_3(\mathbb{C})$ kojima je i svojstvena vrijednost.

Zadatak 123. Neka su V i W konačno dimenzionalni vektorski prostori nad poljem $\mathbb{C}$. Odredite kardinalnost skupa svih linearnih operatora s V u W.

Zadatak 124. Odredite kardinalnost skupa svih invertibilnih linearnih operatora s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 125. Odredite kardinalnost skupa svih linearnih operatora na $\mathbb{R}^n$ kojima je 1 svojstvena vrijednost (za $n \geq 2$).

Zadatak 126. Odredite kardinalnost skupa svih linearnih operatora na $\mathbb{C}^4$ kojima su i i 1 svojstvene vrijednosti.

Zadatak 127. Odredite kardinalnost skupa svih sustava s 2 linearne jednadžbe i 3 nepoznanice nad poljem $\mathbb{R}$ koji nemaju rješenja.

Zadatak 128. Odredite kardinalnost skupa svih kvadratnih sustava lineranih algebarskih jednadžbi nad poljem $\mathbb{C}$ koji nemaju rješenja.

Zadatak 129. Odredite kardinalnost skupa svih linearnih sustava jednadžbi s n nepoznanica nad poljem $\mathbb{R}$ koji imaju jedinstveno rješenje, gdje je $n > 0$ proizvoljan.

Zadatak 130. Odredite kardinalnost skupa svih sustava linearnih algebarskih jednadžbi s koeficijentima iz $\mathbb{Q}$ koji imaju beskonačno mnogo rješenja.

Rješenja.

Većina zadataka riješena je primjenom Cantor, Schröder, Bernsteinovog teorema. To nismo isticali u rješenjima.

Rješenje 36. Pošto je $S \subseteq \mathbb{N}$ tada $k(S) \leq \aleph_0$. Za dokaz obratne nejednakosti prisjetimo se da svaki beskonačan skup sadrži prebrojiv podskup. Neka je S' prebrojiv podskup od S. Time imamo $\aleph_0 \leq k(S)$.

Rješenje 37. Neka $S = \{n : n \in \mathbb{N},\ \text{ broj znamenaka od } n \text{ je neparan}\}$.
Prvi način. Očito je S beskonačan podskup od $\mathbb{N}$. Iz zadatka 36 slijedi da je $k(S) = \aleph_0$.

Drugi način. Pošto je $S \subseteq \mathbb{N}$ tada vrijedi $k(S) \leq \aleph_0$. Promotrimo funkciju $f : \mathbb{N} \to S$ definiranu s $f(n) = 100^n$. Pošto za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(n) \in S$ tada je f jedna injekcija s $\mathbb{N}$ u S. To znači da vrijedi $\aleph_0 \leq k(S)$.

Rješenje 38. Označimo $S_{fin} = \{A : A \subseteq \mathbb{N},\ A \text{ konačan}\}$. Za sve $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ neka je sa S_m označen skup svih m–članih podskupova od $\mathbb{N}$. Očito je $S_{fin} = \cup_{m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} S_m$. Zatim, $k(S_m) \leq k(\mathbb{N}^m) = \aleph_0$. Dakle, $k(S_{fin}) \leq \aleph_0$. S druge strane funkcija $f : \mathbb{N} \to S_{fin}$ definirana s $f(n) = \{n\}$ je injekcija. To znači da vrijedi i $\aleph_0 \leq k(S_{fin})$.

Pošto je $k(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$, te je $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = S_{fin} \cup S_{inf}$, i znamo $k(S_{fin}) = \aleph_0$, tada je $S_{inf} = 2^{\aleph_0} = c$.

Rješenje 39. Označimo $S = \{A : A \subseteq \mathbb{N},\ \mathbb{N} \setminus A \text{ konačan}\}$. Očito je $S \ni A \mapsto \mathbb{N} \setminus A$ bijekcija. To znači da je skup S ekvipotentan sa skupom svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$. Iz prethodnog zadatka znamo da je skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$ prebrojiv.

Rješenje 40. Particija na $\mathbb{N}$ ima koliko i relacija ekvivalencije na $\mathbb{N}$. Označimo: $S = \{R : R \subseteq \mathbb{N}^2,\ R \text{ je relacija ekvivalencije}\}$. Pošto je $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ tada $k(S) \leq 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = c$. Za drugu nejednakost primijetimo da svaki beskonačan pravi podskup od $\mathbb{N}$ definira jednu particiju skupa $\mathbb{N}$. To znači da je skup $S' = \{(A, \mathbb{N} \setminus A) : A \subseteq \mathbb{N} \text{ beskonačan}\}$ podskup svih particija od $\mathbb{N}$. Iz zadatka 38 znamo da je $k(S') = c$. Dakle, $c \leq k(S)$.

Rješenje 41. Neka je $S = \{A : A \subseteq \mathbb{Q} \text{ beskonačan}\}$.
Prvi način. Pošto je skup $\mathbb{Q}$ prebrojiv tada iz zadatka 38 slijedi da je $k(S) = \aleph_0$.

Drugi način. Očito je $k(S) \leq 2^{\aleph_0} = c$. Funkcija $f : \mathbb{R} \to S,\ f(x) = \{y \in \mathbb{Q} : y \leq x\}$, je injekcija. To znači da je $c \leq k(S)$.

Rješenje 42. Za sve $x \in A$ vrijedi da je $\langle x - \delta/2, x + \delta/2\rangle \cap A = \emptyset$. Dakle, skup A sadrži najviše toliko elemenata koliko ima disjuktnih otvorenih intervala od $\mathbb{R}$. Pošto iz svakog otvorenog intervala možemo izabrati neki racionalan broj, slijedi da svaka familija u parovima disjunktnih otvorenih intervala sadrži najviše prebrojivo mnogo elemenata.

Rješenje 43. Neka je $B = \{x - y \ :\ x, y \in A\}$. Skup B je prebrojiv, pa postoji $a \in \mathbb{R} \backslash B$. Očito je $\{x + a\ :\ x \in A\} \cap A = \emptyset$.

Rješenje 44. Neka je $S = \{x : x \in \mathbb{R},\ x - \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Q}\}$. Pošto za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, tada iz pretpostavke $x - \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Q}$ slijedi $x \in \mathbb{Q}$. Iz toga odmah slijedi da je skup S prebrojiv.

Rješenje 45. Neka je $S = \{x | x \in [0, 1],\ x \text{ u zapisu u bazi 4 nema znamenku 2}\}$. Očito je $S \subseteq [0, 1]$, pa je $k(S) \leq c$. Za dokaz druge nejednakosti promotrimo skup $S' = \{0, x_0 x_1 x_2 \ldots : x_i \in \{0, 1\}\}$ (smatramo da je svaki element iz S' prikazan u bazi 4). Očito je $S' \subseteq S$, te vrijedi $k(S') = 2^{\aleph_0} = c$. Dakle, $x \leq k(S)$.

Rješenje 46.

a) Indukcijom po stupnju polinoma pokažite da je svaki skup svih polinoma istog stupnja s cjelobrojnim koeficijentima prebrojiv. Sada iz teorema 2.6 slijedi da je skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima prebrojiv.

b) Iz prethodnog zadatka a) i osnovnog teorema algebre slijedi tražena tvrdnja.

c) Iz prethodnog zadatka b) znamo da je skup A svih realnih algebarskih brojeva prebrojiv. Pošto je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv tada je skup $\mathbb{R} \backslash A$ neprazan. Time smo dokazali da postoje transcendentni brojevi. Štoviše, iz teorema 2.7 slijedi $\mathbb{R} \backslash A \sim \mathbb{R}$, tj. skup svih transcendentnih brojeva je neprebrojiv.

d) Skupovi $\mathbb{Q}$ i A (svih realnih algebarskih brojeva) su prebrojivi. Tada iz teorema 2.7 slijedi $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \backslash A$.

Rješenje 47. Neka je $S = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ \mathbb{N} \subseteq A\}$. Očito je $k(S) \leq 2^c$. Promotrimo funkciju $f : \mathcal{P}(\langle 0, 1\rangle) \to S$ definiranu s $f(B) = B \cup \mathbb{N}$. Očito je f injekcija. To znači $2^c \leq k(S)$.

Rješenje 48. Neka je $S = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, \ a < b, \ [a, b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset\}$. Očito je $k(S) \leq k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = c^2 = c$. Promotrimo funkciju $f : [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \to S$ definiranu s $f(x) = [x, \frac{1}{2}]$. Očito je funkcija f injekcija.

Rješenje 49. Neka je $S = \{[x, x + q] : \ x \in \mathbb{R}, \ q \in \mathbb{Q}^+\}$. Očito je $S \sim \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^+$. Iz toga slijedi $k(S) = c \cdot \aleph_0 = c$.

Rješenje 50. Za svaki $i \in \mathbb{R}$ neka je $A_i = \{a_0^{(i)}, \ a_1^{(i)}, \ a_2^{(i)}, \ldots, a_{|A_i|}^{(i)}\}$ (uočite da tu koristimo aksiom izbora). Zatim, neka je $f : \mathbb{R} \to \langle 0, 1\rangle$ proizvoljna bijekcija. Definiramo funkciju $g : \cup_{i\in\mathbb{R}} A_i \to \mathbb{R}$ sa $g(a_j^{(i)}) = f(i) + j$. Očito je funkcija g injekcija. To znači da vrijedi $k(\cup_i A_i) \leq c$. Za obratnu nejednakost primijetimo da je funkcija $h : \mathbb{R} \to \cup_i A_i$, $h(i) = a_0^{(i)}$, injekcija. Iz toga slijedi $c \leq k(\cup_i A_i)$.

Rješenje 51. Za svaki $i \in \mathbb{R}$ neka je $A_i = \{a_0^{(i)}, \ a_1^{(i)}, \ a_2^{(i)}, \ldots\}$ (uočite da tu koristimo aksiom izbora). Zatim, neka je $f : \mathbb{R} \to \langle 0, 1\rangle$ proizvoljna bijekcija. Definiramo funkciju $g : \cup_{i\in\mathbb{R}} A_i \to \mathbb{R}$ s $g(a_j^{(i)}) = f(i) + j$. Očito je funkcija g injekcija. To znači da vrijedi $k(\cup_i A_i) \leq c$. Za obratnu nejednakost primijetimo da je funkcija $h : \mathbb{R} \to \cup_i A_i$, $h(i) = a_0^{(i)}$, injekcija. Iz toga slijedi $c \leq k(\cup_i A_i)$.

Rješenje 52. Neka je $A_i = \{a_j^{(i)} : j \in \mathbb{R}\}$ (uočite da tu koristimo aksiom izbora). Neka je $f : \mathbb{R} \to \langle 0, 1\rangle$ proizvoljna bijekcija. Definiramo funkciju $g : \cup_i A_i \to \mathbb{R}$ sa $g(a_j^{(i)}) = f(j) + i$. Očito je funkcija g injekcija, pa je $k(\cup_i A_i) \leq c$. Neka je funkcija $h : \mathbb{R} \to \cup_i A_i$ definirana sa $h(i) = a_0^{(i)}$. Očito je funkcija h injekcija. Iz toga slijedi $c \leq k(\cup_i A_i)$.

Rješenje 53. Za svaki $i \in \mathbb{R}$ označimo s $f_i : \mathbb{R} \to A_i$ neku bijekciju (AC!). Zatim, označimo $a_{ij} = f_i(j)$. Očito je funkcija $F : \cup_i A_i \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definirana s $F(a_{ij}) = (i, j)$ bijekcija.

Rješenje 54.

d) Neka je $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka bijekcija. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ označimo $A_x = \{(x, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Očito je $\{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ jedna particija skupa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tada je $\{f[A_x] : x \in \mathbb{R}\}$ jedna tražena particija skupa $\mathbb{R}$.

Rješenje 55.

a) Ima ih c.

b) Ima ih isto kao i konačnih, tj. po a) ima ih c.

c) Pošto $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ konačan}\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ beskonačan}\}$, te $k(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^c$, a po a) konačnih podskupova ima c, slijedi da svih beskonačnih podskupova ima 2^c.

d) Ima ih isto koliko i beskonačnih, a takvih po c) ima 2^c.

e) Neka je $S = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \sim \mathbb{R}\}$. Pošto je $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tada je $k(S) \leq 2^c$. Promotrimo funkciju $f : \mathcal{P}([0,1]) \to S$ definiranu s $A \mapsto A \cup [2,3]$. Očito je funkcija f injekcija, pa je $2^c \leq k(S)$.

f) Označimo $S = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ je prebrojiv}\}$. Svakom $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ iz S možemo pridružiti funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiranu s $f(n) = a_n$. To znači da vrijedi $k(S) \leq k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = c^{\aleph_0} = c$. Za obratnu nejednakost primijetimo da vrijedi $\{x + n : n \in \mathbb{N}\} \in S$, za sve $x \in \mathbb{R}$. To znači da je $c \leq k(S)$.

Rješenje 56. Neka je $S = \{(A,B) : A \subset B \subseteq \mathbb{R}\}$. Pošto $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tada je $k(S) \leq 2^c \cdot 2^c = 2^c$. U drugu ruku preslikavanje $f : \mathcal{P}([0,1]) \to S$ definirano s $f(X) = (X, \mathbb{R})$ je injekcija, pa je $k(S) \geq 2^c$.

Rješenje 57. Prvo dokažite da se svaki otvoreni interaval $\langle a, b\rangle$ može prikazati kao prebrojiva unija otvorenih intervala s racionalnim krajevima. Iz toga neposredno slijedi da je kardinalnost skupa svih otvorenih intervala jednaka c (tj. $(\aleph_0 \cdot \aleph_0)^{\aleph_0}$). Zatim dokažite da se svaki otvoreni skup može prikazati kao prebrojiva unija otvorenih intervala. To znači da je kardinalnost skupa svih otvorenih skupova jednaka $c^{\aleph_0}$, tj. c.

Rješenje 58. Pošto po prethodnom zadataku svih otvorenih ima c, a svakom otvorenom skupu U je pridružen jedinstveni zatvoreni skup $\mathbb{R} \setminus U$, tada slijedi da svih zatvorenih ima također c.

Rješenje 59. Iz zadatka 57 znamo da je kardinalnost skupa svih otvorenih podskupova od $\mathbb{R}$ jednaka c. Zatim, iz zadatka 58 znamo da je kardinalnost skupa svih zatvorenih podskupova od $\mathbb{R}$ također jednaka c.

Pošto je $c + c = c$ i $k(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^c$ tada je kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji nisu ni zatvoreni ni otvoreni jednaka 2^c.

Rješenje 60. Neka je $S = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ je neprebrojiv i zatvoren}\}$. Iz prethodnog zadatka slijedi da je $k(S) \leq c$. U drugu ruku, pošto $\{[x, x+1] : x \in \mathbb{R}\} \subseteq S$, tada je $c \leq k(S)$.

Rješenje 61. Kardinalnost skupa svih Borelovih skupova u $\mathbb{R}$ je jednaka c.

Rješenje 62. Neka je L proizvoljan prebrojiv skup pravaca u ravnini. Pretpostavimo da je dan pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Očito postoji neprebrojivo mnogo pravaca koji su okomiti na os x. To znači da postoji barem jedan pravac p koji je okomit na os x, a ne pripada skupu L. Pošto $p \notin L$, svaki pravac iz L može sjeći pravac p u najviše jednoj točki. Iz toga slijedi da postoji najviše prebrojivo mnogo točaka na pravcu p koje leže na nekom pravcu iz skupa L. Time imamo da postoji točka $T \in p \subseteq \mathbb{R}^2$ koja ne pripada niti jednom pravcu iz skupa L.

Rješenje 65. Neka je $S = \{x : x \in \mathbb{C},\ |x| \in \mathbb{Q}\}$. Pošto je $S \subseteq \mathbb{C}$ tada $k(S) \leq c$. Promotrimo funkciju $f : [0, 2\pi\rangle \to \mathbb{C}$ definiranu s $f(x) = e^{ix}$ $(= \cos x + i \sin x)$. Očito je funkcija f injekcija. Iz toga slijedi $c \leq k(S)$.

Rješenje 66. Neka je S neki podskup od $\mathbb{C}$ koji ima traženo svojstvo. Za svaki $z \in S$ postoje $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ takvi da je $q_1 + iq_2 \in K(z, r)$. To znači da je $k(S) \leq k(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. U drugu ruku ako definiramo $S = \{1 + 2kri : k \in \mathbb{N}\}$, očito skup S ima traženo svojstvo "disjunktnih krugova", te vrijedi $k(S) = \aleph_0$.

Rješenje 67. Označimo $S = \{A \subseteq \mathbb{C} :\ \text{broj elememata od } A \text{ je prosti broj}\}$. Očito je $k(S) \leq \cup_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbb{C}^k$, pa je $k(S) \leq c$. S druge strane funkcija $f : \mathbb{C} \to S$ definirana sa $f(z) = \{z, z+1\}$ je injekcija. To znači $c \leq k(S)$.

Rješenje 68. Neka je $S = \{f | f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\ \text{ surjekcija}\}$. Tada očito $k(S) \leq \aleph_0^{\aleph_0} = c$.

Rješenje 69. Neka je $S = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{Z}, \text{ niz } (a_n) \text{ je aritmetički }\}$. Funkcija $f : S \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definirana s $f((a_n)) = (a_0, a_1 - a_0)$ je očito bijekcija, pa je $k(S) = \aleph_0$.

Rješenje 70. Označimo $S = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{N},\ \forall i, j (i < j \Rightarrow a_i \geq a_j)\}$. Za svaki $(a_n) \in S$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $a_n = a_{n_0}$. Očito je funkcija

$$S \ni (a_n) \ \mapsto \ (a_0,\ a_1, \ldots, a_{n_0}) \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbb{N}^k$$

injekcija. Tada je $k(S) \leq \aleph_0$. Primijetimo da je za sve $k \in \mathbb{N}$ konstantan niz, čiji su svi članovi jednaki k, jedan element od S. To znači da vrijedi $\aleph_0 \leq k(S)$.

Rješenje 72. Neka je $S = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \pi\}$. Očito vrijedi:

$$k(S) \leq k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = c^{\aleph_0} = c.$$

Dokažimo sada obratnu nejednakost. U tu svrhu definiramo injekciju s intervala $\langle 0, 1\rangle$ u skup S. Neka je $y = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ pri čemu vrijedi $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ (pretpostavljamo da se radi o decimalnom prikazu s beskonačno mnogo decimala različitih od nule).

Za taj dani y definiramo niz (x_n) na ovaj način:

$$x_n = \pi(1 + \frac{a_n}{n}).$$

Očito $x_n \to \pi$, tj. $(x_n) \in S$. Dakle, $c \leq k(S)$.

Rješenje 73. Označimo $S = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty\}$. Očito je $k(S) \leq c$. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ definiramo niz $(x - n)_{n\in\mathbb{N}}$. Očito za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $(x - n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$, pa je $c \leq k(S)$.

Rješenje 74. Neka je $S = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{R},\ (a_n) \text{ nema gomilište}\}$. Očito je $k(S) \leq c$. Za sve $x \in \mathbb{R}$ definiramo niz $x,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Svaki takav niz je element od S, pa je $c \leq k(S)$.

Rješenje 75. Označimo sa S skup svih realnih nizova koji imaju točno prebrojivo mnogo gomilišta. Pošto svih realnih nizova ima c, tada je $k(S) \leq c$. Dokažimo obratnu nejednakost. Za $x \in \mathbb{R}$ označimo s (x) niz

$$x, 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Očito za sve $x \in \mathbb{R}$ niz (x) ima točno prebrojivo mnogo gomilišta, tj. vrijedi $(x) \in S$. Iz toga slijedi $c \leq k(S)$.

Rješenje 76. Pošto svih realnih nizova ima c tada i realnih nizova koji imaju za gomilište sve realne brojeve ima najviše c. Pokažimo da ih nema manje od c. Prvo konstruiramo jedan konkretan niz (a_n) koji ima kao gomilišta sve realne brojeve. Svaki član niza neka je racionalan broj oblika p/q, gdje je $p \in \mathbb{Z}$, a $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za prve članove niza stavljamo racionalne brojeve p/q za koje vrijedi $\mid p \mid +q = 2$, tj. $-1/1$ i $1/1$. Zatim, uzimamo racionalne brojeve p/q takve da je $\mid p \mid +q = 3,\ \ldots$ Očito je svaki realan broj gomilište niza (a_n). Sada je lako konstruirati c nizova koji imaju kao gomilište sve realne brojeve: za $x \in \mathbb{R}$ definiramo niz $x, a_1, a_2, a_3, \ldots$

Rješenje 77. Za sve $z \in \mathbb{C}$ niz: $z,\ \ 1 + 2i,\ \ 1 + 2i,\ \ 1 + 2i,\ \ \ldots$ konvergira prema $1+2i$. Takvih nizova očito ima c. Sada je lako vidjeti da svih kompleksnih nizova koji konvergiraju prema $1 + 2i$ ima c.

Rješenje 78. Označimo $S = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{C},\ (\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})|a_n| > M\}$. Očito je $k(S) \leq k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{C}) = c^{\aleph_0} = c$. Kako bismo dokazali i obratnu nejednakost, tj. $c \leq k(S)$, za svaki $z \in \mathbb{C}$ definiramo niz $(z + n)_{n\in\mathbb{N}}$. Očito za sve $z \in \mathbb{C}$ vrijedi $(z + n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$.

Rješenje 79. Neka je $S = \{(a_k) : a_k \in \mathbb{C},\ (a_k) \text{ ima točno } n \text{ gomilišta }\}$. Očito je $k(S) \leq c$. Za dokaz obratne nejednakosti za svaki $z \in \mathbb{C}$ definiramo niz: $z,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ Očito je svaki takav niz element od S, pa je $c \leq k(S)$.

Rješenje 80.

a) Za zadani niz prirodnih brojeva (a_n) možemo npr. definirati niz $b_n = (a_n+1)\cdot 2^n$. Tada je očito $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, tj. niz (b_n) brže raste od niza (a_n).

b) Pretpostavimo da je skup A prebrojiv. Neka je $\varphi : \mathbb{N} \to A$ jedna bijekcija. Definiramo niz (b_n) ovako:

$$b_n = [(\varphi(0))_n + \ldots + (\varphi(n))_n + 1] \cdot 2^n$$

Tada za svaki i imamo:

$$\text{ako } n \geq i \text{ tada } \frac{(\varphi(i))_n}{b_n} \leq \frac{(\varphi(i))_n}{((\varphi(i))_n + 1) \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Iz toga slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\varphi(i))_n}{b_n} = 0$ za sve i. To je kontradikcija s pretpostavljenim svojstvom skupa A.

Rješenje 81. Neka je $S = \{\sum a_n : a_n \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 2\}$ Pošto $S \subseteq \mathcal{R}$ tada je $k(S) \leq c$. Za dokaz druge nejednakosti promotrimo za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ red čiji su članovi zadani s: $a_1 = \alpha + 2,\ a_2 = -\alpha$, i $a_n = 0$ za sve $n > 2$. Očito je za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ navedeni red element od S. Iz toga slijedi $c \leq k(S)$.

Uočite da je za sve $x \in \mathbb{R}$ kardinalnost skupa svih realnih redova koji konvergiraju prema x jednaka c, jer je lako presložiti prethodni dokaz za tu situaciju. Isto vrijedi i za redove kompleksnih brojeva.

Rješenje 82. Označimo sa S skup svih konvergentnih redova realnih brojeva. Pošto $S \subseteq \mathcal{R}$ tada je $k(S) \leq c$. Iz prethodnog zadatka znamo $k(\{\sum a_n : a_n \in \mathbb{R},\ \sum a_n = 2\}) = c$. Iz toga slijedi $c \leq k(S)$.

Rješenje 83. Neka je $S = \{\sum a_n : a_n \in \mathbb{R}, \quad \text{red } \sum a_n \text{ je divergentan}\}$. Pošto je $S \subseteq \mathcal{R}$ tada je $k(S) \leq c$. Za dokaz druge nejednakosti uočimo da je za svaki $x \in \mathbb{R}$ red: $x + 1 + 2 + 3 + \ldots$ divergentan.

Rješenje 84. Neka je $S = \{\sum a_n : \sum |a_n| < \infty\}$. Pošto $S \subseteq \mathcal{R}$ tada je $k(S) \leq c$. Za obratnu nejednakost primijetimo samo da je za sve $x \in \mathbb{R}$ red $\sum x/n^2$ apsolutno konvergentan. Iz toga slijedi $c \leq k(S)$.

Rješenje 85. Neka je $S = \{\sum a_n : a_n \in \mathbb{R},\ \sum a_n < \infty,\ \sum |a_n| = \infty\}$. Pošto $S \subseteq \mathcal{R}$ tada je $k(S) \leq c$. Za obratnu nejednakost prvo primijetimo da je za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ red $\sum (-1)^n x/n$ uvjetno konvergentan (to slijedi iz Leibnizovog kriterija konvergencije, te činjenice da je harmonijski red divergentan). Iz toga slijedi $\{\sum (-1)^n x/n : x \in \mathbb{R}\} \subseteq S$, pa je $c \leq k(S)$.

Rješenje 86. Neka je $S = \{\sum a_n : a_n \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1\}$. Pošto $S \subseteq \mathcal{R}$ tada $k(S) \leq c$. Za drugu nejednakost primijetimo prvo da za sve $x \in \langle 0,1\rangle$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} x\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{x}{e} < 1$$

Iz Cauchyjevog kriterija konvergencije redova slijedi da je za sve $x \in \langle 0,1\rangle$ red $\sum x^n(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ konvergentan. Dakle, $\{\sum x^n(\frac{n}{n+1})^{n^2} : x \in \langle 0,1\rangle\} \subseteq S$, pa je $c \leq k(S)$.

Rješenje 87. Neka je $S = \{\sum a_n : a_n \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1\}$. Očito je $k(S) \leq c$. Za drugu nejednakost primijetimo prvo da za sve $x \in \langle 0,1\rangle$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x(1/2)^{n+1}}{x(1/2)^n} \right| = \frac{1}{2} < 1,$$

pa primjenom D'Alambertovog kriterija slijedi da red $\sum x(1/2)^n$ konvergira za sve $x \in \langle 0,1\rangle$. Iz toga slijedi da vrijedi $\{\sum x(1/2)^n : x \in \langle 0,1\rangle\} \subseteq S$, pa je $c \leq k(S)$.

Rješenje 88. Iz zadatka 81 slijedi da traženih redova ima c. No, riješimo ovaj zadatak direktno. Neka je $S = \{\sum a_n : a_n \in \mathbb{C},\ \sum a_n = e^i\}$. Pošto je $S \subseteq \{\sum a_n : a_n \in \mathbb{C}\}$ tada $k(S) \leq c$. Za dokaz druge nejednakosti primijetimo da je za sve $z \in \mathbb{C}$ red: $z + (-z) + e^i + 0 + 0 + \ldots$ element od S. Dakle, $c \leq k(S)$.

Rješenje 89. Neka je $S = \{\sum a_n x^n : a_n \in \mathbb{R},$ te red konvergira za sve $x \in \mathbb{R}\}$. Očito je svaki red potencija oko nule jedinstveno zadan svojim nizom općih članova (a_n). To znači da vrijedi $k(S) \leq k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = c^{\aleph_0} = c$. Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ red potencija $\alpha + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots$ očito konvergira na čitavom $\mathbb{R}$. Dakle, $c \leq k(S)$.

Rješenje 90. Neka je $S = \{\sum a_n(x+2)^n : a_n \in \mathbb{R}$, red potencija apsolutno konvergira na $\langle -3,-1\rangle\}$. Pošto vrijedi $S \subseteq \{\sum a_n(x+2)^n : a_n \in \mathbb{R}\}$, te $\{\sum a_n(x+2)^n : a_n \in \mathbb{R}\} \sim {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$, tada imamo $k(S) \leq c$. Za obratnu nejednakost promotrimo red potencija $\sum \frac{1}{n}(x+2)^n$. Radijus konvergencije tog reda ρ dan je sa

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Dakle, red $\sum \frac{1}{n}(x+2)^n$ apsolutno konvergira na intervalu $\langle -3,-1\rangle$. Time imamo

$$\{\sum \frac{\lambda}{n}(x+2)^n : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq S,$$

pa vrijedi $c \leq k(S)$.

Rješenje 91. Označimo s T skup beskonačnih podskupova od $\mathbb{N}$, te redom s I, S, B i F skupove svih injekcija, surjekcija, bijekcija i funkcija sa $\mathbb{N}$ u/na $\mathbb{N}$ redom. Znamo (zadatak 38) da je $k(T) = c$, a također je $k(F) = k(\mathbb{N}^\mathbb{N}) = {\aleph_0}^{\aleph_0}$, što znamo (teorija neposredno prije zadataka) da je također c.

Neka je A proizvoljni beskonačni podskup od $\mathbb{N}$. Poredajmo mu članove po veličini: neka je $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\}$. Definirajmo f_A kao funkciju s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$ zadanu ovako:

$$f_A(m) := \begin{cases} a_{2n+1} & , m = a_{2n} \\ a_{2n} & , m = a_{2n+1} \\ m & , m \notin A \end{cases} .$$

Očito je f_A uvijek involucija (dva puta primijenjena daje identitetu), pa je bijekcija (sama je sebi inverz). Dakle, $A \mapsto f_A$ je preslikavanje s T u B. Također, to preslikavanje je injektivno: ako se dva podskupa od $\mathbb{N}$ razlikuju, postoji prirodan broj koji je u jednom a nije u drugom (na primjer, $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m \in A_1 \wedge m \notin A_2$), no tada je $f_{A_2}(m) = m$, a $f_{A_1}(m) \neq m$, te f_{A_1} i f_{A_2} ne mogu biti jednake.

Dakle, postoji injekcija s T u B, pa je $c = k(T) \leq k(B)$. Kako je očito $B \subseteq F$, imamo i $k(B) \leq k(F) = c$. Također, kako je $B \subseteq I \subseteq F$ i $B \subseteq S \subseteq F$ (zapravo je $B = I \cap S$), zaključujemo da je $k(B) = k(I) = k(S) = c$.

Rješenje 92. Svaka funkcija $f \in \mathcal{F}$ je određena konačnim skupom $s(f)$, pa očito vrijedi

$$\mathcal{F} \sim \bigcup_{A \subseteq_{fin} \mathbb{N}} {}^A\mathbb{N}.$$

Primijetimo da za sve $A \subseteq_{fin} \mathbb{N}$ vrijedi $k({}^A\mathbb{N}) = \aleph_0^{k(A)} = \aleph_0$. Zatim, iz zadatka 38 znamo $k(\{A : A \subseteq_{fin} \mathbb{N}\}) = \aleph_0$. Iz svega toga slijedi $k(\mathcal{F}) = \aleph_0$.

Rješenje 93. Označimo $S = \{f | f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$ koja ima najviše konačno mnogo nul–točaka $\}$. Pošto je $S \subseteq {}^\mathbb{N}\mathbb{N}$ tada je $k(S) \leq c$. U drugu ruku, pošto skup $\{f | f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}\ \}$ možemo smatrati podskupom od S tada imamo $c \leq k(S)$.

Rješenje 94. Označimo sa S skup svih aditivnih funkcija na $\mathbb{Z}$. Neka je $f \in S$ proizvoljna funkcija. Označimo $k := f(1)$. Tada je $f(n) = f(1 + 1 + \ldots + 1) = f(1) + \ldots + f(1) = n \cdot k$. To znači da je svaka aditivna funkcija na $\mathbb{Z}$ oblika $n \mapsto n \cdot k$. Iz toga slijedi da je preslikavanje $S \ni f \mapsto f(1) \in \mathbb{Z}$ bijekcija, pa je $k(S) = \aleph_0$.

Rješenje 95. Označimo sa S skup svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koje beskonačno puta poprimaju vrijednost $\sqrt{2}$. Pošto je $S \subseteq {}^\mathbb{R}\mathbb{R}$ tada je $k(S) \leq 2^c$. Znamo da svih beskonačnih podskupova od $\mathbb{R}$ ima 2^c (konačnih ima c; to smo bili naveli u zadatku 55). Za svaki $A \subseteq_{inf} \mathbb{R}$ definiramo funkciju $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovako:

$$f_A(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & x \in A \\ \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Očito za sve $A \subseteq_{inf} \mathbb{R}$ vrijedi $f_A \in S$, pa je $2^c \leq k(S)$.

Rješenje 96. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Očito je $S \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ pa je $k(S) \leq 2^c$. Za svaku funkciju $g : \langle -\infty, \mathbb{R}\rangle \to \mathbb{R}$ definiramo funkciju $F_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s:

$$F_g(x) = \begin{cases} g(x), & x < 0 \\ \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

Očito za sve $g : \langle -\infty, \mathbb{R}\rangle \to \mathbb{R}$ imamo $F_g \in S$. Zatim, imamo $k(\{F_g \mid g : \langle -\infty, \mathbb{R}\rangle \to \mathbb{R}\}) = 2^c$. Iz svega toga slijedi $2^c \leq k(S)$.

Rješenje 97. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Pošto $S \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, tada $k(S) \leq 2^c$. Definiramo funkciju $F : {}^{\langle -\infty, 0\rangle}\mathbb{R} \to S$ s $F(f) = f \cup (\sin|_{[0,+\infty\rangle})$. Očito je funkcija F injekcija. Time imamo $k(S) \leq 2^c$.

Rješenje 98. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Pošto $S \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ tada $k(S) \leq 2^c$. Za dokaz obratne nejednakosti prvo pridružimo svakoj funkciji $g : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ funkciju $F_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s:

$$F_g(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \langle 0, 1\rangle \\ \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Očito je $\{F_g \mid g : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle\} \subseteq S$, pa je $2^c \leq k(S)$.

Rješenje 99. Ponovimo prvo definiciju periodičke funkcije. Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je periodička ako postoji $T > 0$ takav da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(T + x) = f(x)$. Očito je periodička funkcija s periodom T određena svojim djelovanjem na intervalu $[0, T\rangle$. To znači da periodičkih funkcija s periodom T ima

$$k({}^{[0,T\rangle}\mathbb{R}) = c^c = 2^c.$$

Pošto svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ ima 2^c, tada i svih periodičkih funkcija nema više od 2^c.

Rješenje 100. Iz prethodnog zadatka znamo da svih periodičkih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ ima 2^c. Odredimo sada kardinalnost skupa N svih neperiodičkih funkcija. Svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima 2^c. To znači da je $k(N) \leq 2^c$. Svih funkcija s $[0, 1]$ u $\mathbb{R}$ također ima 2^c. Neka je ${}^{[0,1]}\mathbb{R} = \{f_x : x \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$. Očito je za svaki $x \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ funkcija $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$g_x(t) = \begin{cases} f_x(t), & \text{ako je } t \in [0, 1] \\ 0, & \text{ako je } t \in \mathbb{R}\backslash[0, 1] \end{cases}$$

neperiodička (osim nul-funkcije). Time smo dokazali da skup N sadrži podskup $\{g_x : x \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$, tj. da vrijedi $2^c \leq k(N)$.

Rješenje 101. Neka je sa S označen skup svih takvih funkcija. Pošto $S \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, tada je $k(S) \leq 2^c$. Za dokaz druge nejednakosti za svaku funkciju $g : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ definiramo funkciju $F_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovako:

$$F_g(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \langle 0, 1\rangle \\ \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Očito za sve $g : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ vrijedi $\lim\limits_{x\to+\infty} F_g(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} F_g(x) = 0$, tj. $F_g \in S$. Iz toga slijedi

$$\{F_g \mid g : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}\} \subseteq S, \quad \text{tj.} \quad 2^c \leq k(S).$$

Rješenje 102. Očito je svaka neprekidna funkcija određena svojim djelovanjem na skupu $\mathbb{Q}$. Iz toga slijedi da svih neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}$ ima koliko i svih funkcija s $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$, tj. $c^{\aleph_0}$, odnosno c.

Rješenje 103. Primjenom analognog zaključivanja kao u rješenju prethodnog zadatka slijedi da skup svih neprekidnih funkcija s $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$ ima kardinalnost c.

Rješenje 104. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Iz zadatka 102 znamo da je kardinalnost skupa svih neprekidnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ jednaka c. Iz toga slijedi $k(S) \leq c$. Lako je provjeriti da je za svaki $a \in \mathbb{R}$ konstantna funkcija $f_a \equiv a$ neprekidna i konveksna. Iz toga slijedi $\{f_a : a \in \mathbb{R}\} \subseteq S$, pa je $c \leq k(S)$.

Rješenje 105. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Pošto $S \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ tada $k(S) \leq 2^c$. Kako bi dokazali da vrijedi i druga nejednakost definiramo funkciju $F : \langle -\infty, 1] \to \mathbb{R}$ s:

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{ako } x < 1 \\ \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

Tada za svaku funkciju $g : \langle 1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ imamo da je funkcija $F \cup g$ definirana na čitavom skupu $\mathbb{R}$ i ima prekid u točki 1. Time imamo $\{F \cup g \mid g : \langle 1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}\} \subseteq S$, pa je $2^c \leq k(S)$.

Rješenje 106. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona funkcija i $a \in \mathbb{R}$ točka prekida. Tada interval

$$I_a = \langle \lim_{x\to a-0} f(x), \lim_{x\to a+0} f(x)\rangle$$

ne sadrži drugih točaka slike funkcije f osim $f(a)$. Posebno I_a ne sadrži $f(b)$ za neku drugu točku prekida b. Dakle, svaka točka prekida funkcije f jednistveno je određena intervalom I_a. No, znamo da je svaki skup disjunktnih intervala od $\mathbb{R}$ najviše prebrojiv (vidi rješenje zadatka 42).

Rješenje 107. Označimo s R skup svih rastućih realnih funkcija. Po prethodnom zadatku znamo da je skup svih točaka prekida monotone funkcije najviše prebrojiv. To znači da je svaka monotona funkcija određena svojim skupom točaka prekida i svojim djelovanjem na skupu $\mathbb{Q}$. Time imamo da je $R \sim \{(A, (x_n)) : A \subseteq \mathbb{R} \text{ prebrojiv i } x_n \in \mathbb{R}\}$. Dakle, $k(S) = c^{\aleph_0} \cdot c^{\aleph_0} = c^{\aleph_0 + \aleph_0} = c^{\aleph_0}$, što je jednako c.

Rješenje 108. Označimo s M skup svih monotonih realnih funkcija, a s R skup svih rastućih, odnosno s P skup svih padajućih funkcija. Tada očito $M = R \cup P$, te $R \sim P$ (npr. $f \mapsto -f$ je jedna bijekcija). Iz prethodnog zadatka 107 znamo $k(R) = c$, pa je onda i $k(P) = c$. Iz toga slijedi $k(M) = c$.

Rješenje 109. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Pošto je $S \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ tada je $k(S) \leq 2^c$. Za dokaz druge nejednakosti s $g : [-1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ označimo funkciju definiranu s $g(x) = x$. Neka je

$$S' = \{f \cup g \mid f : \langle -\infty, -1\rangle \to \mathbb{R}\}$$

Očito je $S' \subseteq S$, te je $k(S') = 2^c$. Iz toga slijedi $2^c \leq k(S)$.

Rješenje 110. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Iz zadatka 102 slijedi da je $k(S) \leq c$. Za dokaz druge nejednakosti za svaki $a \in \mathbb{R}$ definiramo funkciju $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $f_a(x) = |x - 8| + a$. Neka je $S' = \{f_a : a \in \mathbb{R}\}$. Očito je $S' \subseteq S$ i $k(S') = c$. Iz toga slijedi $c \leq k(S)$.

(Primijetite da je kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje su neprekidne u točki 8, ali nisu derivabilne u toj točki, jednaka 2^c.)

Rješenje 111. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Pošto je $S \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ tada je $k(S) \leq 2^c$. Za dokaz druge nejednakosti prvo definirajmo funkciju $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ s

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Pošto je

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}}{x - 1} = 0$$

tada postoji prva derivacija funkcije f u točki 1. Lako je vidjeti da $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)-1}{x-1}$ ne postoji, tj. ne postoji $f''(1)$. Za svaku funkciju $g : \langle -\infty, 0] \to \mathbb{R}$ s F_g označimo funkciju s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ definiranu s

$$F_g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } \ x > 0 \\ \\ g(x), & \text{inače} \end{cases}$$

Označimo $S' = \{g \mid g : \langle -\infty, 0] \to \mathbb{R}\}$. Očito je $k(S') = 2^c$, a onda je i $k(\{F_g : g \in S'\}) = 2^c$. Pošto $\{F_g : g \in S'\} \subseteq S$, tada je $2^c \leq k(S)$.

Rješenje 112. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Funkcija $F : S \to C^1(\mathbb{R}^-) \times \mathbb{R} \times C^2(\mathbb{R}^+)$ definirana s

$$F(f) = (\ f|_{\mathbb{R}^-},\ f(0),\ f|_{\mathbb{R}^+}\ )$$

je očito bijekcija. Iz zadatka 102 znamo da je $k(C^1(\mathbb{R}^-)) = k(C^2(\mathbb{R}^+)) = c$. Tada je $k(S) = k(C^1(\mathbb{R}^-) \times \mathbb{R} \times C^2(\mathbb{R}^+)) = c \cdot c \cdot c = c^3 = c$.

Rješenje 113. Označimo skup svih takvih funkcija sa S. Pošto je $S \subseteq {}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\mathbb{R}$ tada je $k(S) \leq 2^c$. Za dokaz obratne nejednakosti prvo definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $f(x, y) = |x| \ + \ |y|$. Pošto

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \ = \ \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} \ = \ -1$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \ = \ \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} \ = \ 1$$

tada ne postoji $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Analogno bi pokazali da ne postoji $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Označimo s K otvoreni krug sa središtem u ishodištu radijusa 1. Zatim, neka je $S' = \{g | g : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus K \to \mathbb{R}\}$. Očito je $k(S') = 2^c$. Indeksirajmo skup S' s elementima iz $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, tj. neka je $S' = \{g_A : A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$. Za svaki $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiramo funkciju $f_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$f_A(x, y) = \begin{cases} |x| \ + \ |y|, & (x, y) \in K \\ \\ g_A(x, y), & \text{inače} \end{cases}$$

Očito je $\{f_A : A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})\} \subseteq S$, pa je $2^c \leq k(S)$.

Rješenje 114. Skup nul–točaka cijele funkcije, koja je različita od nul–funkcije, nema gomilište (vidi neki udžbenik iz kompleksne analize). Dakle, oko svake nul–točke možemo opisati otvoreni krug koji neće sadržavati druge nul–točke. Iz svakog tako opisanog otvorenog kruga izaberemo točku čije su obje koordinate racionalni brojevi.

Rješenje 115. Neka je $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$. Pošto je $S \subseteq M_2(\mathbb{R})$, te je $k(M_2(\mathbb{R})) = c^4 = c$, tada je $k(S) \leq c$. Za obratnu nejednakost primijetimo da je

$$\left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{bmatrix},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \subseteq S$$

Rješenje 116. Očito je svaka simetrična matrica određena s elementima na glavnoj dijagonali, te elementima iznad glavne dijagonale. Time imamo

$$\{A : A \in M_3(\mathbb{R}),\ A = A^T\} \ \sim \ \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \ \sim \ \mathbb{R}^6$$

To znači da ima c^6, tj. c, simetričnih matrica reda 3.

Rješenje 117. Pošto je $S \subseteq M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$, tada je $k(S) \leq c$. Za obratnu nejednakost primijetimo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ sljedeći par matrica komutira:

$$A_x = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz toga slijedi $\{(A_x, I) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq S$, a onda i $c \leq k(S)$.

Rješenje 118. Očito je $k(S) \leq c$. Za obratnu nejednakost za sve $x \in \mathbb{R}$ definirajmo matricu

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lako je vidjeti da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $A_x^2 = 0$. To znači da je $\{A_x : x \in \mathbb{R}\} \subseteq S$, pa je $c \leq k(S)$.

Rješenje 119. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ proizvoljan. Označimo sa S_n skup svih kompleksnih dijagonalnih matrica reda n. Očito je $k(S_n) = c^n = c$. Označimo sa S skup svih dijagonalnih kompleksnih matrica. Tada je $S = \cup S_n$, tj. S je prebrojiva unija međusobno disjunktnih skupova koji su ekvipotentni s $\mathbb{R}$. Iz zadatka 52 slijedi $k(S) = c$.

Rješenje 120. Označimo sa S skup svih normalnih kompleksnih matrica reda 3. Očito je $k(S) \leq c$. Za obratnu nejednakost primijetimo da je za sve $z \in \mathbb{C}$ sljedeća matrica normalna

$$A_z = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tada imamo $\{A_z : z \in \mathbb{C}\} \subseteq S$, pa je $c \leq k(S)$.

Rješenje 121. Označimo sa S skup svih kompleksnih unitarnih matrica reda 5. Očito je $k(S) \leq c$. Za obratnu nejednakost primijetimo prvo da je skup $S' = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2=1\}$ ekvipotentan s $\langle -1,1\rangle$ (jer za svaki $a \in \langle -1,1\rangle$ postoje samo dva $b \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $a^2+b^2=1$). Za svaki par $(a,b) \in S'$ definiramo matricu $A_{a,b} = (a+ib)\cdot I$ (s I smo označili jediničnu matricu reda 5). Lako je provjeriti da za sve $(a,b) \in S'$ vrijedi

$$A_{a,b}\cdot A^*_{a,b} \;=\; A^*_{a,b}\cdot A_{a,b} = I.$$

Dakle, $\{A_{a,b} : (a,b) \in S'\} \subseteq S$, pa je $c \leq k(S)$.

Rješenje 122. Označimo sa S skup svih kompleksnih matrica reda 3 čija je svojstvena vrijednost i. Očito je $k(S) \leq c$. Za svaki $z \in \mathbb{C}$ definirajmo matricu

$$A_z = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice A_z jednak je $(\lambda - i)(\lambda - z)\lambda$. To znači da je i svojstvena vrijednost matrice A_z. Time imamo $\{A_z : z \in \mathbb{C}\} \subseteq S$, tj. $c \leq k(S)$.

Rješenje 123. Neka je $dim\ V = n$ i $dim\ W = m$. Linearni operator je određen svojim djelovanjem na bazi, tj. određen je matricom tipa $m \times n$. Dakle, kardinalnost skupa svih linearnih operatora je jednaka $k(\mathbb{C}^{n\cdot m})$, tj. c.

Rješenje 124. Označimo sa S skup svih invertibilnih linearnih operatora s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$. Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza prostora $\mathbb{R}^n$. Svakom linearnom operatoru tada je pridružena jedinstvena matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$. Linearni operator je invertibilan ako i samo ako je pripadna matrica regularna. Označimo $S' = \{A : A \in M_n(\mathbb{R}),\ \det A \neq 0\}$. Očito vrijedi $S \sim S'$. Pošto $M_n(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^n$ tada je $k(S) \leq c$.
U drugu ruku pošto $\{xI : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq S'$, tada $c \leq k(S') = k(S)$.

Rješenje 125. Vidi rješenje zadatka 122.

Rješenje 126. Vidi rješenje zadatka 122.

Rješenje 127. Svaki takav sustav je jedinstveno određen svojom proširenom matricom sustava $A \in M_{2,4}(\mathbb{R})$. To znači da svih sustava nad $\mathbb{R}$ koji nemaju rješenje ima najviše c. Za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sljedeći sustav očito nema rješenje

$$\begin{aligned} x_1 \;+\; 0\cdot x_2 \;+\; 0\cdot x_3 &= 0 \\ x_1 \;+\; 0\cdot x_2 \;+\; 0\cdot x_3 &= x \end{aligned}$$

Dakle, traženih sustava ima barem c.

Rješenje 128. Rješenje je sasvim analogno rješenju prethodnog zadatka.

Rješenje 129. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, proizvoljan, ali fiksiran. Neka je $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ proizvoljna n–torka. Kako bi n–torka $\vec{a}$ bila jedinstveno rješenje nekog linearnog sustava $A \cdot X = b$ (matrični zapis!), gdje je $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, mora biti $m \geq n$. Neka je

$$S = \{(A,b) : \quad A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R}), \text{ sustav } AX = b \text{ ima jedinstveno rješenje}\}.$$

Očito vrijedi

$$k(S) \leq k(\bigcup_{m\geq n} M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times 1}(\mathbb{R})) = c$$

(Tu koristimo zadatak 52). Za obratnu nejednakost primijetimo $\{([\alpha], [\alpha]) : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq S$ (sa $[\alpha]$ je označena matrica tipa 1×1 čiji je jedini element α). Time imamo $c \leq k(S)$.

Rješenje 130. Za sve $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sa $S_{m\times n}$ označimo skup svih sustava s m jednadžbi i n nepoznanica koji imaju beskonačno mnogo rješenja. Pošto je svaki sustav iz $S_{m\times n}$ jedinstveno određen matricom iz $M_{m\times(n+1)}(\mathbb{Q})$ tada je $k(S_{m\times n}) \leq k(M_{m\times(n+1)}) = \aleph_0$. Za sve $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \geq 2$, te za sve $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ sljedeći sustav

$$A_q \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + \ldots + 0\cdot x_n = q \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \ldots + 0\cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \ldots + 0\cdot x_n = 0 \end{cases}$$

očito ima beskonačno mnogo rješenja. Dakle, $\{A_q : q \in \mathbb{Q}\} \subseteq S_{m\times n}$, pa je $\aleph_0 \leq k(S_{m\times n})$. Dakle, iz Cantor, Schröder, Bernsteinovog teorema slijedi $k(S_{m\times n}) = \aleph_0$. (Primijetimo još da za $n = 1$ i sve $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ imamo $S_{m\times 1} = \emptyset$). Označimo sa S skup svih sustava s koeficijentima iz $\mathbb{Q}$ koji imaju beskonačno mnogo rješenja. Očito vrijedi $S = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} S_{m\times n}$. To znači da je skup S prebrojiva unija prebrojivih skupova, pa iz teorema 2.6 s početka ovog poglavlja slijedi $k(S) = \aleph_0$.

Poglavlje 3

Uređeni skupovi

3.1 Parcijalno uređeni skupovi

Za binarnu relaciju R na skupu A kažemo da je:

- **irefleksivna** ako niti za jedan $x \in A$ ne vrijedi xRx;
- **antisimetrična** ako za sve $x, y \in A$ činjenice xRy i yRx povlače $x = y$.
- **tranzitivna** ako za sve $x, y \in A$ činjenice xRy i yRz povlače xRz.

Za binarnu relaciju R kažemo da je **relacija parcijalnog uređaja** ako je R irefleksivna i tranzitivna. Obično relaciju parcijalnog uređaja označavamo s $<$ ili pak s $\prec$.

Parcijalno uređen skup je uređen par $(A, <)$. Ponekad ćemo parcijalno uređen skup $(A, <)$ kratko označavati s A.

Ako je $<$ relacija parcijalnog uređaja tada s $\leq$ označavamo relaciju definiranu s: $x \leq y$ ako i samo ako $x < y$ ili $x = y$.

Ponekad ćemo i relaciju $\leq$ nazivati relacija parcijalnog uređaja, iako je to refleksivna relacija. No, važno je primijetiti da su relacije $<$ i $\leq$ međusobno definabilne.

Ako je $(A, <)$ parcijalno uređen skup tada s $<^*$ označavamo relaciju na A koja je definirana s: $x <^* y$ ako i samo ako $y < x$. Lako je provjeriti da je $(A, <^*)$ parcijalno uređen skup. Relaciju $<^*$ nazivamo **dualni uređaj** relacije $<$.

Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup i $x \in A$ proizvoljan. Tada skup $\{y : y \in A \text{ i } y < x\}$ nazivamo **početni komad** skupa A od elementa x, i označavamo ga s $p_A(x)$. Za element $x \in A$ kažemo da je:

a) **maksimalan** ako ne postoji $y \in A$ tako da vrijedi $x < y$.;

b) **minimalan** ako ne postoji $y \in A$ tako da vrijedi $y < x$.;

c) **najveći** ako za sve $y \in A$ vrijedi $y \leq x$;

d) **najmanji** ako za sve $y \in A$ vrijedi $x \leq y$.

Neka je B podskup parcijalno uređenog skupa $(A, <)$. Za element x od A kažemo da je:

a) **gornja međa** skupa B ako za sve $y \in B$ vrijedi $y \leq x$;

b) **donja međa** skupa B ako za sve $y \in B$ vrijedi $x \leq y$;

c) **supremum** skupa B ako je x najmanja gornja međa skupa B;

d) **infimum** skupa B ako je x najveća donja međa skupa B.

Za neprazan podskup B parcijalno uređen skup $(A, <)$ kažemo da je **ograničen o-dozgo** (**ograničen odozdo**) ako za B postoji gornja (donja) međa.

Neka su $(A, <)$ i $(B, \propto)$ parcijalno uređeni skupovi. Na skupu $A \times B$ definiramo relaciju $\prec$ sa:

$$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \text{ ako i samo ako } y_1 \propto y_2 \text{ ili } y_1 = y_2 \text{ i } x_1 < x_2$$

Lako je provjeriti da je $(A \times B, \prec)$ parcijalno uređen skup. Parcijalni uređaj $\prec$ na $A \times B$ naziva se **antileksikografski uređaj**.

Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ parcijalno uređeni skupovi. Kažemo da funkcija $f : A \to B$ **čuva uređaj** ako za sve $x, y \in A$ takve da je $x < y$ vrijedi $f(x) \prec f(y)$. Za funkciju f kažemo da je **sličnost** ako je bijekcija, te f i f^{-1} čuvaju uređaj.

Reći ćemo da su parcijalno uređeni skupovi A i B **slični** ako postoji barem jedna funkcija sličnosti između njih. To označavamo s $A \simeq B$.

Za neko svojstvo S parcijalno uređenog skupa kažemo da je **invarijanta sličnosti** ako svi slični skupovi imaju to svojstvo. Neke invarijante sličnosti su:

a) linearni uređaj;

b) egzistencija maksimalnog (odnosno minimalnog) elementa;

c) egzistencija najvećeg (odnosno najmanjeg) elementa;

d) dobra utemeljenost;

e) dobra uređenost.

Zadaci

Zadatak 131. Neka je $A \neq \emptyset$ i $R \subseteq A \times A$ antisimetrična relacija. Postoji li nužno $R' \subseteq A \times A$, relacija parcijalnog uređaja, takva da je $R \subseteq R'$?

Zadatak 132. Neka je $(S, <)$ parcijalno uređen skup. Dokažite da postoji podskup $\mathcal{S}$ od $\mathcal{P}(S)$, takav da je parcijalno uređen skup $(\mathcal{S}, \subset)$ sličan sa $(S, <)$.

Zadatak 133. Da li za sve $m, n \in \mathbb{N}$ postoji parcijalno uređen skup s n minimalnih i m maksimalnih elemenata? (Napomena: $0 \in \mathbb{N}$.)

Zadatak 134. Neka je R proizvoljna refleksivna i tranzitivna relacija na nekom skupu S. Dokažite da postoji relacija ekvivalencije E na S i (refleksivni) parcijalni uređaj $\leq$ na kvocijentnom skupu $S/_E$ tako da vrijedi

$$(\forall x, y \in S)\big([x]_E \leq [y]_E \iff xRy\big) \ .$$

Zadatak 135. Za parcijalno uređeni skup $(X, <)$ kažemo da je **pseudorešetka** ako svaki dvočlani podskup od X ima supremum i infimum. Provjerite jesu li sljedeći skupovi pseudorešetke:

a) $(\mathbb{N}, |)$, gdje $x|y$ znači "x dijeli y";

b) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, R)$, gdje je binarna relacija R definirana sa: $(a, b)R(x, y)$ ako i samo ako $a = x$ i $b \leq y$;

c) $(\mathcal{P}(A), \subset)$, gdje je A proizvoljan skup.

Zadatak 136. Rešetka je pseudorešetka s najvećim i najmanjim elementom.

a) Pokažite da je skup svih potprostora nekog vektorskog prostora rešetka.

b) Nađite bar po (još) jedan primjer konačne i beskonačne rešetke, te primjer pseudorešetke koja nije rešetka.

Zadatak 137. Za parcijalno uređen skup $(S, \leq)$ kažemo da je *usmjeren* ako za sve $x, y \in S$ postoji $z \in S$ takav da je $x \leq z \wedge y \leq z$. Neka je $\{f_i : i \in I\}$ familija funkcijâ usmjerena s obzirom na relaciju $\subseteq$. Dokažite da je $\bigcup_{i \in I} f_i$ također funkcija.

Zadatak 138. Neka je $(S, \prec)$ konačan neprazan parcijalno uređen skup. Dokažite da S ima bar jedan minimalan i bar jedan maksimalan element.

Zadatak 139. Neka je S skup, i $\mathcal{U}$ skup relacijâ parcijalnog uređaja na S. Je li tada nužno i $\bigcup\mathcal{U}$ relacija parcijalnog uređaja na S?

Zadatak 140. Neka je $(A, \prec)$ parcijalno uređen skup. Dokažite da su sljedeće dvije tvrdnje ekvivalentne:

- svaki neprazan odozgo ograničen podskup od A ima supremum u A;
- svaki neprazan odozdo ograničen podskup od A ima infimum u A.

Zadatak 141. Neka su P i Q particije istog skupa U. Kažemo da je P *finija* od Q, i pišemo $Q \preceq P$, ako za svaki element od P postoji njegov nadskup koji je element od Q. Također, definirajmo *susret* od P i Q, u oznaci $P \wedge Q$, kao $\{A \cap B; A \in P \wedge B \in Q\} \setminus \{\emptyset\}$. Dokažite:

1. $\preceq$ je relacija refleksivnog parcijalnog uređaja na skupu svih particijâ istog skupa;
2. za particije istog skupa P i Q, particija $P \wedge Q$ je supremum skupa $\{P, Q\}$ s obzirom na relaciju $\preceq$;
3. ako su R i S relacije ekvivalencije na U, tada je $U/_{R \cap S} = U/_R \wedge U/_S$.

3.2 Linearno uređeni skupovi

Za parcijalno uređen skup $(A, <)$ kažemo da je **linearno uređen** ako su svaka dva elementa iz skupa A usporediva, tj. za sve $x, y \in A$ vrijedi:

$$x < y \text{ ili } x = y \text{ ili } y < x.$$

Svaki linearno uređen podskup parcijalno uređenog skupa nazivamo **lanac**.

Za relaciju parcijalnog uređaja $<$ kažemo da je **gust uređaj** na skupu A ako za sve $x, y \in A$, takve da je $x < y$, postoji $z \in A$ tako da je $x < z$ i $z < y$.

Teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$
Neka je $(A, <)$ prebrojiv linearno uređen skup koji nema ni najmanji ni najveći element, te je $<$ gust uređaj. Tada je A sličan s $\mathbb{Q}$.

Neka je $(B, \prec)$ linearno uređen skup. Za $A \subseteq B$ kažemo da je **gust u** B ako za sve $x, y \in B$, takve da je $x \prec y$, postoji $z \in A$ tako da vrijedi $x \prec z \prec y$.

Teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{R}$
Neka je $(B, \prec)$ linearno uređen skup koji ima sljedeća svojstva:

a) nema ni najveći ni najmanji element;

b) postoji prebrojiv $A \subseteq B$ koji je gust u B;

c) za svaki neprazan podskup od B koji je odozgo omeđen postoji supremum u B.

Tada je skup $(B, \prec)$ sličan sa $(\mathbb{R}, <)$.

Zadaci

Zadatak 142. Neka je $(A, <)$ konačan neprazan linearno uređen skup. Dokažite da A ima najmanji i najveći element.

Zadatak 143. Neka je s $\mathbb{Q}[X]$ označen skup polinoma s racionalnim koeficijentima. Na skupu $A = \mathbb{Q}[X] \setminus \mathbb{Q}$ definiramo binarnu relaciju $\prec$ na ovaj način:

$$a \prec b \quad \text{ako i samo ako} \quad \text{postoji} \ \ c \in A \ \ \text{tako da je} \quad b = a \cdot c.$$

Dokažite da je relacija $\prec$ irefleksivna i tranzitivna. Je li $\prec$ i linearni uređaj?

Zadatak 144. Postoji li familija $\{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ podskupova od $\mathbb{N}$, za koju vrijedi $x < y \Rightarrow A_x \subset A_y$? Obrazložite.

Zadatak 145. Neka je A neki neprazan skup. Označimo s $PU(A)$ skup svih refleksivnih parcijalnih uređaja na A, parcijalno uređen relacijom $\subseteq$. Dokažite da je najmanji element u $PU(A)$ dijagonala skupa A, a maksimalni elementi u $PU(A)$ su točno svi (refleksivni) linearni uređaji na A.

Zadatak 146. Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ linearno uređeni skupovi i neka B ima najmanji element $\perp$. Definirajmo uređen skup $(B^{(A)}, \lhd)$ tako da je $B^{(A)} = \{(f : A \to B) : f(x) = \perp$ za sve osim konačno mnogo $x \in A\}$, i $f \lhd g$ ako i samo ako postoji $x_0 := \max\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$, i vrijedi $f(x_0) \prec g(x_0)$. Dokažite da je skup $(B^{(A)}, \lhd)$ linearno uređen.

Zadatak 147. Dokažite da ne postoji proširenje relacije $<$ sa skupa $\mathbb{R}$ na skup $\mathbb{C}$ koje bi imalo sljedeća svojstva:

a) za sve $z \neq 0$ vrijedi $z < 0$ ili $0 < z$;

b) ako je $0 < z_1$ i $0 < z_2$ tada je $0 < z_1 \cdot z_2$;

c) ako je $z_1 < 0$ i $z_2 < 0$ tada je $z_1 + z_2 < 0$.

Zadatak 148. Neka je $(A, <)$ linearno uređen skup. Dokažite da svaki niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u A sadrži monoton podniz.

Zadatak 149. Neka je $(A, <)$ linearno uređen skup. Dokažite: ako je A beskonačan i svaki početni komad od A je konačan, onda je $(A, <)$ sličan s $(\mathbb{N}, <)$.

Zadatak 150. Neka je $\prec$ leksikografski uređaj na $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ i $<$ standardni uređaj na $\mathbb{Q}$. Dokažite da je $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \prec) \simeq (\mathbb{Q}, <)$.

Zadatak 151. Dokažite da skupovi $\langle 0, 1\rangle$ i $[0, 1\rangle$ nisu slični.

Zadatak 152. Postoji li (konačan, beskonačan) linearno uređen skup $(A, <)$ koji je sličan svom dualu, tj. $(A, <^*)$?

Zadatak 153. Dokažite da skupovi $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{Z}, <)$ nisu slični. Mogu li se skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}$ urediti tako da budu slični?

Zadatak 154. Neka je $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sličnost. Dokažite da je tada f translacija, tj. postoji $n \in \mathbb{Z}$ tako da je $f(x) = x + n$.

Zadatak 155. Dokažite da je svaki prebrojiv linearno uređen skup sličan nekom podskupu skupa $\mathbb{Q}$.

Zadatak 156. Jesu li skupovi $\mathbb{R}$, $\sin[\mathbb{R}]$ i $\operatorname{tg}[\mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}]$ međusobno slični?

Zadatak 157. Koji su od sljedećih skupova, uz standardni uređaj, međusobno slični, a koji nisu? Obrazložite odgovore.

a) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus [0, 1\rangle$

b) $[0, 1\rangle$, $[0, +\infty\rangle$, $\mathbb{Q} \cap [0, 1\rangle$

c) $\mathbb{P}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_0^+$ (s $\mathbb{P}$ je označen skup svih prostih brojeva)

d) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ (s $\mathbb{A}$ je označen skup svih realnih algebarskih brojeva)

Zadatak 158. Na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiramo uređaj na ovaj način:

$$(x_1,\ y_1) \preceq (x_2,\ y_2) \quad \text{ako i samo ako} \quad y_1 < y_2 \ \text{ ili } \ (y_1 = y_2 \ \text{ i } \ x_1 \leq x_2).$$

Dokažite da linearno uređeni skup $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \preceq)$ nije sličan s $(\mathbb{R}, \leq)$.

Zadatak 159. Dokažite da su svi prebrojivi podskupovi od $\mathbb{R}$, koji imaju svojstvo da svaki interval skupa $\mathbb{R}$ sadrži bar jednu njihovu točku, međusobno slični.

Zadatak 160. Dokažite da je skup realnih transcendentnih brojeva sličan sa skupom realnih iracionalnih brojeva.

Zadatak 161. Neka je $(A, \prec)$ linearno uređen skup koji sadrži prebrojiv podskup koji je gust u A. Dokažite da je tada A sličan nekom podskupu skupa $\mathbb{R}$ (uređenom standardnim uređajem).

Zadatak 162. Jesu li skupovi $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, uređeni antileksikografski, slični? Ako jesu, nađite sličnost između njih. Ako nisu, nađite invarijantu sličnosti po kojoj se razlikuju.

Zadatak 163. Neka je na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadana relacija

$$A \sqsubset B :\Longleftrightarrow (\exists n \in B \setminus A)(A \cap \mathbb{N}_n = B \cap \mathbb{N}_n) \ .$$

Dokažite da je $\big(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \sqsubset \big)$ (irefleksivno) linearno uređen skup.

Zadatak 164. Neka je $(X, \prec)$ linearno uređen skup, i $A \subseteq X$. Za A kažemo da je *inicijalni segment* od X ako vrijedi

$$(\forall x \in X)(\forall a \in A)(x \prec a \Rightarrow x \in A)$$

(odnosno, A je zatvoren nadolje u smislu uređaja $\prec$). Dokažite da postoji prebrojiv linearno uređen skup koji ima neprebrojivo mnogo inicijalnih segmenata.

Zadatak 165. Neka su $<$ i $\prec$ linearni uređaji na skupu S. Nađite nužne i dovoljne uvjete da bi i $< \circ \prec$ bio linearni uređaj na S. (Podrazumijevamo irefleksivne uređaje.)

Zadatak 166. Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ linearno uređeni skupovi, takvi da postoji $b \in B$ takav da je $A \simeq p_B(b)$, te postoji $a \in A$ takav da je $B \simeq p_{A^*}(a) = \{y \in A : a < y\}$ — riječima, A je sličan nekom početnom komadu od B, a B je sličan nekom završnom komadu od A. Vrijedi li tada nužno $A \simeq B$?

3.3 Dobro uređeni skupovi

Za parcijalno uređen skup $(A, <)$ kažemo da je **dobro uređen** ako svaki neprazan podskup od A sadrži najmanji element.

Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Dobro uređen skup ne može biti sličan nekom svom početnom komadu.
2. Dobro uređen skup ne može biti sličan podskupu nekog svog početnog komada.
3. Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup. Tada dva različita početna komada skupa A ne mogu biti slična.
4. Neka su $(A, <)$ i $(B, <)$ dobro uređeni slični skupovi. Tada postoji samo jedna jedina sličnost između A i B.

Teorem (usporedivost dobro uređenih skupova)
Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ dobro uređeni skupovi. Tada je $A \simeq B$, ili je A sličan nekom početnom komadu od B, ili je B sličan nekom početnom komadu od A.

Teorem (prinicip transfinitne indukcije)
Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup i B neprazan podskup od A. Ako za sve $x \in A$ pretpostavka $p_A(x) \subseteq B$ povlači $x \in B$, tada je $A = B$.

Zadaci

Zadatak 167. Postoji li parcijalno uređen skup $(B, <)$ takav da vrijedi: za svaki parcijalni uređaj $\prec$ na B sa svojstvom $<\subseteq\prec$, $\prec$ nije dobar uređaj?

Zadatak 168. Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Označimo s $W(A)$ skup svih dobro uređenih podskupova od A (u odnosu na relaciju $<$). Na $W(A)$, s $\lhd$ označimo parcijalni uređaj "biti početni komad". Dokažite da je svaki lanac u $\big(W(A), \lhd\big)$ dobro uređen.

Zadatak 169. Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup i $f : A \to A$ injekcija sa svojstvom da za svaki neprazni podskup B od A koji ima supremum u A, njegova slika $f[B]$ također ima supremum u A, te vrijedi $f(\sup B) = \sup f[B]$. Označimo s $\perp$ najmanji element od A. Dokažite da tada vrijedi: za svaki $a \geq f(\perp)$, postoji najveći $b \in A$ sa svojstvom $f(b) \leq a$.

Zadatak 170. Definirajte neki dobar uređaj $\prec$ na skupu $\mathbb{Q}$. Odredite sve sličnosti sa $(\mathbb{Q}, \prec)$ na $(\mathbb{Q}, \prec)$.

Zadatak 171. Dokažite ili oprovrgnite: za svaki linearno uređen skup S, ako postoji jedinstvena sličnost sa S na S, tada je S dobro uređen.

Zadatak 172. Nađite sve sličnosti između

a) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$

b) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}$

(uz pretpostavku standardnih uređaja).

Zadatak 173. Je li dobro definiran skup svih dobro uređenih skupova sličnih nekom skupu S? Obrazložite!

Zadatak 174. Neka je $(S, <)$ linearno uređen skup. Dokažite da je S konačan ako i samo ako su $(S, <)$ i $(S, >)$ dobro uređeni skupovi.

Zadatak 175. Dokažite da je skup A konačan ako i samo ako svaki neprazan podskup od $\mathcal{P}(A)$ ima $\subseteq$–minimalni element.

Zadatak 176. Dokažite da je svaki podskup od $\mathbb{R}$, koji je dobro uređen restrikcijom standardnog uređaja $<$, konačan ili prebrojiv.

Rješenja.

Rješenje 131. Ne. Na primjer, uzmimo skup $A := \{1, 2, 3\}$ i binarnu relaciju na njemu $R := \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. Očito je relacija R antisimetrična. Ako je $R \subseteq R' \subseteq A \times A$ i R' tranzitivna tada su nužno $(1, 2)$, $(2, 3)$ i $(3, 1)$ u R'. No, tada iz $1R'2$ i $2R'3$ zbog tranzitivnosti imamo $1R'3$, pa kako je i $3R'1$ (a očito $1 \neq 3$), R' nije antisimetrična.

Rješenje 132. Za proizvoljni $x \in S$, sa $\bar{p}_S(x)$ označimo "zatvoreni početni komad" $\{y \in S : y \leq x\} = p_S(x) \cup \{x\}$. Tada je $\bar{p}_S$ funkcija sa S u $\mathcal{P}(S)$. Označimo sa $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(S)$ sliku od $\bar{p}_S$. (Zašto inkluzija mora biti prava?) Dokažimo da $x < y$ povlači $\bar{p}_S(x) \subset \bar{p}_S(y)$.

Neka je $x < y$. To znači da za svaki $z \leq x$ vrijedi i $z \leq y$ (tranzitivnost), pa je $\bar{p}_S(x) \subseteq \bar{p}_S(y)$. No također očito vrijedi $y \notin \bar{p}_S(x)$ (antisimetričnost) i $y \in \bar{p}_S(y)$ (refleksivnost od $\leq$), pa ta dva skupa ne mogu biti jednaki.

Dokažimo injektivnost preslikavanja $\bar{p}_S : S \to \mathcal{S}$. Kad bi bilo $\bar{p}_S(x) = \bar{p}_S(y)$, mogli bismo ovako zaključivati:

$$x \in \{x\} \subseteq p_S(x) \cup \{x\} = \bar{p}_S(x) = \bar{p}_S(y) \Longrightarrow x \leq y \ ,$$

i analogno $y \leq x$, te po antisimetričnosti $x = y$.

Kako je $\bar{p}_S$ surjektivno po definiciji (kodomena mu je upravo definirana kao slika), zaključujemo da je bijekcija. Dokažimo da čuva uređaj i u drugom smjeru: ako je

$\bar{p}_S(x) \subset \bar{p}_S(y)$, iz $x \in \bar{p}_S(x)$ dobivamo $x \in \bar{p}_S(y)$, odnosno $x \leq y$. No ne može biti $x = y$, jer bi tada bilo i $\bar{p}_S(x) = \bar{p}_S(y)$.

Sve u svemu, $\bar{p}_S$ je sličnost između S i $\mathcal{S}$, pa je $S \simeq \mathcal{S}$.

Rješenje 133. Da. Promotrimo sljedeći skup uređenih parova cijelih brojeva:

$$A_{nm} := \big(\{1, 2, \dots, n\} \times \{1\}\big) \cup \big(\mathbb{Z} \times \{2\}\big) \cup \big(\{1, 2, \dots, m\} \times \{3\}\big) \,.$$

Na A_{nm} definiramo uređaj $\prec$ kao:

$$(a, b) \prec (c, d) :\Leftrightarrow b < d \vee (b = d = 2 \wedge a < c)$$

(riječima, prvo dolazi n međusobno neusporedivih elemenata, nakon njih dolaze svi cijeli brojevi uređeni standardnim uređajem, i na kraju m međusobno neusporedivih elemenata).

Primijetimo da su u tako definiranom parcijalno uređenom skupu $(A_{nm}, \prec)$ minimalni elementi točno oni oblika $(a, 1)$. Naime, od pojedinog elementa $(a, 1)$ nisu manji niti preostali elementi $(b, 1)$ (jer su neusporedivi s njim), niti $(c, 2)$ (jer su od njega veći), niti $(d, 3)$ (jer su također od njega veći). S druge strane, elementi koji nisu oblika $(a, 1)$ nisu minimalni, jer od $(c, 2)$ uvijek postoji manji element $(c - 1, 2) \in A_{nm}$, te od $(d, 3)$ postoji manji element $(0, 2)$.

Kako elemenata oblika $(a, 1)$ u A_{nm} ima upravo n, zaključujemo da u A_{nm} ima točno n minimalnih elemenata. Na isti način vidimo da su maksimalni elementi upravo oni oblika $(d, 3)$, a njih u A_{nm} ima točno m.

Jednostavnije rješenje u slučaju da ni m ni n nisu 0: skup

$$\{0, 1, \dots, n - 1\} \times \{0\} \cup \{0, 1, \dots, m - 1\} \times \{1\} \,,$$

uređen po drugoj komponenti: $(a, b) \prec (c, d) :\Longleftrightarrow b < d$. Očito su svi elementi oblika $(x, 0)$ minimalni (njih n), a svi oblika $(y, 1)$ maksimalni (njih m).

Rješenje 137. Unija $\bigcup_{i \in I} f_i$ je očito relacija, treba još vidjeti da ima funkcijsko svojstvo. Neka su (a, b) i (a, c) dva uređena para iz te unije, s istom prvom komponentom (trebamo $b = c$). Kako je $(a, b) \in \bigcup_{i \in I} f_i$, postoji indeks $i \in I$ takav da je $(a, b) \in f_i$. Jednako tako, postoji $j \in I$ takav da je $(a, c) \in f_j$. Skup $\{f_i : i \in I\}$ je usmjeren, pa za njegove elemente f_i i f_j postoji f_k, $k \in I$, takva da je $f_i \subseteq f_k$ i $f_j \subseteq f_k$. Iz $(a, b) \in f_i \subseteq f_k$ zaključujemo $(a, b) \in f_k$. Jednako je i $(a, c) \in f_k$. No f_k je funkcija, pa mora biti $b = c$.

Rješenje 138. Vidi [12].

Rješenje 139. Ne. Na primjer, neka je $S := \{1, 2\}$, $U_1 := \{(1, 2)\}$, $U_2 := \{(2, 1)\}$, i $\mathcal{U} := \{U_1, U_2\}$. Lako je vidjeti da su i U_1 i U_2 (irefleksivni) parcijalni uređaji (zapravo čak linearni uređaji) na S, iako skup $\bigcup \mathcal{U} = U_1 \cup U_2 = \{(1,2),(2,1)\}$ nije parcijalni uređaj, jer nije antisimetričan (niti tranzitivan).

Rješenje 142. Specijalno, $(A,<)$ je parcijalno uređen skup, pa po zadatku 138 ima neki minimalni element x. No kako je uređaj linearan, x mora biti usporediv sa svim ostalim elementima u A, dakle mora biti manji od njih (veći ne smije biti jer je minimalan). To znači da je x najmanji element u A.

Jednako tako, A ima i neki maksimalni element y, i kao gore se vidi da y tada mora biti najveći element u A.

Rješenje 144. Postoji. Da bismo to dokazali, prvo primijetimo da je s $B_x := \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$ zadana analogna familija podskupova od $\mathbb{Q}$ (budući da između svaka dva realna broja postoji racionalni, $x < y$ zaista povlači $B_x \subset B_y$). Sada, ako je $q : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ neka bijekcija (koja postoji jer su $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{N}$ ekvipotentni), sa A_x označimo sliku od B_x po funkciji q. Kako je q bijekcija, gornje svojstvo se čuva.

Rješenje 145. Dijagonala $\{(a,a); a \in A\}$ je svakako refleksivni parcijalni uređaj na A. Kako svaka refleksivna relacija sadrži dijagonalu, specijalno svaki refleksivni parcijalni uređaj sadrži dijagonalu, odnosno dijagonala je najmanji element u $PU(A)$.

Ako je $\leq$ linearni uređaj na A, očito ne postoji nijedan parcijalni uređaj na A koji je pravi nadskup od $\leq$: ako bismo u $\leq$ dodali neki par (a,b) koji već nije tamo, to bi značilo $a \not\leq b$, odnosno zbog linearnosti $b < a$. No tada gubimo antisimetričnost, jer su u tako dobivenom "uređaju" i (a,b) i (b,a), ali su a i b različiti. Dakle, linearni uređaji na A su maksimalni elementi u $PU(A)$.

Dokažimo i obrnuto: ako $\preceq$ *nije* linearni uređaj na A, tada nije maksimalan element u $PU(A)$. Kako $\preceq$ nije linearan, postoje dva elementa od A, nazovimo ih a i b, koji su neusporedivi u $\preceq$. Označimo sa $\sqsubset$ skup svih parova (c,d), pri čemu je $c \preceq a$ i $b \preceq d$. Relacija $\sqsubset$ ima sljedeća svojstva:

- Nikada nije $x \sqsubset y \sqsubset z$. Naime, iz $x \sqsubset y$ imamo $x \preceq a$ i $b \preceq y$, a iz $y \sqsubset z$ imamo $y \preceq a$ i $b \preceq z$. Po tranzitivnosti tada bismo iz $b \preceq y \preceq a$ imali $b \preceq a$, što je u kontradikciji s neusporedivošću od a i b.

- Ako je $x \preceq y \sqsubset z$ (ili, analogno, $x \sqsubset y \preceq z$), tada je i $x \sqsubset z$. To se lako vidi: $y \sqsubset z$ znači $y \preceq a \wedge b \preceq z$, pa po tranzitivnosti od $\preceq$ iz $x \preceq y \preceq a$ imamo i $x \preceq a$, odnosno $x \sqsubset z$.

Primijetimo da zbog refleksivnosti od $\preceq$, imamo $a \preceq a \wedge b \preceq b$, pa je svakako $a \sqsubset b$. To znači da u $\sqsubset$ imamo bar jedan par koji nije u $\preceq$, pa je $\preceq' := \preceq \cup \sqsubset$ pravi nadskup od $\preceq$. Ako još dokažemo da je $\preceq' \in PU(A)$ (odnosno, da je refleksivni parcijalni uređaj na A), imat ćemo nemaksimalnost od $\preceq$ u $PU(A)$.

Refleksivnost od $\preceq'$ slijedi iz refleksivnosti od $\preceq$. Za antisimetričnost, neka je $x \preceq' y \preceq' x$. Kako je svaki par iz $\preceq'$, iz $\preceq$ ili iz $\sqsubset$, imamo 4 mogućnosti:

- $x \preceq y \preceq x$. Tada iz antisimetričnosti od $\preceq$ imamo $x = y$.
- $x \preceq y \sqsubset x$. Iz gornjeg svojstva relacije $\sqsubset$ imamo $x \sqsubset x$, što je nemoguće jer bismo tada mogli imati $x \sqsubset x \sqsubset x$.
- $x \sqsubset y \preceq x$. Analogno dobivamo $x \sqsubset x$, što je nemoguće.
- $x \sqsubset y \sqsubset x$. I ovo je nemoguće prema svojstvima od $\sqsubset$.

Za tranzitivnost, neka je $x \preceq' y \preceq' z$. Opet imamo 4 slučaja:

- $x \preceq y \preceq z$. Po tranzitivnosti od $\preceq$ imamo $x \preceq z$, pa time i $x \preceq' z$.
- $x \preceq y \sqsubset z$. Po svojstvima relacije $\sqsubset$ imamo $x \sqsubset z$, pa i $x \preceq' z$.
- $x \sqsubset y \preceq z$. Također, dobijemo $x \sqsubset z$.
- $x \sqsubset y \sqsubset z$. Ovo je nemoguće (kao gore).

Rješenje 146.

- irefleksivnost: pretpostavka da je $f \lhd f$ bi značila da postoji $\max\{x \in A : f(x) \neq f(x)\} = \max\emptyset$, što je očito kontradikcija.
- tranzitivnost: Neka je $f \lhd g$ i $g \lhd h$. To znači da postoje x_0 i y_0 iz A, takvi da je $f(x_0) \prec g(x_0)$, $f(x) = g(x)$ za sve $x > x_0$, $g(y_0) \prec h(y_0)$, te $g(y) = h(y)$ za sve $y > y_0$. Skup A je linearno uređen, pa su x_0 i y_0 usporedivi. Razlikujemo tri slučaja:

$x_0 = y_0$ Tada je $f(x_0) \prec g(x_0) = g(y_0) \prec h(y_0) = h(x_0)$, pa po tranzitivnosti relacije $\prec$ zaključujemo $f(x_0) \prec h(x_0)$. Također, za sve $x \in A$ nakon x_0, odnosno y_0, je $f(x) = g(x)$, a i $g(x) = h(x)$, pa je $f(x) = h(x)$, što zajedno s $f(x_0) \prec h(x_0)$ daje $f \lhd h$.

$x_0 < y_0$ Tada je $f(x) = g(x)$ za sve $x > x_0$, pa specijalno i za y_0: dakle, $f(y_0) = g(y_0) \prec h(y_0)$, te za sve y nakon y_0 (budući da su oni i nakon x_0) vrijedi $f(y) = g(y) = h(y)$. Dakle, opet imamo $f \lhd h$.

$y_0 < x_0$ Ovaj slučaj je analogan prethodnom.

- linearnost: Ako su f i g dvije proizvoljne (različite) funkcije iz $B^{(A)}$, postoji $x \in A$ u kojem se razlikuju: $f(x) \neq g(x)$. Skup svih takvih x je konačan (ako sa $Supp(f)$ označimo konačan skup onih elemenata iz A koji se ne preslikavaju u $\perp$, tada se lako vidi da je naš skup podskup unije $Supp(f) \cup Supp(g)$), pa po zadatku 142 ima najveći element; označimo ga s x_0. Usporedbom $f(x_0)$ i $g(x_0)$ dobivamo $f \lhd g$ ili $g \lhd f$.

Rješenje 147. Pretpostavimo da takvo proširenje postoji, i označimo ga isto s $<$. Promotrimo slučajeve obzirom na 0 i i, te 0 i $-i$. Ako je $0 < i$ tada zbog uvjeta b) imamo $0 < i \cdot i$, tj. $0 < -1$. Dakle, mora biti $i < 0$.

Ako je $0 < -i$ tada zbog uvjeta b) imamo $0 < (-i) \cdot (-i)$, tj. $0 < -1$. To znači da je $-i < 0$.

Time imamo da je $i < 0$ i $-i < 0$. Primjenom uvjeta c) dobivamo $0 < 0$, tj. kontradikciju.

Rješenje 148. Ova tvrdnja se dokazuje u Matematičkoj analizi 1 za skup realnih brojeva. Isti dokaz prolazi u proizvoljnom linearno uređenom skupu.

Nazovimo član zadanog niza a_i *dominantnim* ako je veći od svih članova nakon njega ($a_j < a_i$ u A za svaki $j > i$ u $\mathbb{N}$). Ako u nizu ima beskonačno mnogo dominantnih članova, oni tvore padajući podniz (svaki član u podnizu je veći od svih članova nakon njega, pa tako i od sljedećeg dominantnog člana) traženog niza.

S druge strane, ako dominantnih članova ima samo konačno mnogo, postoji zadnji takav: neka je to a_d. Član a_{d+1} tada nije dominantan, pa postoji nakon njega neki član a_{n_1} veći ili jednak od a_{d+1}. No a_{n_1} također nije dominantan (jer je nakon zadnjeg dominantnog a_d), pa nakon njega postoji veći ili jednak element a_{n_2}. Tako induktivno možemo izgraditi (ne nužno strogo) rastući podniz $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$: $n_0 := d + 1$, a n_{k+1} je prvi indeks nakon n_k, člana niza koji je veći ili jednak a_{n_k} (takav postoji jer a_{n_k} nije dominantni član).

Vidimo da u svakom slučaju postoji monoton podniz od $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rješenje 149. Promotrimo preslikavanje f koje svakom elementu od A pridružuje kardinalitet početnog komada određenog tim elementom: $f(a) := k\big(p_A(a)\big)$. Kako je svaki početni komad u A konačan, f je zaista preslikavanje s A u $\mathbb{N}$.

Ako je $a < b$ u skupu A, svakako je svaki element manji od a, manji i od b, pa je $p_A(a) \subseteq p_A(b)$. No zbog irefleksivnosti je $a \notin p_A(a)$, a iz $a < b$ imamo $a \in p_A(b)$, te je $p_A(a)$ pravi podskup od $p_A(b)$. Kako su to konačni skupovi, mora biti $k\big(p_A(a)\big) < k\big(p_A(b)\big)$, odnosno $f(a) < f(b)$. Dakle, f čuva (strogi) uređaj, pa specijalno imamo i da je injekcija.

Da bismo dokazali da je f sličnost (i time da je A sličan s $\mathbb{N}$), još je jedino preostalo dokazati surjektivnost: neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Budući da je A beskonačan, a f injekcija, slika $Rng(f)$ je također beskonačna, pa nakon k postoji neki $l \in \mathbb{N}$ u slici od f; odnosno, postoji $b \in A$ takav da je $l = k\big(p_A(b)\big) > k$. Promotrimo restrikciju od f na $p_A(b)$. Za svaki $a \in p_A(b)$ iz $a < b$ dobivamo $f(a) < f(b) = l$, odnosno $f|_{p_A(b)}$ je preslikavanje između $p_A(b)$ i $\{0, 1, \ldots, l-1\}$.

To preslikavanje je injekcija (kao restrikcija injekcije f), a domena i kodomena su joj ekvipotentni konačni skupovi ($k\big(p_A(b)\big) = f(b) = l = k\big(\{0, 1, \ldots, l-1\}\big)$), pa je bijekcija. Specijalno je surjekcija, pa poprima sve vrijednosti između 0 i $l-1$, među njima i k. Kako restrikcija od f poprima vrijednost k, tu vrijednost poprima i f, čime smo dokazali da je f surjekcija (jer je k bio proizvoljno izabran element od $\mathbb{N}$).

Rješenje 150. Prema teoremu o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$, dovoljno je dokazati da je $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ prebrojiv, te da je uz leksikografski uređaj gust i da nema ni najmanjeg ni najvećeg elementa.

Prebrojivost: $k(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = k(\mathbb{Q}) \cdot k(\mathbb{Q}) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Nepostojanje najmanjeg i najvećeg elementa: za proizvoljni $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, postoji leksikografski manji element $(a - 1, 0)$. Također postoji i leksikografski veći element $(a + 1, 0)$. Dakle, (a, b) nije ni najmanji ni najveći element.

Gustoća: neka su (a, b) i (c, d) elementi od $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, takvi da vrijedi $(a, b) \prec (c, d)$. Po definiciji leksikografskog uređaja, to znači $a < c$ ili $a = c \wedge b < d$. Ako je $a < c$, tada je $a < \frac{a+c}{2} < c$, pa je i $(a, b) \prec (\frac{a+c}{2}, 0) \prec (c, d)$. Ako je pak $a = c$ i $b < d$, između b i d se nalazi $\frac{b+d}{2}$, pa je $(a, \frac{b+d}{2})$ između (a, b) i $(a, d) = (c, d)$.

Rješenje 151. Prvo dokažimo da je postojanje najmanjeg elementa invarijanta sličnosti. Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ linearno uređeni skupovi, $f : A \to B$ sličnost između njih, te A ima najmanji element a. Pokažimo da je $f(a)$ tada najmanji element od B. Neka je $b \in B \setminus \{f(a)\}$ proizvoljan. Kako je f bijekcija, označimo $c := f^{-1}(b) \in A$. Jer je $b \neq f(a)$, mora biti $c \neq a$, pa je $a < c$ (jer je a najmanji element od A). No tada po sličnosti, $f(a) \prec f(c) = b$, dakle $f(a)$ je najmanji element u B. Zaključujemo: ako su dva skupa slični, te u jednom postoji najmanji element, tada i u drugom postoji najmanji element.

Sada je lako vidjeti da $\langle 0, 1\rangle$ i $[0, 1\rangle$ nisu slični: $[0, 1\rangle$ ima najmanji element 0, no $\langle 0, 1\rangle$ nema najmanji element.

Rješenje 152. Naravno. Na primjer, na jednočlanom skupu $\{0\}$ su i uređaj $<$ i $<^*$ prazni, te je $\{0 \mapsto 0\}$ trivijalno sličnost.

Za beskonačan primjer, preslikavanje $x \mapsto -x$ je sličnost između $(\mathbb{Z}, <)$ i $(\mathbb{Z}, <^*)$: bijektivnost slijedi iz involutornosti (preslikavanje je samo sebi inverz), a ako je $x < y$, tada je $-x > -y$, odnosno $-x <^* -y$.

Rješenje 153. Dokažimo prvo da je gustoća invarijanta sličnosti. Ako su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ linearno uređeni skupovi, $f : A \to B$ sličnost, te A gust, treba dokazati da je B gust. Ako su b_1 i b_2 proizvoljni elementi od B takvi da je $b_1 \prec b_2$, označimo $a_1 := f^{-1}(b_1)$, $a_2 := f^{-1}(b_2)$. Kako je f^{-1} također sličnost, i $b_1 \prec b_2$, mora biti i $a_1 < a_2$, pa zbog gustoće od A, između njih postoji neki element $a_3 \in A$. Sad po sličnosti f, iz $a_1 < a_3 < a_2$ zaključujemo $b_1 < f(a_3) < b_2$, pa između b_1 i b_2 postoji element $f(a_3) \in B$. To znači da je B gust.

Sada se lako vidi da $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{Z}, <)$ nisu slični: $\mathbb{Q}$ je gust — ako je $q_1 < q_2$, između svakako postoji $\frac{q_1+q_2}{2} \in \mathbb{Q}$. No $\mathbb{Z}$ nije gust: između $0 \in \mathbb{Z}$ i $1 \in \mathbb{Z}$ nema nijednog cijelog broja.

Kako je $k(\mathbb{Q}) = k(\mathbb{Z}) = \aleph_0$, svakako postoji neka bijekcija $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$. To znači da na $\mathbb{Q}$ možemo *definirati* uređaj $\prec$ pomoću $a \prec b :\iff g(a) < g(b)$. Tada je očito g sličnost između $(\mathbb{Q}, \prec)$ i $(\mathbb{Z}, <)$. Dakle, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}$ se mogu urediti tako da budu slični (zapravo samo treba preurediti jedan od ta dva skupa).

Rješenje 154. Označimo $n := f(0) \in \mathbb{Z}$. Dokažimo prvo (indukcijom po m) da je za sve prirodne m, $f(m) = m + n$. Baza je definicija od n: $f(0) = n = 0 + n$. Pretpostavimo da je za neki $k \in \mathbb{N}$, $f(k) = k + n$. U domeni je $k < k + 1$, te između k i $k + 1$ ne postoji nijedan cijeli broj. Kako je f sličnost, $f(k + 1)$ mora biti veće od $f(k) = k + n$, te između $f(k + 1)$ i $k + n$ ne smije biti nijedan cijeli broj. Dakle, $f(k + 1)$ mora biti neposredni sljedbenik od $k + n$, a to je $k + n + 1 = (k + 1) + n$.

Potpuno analogno, možemo vidjeti da je i $f(-m) = -m + n$ (indukcijom po m). Dakle, za sve cijele brojeve x je $f(x) = x + n$.

Rješenje 155. Neka je $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ neki prebrojiv linearno uređen skup (naravno, $i < j$ ne mora povlačiti $a_i < a_j$). Definiramo funkciju $f : A \to \mathbb{Q}$ koja će biti tražena sličnost. Neka je $f(a_0) := 0$. Prepostavimo da ja za neki $n \in \mathbb{N}$ funkcija f definirana za sve a_i, $i \leq n$. Vrijednost funkcije na a_{n+1} definiramo po slučajevima:

a) Neka je $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_k} < a_{n+1} < a_{i_{k+1}} < \ldots < a_{i_n}$, gdje su i_j svi elementi skupa $\{1, \ldots, n\}$. Tada definiramo $f(a_{n+1}) := \frac{f(a_{i_k}) + f(a_{i_{k+1}})}{2}$. Lako je vidjeti da vrijedi $f(a_{i_k}) < f(a_{n+1}) < f(a_{i_{k+1}})$.

b) Neka je a_{n+1} veći od a_i za sve $i \in \{0, \ldots, n\}$. Tada definiramo $f(a_{n+1}) := 1 + \max_{0 \leq j \leq n} f(a_{i_j})$. Lako je vidjeti da je $f(a_{n+1})$ veći od $f(a_i)$, za sve $i \in \{0, \ldots, n\}$.

c) Analogno, ako je a_{n+1} manji od a_i za sve $i \in \{0, \ldots, n\}$. Tada definiramo $f(a_{n+1}) := \min_{0 \leq j \leq n} f(a_{i_j}) - 1$. Opet, lako je vidjeti da je tada $f(a_{n+1})$ manji od $f(a_i)$, za sve $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Kako smo cijelo vrijeme čuvali uređaj, i u svakom koraku pazili da ne pridružimo element koji je već pridružen nekom prijašnjem elementu od A, funkcija f je sličnost između skupova A i $Rng(f) \subseteq \mathbb{Q}$.

Primijetite kako gornje rješenje koristi istu ideju kao i dokaz teorema o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$. Jedina razlika je što ne konstruiramo funkciju u oba smjera simultano, već samo u jednom. Tako ne dobivamo surjektivnost, već samo injektivnost, koja nam je dovoljna za dokaz tvrdnje.

Rješenje 156. Skup $\sin[\mathbb{R}]$ je slika funkcije sinus, dakle segment $[-1, 1]$, koji očito nije sličan s $\mathbb{R}$: na primjer, ima najmanji element -1, dok $\mathbb{R}$ nema najmanji element.

Jednako tako, ovaj treći skup je slika funkcije tangens (u uglatim zagradama je upravo prirodna domena tangensa), što je čitav $\mathbb{R}$ jer je tangens surjekcija. $\mathbb{R}$ je trivijalno sličan s $\mathbb{R}$ (identiteta je sličnost), a već smo vidjeli da nije sličan s $[-1, 1]$. Dakle, konačan odgovor je: prvi i treći skup su slični, a drugi nije sličan njima.

Rješenje 157.

a) $\mathbb{Q}$ je prebrojiv, dok $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus [0, 1\rangle$ nisu. Kako sličnost mora biti bijekcija, slični skupovi moraju biti ekvipotentni, pa $\mathbb{Q}$ sigurno ne može biti sličan s preostala dva skupa. Ta dva skupa pak jesu slični: preslikavanje f, zadano formulom

$$f(x) = \begin{cases} x & , x < 0 \\ x + 1 & , x \geq 0 \end{cases} ,$$

je sličnost između $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus [0, 1\rangle$.

b) Kao u a), $\mathbb{Q} \cap [0, 1\rangle$ ne može biti sličan neprebrojivim skupovima $[0, 1\rangle$ i $[0, +\infty\rangle$. Ta dva skupa jesu slični: primjer sličnosti između $[0, 1\rangle$ i $[0, +\infty\rangle$ je preslikavanje $x \mapsto \frac{x}{1-x}$.

c) Skup $\mathbb{Q}_0^+$ je gust, dok $\mathbb{P}$ i $\mathbb{N}$ nisu, pa im ne može biti sličan. $\mathbb{P}$ je sličan s $\mathbb{N}$, što možemo provjeriti koristeći uređajnu karakteristiku od $\mathbb{N}$ (zadatak 149): prostih brojeva ima beskonačno mnogo, dok je svaki početni komad $p_{\mathbb{P}}(n)$ podskup početnog komada $p_{\mathbb{N}}(n)$, dakle konačan.

d) Skup $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ je neprebrojiv, dakle nije sličan ni $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ ni $\mathbb{A}$ (koji su prebrojivi). Ta dva skupa su slični, jer su oba slična $\mathbb{Q}$ po uređajnoj karakteristici: prebrojivi su, gusti, i bez najmanjeg i najvećeg elementa. Jedino ne potpuno trivijalno svojstvo je gustoća od $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, pa ga dokažimo. Ako su x i y elementi od $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ takvi da je $x < y$, razlikujemo dva slučaja:

   – Ako u intervalu $\langle x, y\rangle$ nema nijedan prirodan broj, tada možemo uzeti $\frac{x+y}{2}$ kao broj iz $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ koji je između x i y.

   – Ako postoje prirodni brojevi između x i y, tada postoji i najmanji takav (zbog dobre uređenosti od $\mathbb{N}$), označimo ga s n. Tada je $\frac{x+n}{2}$ između x i n, dakle i između x i y, i svakako nije prirodan broj, jer bi tada bio prirodan broj iz intervala $\langle x, y\rangle$, manji od n.

Rješenje 159. Koristit ćemo uređajnu karakteristiku skupa $\mathbb{Q}$, i dokazati da su svi oni slični s $(\mathbb{Q}, <)$. Prebrojivost je zadana u zadatku.

Ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ neki takav skup, te $a \in A$ proizvoljan, interval $\langle a - 2, a - 1\rangle$ sadrži bar jednu točku od A, koja je onda manja od a, pa A nema najmanji element. Jednako tako, promatrajući interval $\langle a+1, a+2\rangle$, zaključujemo da A nema ni najveći element.

Ako su x i y elementi iz A takvi da je $x < y$, interval $\langle x, y\rangle$ (u $\mathbb{R}$) sadrži bar jednu točku od A, pa je A gust. Vidimo da su ispunjeni uvjeti teorema o uređajnoj karakteristici od $\mathbb{Q}$, pa su svi takvi skupovi slični s $(\mathbb{Q}, <)$, te su i međusobno slični.

Rješenje 160. Uputa: Promotrimo prvo skup algebarskih realnih brojeva $\mathbb{A}$. To je prebrojiv skup, i nadskup od $\mathbb{Q}$, pa svaki interval u $\mathbb{R}$ sadrži bar jednu njegovu točku. Po rješenju zadatka 159, $\mathbb{A}$ je sličan s $\mathbb{Q}$, pa postoji sličnost $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{A}$. Pomoću f sada možemo definirati sličnost $g : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, formulom

$$g(x) := \sup\{f(q) : q \in \mathbb{Q} \wedge q < x\} .$$

(Relativno lako je vidjeti da g čuva uređaj, i time da je injektivna — na primjer, kao u sljedećem zadatku. Teže je vidjeti da je slika od g upravo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$.)

Rješenje 161. Neka je B prebrojiv podskup od A koji je gust u A. Prema zadatku 155, postoji sličnost $g : B \to Q$, za neki $Q \subseteq \mathbb{Q}$. Sada definirajmo preslikavanje $f : A \to \mathbb{R}$, formulom

$$f(a) := \sup\{g(b) : b \in B \wedge b < a\} .$$

Dokažimo da f čuva strogi uređaj: neka je $a_1 \prec a_2$ u A. Kako je B gust u A, postoji $b_2 \in B$ takav da je $a_1 \prec b_2 \prec a_2$. Po definiciji $f(a_2)$, to je supremum skupa koji sadrži $g(b_2)$, pa imamo $f(a_2) \geq g(b_2)$. S druge strane, između a_1 i b_2 postoji novi element od B, označimo ga s b_1. Svaki $b \in B$ manji od a_1 je manji i od b_1, te je $g(b) < g(b_1)$. To znači da je $g(b_1)$ gornja međa za skup čiji supremum je $f(a_1)$, pa kako je supremum najmanja gornja međa, vrijedi $f(a_1) \leq g(b_1)$.

Iz $b_1 \prec b_2$ dobivamo po sličnosti g, $g(b_1) < g(b_2)$. Uklopivši to u gornje nejednakosti, $f(a_1) \leq g(b_1) < g(b_2) \leq f(a_2)$, dobivamo $f(a_1) < f(a_2)$, odnosno f čuva uređaj. Sada ako je $a_1 \neq a_2$ u A, po linearnosti je ili $a_1 \prec a_2$ (pa je $f(a_1) < f(a_2)$), ili $a_2 \prec a_1$ (pa je $f(a_2) < f(a_1)$). U svakom slučaju je $f(a_1) \neq f(a_2)$, pa je f injekcija. To znači da je $Rng(f)$ podskup od $\mathbb{R}$, i f je sličnost između A i tog skupa.

Rješenje 162. Prvo dokažimo da je "svaki neprazni otvoreni interval je neprebrojiv" invarijanta sličnosti. Ako su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ slični linearno uređeni skupovi, sa sličnošću $f : A \to B$, te je u A svaki neprazni otvoreni interval neprebrojiv, trebamo dokazati da u B vrijedi ista tvrdnja. Neka je $\langle b_1, b_2 \rangle$ proizvoljni neprazni otvoreni interval u B. Lako se vidi da je $I := \langle f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2) \rangle$ neprazni otvoreni interval u A, te da je $f|_I$ bijekcija između I i $\langle b_1, b_2 \rangle$. Kako je I neprebrojiv, i $\langle b_1, b_2 \rangle$ mora biti takav (bijekcija čuva kardinalitet).

Sada primijetimo da $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ ima to svojstvo: neka su (r_1, q_1) i (r_2, q_2) proizvoljni elementi od $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ takvi da je $(r_1, q_1) < (r_2, q_2)$ u antileksikografskom uređaju. Imamo dva slučaja:

- $q_1 < q_2$. Tada interval $\langle (r_1, q_1), (r_2, q_2) \rangle$ ima neprebrojiv podskup $\langle r_1, +\infty \rangle \times \{q_1\}$, pa je i sâm neprebrojiv.
- $q_1 = q_2 \wedge r_1 < r_2$. Tada je taj interval oblika $\langle r_1, r_2 \rangle \times \{q_1\}$, ekvipotentan s intervalom $\langle r_1, r_2 \rangle$ u $\mathbb{R}$, dakle neprebrojiv.

No $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ nema to svojstvo: neprazan otvoreni interval $\langle (0,0),(1,0)\rangle$ u $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ je ekvipotentan s intervalom $\langle 0,1\rangle$ u $\mathbb{Q}$, dakle prebrojiv skup. Zaključujemo da $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ nisu slični.

Rješenje 163.

- irefleksivnost: Pretpostavimo da je $A \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $A \sqsubset A$. To bi značilo da postoji $n \in A \setminus A = \emptyset$, što je očito nemoguće.

- tranzitivnost: Neka je $A \sqsubset B$ i $B \sqsubset C$. To znači da postoje $m \in B \setminus A$ takav da je $A \cap \mathbb{N}_m = B \cap \mathbb{N}_m$, i $n \in C \setminus B$ takav da je $B \cap \mathbb{N}_n = C \cap \mathbb{N}_n$. Kako je $m \in B$, a $n \notin B$, zaključujemo $m \neq n$, a kako su m i n prirodni brojevi, vrijedi $m < n$ (dakle $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_n$, također i $m \in \mathbb{N}_n$) ili $m > n$ (dakle $\mathbb{N}_m \supset \mathbb{N}_n$, pa i $\mathbb{N}_m \ni n$). Napomena: ovo nije trivijalno simetrična situacija, dakle ne možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti jednu od tih mogućnosti — trebamo dokazati $A \sqsubset C$ za svaku od njih.

  U prvom slučaju je $\mathbb{N}_m = \mathbb{N}_n \cap \mathbb{N}_m$, pa je

  $$C \cap \mathbb{N}_m = C \cap (\mathbb{N}_n \cap \mathbb{N}_m) = (C \cap \mathbb{N}_n) \cap \mathbb{N}_m =$$

  $$= (B \cap \mathbb{N}_n) \cap \mathbb{N}_m = B \cap (\mathbb{N}_n \cap \mathbb{N}_m) = B \cap \mathbb{N}_m = A \cap \mathbb{N}_m \ .$$

  Također vrijedi $m \in B \cap \mathbb{N}_n = C \cap \mathbb{N}_n \subseteq C \wedge m \notin A$, dakle postoji $m \in C \setminus A$ takav da je $C \cap \mathbb{N}_m = A \cap \mathbb{N}_m$, odnosno vrijedi $A \sqsubset C$.

  U drugom slučaju je $\mathbb{N}_n = \mathbb{N}_m \cap \mathbb{N}_n$, pa je

  $$C \cap \mathbb{N}_n = B \cap \mathbb{N}_n = B \cap (\mathbb{N}_m \cap \mathbb{N}_n) = (B \cap \mathbb{N}_m) \cap \mathbb{N}_n =$$

  $$= (A \cap \mathbb{N}_m) \cap \mathbb{N}_n = A \cap (\mathbb{N}_m \cap \mathbb{N}_n) = A \cap \mathbb{N}_n \ .$$

  Sada za n vrijedi $n \in C$, i još samo treba dokazati $n \notin A$. Kad bi bilo $n \in A$, zbog $n \in \mathbb{N}_m$ bi vrijedilo $n \in A \cap \mathbb{N}_m = B \cap \mathbb{N}_m \subseteq B$, to je nemoguće jer je $n \in C \setminus B$. Dakle, postoji $n \in C \setminus A$ za koji je $C \cap \mathbb{N}_n = A \cap \mathbb{N}_n$, pa je opet $A \sqsubset C$.

- linearnost: Za proizvoljne različite podskupove od $\mathbb{N}$, $A \neq B$, pogledajmo simetričnu razliku $A \triangle B \subseteq \mathbb{N}$. Ako su A i B različiti, tada je $A \triangle B$ neprazan (kontrapozicija aksioma ekstenzionalnosti) podskup od $\mathbb{N}$, pa zbog dobre uređenosti od $\mathbb{N}$ ima najmanji element — označimo ga s x. Dakle, $x \in A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, pa zbog simetrije bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \in B \setminus A$. Ako je sada $y \in \mathbb{N}_x$ proizvoljan, tada je $y < x$, pa $y \notin A \triangle B$ (jer je x najmanji takav). To znači da je $y \in A \Leftrightarrow y \in B$ (za $y \in \mathbb{N}_x$), pa je $A \cap \mathbb{N}_x = B \cap \mathbb{N}_x$. Dakle, postoji $x \in B \setminus A$ takav da je $A \cap \mathbb{N}_x = B \cap \mathbb{N}_x$, te je $A \sqsubset B$, odnosno A i B su usporedivi.

Dodatni zadatak: je li $\bigl(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \sqsubset\ \bigr) \simeq (\mathbb{R}, <)$?

Rješenje 164. Skup $\mathbb{Q}$ jest prebrojiv, i linearno uređen standardnim uređajem. Za svaki $x \in \mathbb{R}$, promotrimo $A_x := \{y \in \mathbb{Q} : y < x\}$. To jest inicijalni segment od $\mathbb{Q}$ (ako je $z < y$ i $y < x$, tada je i $z < x$, pa je $z \in A_x$), i svi A_x su međusobno različiti: ako su x i y različiti realni brojevi, postoji racionalan broj z između njih, koji je onda u točno jednom od skupova A_x i A_y, pa oni ne mogu biti jednaki. Dakle, takvih inicijalnih segmenata ima koliko i realnih brojeva, odnosno neprebrojivo, pa onda i svih inicijalnih segmenata u $\mathbb{Q}$ ima neprebrojivo. Može se vidjeti da su jedini preostali inicijalni segmenti u $\mathbb{Q}$ samo $\emptyset$ i čitav $\mathbb{Q}$, ali to nije nužno za rješenje zadatka.

Rješenje 165. Dokažimo da će $< \circ \prec$ biti linearni uređaj na S ako i samo ako je $<=\prec$, i taj uređaj (jedan te isti) je gust na S. U jednom smjeru, ako je uređaj $<$ gust na S i $<=\prec$, tada je lako vidjeti da je $< \circ \prec = < \circ < = <$, dakle linearan uređaj na S. Jedna inkluzija slijedi iz tranzitivnosti: ako je $x(< \circ <)y$, postoji $z \in S$ takav da je $x < z < y$, pa je i $x < y$. Druga inkluzija slijedi iz gustoće: ako je $x < y$, postoji $z \in S$ takav da je $x < z < y$, pa je $x(< \circ <)y$.

U drugom smjeru, razlikujemo dva slučaja: kada $<$ i $\prec$ nisu jednaki, i kada jesu jednaki, ali ne gusti. U svakom od tih slučajeva trebamo vidjeti da njihova kompozicija ne može biti linearni uređaj na S.

Ako je $<\neq\prec$, postoji uređeni par (x, y) koji je u jednom, ali nije u drugom uređaju. Kako su oba uređaja irefleksivni, mora biti $x \neq y$. Bez velikog smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x < y$, ali $x \not\prec y$. No kako je $\prec$ linearni uređaj, a $x \neq y$, mora biti $y \prec x$. To znači da je $y \prec x < y$, pa je $y(< \circ \prec)y$, odnosno $< \circ \prec$ nije irefleksivan.

Ako je $<=\prec$, i taj uređaj nije gust, tada postoje x i y iz S takvi da je $x < y$, ali ne postoji $z \in S$ takav da je $x < z < y$. To znači da uređen par (x, y) nije u $< \circ <$, što je jednako $< \circ \prec$. No ni (y, x) nije u toj kompoziciji, jer inače bismo po tranzitivnosti imali $y < x$, što je nemoguće jer je $<$ antisimetrična relacija. Kako je $x < y$, zaključujemo da su x i y različiti, pa $< \circ \prec$ nije linearni uređaj.

Dodatni zadatak: što se mijenja ako podrazumijevamo *refleksivne* uređaje?

Rješenje 166. Vrijedi. Uputa za dokaz: promotrite dokaz Cantor–Bernsteinovog teorema. Ista ideja funkcionira, samo treba biti oprezniji što se tiče uređaja.

Rješenje 167. Da: na primjer, skup $\mathbb{Z}$ sa standardnim uređajem. Bilo koji uređaj na $\mathbb{Z}$ koji je nadskup standardnog uređaja mora biti sâm standardni uređaj (zbog linearnosti), a to nije dobar uređaj (čitav $\mathbb{Z}$ nema najmanji element).

Štoviše, bilo koji uređaj na bilo kojem nadskupu $A \supseteq \mathbb{Z}$, koji proširuje standardni uređaj $<$ na $\mathbb{Z}$, ne može biti dobar uređaj — jer uvijek u A postoji neprazni podskup $\mathbb{Z}$ bez najmanjeg elementa.

Rješenje 168. Neka je L lanac u $\bigl(W(A), \lhd\bigr)$. To znači da je svaki element od L

podskup od A, dobro uređen odgovarajućom restrikcijom relacije $<$, te da za svaka dva elementa A_1 i A_2 od L, ili je A_1 početni komad od A_2, ili je A_2 početni komad od A_1 (ili su jednaki). Treba dokazati da je L dobro uređen relacijom $\lhd$ (preciznije, njenom restrikcijom).

Neka je S neprazan podskup od L. Kako je S neprazan, postoji skup $\bigcap S$, presjek svih elemenata u S, koji je također podskup od A. Treba vidjeti da je dobro uređen restrikcijom od $<$, te da je početni komad svih (ostalih) C iz S.

Neka je $B \subseteq \bigcap S$ neprazan. Skup S je neprazan, pa fiksirajmo neki njegov element C. Očito je B podskup i od C, a kako je C dobro uređen (jer je $C \in S \subseteq L \subseteq W(A)$), zaključujemo da B ima $<$-najmanji element. Dakle, $\bigcap S$ je doista dobro uređen restrikcijom od $<$, odnosno $\bigcap S \in W(A)$.

Također, $\bigcap S$ mora biti element i od S — jer da nije, mogli bismo doći do kontradikcije na sljedeći način: $\bigcap S \subseteq C$, a ako su različiti, inkluzija mora biti stroga, pa mora postojati $x \in C$ koji nije u $\bigcap S$. Po de Morganovim pravilima, postoji $C_1 \in S$ takav da $x \notin C_1$. Kako su C_1 i C elementi od S, a time i lanca L, međusobno su usporedivi relacijom $\lhd$. Slučaj $C = C_1$ je nemoguć jer je x u jednom skupu, a nije u drugom. Slučaj $C \lhd C_1$ je nemoguć iz istog razloga: to bi povlačilo $C \subseteq C_1$, no x je kontraprimjer za tu inkluziju. Dakle, mora biti $C_1 \lhd C$. Neka je $x_0 \in C$ takav da je $C_1 = p_C(x_0)$.

Sada možemo cijeli gornji postupak provesti za $C_1 \in S$ umjesto C: tako dobijemo $C_2 \in S$ takav da je $C_2 \lhd C_1$. Neka je $x_1 \in C_1$ takav da je $C_2 = p_{C_1}(x_1)$. Iz $x_1 \in C_1 = p_C(x_0)$ imamo $x_1 \in C$, te $x_1 < x_0$. Provedemo još jednom cijeli postupak za C_2, i dobijemo $x_2 \in C$ sa svojstvom $x_2 < x_1$. Induktivno, možemo dobiti $x_n \in C$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, takve da je uvijek $x_{n+1} < x_n$. No tada je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ neprazan podskup od C, pa zbog dobre uređenosti od C ima $<$-najmanji element: neka je to x_k. Naravno, sada je $x_{k+1} < x_k$ kontradikcija. Zaključujemo da je početna pretpostavka bila pogrešna, odnosno $\bigcap S \in S$.

Još treba vidjeti da je $\bigcap S$ $\lhd$-najmanji element u S, odnosno $\bigcap S \lhd D$ za sve $D \in S \setminus \{\bigcap S\}$. Neka je D proizvoljni element od S, različit od $\bigcap S$. Kako je očito $D \supseteq \bigcap S$, zaključujemo da inkluzija mora biti prava, pa postoji element od D koji nije u $\bigcap S$. Skup svih takvih elemenata je neprazan podskup od D, pa zbog dobre uređenosti od D taj skup ima najmanji element: neka je to y. Dokažimo da je $\bigcap S$ upravo $p_D(y)$.

Jedna inkluzija je jasna: ako je $z \in p_D(y)$ proizvoljan, iz toga slijedi $z \in D$ i $z < y$. Kad bi još bilo $z \notin \bigcap S$, to bi bilo u kontradikciji s minimalnošću od y. Dakle, mora biti $z \in \bigcap S$. Za drugu inkluziju, razmišljajmo ovako: neka je $x \in \bigcap S$. Očito je $x \in D$, samo još trebamo $x < y$. Naš y nije iz $\bigcap S$, pa postoji $E \in S$ takav da $y \notin E$. Kao dva elementa u S, D i E su $\lhd$-usporedivi, i kao gore dobivamo da je jedina mogućnost $E \lhd D$. Neka je $w \in D$ takav da je $E = p_D(w)$. S jedne strane, x je u svim elementima iz S, pa tako i u E, dakle $x < w$. S druge strane, u dobro uređenom skupu D neprazan podskup $\{y, w\}$ mora imati najmanji element. Pretpostavka da to nije w značila bi $y < w$, što je nemoguće zbog $y \notin E$. Dakle, mora biti $w \leq y$, što zajedno s $x < w$ daje traženu nejednakost $x < y$.

Rješenje 169. Prvo dokažimo da je funkcija f strogo rastuća: ako je $a < b$ u A, tada je $\{a, b\}$ neprazan podskup od A, koji ima supremum $b \in A$, pa po uvjetu zadatka njegova slika $\{f(a), f(b)\}$ također ima supremum, i to je upravo $f(b) \in A$. Iz toga slijedi $f(a) \leq f(b)$, no kako je f injekcija, zaključujemo da jednakost ne može vrijediti, dakle je $f(a) < f(b)$.

Za strogo rastuću funkciju na dobro uređenom skupu, za svaki a vrijedi $a \leq f(a)$. Sada imamo dva slučaja:

Ako je a najveći element od A, tada $b := a$ očito ima svojstvo koje se traži: najveći je mogući, i $f(a) \leq a$.

U suprotnom, postoje elementi iz A veći od njega, pa postoji i najmanji takav: označimo ga s a^+ (sljedbenik od A). Očito je $a < a^+$, dakle i $f(a) < f(a^+)$, pa po tranzitivnosti $a < f(a^+)$. To znači da postoje elementi čije funkcijske vrijednosti su strogo veće od a, pa neka je c najmanji takav element.

Ako je c sljedbenik nekog elementa, recimo $c = b^+$ za $b \in A$, očito b zadovoljava sve uvjete iz tvrdnje zadatka: $f(b) \leq a$ jer je $b < c$, a c je najmanji element čija funkcijska slika je iznad a. Također, za svaki element $d > b$ vrijedi $d \geq c$, pa je $f(d) \geq f(c) > a$.

Još je preostalo vidjeti što ako c nije sljedbenik nijednog elementa. Tada promotrimo skup $B := \{x \in A : x < c\}$. Kako je $f(\perp) \leq a < f(c)$, vrijedi $\perp < c$, odnosno $\perp \in B$. Dakle B je neprazan podskup od A. Sljedeće što trebamo pokazati je $c = \sup B$.

Kako je c po definiciji gornja međa od B, očito je $\sup B \leq c$. Pretpostavimo da je nejednakost stroga. Tada je $d := \sup B \in B$ (po definiciji skupa B), pa je d zapravo maksimum od B. Iz $d < c$ dobivamo $d^+ \leq c$ (definicija sljedbenika), no to je nemoguće: $d^+ = c$ je nemoguće jer c nije ničiji sljedbenik, a $d^+ < c$ je nemoguće jer bi to značilo $d^+ \in B$, odnosno $d^+ \leq d$.

Sada imamo neprazan podskup B od A sa supremumom c, pa po uvjetu zadatka vrijedi $a < f(c) = \sup f[B] = \sup_{x<c} f(x)$. To znači da a nije gornja međa za $f[B]$ ($f(c)$ je najmanja takva), pa postoji $x < c$ sa svojstvom $f(x) > a$. No to je u kontradikciji s minimalnošću od c. Dakle, ne može se dogoditi da c nije sljedbenik, odnosno, uvijek imamo b s traženim svojstvom.

Rješenje 170. Znamo da je skup $\mathbb{Q}$ prebrojiv. Neka je $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ neka fiksirana bijekcija. Na skupu $\mathbb{Q}$ definiramo uređaj $\prec$ ovako:

$$p \prec q \quad \text{ako i samo ako} \quad f(p) < f(q).$$

Lako je provjeriti da je $\prec$ dobar uređaj na $\mathbb{Q}$. Pošto je sličnost između dobro uređenih skupova jedinstvena, tada je identiteta jedina funkcija sličnosti sa skupa $(\mathbb{Q}, \prec)$ na samog sebe.

Rješenje 171. Tvrdnja ne vrijedi: skup $\mathbb{N}$ jest linearno uređen relacijom $>$, a nije dobro uređen: na primjer, sâm $\mathbb{N}$ nema $>$-najmanji ($<$-najveći) element. No svaka sličnost između $(\mathbb{N}, >)$ i $(\mathbb{N}, >)$ je ujedno i sličnost između $(\mathbb{N}, <)$ i $(\mathbb{N}, <)$ (ako čuva uređaj $>$, i čuva jednakost jer je injekcija, tada čuva i uređaj $<$ zbog linearnosti), a takva postoji samo jedna jer $(\mathbb{N}, <)$ *jest* dobro uređen.

Rješenje 172.

a) Kako je $\mathbb{N}$ sa standardnim uređajem dobro uređen skup, znamo da postoji jedinstvena sličnost između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$, i to je identiteta.

b) Budući da $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nisu slični (na primjer, $\mathbb{N}$ ima najmanji element, a $\mathbb{Z}$ nema), ne postoji nijedna sličnost između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

c) U zadatku 154 smo vidjeli da sve takve moraju biti translacije: oblika $x \mapsto x+n$ za neki $n \in \mathbb{Z}$. Lako je vidjeti i obrnuto, da sve translacije zaista jesu sličnosti između $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}$ ($x \mapsto x + n$ je bijekcija, s inverznim preslikavanjem $x \mapsto x - n$, te $x < y$ povlači $x + n < y + n$).

Rješenje 173. Ako skup S nije dobro uređen, tada očito ne postoji dobro uređen skup njemu sličan (dobra uređenost je invarijanta sličnosti), pa je skup svih dobro uređenih skupova sličnih sa S prazan, dakle dobro definiran (aksiom praznog skupa).

Ako je S prazan, tada jest dobro uređen, i kako sličnost mora biti bijekcija, jedini skup s kojim S može biti sličan je upravo $\emptyset$. To znači da je skup svih dobro uređenih skupova sličnih sa S jednočlan skup $\{\emptyset\}$ (svi prazni skupovi su međusobno jednaki po aksiomu ekstenzionalnosti), pa je dobro definiran (aksiom praznog skupa, i aksiom para ili partitivnog skupa).

Ako je pak S dobro uređen neprazan skup, tada on ima najmanji element, označimo ga s $\perp$. Označimo $S' := S \setminus \{\perp\}$. Ako je x proizvoljni skup koji nije element od S, sa $S(x)$ označimo skup $\{x\} \cup S'$, uređen tako da je x prije svih elemenata od S', koji su međusobno uređeni restrikcijom izvornog uređaja na S (dakle, efektivno smo u S element $\perp$ zamijenili s x).

Očito je $S(x)$ dobro uređen skup sličan sa S (sličnost preslikava x u $\perp$, a sve ostale elemente ostavlja na miru). Kad bi postojao skup $\mathbf{S}$ svih dobro uređenih skupova sličnih sa S, bio bi — kao njegov podskup — dobro definiran i skup svih $S(x)$, gdje $x \notin S$ (aksiom separacije):

$$\mathbf{T} := \{S(x); x \notin S\} = \big\{T \in \mathbf{S} : \exists x\big(x \notin S \land T = (S \setminus \{\perp\}) \cup \{x\}\big)\big\} .$$

Sada za proizvoljni $S(x) \in \mathbf{T}$, primijetimo da je x upravo njegov najmanji element, pa postoji formula $(\forall y \in T)(x < y \lor x = y)$ s dvije slobodne varijable x i T, koja je funkcijska veza T i x. Po aksiomu zamjene, kad bi $\mathbf{T}$ bio skup, bio bi i skup dobiven djelovanjem te funkcijske veze na $\mathbf{T}$, a to je upravo $S^{\mathbf{c}}$, "skup" svih x koji nisu u S.

Naravno, to je kontradikcija: po aksiomu para bi tada $\{S, S^{\mathbf{c}}\}$ bio skup, te bismo po aksiomu unije imali i "skup" $\mathbf{V} = \bigcup\{S, S^{\mathbf{c}}\} = S \cup S^{\mathbf{c}}$ svih skupova, što znamo da je nemoguće (po aksiomu separacije mogli bismo separirati skup svih $r \in \mathbf{V}$ takvih da je $r \notin r$, te bismo dobili Russellov paradoks).

Dakle, osim u gore navedenim slučajevima (kad je S prazan, ili kad sâm nije dobro uređen), svi dobro uređeni skupovi slični sa S ne čine skup.

Primijetimo da, striktno govoreći, zadatak nije potpuno interpretiran u teoriji ZFC, jer umjesto da promatramo uređen par $(S, <)$, pretpostavljamo da skup S sa sobom nosi uređaj, koji je dakle definabilan koristeći samo S. To možemo popraviti tako da S, ako jest dobro uređen, zamijenimo jedinstvenim ordinalom sličnim sa S (to možemo ako imamo aksiom izbora). Tada taj ordinal zaista posjeduje "svoj" dobar uređaj, relaciju "$\in$", tako da ne trebamo promatrati uređene parove.

Rješenje 174. Ako je $(S, <)$ konačan, svaki njegov neprazan podskup je konačan, pa iz zadatka 142 slijedi da ima najmanji i najveći ($>$-najmanji) element. To znači da su i $(S, <)$ i $(S, >)$ dobro uređeni.

Drugi smjer: pretpostavimo da je S beskonačan, i da je dobro uređen relacijom $<$. Dokažimo da ne može biti dobro uređen i relacijom $>$. Definirajmo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u S induktivno pomoću $x_n := \min(S \setminus \{x_0, \dots, x_{n-1}\})$ (kako je S beskonačan, uvijek tražimo najmanji element nepraznog podskupa od S). Tada se iz definicije niza vidi da je $x_{n+1} > x_n$ (usporedivi su jer je S linearno uređen, jednaki nisu jer je x_n izbačen iz skupa čiji minimum je x_{n+1}, a $x_{n+1} < x_n$ bi bila kontradikcija s minimalnošću od x_n u skupu iz kojeg još nije izbačen x_{n+1}). To znači da neprazan podskup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S$ ne može imati najveći ($>$-najmanji) element, pa $>$ ne može biti dobar uređaj na S.

Rješenje 175. Ako je A konačan, tada je i $\mathcal{P}(A)$ konačan, pa je i svaki podskup od $\mathcal{P}(A)$ konačan. Po zadatku 138, taj podskup dakle ima minimalni element s obzirom na relaciju $\subseteq$.

S druge strane, ako je A beskonačan, tada A ima prebrojiv podskup $B = \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$ (pretpostavljamo da su svi b_i različiti). Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ označimo $B_n := \{b_i : i > n\}$, lako vidimo da je $B_{n+1} \subset B_n$ za sve n, pa podskup $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ od $\mathcal{P}(A)$ nema $\subseteq$-minimalni element.

Rješenje 176. Prvo, poredajmo racionalne brojeve u niz: $q_0, q_1, q_2, \dots$.

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$, takav da je $(A, <)$ dobro uređen skup. U dobrom uređaju svaki element a, osim najvećeg, ima neposrednog sljedbenika a^+ (najmanji od svih elemenata većih od a). Oznakom $f(a)$ označimo prvi racionalni broj u gornjem nizu, koji je strogo između a i a^+; takav uvijek postoji, jer između svaka dva realna broja postoji racionalni broj.

Označimo s A' skup A bez eventualnog najvećeg elementa (ako postoji). Očito je $k(A) \leq k(A') + 1$. Gore definirano preslikavanje f je strogo rastuća funkcija sa A' u $\mathbb{Q}$: ako je $a < b$ u A', tada je $f(a) < a^+ \leq b < f(b)$. To znači da je f injekcija, pa je

$k(A') \leq k(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. No tada je i $k(A) \leq k(A') + 1 \leq \aleph_0 + 1 = \aleph_0$, pa je A konačan ili prebrojiv.

Poglavlje 4

Aritmetika ordinalnih brojeva

Za skup x kažemo da je **ordinalni broj** ako je $(x, \in)$ tranzitivan i dobro uređen skup.

Neka je A neki skup ordinalnih brojeva. Tada vrijedi:

a) $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ je ordinalni broj i najmanji je od svih ordinalnih brojeva koji su veći ili jednaki od svih elemenata iz A, tj. $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha = \sup A$;

b) $\bigcap_{\alpha \in A} \alpha$ je ordinalni broj i najveći je od svih ordinalnih brojeva koji su manji ili jednaki od svih elemenata iz A, tj. $\bigcap_{\alpha \in A} \alpha = \inf A$.

Za svaki ordinalni broj α skup $\alpha \cup \{\alpha\}$ je ordinalni broj, te je to neposredni sljedbenik od α. Ordinalni broj $\alpha \cup \{\alpha\}$ označavamo sa $\alpha + 1$.
Ako su α i β ordinalni brojevi za koje vrijedi $\alpha < \beta$, tada je $\alpha + 1 \leq \beta$.

Za ordinalni broj α kažemo da je **prve vrste** (eng. successor) ako postoji ordinalni broj β tako da vrijedi $\alpha = \beta + 1$. Ako je ordinalni broj različit od nule, te nije prve vrste, tada kažemo da je **druge vrste** ili da je **granični ordinalni broj** (eng. limit ordinal).

Primjenom teorema rekurzije slijedi da postoji jedinstvena funkcija $+ : On \times On \to On$ koja ima sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned}
&\alpha + 0 = \alpha \\
&\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 \\
&\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}, \quad \text{ako je } \beta \text{ granični ordinalni broj.}
\end{aligned}$$

Upravo definiranu funkciju nazivamo **zbrajanje ordinalnih brojeva**.

Neka su α, β i γ proizvoljni ordinalni brojevi. Tada vrijedi:

a) $0 + \alpha = \alpha$

b) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

c) Ako je $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ tada je $\beta = \gamma$

d) Ako $\alpha \leq \beta$ tada $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$

Posebno želimo istaknuti da **zbrajanje ordinalnih brojeva općenito nije komutativno**. Npr. $1 + \omega = \sup\{1 + n : n \in \omega\} = \omega$, ali $\omega + 1 \neq \omega$, jer znamo da vrijedi $\omega < \omega + 1$.

Zatim, općenito iz $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ **ne mora slijediti** $\beta = \gamma$. (npr. $1 + \omega = 2 + \omega$)

Teorem o oduzimanju. *Neka su α i β ordinalni brojevi takvi da je $\beta \leq \alpha$. Tada postoji jedinstveni ordinalni broj γ takav da vrijedi $\alpha = \beta + \gamma$.*

Sume $\sum\limits_{i \in \beta} \alpha_i$ su definirane s

$$\sum_{i \in \beta} \alpha_i = \begin{cases} 0, & \beta = 0, \\ \left(\sum\limits_{i \in \gamma} \alpha_i \right) + \alpha_\gamma, & \beta = \gamma + 1, \\ \sup\limits_{\gamma \in \beta} \sum\limits_{i \in \gamma} \alpha_i, & \text{ako je } \beta \text{ granični ordinalni broj.} \end{cases}$$

Primjenom teorema rekurzije slijedi da je s jednakostima koje slijede definirana jedinstvena funkcija $\cdot : On \times On \to On$:

$$\alpha \cdot 0 = 0$$

$$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$$

$$\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\}, \quad \text{ako je } \beta \text{ granični ordinalni broj.}$$

Funkciju $\cdot$ nazivamo **množenje ordinalnih brojeva**.

Neka su α, β i γ proizvoljni ordinalni brojevi. Tada vrijedi:

a) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$

b) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

c) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

d) Ako $\alpha \leq \beta$ tada $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$

Množenje ordinalnih brojeva općenito nije komutativno. Npr. $2 \cdot \omega =$ (iz def.) $= \sup\{2 \cdot n : n \in \omega\} = \omega$, a po drugoj strani $\omega \cdot 2 =$ (iz def.) $= \omega \cdot (1+1) = \omega + \omega \neq \omega$, jer je očito (!) $\omega + \omega > \omega + 1 > \omega$.

Općenito **ne vrijedi druga distributivnost**, tj. ne mora vrijediti $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. Npr. $\omega = 2 \cdot \omega = (1 + 1) \cdot \omega \neq \omega + \omega$.

Teorem o dijeljenju s ostatkom. *Neka su* α *i* β *ordinalni brojevi, te neka je* $\beta > 0$. *Tada postoje jedinstveni ordinalni brojevi* δ *i* ρ *takvi da je* $\alpha = \beta \cdot \delta + \rho$, *i* $\rho < \beta$.

Produkti $\prod\limits_{i \in \beta} \alpha_i$ su definirani s

$$\prod_{i \in \beta} \alpha_i = \begin{cases} 0, & \beta = 0, \\ \alpha_0, & \beta = 1, \\ \left(\prod\limits_{i \in \gamma} \alpha_i \right) \alpha_\gamma, & \beta = \gamma + 1, \\ \sup\limits_{\gamma \in \beta} \prod\limits_{i \in \gamma} \alpha_i, & \text{ako je } \beta \text{ granični ordinalni broj.} \end{cases}$$

Primjenom teorema rekurzije slijedi da je s jednakostima koje slijede definirana jedinstvena funkcija na $On \times On$:

$$\alpha^0 = 1$$

$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$$

$$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\}, \quad \text{ako je } \beta \text{ granični ordinalni broj.}$$

Upravo definiranu funkciju nazivamo **potenciranje ordinalnih brojeva**.

Neka su α, β i γ proizvoljni ordinalni brojevi. Tada vrijedi:

a) $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$

b) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

c) Ako je $\alpha > 1$ i $\beta < \gamma$ tada je $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$

Općenito ne vrijedi jednakost $\alpha^\beta \cdot \gamma^\beta = (\alpha \cdot \gamma)^\beta$.

Za svaki ordinalni broj α postoji jedinstveni prirodan broj n i konačni nizovi ordinalnih brojeva $\gamma_0 > \gamma_1 > \ldots \gamma_n$ i $m_0, \ldots, m_n$, gdje su svi m_i konačni ordinalni brojevi, tako da vrijedi

$$\alpha = \omega^{\gamma_0} m_0 + \omega^{\gamma_1} m_1 + \ldots + \omega^{\gamma_n} m_n.$$

Prethodni prikaz ordinalnog broja α nazivamo **Cantorova normalna forma**.

Zadaci.

Zadatak 177. Neka su $\alpha, \beta \neq 0$ ordinalni brojevi. Dokažite da $\alpha + \beta = \omega$ povlači $\alpha \cdot \beta = \omega$.

Zadatak 178. Dokažite da za svaki ordinalni broj α vrijedi $\alpha + 1 + \alpha = 1 + \alpha \cdot 2$.

Zadatak 179. Dokažite: ako je β granični ordinalni broj i $\alpha < \beta$, onda je $\alpha + \beta = \beta$.

Zadatak 180. Ako je $\alpha \geq \omega$, $k \in \omega$ i $\omega^k < \alpha$, onda je $\omega^k + \alpha = \alpha$. Dokažite.

Zadatak 181. Dokažite da za ordinalne brojeve $\alpha > 1$ i $\beta \geq 1$ vrijedi $\alpha^\beta \geq \alpha \cdot \beta$.

Zadatak 182. Pokažite da je $(\omega + 1)^\omega = \omega$.

Zadatak 183. Neka su $k \in \omega \setminus \{0\}$ i $i \in \omega$. Izračunajte $(\omega \cdot k + i) \cdot \omega$.

Zadatak 184. Izračunajte $(\omega \cdot 3 + 2) \cdot (\omega + \omega^2) \cdot 2$.

Zadatak 185. Nađite ordinalni broj α tako da vrijedi $\omega^{n+1} = 1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n + \alpha$.

Zadatak 186. Izračunajte $\sum\limits_{j \in 4} (\omega + j)^j$.

Zadatak 187. Dokažite da za sve ordinalne brojeve α i β vrijedi $\sum\limits_{i \in \beta} \alpha = \alpha \cdot \beta$.

Zadatak 188. Izračunajte $\sum\limits_{i \in \omega} i^2$.

Zadatak 189. Neka je $\{\alpha_i : i \in \omega \cdot 2\}$ neki skup ordinalnih brojeva. Pokažite da vrijedi:

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2} \alpha_i = \sum_{i \in \omega} \alpha_i + \sum_{i \in \omega} \alpha_{\omega + i}.$$

Zadatak 190. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega+3}(i\cdot\omega+\omega\cdot i)$.

Zadatak 191. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2} i$.

Zadatak 192. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2+3}((\omega+i)\cdot\omega)$.

Zadatak 193. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega} i^2$.

Zadatak 194. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega+n} i^n$, gdje je $n\in\omega\setminus\{0\}$ proizvoljan.

Zadatak 195. Izračunajte:

a) $\sum\limits_{\alpha\in\omega\cdot 2+2}(2+\alpha+2^\alpha)$

b) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 3}(i^3+3^i)$

c) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}(i+\omega\cdot 2)$

d) $\sum\limits_{i\in\omega^2}(i+\omega)$

e) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2} i^2$

f) $\sum\limits_{i\in\omega+3}(\omega+i)\cdot\omega^{i+2}$

g) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}(\omega+2i)$

h) $\sum\limits_{i\in\omega+1}(i+2)^{\omega+i}$

i) $\sum\limits_{i\in\omega+2} i^\omega$

j) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}\omega$

k) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}(\omega\cdot i\cdot(i+1))$

l) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2+2}(\omega^2+\omega+i)$

m) $\sum\limits_{i\in\omega+2}\omega^i$

n) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2} i\cdot(\omega+i)$

o) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 3} 3$

p) $\sum\limits_{n\in\omega+5}\omega^n\cdot n$

r) $\sum\limits_{n\in\omega\cdot 5}\omega$

s) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 3}(i\cdot 3)$

t) $\sum\limits_{i\in\omega+1}\omega$

u) $\sum\limits_{i\in\beta}\alpha$.

Zadatak 196. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2} i^2$.

Zadatak 197. Izračunajte $\sum\limits_{n\in\omega+1}\sum\limits_{k\in\omega} n^k$

Zadatak 198. Izračunajte

a) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}\left(\omega+\sum\limits_{j\in i} 1\right)$

b) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}\sum\limits_{j\in i}(j+\omega+2)$

c) $\sum\limits_{i\in\omega+2}\sum\limits_{j\in i}(\omega\cdot j+i)$

d) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}\sum\limits_{j\in i} j\cdot i$

e) $\sum\limits_{i\in\omega+2}\sum\limits_{j\in i}(2i+j)$

f) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}\sum\limits_{j\in i+1}\omega\cdot i\cdot j$

Zadatak 199. Izračunajte $\prod\limits_{\alpha\in\omega\cdot 3+2}(\alpha+\omega)$.

Zadatak 200. Izračunajte $\prod\limits_{\alpha\in\omega+2}(\alpha+2)^{\alpha+1}$.

Zadatak 201. Izračunajte $\prod\limits_{i\in\omega}\omega^{\omega+i}$.

Zadatak 202. Izračunajte

a) $\prod\limits_{i\in\omega+2}(\omega^2+2^i)$

b) $\prod\limits_{i\in\omega+3}(2\cdot i+\omega)^2$

c) $\prod\limits_{i\in\omega+2}(i+\omega\cdot 2+i)$

d) $\prod\limits_{i\in\omega\cdot 2}(2^i+\omega)$

e) $\prod\limits_{i\in\omega+3}\omega\cdot(i+1)^2$

f) $\prod\limits_{\alpha\in\omega+3}\alpha^\alpha$

g) $\prod\limits_{i\in\omega+3}(i^\omega\cdot 2)$

h) $\prod\limits_{i\in\omega} i^{\omega+i}$

i) $\prod\limits_{i\in\omega}(i\cdot\omega)$

j) $\prod\limits_{i\in\omega+1}\omega^i$

k) $\prod\limits_{i\in\omega+2}(i+\omega\cdot 2+i)$

l) $\prod\limits_{i\in\omega\cdot 2}(2^i+\omega)$

Zadatak 203. Izračunajte

a) $\sum\limits_{i\in\omega+1}\prod\limits_{j\in i}(\omega+i)\cdot j;$ b) $\sum\limits_{i\in\omega}\prod\limits_{j\in\omega+1}(\omega+i)^j;$

c) $\sum\limits_{i\in\omega+1}\prod\limits_{j\in i}(j+2)^i;$ d) $\sum\limits_{i\in\omega}(i+2)^{\prod\limits_{j\in\omega}(j+1)}.$

Zadatak 204. Izračunajte

a) $\prod\limits_{j\in\omega+1}\sum\limits_{i\in\omega}\omega^{i+j}$ b) $\left(\sum\limits_{i\in\omega}\omega\right)\cdot\left(\prod\limits_{j\in\omega+2}j\right)$

c) $\sum\limits_{i\in\omega+2}\prod\limits_{j\in i}(j+1)(i+1)$ d) $\sum\limits_{i\in\omega+1}\prod\limits_{j\in i}(\omega+(i+1)^j)$

e) $\sum\limits_{i\in\omega+1}\prod\limits_{j\in\omega+1}(\omega^2+\omega\cdot i+j)$ f) $\sum\limits_{i\in\omega+1}\prod\limits_{j\in i}i^{j^\omega}$

g) $\sum\limits_{i\in\omega+2}\prod\limits_{j\in i}j\cdot\omega^i$ h) $\sum\limits_{i\in\omega+2}\prod\limits_{j\in i}j^{\omega^i}$

i) $\sum\limits_{i\in\omega+1}\prod\limits_{j\in i}(j^i\cdot i^j)$ j) $\prod\limits_{i\in\omega+3}\sum\limits_{j\in i}\omega\cdot j$

Zadatak 205. Izračunajte

a) $\sum\limits_{i\in\omega+1}(i+1)^{\omega+i}$ b) $\sum\limits_{i\in\omega+2}\prod\limits_{j\in i}(i\cdot(j+2)^\omega)$

c) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot3}(i^3+3^i)$ d) $\sum\limits_{i\in\omega+1}(i+1)^{\omega+1}$

e) $\sum\limits_{i\in\omega}(i+2)^{\prod\limits_{j\in\omega}(j+1)}$ f) $\sum\limits_{i\in\omega+2}\omega^i$ i $\sum\limits_{i\in\omega+2}i^\omega$

g) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot2}\sum\limits_{j\in i+1}(3+i+(j+1)^\omega)$ h) $\sum\limits_{i\in\omega+22}\sum\limits_{j\in i}\omega^j\cdot i^\omega$

i) $\sum\limits_{i\in\omega+1}\omega^i$

Zadatak 206. Odredite Cantorovu normalnu formu za $2^{\omega\cdot\alpha+\beta}$ ako je β konačan.

Zadatak 207. Odredite Cantorovu normalnu formu ordinalnog broja

$$(\omega\cdot2+1)(\omega+1)3$$

Zadatak 208. Nađite Cantorovu normalnu formu za

$$\omega \cdot (\omega + 1) \cdot (\omega^2 + 1)$$

Zadatak 209. Odredite Cantorovu normalnu formu ordinalnog broja:

a) $3^{\sum_{i \in \omega \cdot 3} 3^i}$

b) $2 \cdot \omega(\omega + 1)(\omega + 2)$

c) $123456789^{\alpha+\omega+5}$, gdje je $\alpha = \prod_{i \in \omega+2} i^{i^\omega+1}$

d) $99^{\prod_{i \in \omega \cdot 2} (i+1)+3}$

Zadatak 210. Dokažite da je ekvivalentno:

a) $\alpha = \omega \cdot \alpha$;

b) postoji β takav da je $\alpha = \omega^\omega \cdot \beta$.

Zadatak 211. Niz ordinalnih brojeva $(\alpha_i : i \in \omega)$ definiran je s:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \omega \\ \alpha_{i+1} &= (\alpha_i)^\omega \end{aligned}$$

Označimo $\epsilon_0 = \sup\{\alpha_i : i \in \omega\}$. Dokažite da je $\omega^{\epsilon_0} = \epsilon_0$.

Zadatak 212. Dokažite da su svi beskonačni ordinalni brojevi do uključivo ϵ_0 prebrojivi skupovi.

Rješenja.

Rješenje 177. Ako je $\alpha + \beta = \omega$, onda su $\alpha, \beta \leq \omega$. Nadalje, kad bi bilo $\alpha = \beta = \omega$, bilo bi $\alpha + \beta = \omega \cdot 2 \neq \omega$, pa je α ili β konačan (i nijedan nije nula niti mogu oba biti konačni). Ako je $\beta \neq 0$ konačan i $\alpha = \omega$ imali bismo $\alpha + \beta > \omega$, pa preostaje α konačan i $\beta = \omega$, a u tom se slučaju lako (pomoću definicije množenja) provjeri da je $\alpha \cdot \beta = \omega$.

Rješenje 178. Za konačne α tvrdnja je očigledna. Nadalje, po teoremu o oduzimanju, vrijedi

$$(\heartsuit) \qquad \alpha \geq \omega \Rightarrow (\exists \delta)\alpha = \omega + \delta$$

(prethodni način zapisa beskonačnog ordinalnog broja u obliku $\omega + \delta$ koristit ćemo često u izračunavanju suma ordinalnih brojeva).

Imamo dakle da za beskonačne α vrijedi $\alpha+1+\alpha = \omega+\delta+1+\omega+\delta = \omega+\delta+\omega+\delta = 1 + \omega + \delta + \omega + \delta = 1 + \alpha + \alpha = 1 + \alpha \cdot 2$.

Rješenje 181. Uputa: transfinitna indukcija po β.

Rješenje 182. Jedna nejednakost je očito ispunjena: iz $\omega + 1 > \omega > 0$ slijedi po monotonosti potenciranja $(\omega + 1)^\omega \geq \omega^\omega$. Druga nejednakost se dobije na sljedeći način: po monotonosti zbrajanja i množenja, $\omega + 1 \leq \omega + \omega = \omega \cdot 2 \leq \omega \cdot \omega = \omega^2$. Dakle je $(\omega+1)^\omega \leq (\omega^2)^\omega = \omega^{2\cdot\omega} = \omega^\omega$, jer je $2\cdot\omega = \sup_{n\in\omega}(2n) = \sup\{0, 2, 4, \ldots\} = \omega$ kao supremum neograničenog niza prirodnih brojeva.

Rješenje 183. Po definiciji množenja imamo:

$$(\omega \cdot k + i) \cdot \omega = \sup_{n\in\omega} \Big((\omega \cdot k + i) \cdot n \Big)$$

Očito je $(\omega \cdot k + i) \cdot n < \omega^2$ za svaki $n \in \omega$. S druge strane za svaki $m \in \omega$ postoji $n \in \omega$ takav da je $\omega \cdot m < (\omega \cdot k + i) \cdot n$. Stoga vidimo da vrijedi:

$$(\Delta) \qquad (\omega \cdot k + i) \cdot \omega = \omega^2$$

Prethodno navedenu jednakost ćemo često koristiti u zadacima koji slijede.

Rješenje 184. Primijetimo prvo da vrijedi:

$$(\omega \cdot 3 + 2) \cdot (\omega + \omega^2) \cdot 2 = (\omega \cdot 3 + 2) \cdot \omega^2 \cdot 2$$

Preostalo je izračunati $\sup\limits_{\alpha\in\omega^2} (\omega \cdot 3 + 2) \cdot \alpha$. Uočimo da se svaki $\alpha \in \omega^2$ može zapisati kao $\alpha = \omega \cdot k + i$, gdje su $k, i \in \omega$. Koristeći jednakost (Δ) iz rješenja zadatka 183 dobivamo:

$$\begin{aligned}
(\omega \cdot 3 + 2) \cdot (\omega \cdot k + i) &= (\omega \cdot 3 + 2) \cdot \omega \cdot k + (\omega \cdot 3 + 2) \cdot i = \\
&= \underbrace{((\omega \cdot 3 + 2) \cdot \omega)}_{(\Delta)=\omega^2} \cdot k + \\
&+ \underbrace{\omega \cdot 3 + 2 + \omega \cdot 3 + 2 + \cdots + \omega \cdot 3 + 2}_{i\text{-puta}} = \\
&= \omega^2 \cdot k + \omega \cdot 3 \cdot i + 2 < \omega^3
\end{aligned}$$

S druge strane za svaki $m \in \omega$ postoje $k, i \in \omega$ takav da je $\omega^2 \cdot k + \omega \cdot 3 \cdot i + 2 > \omega^2 \cdot m$, pa je prema tome $\sup\limits_{\alpha \in \omega^2} (\omega \cdot 3 + 2) \cdot \alpha = \omega^3$. Dakle $(\omega \cdot 3 + 2) \cdot (\omega + \omega^2) \cdot 2 = \omega^3 \cdot 2$.

Rješenje 186. Po definiciji sume imamo:

$$\sum_{j \in 4} (\omega + j)^j = (\omega + 0)^0 + (\omega + 1)^1 + (\omega + 2)^2 + (\omega + 3)^3$$

Redom računamo:

$$\begin{aligned}(\omega + 2)^2 &= (\omega + 2) \cdot (\omega + 2) = (\omega + 2) \cdot \omega + (\omega + 2) \cdot 2 = (\Delta) \\ &= \omega^2 + (\omega + 2) + (\omega + 2) = \omega^2 + \omega + (2 + \omega) + 2 = \\ &= \omega^2 + \omega + \omega + 2 = \omega^2 + \omega \cdot 2 + 2\end{aligned}$$

Na sasvim analogni način dobili bi da je $(\omega + 3)^2 = \omega^2 + \omega \cdot 3 + 3$. Tada imamo:

$$\begin{aligned}(\omega + 3)^3 &= (\omega + 3)^2 \cdot (\omega + 3) = (\omega^2 + \omega \cdot 3 + 3) \cdot (\omega + 3) \\ &= (\omega^2 + \omega \cdot 3 + 3) \cdot \omega + (\omega^2 + \omega \cdot 3 + 3) \cdot 3 \\ &= \sup_{n \in \omega} (\omega^2 + \omega \cdot 3 + 3) \cdot n + \\ &\quad (\omega^2 + \omega \cdot 3 + 3) + (\omega^2 + \omega \cdot 3 + 3) + (\omega^2 + \omega \cdot 3 + 3) \\ &= \sup_{n \in \omega} \Big(\underbrace{(\omega^2 + \omega \cdot 3 + 3) + \ldots + (\omega^2 + \omega \cdot 3 + 3)}_{n-puta} \Big) \\ &\quad \omega^2 + (\omega \cdot 3 + 3 + \omega^2) + (\omega \cdot 3 + 3 + \omega^2) + \omega \cdot 3 + 3 \\ &= \sup_{n \in \omega} (\omega^n \cdot n + \omega \cdot 3 + 3) + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 3 + 3 \\ &= \omega^3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 3 + 3\end{aligned}$$

Sada možemo konačno odrediti početnu sumu.

$$\begin{aligned}\sum_{j \in 4} (\omega + j)^j &= 1 + (\omega + 1) + (\omega^2 + \omega \cdot 2 + 2) + (\omega^3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 3 + 3) \\ &= \omega^3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 3 + 3\end{aligned}$$

Rješenje 187. Imamo $\alpha_i = \alpha$ za sve $i \in \beta$. Tvrdnja se dokazuje transfinitnom indukcijom po β.

Rješenje 188. Po definiciji je $\sum\limits_{i\in\omega} i^2 = \sup\limits_{n<\omega} \sum\limits_{i=0}^{n-1} i^2 = \sup_{n<\omega} S_i$. Brojevi $S_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} i^2$ su konačni i za svaki S_i postoji $m < \omega$ takav da je $S_i > m$ pa je $\sup\limits_{n<\omega} S_i = \omega$.

Rješenje 189. Znamo da je $\beta \in \omega \cdot 2$ ako i samo ako je $\beta = n \in \omega$ ili $\beta = \omega + n$ za neki $n \in \omega$. Nadalje,

$$\sum_{i\in\omega} \alpha_i \leq \sup_{\beta\in\omega+n} \sum_{i\in\beta} \alpha_i$$

za sve $n \in \omega$ jer je

$$\sum_{i\in\omega+n} \alpha_i = \sum_{i\in\omega} \alpha_i + \alpha_\omega + \alpha_{\omega+1} + \ldots + \alpha_{\omega+n-1}.$$

Stoga imamo:

$$\sum_{i\in\omega\cdot 2} \alpha_i = \sup_{\beta\in\omega\cdot 2} \sum_{i\in\beta} \alpha_i = \sup_{n\in\omega} \left(\sum_{i\in\omega} \alpha_i + \alpha_\omega + \alpha_{\omega+1} + \ldots + \alpha_{\omega+n-1} \right).$$

Označimo li $\gamma = \sum_{i\in\omega} \alpha_i$ i $\delta_n = \alpha_\omega + \alpha_{\omega+1} + \ldots + \alpha_{\omega+n-1}$, imamo da je zadnja jednakost dalje jednaka

$$\sup_{n\in\omega} (\gamma + \delta_n) = \gamma + \sup_{n\in\omega} \delta_n = \sum_{i\in\omega} \alpha_i + \sum_{i\in\omega} \alpha_{\omega+i},$$

što je i trebalo dokazati.

Pritom smo za dobivanje predzadnje jednakosti koristili svojstvo da za sve ordinalne brojeve α i γ vrijedi

$$\sup_{\beta\in\alpha} (\gamma + \beta) = \gamma + \sup_{\beta\in\alpha} \beta.$$

Dokažimo to: Kako je $\beta \leq \sup\limits_{\beta\in\alpha} \beta$ za svaki $\beta \in \alpha$, vrijedi $\gamma + \beta \leq \gamma + \sup\limits_{\beta\in\alpha} \beta$ iz čega slijedi da je

$$\sup_{\beta\in\alpha} (\gamma + \beta) \leq \gamma + \sup_{\beta\in\alpha} \beta.$$

S druge strane, neka je δ neka gornja međa za $\{\gamma + \beta : \beta \in \alpha\}$ koja je veća od $\gamma + \sup\limits_{\beta\in\alpha} \beta$. Tada je sigurno $\gamma \leq \delta$ i po teoremu o oduzimanju postoji ordinalni broj ρ takav da je $\delta = \gamma + \rho$. Sad imamo da je $\gamma + \beta \leq \gamma + \rho$ pa mora biti $\beta \leq \rho$ (za svaki $\beta \in \alpha$). Stoga je $\sup\limits_{\beta\in\alpha} \beta \leq \rho$ i $\gamma + \sup\limits_{\beta\in\alpha} \beta \leq \gamma + \rho = \delta$. Stoga je

$$\sup_{\beta\in\alpha} (\gamma + \beta) \geq \gamma + \sup_{\beta\in\alpha} \beta,$$

čime je tvrdnja dokazana.

Rješenje 190.

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\omega+3}(i\cdot\omega+\omega\cdot i) &= \sum_{i\in\omega}(i\cdot\omega+\omega\cdot i) \ + \ (\omega\cdot\omega+\omega\cdot\omega)\\
&\quad + ((\omega+1)\cdot\omega+\omega\cdot(\omega+1))+\\
&\quad + ((\omega+2)\cdot\omega+\omega\cdot(\omega+2))\\
&= \sup_{n\in\omega}\sum_{i=1}^{n}(i\cdot\omega+\omega\cdot i) \ + \ \omega^2\cdot 2 \ +\\
&\quad + \sup_{n\in\omega}((\omega+1)\cdot n)+\omega^2+\omega\\
&\quad + \sup_{n\in\omega}((\omega+2)\cdot n) \ + \ \omega^2 \ + \ \omega\cdot 2\\
&= \sup_{n\in\omega}[(1\cdot\omega+\omega\cdot 1)+\ldots+(n\cdot\omega+\omega\cdot n)]+\omega^2\cdot 2\\
&\quad + \sup_{n\in\omega}\underbrace{(\omega+1+\omega+1+\ldots+\omega+1)}_{n-puta} \ + \omega^2 \ + \ \omega\\
&\quad + \sup_{n\in\omega}\underbrace{(\omega+2+\omega+2+\ldots+\omega+2)}_{n-puta} \ +\\
&\quad + \omega^2 \ + \ \omega\cdot 2\\
&= \sup_{n\in\omega}(\omega+\omega+\omega+\omega\cdot 2+\ldots+\omega+\omega\cdot n)\\
&\quad + \omega^2\cdot 2 \ + \ \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot n+1) \ + \ \omega^2 \ + \ \omega \ +\\
&\quad + \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot n+2) \ + \ \omega^2 \ + \ \omega\cdot 2\\
&= \omega^2 \ + \ \omega^2\cdot 2 \ + \ \omega^2 \ + \ \omega \ + \ \omega^2 \ + \ \omega\cdot 2\\
&= \omega^2\cdot 5 \ + \ \omega\cdot 2
\end{aligned}$$

Rješenje 191. Imamo prvo (po zadatku 189)

$$\sum_{i\in\omega\cdot 2} i = \sup_{n<\omega}\sum_{i=0}^{n-1} i + \sup_{n<\omega}\sum_{i=0}^{n-1}(\omega+i).$$

Prvi od ta sva supremuma iznosi ω, a drugi je jednak

$$\sup_{n<\omega} \quad (\omega+\omega+1+\omega+2+\ldots+\omega+(n-2)+\omega+(n-1)) =$$

$$\sup_{n<\omega}(\omega+\omega+\omega+\ldots+\omega+\omega+(n-1) = \sup_{n<\omega}(\omega\cdot n+(n-1) = \omega^2$$

Stoga je $\sum_{i\in\omega\cdot 2} i = \omega+\omega^2 = \omega(1+\omega) = \omega^2$.

Rješenje 192.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\omega\cdot 2+3}((\omega+i)\cdot\omega) \;&=\; \sum_{i\in\omega}((\omega+i)\cdot\omega) \;+\; \sum_{i\in\omega}((\omega+\omega+i)\cdot\omega) \;+\\ &\;\; ((\omega+\omega\cdot 2)\cdot\omega) \;+\; ((\omega+\omega\cdot 2+1)\cdot\omega) \;+\\ &\;\; ((\omega+\omega\cdot 2+2)\cdot\omega)\end{aligned}$$

Redom računamo svaki sumand posebno. Iz jednakosti (Δ) iz rješenja zadatka 183 znamo da je $(\omega+i)\cdot\omega=\omega^2$ za proizvoljan $i\in\omega$. Sada računamo $\sum\limits_{i\in\omega}((\omega+i)\cdot\omega)$.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\omega}((\omega+i)\cdot\omega) \;&=\; \sum_{i\in\omega}\omega^2 \;=\; \sup_{n\in\omega}\sum_{i\in n}\omega^2\\ &=\; \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega^2+\ldots+\omega^2}_{n-puta}) \;=\; \sup_{n\in\omega}(\omega^2\cdot n) \;=\; \omega^3\end{aligned}$$

Kako bi izračunali $\sum\limits_{i\in\omega}((\omega+\omega+i)\cdot\omega)$ prvo ćemo pojednostaviti izraz $(\omega+\omega+i)\cdot\omega$. Koristeći ponovno jednakost (Δ) iz rješenja zadatka 183 dobivamo:

$$(\omega+\omega+i)\cdot\omega=(\omega\cdot 2+i)\cdot\omega \overset{(\Delta)}{=} \omega^2\,.$$

Sada sumu $\sum\limits_{i\in\omega}((\omega+\omega+i)\cdot\omega)$ lako izračunamo:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\omega}((\omega+\omega+i)\cdot\omega) \;&=\; \sum_{i\in\omega}\omega^2 \;=\; \sup_{n\in\omega}\sum_{k\in\omega}\omega^2\\ &=\; \sup_{n\in\omega}(\omega^2\cdot n) \;=\; \omega^3\end{aligned}$$

Vidimo da je potrebno pojednostaviti još tri izraza. Redom to činimo (koristeći jednakost (Δ) iz rješenja zadatka 183).

$$(\omega+\omega\cdot 2)\cdot\omega=(\omega\cdot(1+2))\cdot\omega \;=\; (\omega\cdot 3)\cdot\omega=\omega\cdot(3\cdot\omega) \;=\; \omega\cdot\omega \;=\omega^2$$

$$(\omega+\omega\cdot 2+1)\cdot\omega=(\omega\cdot 3+1)\cdot\omega \overset{(\Delta)}{=} \omega^2$$

$$(\omega+\omega\cdot 2+2)\cdot\omega=(\omega\cdot 3+2)\cdot\omega \overset{(\Delta)}{=} \omega^2$$

Koristeći sve što smo izračunali konačno možemo izračunati traženu početnu sumu.

$$\sum_{i\in\omega\cdot 2+3}((\omega+i)\cdot\omega) \;=\; \omega^3 \;+\; \omega^3 \;+\; \omega^2 + \;\omega^2 + \;\omega^2$$

$$= \;\omega^3\cdot 2 \;+\; \omega^2\cdot 3$$

Rješenje 193.

$$\sum_{i\in\omega} i^2 \;=\; \sup_{i\in\omega}\sum_{j\in i} j^2 \;=\; \sup_{i\in\omega}\frac{1}{6}i\cdot(i+1)\cdot(2i+1) \;=\; \omega$$

Rješenje 194.

$$\sum_{i\in\omega+n} i^n \;=\; \sum_{i\in\omega} i^n + \omega^n + (\omega+1)^n + \ldots + (\omega+n-1)^n$$

Očito je $\sum_{i\in\omega} i^n = \omega$ (vidi rješenje prethodnog zadatka). Lako je dokazati da vrijedi

$$(\omega+n)^2 = \omega^2 + \omega\cdot n + n$$

Indukcijom po $k > 0$ lako je dobiti da vrijedi

$$(\omega+n)^k \;=\; \omega^k + \omega^{k-1}\cdot n + \ldots + \omega\cdot n + n$$

Tada je lako dobiti da je početna suma jednaka

$$\omega^n\cdot n + \omega^{n-1}\cdot(n-1) + \ldots + \omega\cdot(n-1) + (n-1).$$

Rješenje 195.

a) $\omega^2\cdot 4$ b) $\omega^4\cdot 2$

c) $\omega^2\cdot 2$ d) ω^3

e) ω^3 f) $\omega^{\omega+4}$

g) $\omega^2\cdot 2$ h) $\omega^{\omega\cdot 2}$

i) $\omega^\omega\cdot 2$ j) $\omega^2\cdot 2$

k) ω^4 l) $\omega^3\cdot 2 + \omega^2\cdot 2 + \omega\cdot 3 + 1$

m) $\omega^{\omega+1}$

Rješenje 196.

$$\sum_{i\in\omega\cdot 2} i^2 \;=\; \sum_{i\in\omega+\omega} i^2 \;=\; \sum_{i\in\omega} i^2 \;+\; \sum_{\omega\leq k<\omega+\omega} k^2.$$

Iz prethodnog zadatka znamo da je prva suma jednaka ω. Računamo drugu sumu. Primijetimo prvo da je druga suma jednaka $\sum\limits_{i\in\omega}(\omega+i)^2$.

Za $i\in\omega$ računamo $(\omega+i)^2$. Ako je $i=0$ tada je $(\omega+i)^2=\omega^2$. Za $i\in\omega\setminus\{0\}$ lakim računom dobiva se $(\omega+i)^2=\omega^2+\omega\cdot i+i$. Tada je tražena suma jednaka:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\omega}(\omega^2+\omega\cdot i+i) &= \sup_{n\in\omega}\sum_{i\in n}(\omega^2+\omega\cdot i+i) \\
&= \sup_{n\in\omega}\Big((\omega^2+\omega\cdot 0+0)+\ldots+ \\
&\qquad + \;(\omega^2+\omega\cdot(n-1)+(n-1))\Big) \\
&= \sup_{n\in\omega\setminus\{0\}}\Big(\omega^2+\omega^2+(\omega+(1+\omega^2))+\ldots+ \\
&\qquad + \;(\omega^2+\omega\cdot(n-1)+(n-1))\Big) \\
&= \sup_{n\in\omega\setminus\{0\}}\Big(\underbrace{\omega^2+\ldots+\omega^2}_{n-puta}+\omega\cdot(n-1)+(n-1)\Big) \\
&= \sup_{n\in\omega\setminus\{0\}}(\omega^2\cdot n+\omega\cdot(n-1)+(n-1)) \;=\; \omega^3
\end{aligned}$$

Tada je početna suma jednaka $\omega+\omega^3$, tj. ω^3.

Rješenje 197.

$$\sum_{n\in\omega+1}\sum_{k\in\omega} n^k = \sum_{n\in\omega}\sum_{k\in\omega} n^k \;+\; \sum_{k\in\omega}\omega^k$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\omega}\sum_{k\in\omega} n^k &= \sup_{p\in\omega}\sum_{n\in p}\sum_{k\in\omega} n^k = \sup_{p\in\omega}\left(\sum_{n\in p}(\sup_{r\in\omega}\sum_{k\in r} n^k)\right)\\
&= \sup_{p\in\omega}\left(\sum_{n\in p}(\sup_{r\in\omega}(n^0+n^1+\ldots+n^{r-1}))\right)\\
&= \sup_{p\in\omega}\left(\sum_{n\in p}\omega\right)\\
&= \sup_{p\in\omega}\left(\underbrace{\omega+\ldots+\omega}_{p-puta}\right)\\
&= \sup_{p\in\omega}\left(\omega\cdot p\right)\\
&= \omega\cdot\omega = \omega^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{k\in\omega}\omega^k = \sup_{n\in\omega}\sum_{k\in n}\omega^k = \sup_{n\in\omega}(\omega^0 + \omega^1 + \ldots + \omega^{n-1}) = \omega^\omega$$

Konačno, dobivamo da je početna tražena suma jednaka:

$$\sum_{n\in\omega+1}\sum_{k\in\omega} n^k = \omega^2+\omega^\omega = \omega^\omega$$

Rješenje 198.

a) $\omega^2\cdot 2$ b) ω^3

c) $\omega^2\cdot 4+\omega+1$

Rješenje 199.

$$
\begin{aligned}
\prod_{\alpha\in\omega\cdot 3+2}(\alpha+\omega) \;&=\; \left(\prod_{\alpha\in\omega\cdot 3}(\alpha+\omega)\right)\cdot(\omega\cdot 3+\omega)\cdot(\omega\cdot 3+1+\omega)\\
&= \left(\prod_{\alpha\in\omega}(\alpha+\omega)\right)\cdot\left(\prod_{\alpha\in\omega}(\omega+\alpha+\omega)\right)\cdot\left(\prod_{\alpha\in\omega}(\omega\cdot 2+\alpha+\omega)\right)\cdot\\
&\quad\cdot\;(\omega\cdot 3+\omega)\cdot(\omega\cdot 3+1+\omega)\\
&= \left(\prod_{\alpha\in\omega}(\alpha+\omega)\right)\cdot\left(\prod_{\alpha\in\omega}(\omega+\alpha+\omega)\right)\cdot\left(\prod_{\alpha\in\omega}(\omega\cdot 2+\alpha+\omega)\right)\cdot\\
&\quad\cdot\;(\omega\cdot 4)\cdot(\omega\cdot 4)
\end{aligned}
$$

Kako bi izračunali posljednji produkt uvodimo oznake:

$$
(*)=\prod_{\alpha\in\omega}(\alpha+\omega)\qquad (**)=\prod_{\alpha\in\omega}(\omega+\alpha+\omega)\qquad (***)=\prod_{\alpha\in\omega}(\omega\cdot 2+\alpha+\omega)
$$

Redom računamo produkte $(*)$, $(**)$ i $(***)$.

$$
\begin{aligned}
(*) \;&=\; \prod_{\alpha\in\omega}(\alpha+\omega) \;=\; \sup_{n\in\omega}\prod_{i=0}^{n-1}(i+\omega)\\
&= \sup_{n\in\omega}\Big((0+\omega)(1+\omega)\cdot\ldots\cdot(n-1+\omega)\Big)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega\cdot\ldots\cdot\omega}_{n}) = \sup_{n\in\omega}\omega^n \;=\; \omega^\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(**) \;&=\; \prod_{\alpha\in\omega}(\omega\alpha+\omega) \;=\; \sup_{n\in\omega}\prod_{i=0}^{n}(\omega+i+\omega)\\
&= \sup_{n\in\omega}\Big((\omega+0+\omega)\cdot\;\ldots\;\cdot(\omega+(n-1)+\omega)\Big)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{(\omega\cdot 2)\cdot\ldots\cdot(\omega\cdot 2)}_{n})\\
&= \sup_{n\in\omega}\Big(\omega\cdot(2\cdot\omega)\cdot\ldots\cdot(2\cdot\omega)\cdot 2\Big)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega\cdot\ldots\cdot\omega}_{n}\cdot 2) = \sup_{n\in\omega}(\omega^n\cdot 2) \;=\; \omega^\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(***) &= \prod_{\alpha\in\omega}(\omega\cdot 2+\alpha+\omega) = \sup_{n\in\omega}\prod_{i=0}^{n}(\omega\cdot 2+i+\omega)\\
&= \sup_{n\in\omega}\Big((\omega\cdot 2+0+\omega)\cdot\ldots\cdot(\omega\cdot 2)+(n-1)+\omega)\Big)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{(\omega\cdot 2+\omega)\cdot\ldots\cdot(\omega\cdot 2+\omega)}_{n})\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{(\omega\cdot 3)\cdot\ldots\cdot(\omega\cdot 3)}_{n})\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega\cdot(3\cdot\omega)\ldots\cdot(3\cdot\omega)}_{n}\cdot 3)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega\cdot\ldots\cdot\omega}_{n}\cdot 3) = \sup_{n\in\omega}(\omega^{n}\cdot 3) = \omega^{\omega}
\end{aligned}
$$

Sada možemo konačno napisati rješenje zadatka:

$$
\begin{aligned}
\prod_{\alpha\in\omega\cdot 3+2}(\alpha+\omega) &= \omega^{\omega}\cdot\omega^{\omega}\cdot\omega^{\omega}\cdot(\omega\cdot 4)\cdot(\omega\cdot 4)\\
&= \omega^{\omega\cdot 3}\cdot\omega\cdot(4\cdot\omega)\cdot 4\\
&= \omega^{\omega\cdot 3}\cdot\omega^{2}\cdot 4 = \omega^{\omega\cdot 3+2}\cdot 4
\end{aligned}
$$

Rješenje 200. Uputa:

$$
\begin{aligned}
\prod_{\alpha\in\omega+2}(\alpha+2)^{\alpha+1} &= \prod_{\alpha\in\omega}(\alpha+2)^{\alpha+1}\cdot(\omega+2)^{\omega+1}\cdot(\omega+3)^{\omega+2}\\
&= \omega\cdot\omega^{\omega}\cdot(\omega+2)\cdot\omega^{\omega}\cdot(\omega+3)^{2}\\
&= \omega^{\omega\cdot 2}(\omega^{2}+\omega\cdot 3+3)
\end{aligned}
$$

Rješenje 201.

$$\begin{aligned}
\prod_{i\in\omega}\omega^{\omega+i} &= \sup_{i\in\omega}\prod_{k\in i}\omega^{\omega+i}\\
&= \sup_{i\in\omega}(\omega^{\omega}\cdot\omega^{\omega+1}\cdot\ldots\cdot\omega^{\omega+(i-1)})\\
&= \sup_{i\in\omega}\omega^{\omega+(\omega+1)+\ldots+(\omega+n-1)}\\
&= \sup_{i\in\omega}\omega^{\omega+\omega+(1+\omega)+\ldots+(n-2+\omega)+n-1)}\\
&= \sup_{i\in\omega}\omega^{\underbrace{\omega+\ldots+\omega}_{i-puta}+n-1)}\\
&= \sup_{i\in\omega}\omega^{\omega\cdot i+n-1)} \;=\; \omega^{\omega^2}
\end{aligned}$$

Rješenje 202.

a) $\omega^{\omega+3}\cdot(\omega+2)$

b) $\omega^{\omega+6}\cdot 2$

c) $\omega^{\omega+2}\cdot 4+\omega^{\omega+1}\cdot 4$

d) $\omega^{\omega\cdot 2}$

Rješenje 203.

a) Uputa:

$$\sum_{i\in\omega+1}\prod_{j\in i}(\omega+i)\cdot j \;=\; \sum_{i\in\omega+1}\alpha_i \;=\; \sum_{i\in\omega}\alpha_i \;+\; \alpha_\omega,$$

gdje je $\alpha_\omega=\omega^\omega$.

b) Uputa: Označimo $\alpha_i=\prod\limits_{j\in\omega+i}(\omega+i)^j$. Računamo α_i.

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \left(\prod_{j\in\omega}(\omega+i)^j\right)\cdot(\omega+i)^\omega \;=\; \left(\prod_{j\in\omega}(\omega+i)^j\right)\cdot\omega^\omega\\
&= \left(\sup_{n\in\omega}\prod_{j=0}^{n}(\omega+i)^j\cdot\omega\right)\cdot\omega^\omega \;=\; \omega^\omega\cdot\omega^\omega \;=\; \omega^{\omega\cdot 2}
\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\omega}\alpha_i &= \sum_{i\in\omega}\omega^{\omega\cdot 2} \;=\; \sup_{n\in\omega}\sum_{i\in n}\omega^{\omega\cdot 2} \;=\; \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega^{\omega\cdot 2}+\ldots+\omega^{\omega\cdot 2}}_{n-puta}) .\\
&= \sup_{n\in\omega}(\omega^{\omega\cdot 2}\cdot n) \;=\; \omega^{\omega\cdot 2}\cdot\omega \;=\; \omega^{\omega\cdot 2+1}
\end{aligned}$$

c)

$$\sum_{i\in\omega+1}\prod_{j\in i}(j+2)^i \;=\; \sum_{i\in\omega}\prod_{j\in i}(j+2)^i \;+\; \prod_{j\in\omega}(j+2)^\omega$$

Računamo dva izraza.

$$\sum_{i\in\omega}\prod_{j\in i}(j+2)^i \;=\; \sup_{n\in\omega}\sum_{i\in n}\prod_{j\in i}(j+2)^i \;=\; \omega$$

$$\prod_{j\in\omega}(j+2)^\omega \;=\; \sup_{n\in\omega}\prod_{j\in n}(j+2)^\omega \;=\; \sup_{n\in\omega}\prod_{j\in n}\omega \;=\; \sup_{n\in\omega}\omega^n \;=\; \omega^\omega$$

To znači da je rješenje zadatka $\omega+\omega^\omega$, tj. ω^ω.

d)

$$\prod_{j\in\omega}(j+1) \;=\; \sup_{k\in\omega}\prod_{j\in k}(j+1) \;=\; \sup_{k\in\omega}k! \;=\; \omega.$$

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\omega}(i+2)^{\prod_{j\in\omega}(j+1)} \;&=\; \sum_{i\in\omega}(i+2)^\omega \;=\; \sup_{j\in\omega}\sum_{i\in j}(i+2)^\omega\\ &=\; \sup_{j\in\omega}(2^\omega+3^\omega+\ldots+(j+1)^\omega)\\ &=\; \sup_{j\in\omega}(\underbrace{\omega+\ldots+\omega}_{j-puta})\\ &=\; \sup_{j\in\omega}(\omega\cdot j) \;=\; \omega^2\end{aligned}$$

Rješenje 204.

a) $\omega^{\omega^2+\omega+1}$ b) $\omega^5+\omega^4$

c) $\omega^\omega\cdot(\omega^2+\omega\cdot 2+1)$ d) $\omega^\omega\cdot 2$

Rješenje 205.

a) $\omega^{\omega\cdot 2}$ b) $\omega^{\omega\cdot 2}$

c) $\omega^4\cdot 2$ d) $\omega^{\omega+1}+\omega^\omega$

e) ω^2

Rješenje 206. Imamo $2^{\omega\cdot\alpha+\beta}=(2^\omega)^\alpha\cdot 2^\beta=\omega^\alpha\cdot 2^\beta$, što je Cantorova normalna forma jer je za konačan β i 2^β konačan.

Rješenje 207. Primjenom distributivnosti dobivamo:

$$
\begin{aligned}
(\omega\cdot 2+1)(\omega+1)3 &= [(\omega\cdot 2+1)\cdot\omega+\omega\cdot 2+1]3\\
&= [\sup_{n\in\omega}((\omega\cdot 2+1)\cdot n)\ +\ \omega\cdot 2+1]\cdot 3 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Odredimo prvo $\sup\limits_{n\in\omega}((\omega\cdot 2+1)\cdot n)$. Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{n\in\omega}\ ((\omega\cdot 2+1)\cdot n) =\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{(\omega\cdot 2+1)+(\omega\cdot 2+1)+\ldots+(\omega\cdot 2+1)}_{n\text{-puta}})\\
&= \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot 2+(1+\omega\cdot 2)+\ldots+(1+\omega\cdot 2)+1)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot 2+\ldots+\omega\cdot 2+1)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot 2\cdot n+1)=\omega^2
\end{aligned}
$$

Iz ovog posljednjeg i $(*)$ slijedi

$$
\begin{aligned}
(\omega 2+1)(\omega+1)3 &= (\omega^2+\omega\cdot 2+1)\cdot 3\\
&= (\omega^2+\omega\cdot 2+1)+(\omega^2+\omega\cdot 2+1)+(\omega^2+\omega\cdot 2+1)\\
&= \omega^2+\omega\cdot 2+(1+\omega^2)+\omega\cdot 2+(1+\omega^2)+\omega\cdot 2+1\\
&= \omega^2+\omega\cdot 2+\omega^2+\omega\cdot 2+\omega^2+\omega\cdot 2+1\\
&= \omega^2+(\omega\cdot 2+\omega^2)+(\omega\cdot 2+\omega^2)+\omega\cdot 2+1\\
&= \omega^2+\omega\cdot(2+\omega)+\omega\cdot(2+\omega)+\omega\cdot 2+1\\
&= \omega^2+\omega^2+\omega^2+\omega\cdot 2+1\\
&= \omega^2\cdot 3+\omega\cdot 2+1
\end{aligned}
$$

Rješenje 208.

$$\omega(\omega+1)(\omega^2+1) = (\omega^2+\omega)(\omega^2+1) = (\omega^2+\omega)\omega^2+\omega^2+\omega =$$

$$\sup_{\alpha\in\omega^2}((\omega^2+\omega)\cdot\alpha) \ + \ \omega^2+\omega = \omega^4+\omega^2+\omega$$

Rješenje 209.

a) Suma iznosi ω^3, pa je Cantorova normalna forma ω^{ω^2}.

b) $\omega^3+\omega^2\cdot 2+\omega$

Rješenje 210. Ako vrijedi a), onda koristeći Cantorovu normalnu formu za α, gdje je

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}m_0+\omega^{\gamma_1}m_1+\ldots+\omega^{\gamma_n}m_n,$$

dobivamo

$$\alpha = \omega\cdot\alpha = \omega^{1+\gamma_0}m_0+\omega^{1+\gamma_1}m_1+\ldots+\omega^{1+\gamma_n}m_n.$$

Zbog jedinstvenosti Cantorove normalne forme slijedi da je $1+\gamma_j=\gamma_j$ za sve $j=0,\ldots,n$ pa su svi $\gamma_j\geq\omega$ (očigledno za konačan γ ne vrijedi $1+\gamma=\gamma$). Stoga po ($\heartsuit$) iz rješenja zadatka 178 imamo da je $\gamma_j=\omega+\delta_j$ (za svaki j postoji takav δ_j) te imamo

$$\alpha = \omega^{\omega+\delta_0}m_0+\omega^{\omega+\delta_1}m_1+\ldots+\omega^{\omega+\delta_n}m_n = \omega^\omega\cdot(\omega^{\delta_0}m_0+\omega^{\delta_1}m_1+\ldots+\omega^{\delta_n}m_n)$$

te uz $\beta=\omega^{\delta_0}m_0+\omega^{\delta_1}m_1+\ldots+\omega^{\delta_n}m_n$ dobivamo b).

Obrnuto, ako vrijedi b), onda je $\omega\cdot\alpha=\omega\cdot\omega^\omega\cdot\beta=\omega^{1+\omega}\cdot\beta=\omega^\omega\cdot\beta$.

Rješenje 211. Indukcijom je lako dokazati da za sve $i\in\omega\setminus\{0\}$ vrijedi $\omega^{\alpha_i}=\alpha_i^\omega$:
Očito vrijedi $\omega^{\alpha_0}=\omega^\omega=\alpha_0^\omega$.
Pretpostavimo da za neki $i\in\omega$ vrijedi $\omega^{\alpha_i}=\alpha_i^\omega$. Tada imamo

$$\omega^{\alpha_{i+1}}=\omega^{\omega^{\alpha_i}}=\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}=\alpha_{i+1}^\omega$$

Sada je

$$\omega^{\epsilon_0} = \sup\{\omega^{\alpha_i} : i \in \omega\} = \sup\{\alpha_i^{\omega} : i \in \omega\} = \sup\{\alpha_{i+1} : i \in \omega\} = \epsilon_0$$

Uočimo da je $\epsilon_0^{\omega} = \epsilon_0$, jer imamo

$$\epsilon_0^{\omega} = \sup\{\alpha_i^{\omega} : i \in \omega\} = \sup\{\alpha_{i+1} : i \in \omega\} = \epsilon_0$$

Rješenje 212. Najmanji beskonačni ordinalni broj je ω. On je po definiciji prebrojiv skup. Ordinalni brojevi $\omega+1,\ \omega+2,\ \ldots\omega+n, \ldots\omega+\omega, \ldots, \omega\cdot n$ su očito prebrojivi skupovi. Pošto je $\omega\times\omega$ prebrojiv skup tada iz $\omega\cdot\omega = o(\omega\times\omega)$ slijedi da je i $\omega\cdot\omega$ također prebrojiv skup. Pošto za sve $n \in \omega \setminus \{0\}$ vrijedi $\omega^n = o(\underbrace{\omega\times\ldots\times\omega}_{n})$ tada je i svaki ordinalni broj oblika ω^n prebrojiv skup. Tada zbog

$$\omega^{\omega} \;=\; \sup\{\omega^n : n \in \omega\} \;=\; \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$$

slijedi da ω^{ω} možemo prikazati kao prebrojivu uniju prebrojivih skupova, pa je i ordinalni broj ω^{ω} prebrojiv. Na isti način, zbog

$$\omega^{\omega^{\omega}} \;=\; \sup\{\omega^{\omega^n} : n \in \omega\} \;=\; \bigcup_{n\in\omega} \omega^{\omega^n},$$

slijedi da je skup $\omega^{\omega^{\omega}}$ prebrojiv, a onda i $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}$.

Pošto je po definiciji

$$\epsilon_0 = \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}} \;=\; \sup\{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}} : n \in \omega\} \;=\; \bigcup_{n\in\omega} \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}},$$

tada imamo da je ϵ_0 prikazan kao prebrojiva unija prebrojivih skupova, pa zaključujemo da je ϵ_0 prebrojiv skup.

Poglavlje 5

Aksiom izbora

Aksiom izbora [AC]
Neka je $\{A_i : i \in I\}$ *neprazna familija u parovima disjunktnih nepraznih skupova. Tada postoji skup* B *takav da je* $B \cap A_i$ *jednočlan skup za sve* $i \in I$. *Skup* B *se naziva* **izborni skup** *za familiju* $\{A_i : i \in I\}$.

Aksiom izbora se ponekad izriče i u sljedećoj ekvivalentnoj formi:
Neka je $\{A_i : i \in I\}$ *neprazna familija nepraznih skupova. Tada postoji* $f : I \to \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ *takva da je* $f(i) \in A_i$, *za sve* $i \in I$. *Funkcija* f *se naziva* **funkcija izbora**.

Neka je $\{A_i : i \in I\}$ neka familija skupova. **Kartezijev produkt familije** je skup

$$\{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, \quad \text{za svaki} \quad i \in I \quad \text{je} \quad f(i) \in A_i\}.$$

Kartezijev produkt familije skupova označavamo s $\prod\limits_{i \in I} A_i$.

Zornova lema. *Neka je* $(A, <)$ *neprazan parcijalno uređen skup koji ima svojstvo da svaki neprazni lanac iz* A *ima gornju među u* A. *Tada* $(A, <)$ *ima barem jedan maksimalni element.*

Hausdorffov princip maksimalnosti. *Neka je* $(A, <)$ *parcijalno uređen skup. Tada za svaki lanac* L *od* A *postoji maksimalni lanac koji ga sadrži.*

Zermelov teorem o dobrom uređaju. *Svaki skup se može dobro urediti, tj. za svaki skup* A *postoji relacija* $R \subseteq A \times A$ *takva da je* (A, R) *dobro uređen skup.*

Hartogsov teorem. *Ako su* A *i* B *proizvoljni skupovi tada vrijedi* $k(A) \leq k(B)$ *ili* $k(B) \leq k(A)$.

Teorem Tarskog. *Ako je* λ *beskonačni kardinalni broj tada je* $\lambda^2 = \lambda$.

Zadaci.

Zadatak 213. Neka je $\mathfrak{F}$ neka familija skupova. Označimo:

$$c(\mathfrak{F}) = \{f \mid f \text{ je funkcija, } Dom(f) \in \mathfrak{F},\ (\forall S \in Dom(f))\ f(S) \in S\}$$

Dokažite da za svaki $f \in c(\mathfrak{F})$vrijedi:

> funkcija f je maksimalni element u skupu $c(\mathfrak{F})$ ako i samo ako je f funkcija izbora za familiju $\mathfrak{F}$, tj. za funkciju f vrijedi $Dom(f) = \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\}$.

Zadatak 214. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne s aksiomom izbora:

a) Neka je $A \neq \emptyset$. Tada postoji funkcija $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ takva da je $f(B) \in B$, za sve $\emptyset \neq B \subseteq A$.

b) Neka je $A \neq \emptyset$ i $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ neka particija skupa A. Tada postoji funkcija $g : \mathcal{A} \to A$ takav da je $g(A_i) \in A_i$, za sve $i \in I$.

Zadatak 215. Dokažite da je sljedeća tvrdnja ekvivalentna sa Zornovom lemom:

> Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup u kojem svaki neprazan lanac ima donju među. Tada skup A sadrži barem jedan minimalni element.

Zadatak 216. Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup u kojem svaki lanac ima gornju (donju) među. Neka je $x_0 \in A$ proizvoljan. Dokažite da postoji maksimalan (minimalan) $y \in A$ takav da je $y \geq x_0$ $(y \leq x_0)$.

Zadatak 217. Dokažite da Zornova lema povlači aksiom izbora.

Zadatak 218. Neka je E skup i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Kažemo da je familija $\mathcal{J}$ konačnog karaktera ako za sve $A \subseteq E$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $A \in \mathcal{J}$ ako i samo ako svaki konačni podskup od A je element od $\mathcal{J}$. Za proizvoljni skup E označimo

$$\mathcal{F}(E) = \{A \subseteq \mathcal{P}(E) : (\forall x, y \in A)(x \cap y = \emptyset \text{ ili } x = y)\}.$$

Dokažite da je za svaki skup E familija $\mathcal{F}(E)$ konačnog karaktera.

Zadatak 219. Teichmüller-Tukeyeva lema glasi: Ako je $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(E)$ neprazna familija konačnog karaktera tada familija $\mathcal{J}$ sadrži barem jedan maksimalni element.

Dokažite da Hausdorffov princip maksimalnosti povlači Teichmüller–Tukeyevu lemu.

Zadatak 220. Dokažite da Teichmüller-Tukeyeva lema povlači Zornovu lemu.

Zadatak 221. Za podskup A parcijalno uređenog skupa $(S, <)$ kažemo da je konfinalan ako vrijedi $(\forall x \in S)(\exists a \in A)(x \leq a)$. Dokažite da svaki linearno uređen skup sadrži konfinalan dobro uređen podskup.

Zadatak 222. Neka je A neki neprazan skup, te R proizvoljna binarna relacija na A. Dokažite da postoji minimalna relacija ekvivalencije na skupu A koja proširuje relaciju R.

Zadatak 223. Neka je A proizvoljni skup. Definiramo $\mathfrak{F} = \{X \subseteq \mathcal{P}(A)$: elementi skupa X su međusobno disjunktni $\}$. Dokažite da familija $\mathfrak{F}$ sadrži maksimalni element obzirom na relaciju inkluzije.

Zadatak 224. Dokažite da postoji maksimalna familija $\mathcal{F}$ podskupova danog skupa S u kojoj su elementi u parovima disjunktni, a unija svaka dva elementa je u istoj familiji (tj. vrijedi $(\forall a, b \in \mathcal{F})\ \ (a \cap b = \emptyset\ \text{ i }\ a \cup b \in \mathcal{F})$).

Zadatak 225. Neka je $(A, \prec)$ parcijalno uređen skup koji nije linearno uređen. Dokažite da postoje barem dva maksimalna lanca u A.

Zadatak 226. Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Za $S \subseteq A$ kažemo da je potpuno neuređen ako za sve $x, y \in S,\ x \neq y$, vrijedi da nisu usporedivi, tj. ne vrijedi $x < y$, a ni $y < x$. Dokažite da za svaki parcijalno uređen skup postoji maksimalan (u smislu relacije inkluzije) potpuno neuređen podskup.

Zadatak 227. Neka je $(A, <)$ neprazan linearno uređen skup. Za $B \subseteq A$ kažemo da je u sebi gust ako za sve $x, y \in B$ takve da je $x < y$, postoji $z \in B$ takav da je $x < z < y$. Dokažite da u svakom linearno uređenom skupu postoji bar jedan maksimalan u sebi gust podskup.

Zadatak 228. Neka je R binarna relacija na nekom skupu X. Dokažite da postoji maksimalna antisimetrična relacija na X koja je disjunktna s R.

Zadatak 229. Neka je A neki neprazan skup, te $F_1 \subseteq \mathcal{P}(A)$ i $F_2 \subseteq \mathcal{P}(A)$ dvije particije skupa A. Ako za svaki $y \in F_2$ postoji $x \in F_1$ tako da vrijedi $y \subseteq x$, te vrijedi $F_1 \neq F_2$, tada kažemo da je particija F_2 finija od particije F_1, i pišemo $F_1 \prec F_2$. Lako je vidjeti da je relacija $\prec$ jedna relacija parcijalnog uređaja (vidi i zadatak

141). Dokažite da za svaki neprazan skup postoji minimalna i maksimalna particija u odnosu na relaciju $\prec$.

Zadatak 230. Dokažite da za svaki neprazan skup A postoji maksimalna particija skupa koja ne sadrži zadani neprazni pravi podskup $X \subset A$ (uređaj među particijama je definiran u prethodnom zadatku).

Zadatak 231. Dokažite da za svaki beskonačan skup A postoji particija $\{A_i : i \in I\}$ takva da je $A_i \sim \mathbb{N}$, za sve $i \in I$.

Zadatak 232. Neka je $R \subseteq A \times B$ neka relacija, koja ima svojstvo da joj je domena jednaka skupu A (tj. za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ tako da vrijedi $(a, b) \in R$). Dokažite da postoji funkcija $f : A \to B$ takva da je $f \subseteq R$.

Zadatak 233. Dokažite da je funkcija $f : A \to B$ surjekcija ako i samo postoji funkcija $g : B \to A$ tako da vrijedi $f \circ g = id_B$.

Zadatak 234. Dokažite da za svaku funkciju $f : A \to B$ postoji skup C, te postoji injekcija $g : A \to C$ i surjekcija $h : C \to B$ tako da vrijedi $f = h \circ g$.

Zadatak 235. Za proizvoljnu funkciju $h : A \to B$ skup $\{(x, y) : h(x) = h(y)\}$ nazivamo jezgra funkcije h i označavamo ga sa Ker h. Dokažite da je funkcija $f : A \to B$ je surjekcija ako i samo ako za svaku funkciju $g : A \to C$, za koju je Ker $f \subseteq$ Ker g, postoji funkcija $h : B \to C$ tako da vrijedi $h \circ f = g$.

Zadatak 236. Za zadanu injekciju $f : I \to \mathbb{R},\ I \subseteq \mathbb{R}$, i proizvoljnu funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dokažite da postoji maksimalno proširenje $F : S \to \mathbb{R}$ od f koje je injektivno i takvo da je $F(x) = g(x)$ za sve $x \in S \setminus I$.

Zadatak 237. Neka je G grupa i $x \in G$ različit od neutralnog elementa. Dokažite da tada postoji podgrupa H od G koja ne sadrži x, te ne postoji podgrupa K od G tako da bi vrijedilo $x \notin K$ i $H \subset K$.

Zadatak 238. Neka je G monoid i $x \in G$ koji nije neutralni element. Dokažite da postoji maksimalni (u smislu inkluzije) podmonoid H od G takav da $x \notin H$.

Zadatak 239. Neka je $n \geq 4$ proizvoljan prirodan broj, te neka je A_n neki pravilni n–terokut u ravnini. Označimo sa Rot_n grupu svih rotacija ravnine koje preslikavaju n–terokut A_n u samog sebe. Dokažite da postoji maksimalna podgrupa od Rot_n koja ne sadrži rotaciju za $6\pi/n$.

Zadatak 240. Neka je V vektorski prostor i $v \in V$ različit od nulvektora. Dokažite da tada postoji vektorski potprostor W od V koji ne sadrži v, te za W ne postoji vektorski potprostor U od V tako da bi vrijedilo $v \notin U$ i $W \subset U$.

Zadatak 241. Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Dokažite da se svaki linearno nezavisan podskup S od V može proširiti do baze vektorskog prostora V.

Zadatak 242. Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Neka je $X \subseteq V$ neki skup izvodnica za V. Dokažite da postoji baza vektorskog prostora V koja je sadržana u X.

Zadatak 243. Neka je V vektorski prostor nad poljem F, W njegov pravi potprostor, te $f : W \to V$ linearan operator. Dokažite da postoji proširenje g operatora f tako da vrijedi:

a) postoji W' potprostor od V tako da je $\mathrm{Dom}(g) = W'$

b) proširenje $g : W' \to V$ je linearni operator

c) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$

d) funkcija g je maksimalna od svih proširenja od f koja ima svojstva a), b) i c).

Zadatak 244. Neka je $V \neq \{0\}$ vektorski prostor i $f : V \to V$ neinjektivan linearan operator. Dokažite da postoji maksimalan potprostor W od V sa svojstvom da je $W \cap \mathrm{Ker}(f)$ jednodimenzionalan potprostor od V.

Zadatak 245. Neka je $V \neq 0$ vektorski prostor i W njegov netrivijalan potprostor. Dokažite da postoji maksimalan potprostor U od V sa svojstvom da je $W \cap U$ jednodimenzionalan.

Zadatak 246. Promatrajmo skup ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ (uz standardno zbrajanje funkcija i množenje skalarom). Dokažite da postoji maksimalni potprostor vektorskog prostora ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ koji ne sadrži funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiranu sa $f(z) = 17z^2 + 19z + 23$.

Zadatak 247. Neka je X proizvoljan skup. Za familiju skupova $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ kažemo da je algebra skupova na X ako vrijedi

(i) $\emptyset \in \mathfrak{A}$

(ii) ako $A \in \mathfrak{A}$ tada $X \setminus A \in \mathfrak{A}$

(iii) ako $A, B \in \mathfrak{A}$ tada $A \cup B \in \mathfrak{A}$

Dokažite da postoji maksimalna algebra skupova na $\mathbb{R}$ koja ne sadrži skup $\mathbb{Q}$.

Zadatak 248. Neka je X neprazan skup. Kažemo da je neprazna familija $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathfrak{I} \neq \mathcal{P}(X)$, ideal na skupu X ako vrijedi:

(i) $(\forall A, B \in \mathfrak{F})(A \cup B \in \mathfrak{I})$

(ii) $(\forall A \in \mathfrak{I})(\forall B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathfrak{I})$

Neka je X neki skup i A neki podskup od X. Dokažite da postoji maksimalni ideal na skupu X koji sadrži A kao element.

Zadatak 249. Neka je X neprazan skup. Kažemo da je familija $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ filtar na skupu X ako vrijedi:

(i) $\mathfrak{F} \neq \emptyset$

(ii) $(\forall A, B \in \mathfrak{F})(A \cap B \in \mathfrak{F})$

(iii) $(\forall A \in \mathfrak{F})(\forall B \subseteq X)(A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathfrak{F})$

Kažemo da je filtar $\mathfrak{F}$ pravi filtar ako vrijedi $\mathfrak{F} \neq \mathcal{P}(X)$. Dokažite da za svaki neprazan skup X postoji maksimalan pravi filtar na skupu X (obzirom na relaciju inkluzije).

Zadatak 250. Neka je R prsten s jedinicom. Za potprsten $I \subseteq R$ kažemo da je ideal ako vrijedi $I \cdot R \subseteq I$ i $R \cdot I \subseteq I$. Za ideal I kažemo da je pravi ako je $I \neq R$. Za ideal I kažemo da je maksimalan ako ne postoji pravi ideal J tako da vrijedi $I \subset J$. Dokažite da je svaki pravi ideal I od R sadržan u nekom maksimalnom idealu.

Zadatak 251. Dokažite da postoji funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja ima svojstvo

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ za sve } x, y \in \mathbb{R},$$

a nije oblika $f(x) = kx$ za neki $k \in \mathbb{R}$.

Zadatak 252.* Dokažite da za svako polje postoji algebarski zatvoreno proširenje.

Zadatak 253. Neka je $O \subseteq \mathbb{R}$ neki otvoren skup. Dokažite da postoji $U \subseteq O$ otvoren skup tako da vrijedi:

a) ako $x, y \in U$ tada $x + y \in U$

b) ako $V \subseteq O$ otvoren skup koji ima svojstvo a) tada ne vrijedi $U \subset V$ (tj. U je maskimalan otvoreni podskup skupa O koji ima svojstvo a).

Zadatak 254. Dokažite da postoji maksimalni (u smislu inkluzije) neprazni podskup skupa $\mathbb{R}$ koji je zatvoren na množenje, i ne sadrži niti jedan prirodan broj.

Zadatak 255. Za neprazan podskup B od $\mathbb{R}$ kažemo da je balansiran ako za sve $x, y \in B$ vrijedi $(x+y)/2 \in B$. Dokažite da postoji maksimalan balansiran podskup od $\mathbb{R}$ koji je disjunktan sa $\mathbb{Q}$.

Zadatak 256. Za $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ kažemo da je aritmetički poluzatvoren ako za sve $x, y \in A$ vrijedi $x+y \in A$ ili $x \cdot y \in A$ (može i oboje). Dokažite da postoji maksimalni (u smislu relacije inkluzije) aritmetički poluzatvoreni skup koji je disjunktan sa skupom $\mathbb{P}$ svih prostih brojeva.

Zadatak 257. Za skup $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kažemo da je konveksan ako za svake dvije točke $P = (x_1, y_1, z_1)$ i $Q = (x_2, y_2, z_2)$ iz skupa K, i svaki $t \in [0,1]$, vrijedi

$$(tx_1 + (1-t)x_2,\ ty_1 + (1-t)y_2,\ tz_1 + (1-t)z_2) \in K.$$

Za konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kažemo da je konvkesna ljuska nekog skupa S ako je K minimalan konveksan skup koji sadrži S. Dokažite da za svaki podskup S od $\mathbb{R}^3$ postoji njegova konveksna ljuska.

Zadatak 258. Neka je S proizvoljan podskup od $\mathbb{R}^2$. Dokažite da postoji bar jedna konveksna skela od S, tj. maksimalni konveksni podskup od S. Navedite primjer nekog podskupa od $\mathbb{R}^2$ za koji konveksna skela nije jedinstvena.

Zadatak 259. Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da je putevima povezan ako za svake dvije njegove točke x i y postoji neprekidna funkcija $f : [0,1] \to A$ takva da je $f(0) = x$ i $f(1) = 1$. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^2$ proizvoljan. Dokažite da postoji maksimalan putovima povezan podskup od X.

Zadatak 260. Neka je $O \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan otvoren skup. Dokažite da postoji minimalan (obzirom na inkluziju) zatvoren podskup od $\mathbb{R}$ koji sadrži O.

Zadatak 261. Dokažite da postoje $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ tako da vrijedi $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}^+$, $A \cap B = \emptyset$, te su skupovi A i B zatvoreni za zbrajanje.

Zadatak 262.* Dokažite **Teorem Tihonova**: Kartezijev produkt kompaktnih topoloških prostora je kompaktan.

Sada navodimo nekoliko zadataka s grafovima. U tu svrhu ćemo ponoviti neke pojmove vezane uz grafove.

- *graf je uređeni par* (G, R)*, gdje je* G *neprazan skup, a* $R \subseteq G \times G$*. Elemente skupa* G *nazivamo vrhovi, a elemente skupa* R *bridovi.*
- *za graf kažemo da je povezan ako za svaka dva vrha* $v \neq w$ *postoji konačan niz vrhova* $b_0, \ldots, b_n$ *tako da vrijedi* $vRb_0Rb_1 \ldots b_nRw$*. Tada konačan niz bridova* $v,\ b_0, \ldots,\ b_n,\ w$ *nazivamo put od vrha* v *do vrha* w*.*
- *Ciklus u grafu je put koji ima isti početak i kraj.*
- *Stablo je povezan graf bez ciklusa.*
- *Podgraf grafa* (G, R) *je graf* (G', R') *tako da vrijedi* $G' \subseteq G$ *i* $R|_{G' \times G'} = R'$

Zadatak 263. Neka je (G, R) graf čija je relacija R simetrična. Bojanje podskupa S od G s dvije boje se definira kao funkcija $f : S \to \{0, 1\}$ koja ima svojstvo da xRy povlači $f(x) \neq f(y)$. Dokažite da u svakom nepraznom grafu postoji maksimalni podskup za koji postoji bojanje s dvije boje.

Zadatak 264. Dokažite da u svakom povezanom grafu postoji razapinjajuće stablo (podgraf koji je stablo i čiji skup vrhova je jednak skupu vrhova polaznog grafa).

Zadatak 265. Neka je (G, R) graf čija je relacija R simetrična. Klika u grafu (G, R) je njegov podgraf s bar dva vrha, koji je potpun (tj. postoji brid između svaka dva vrha podgrafa). Dokažite da svaki graf s bar jednim bridom ima maksimalnu kliku.

Zadatak 266. Königova lema glasi:

> Neka je S stablo koje ima svojstvo da svaki $a \in S$ ima najviše konačno mnogo neposrednih sljedbenika. Tada u S postoji beskonačni lanac.

Dokažite da Zermelov teorem o dobrom uređaju povlači Königovu lemu.

Rješenja.

Rješenje 213. Neka je $f \in c(\mathfrak{F})$ proizvoljna funkcija. Primijetimo prvo da tada $\emptyset \notin Dom(f)$ (inače bi po definiciji skupa $c(\mathfrak{F})$ imali $f(\emptyset) \in \emptyset$).

Pretpostavimo prvo da $Dom(f) \neq \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\}$. Tada postoji $S \in (\mathfrak{F} \setminus \emptyset) \setminus Dom(f)$. Pošto je $S \neq \emptyset$, tada postoji $x \in S$. Tada je očito funkcija $f \cup \{(S, x)\} \in c(\mathfrak{F})$. No, tada f nije maksimalna funkcija u $c(\mathfrak{F})$ (obzirom na relaciju inkluzije).

Ako je $Dom(f) = \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\}$ tada je očito funkcija f maksimalna, jer ima maksimalnu domenu.

Rješenje 214. Redom ćemo dokazati sljedeće implikacije:
$[AC] \Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow [AC]$.

$[AC] \Rightarrow$ a) Neka je A proizvoljan neprazan skup. Definiramo familiju skupova $\mathcal{A} = \{B \times \{B\} : B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}\}$. Očito je to familija nepraznih skupova koji su u parovima disjunktni. Iz aksioma izbora slijedi da postoji skup $\mathcal{B}$ tako da je za svaki $B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ presjek $\mathcal{B} \cap B \times \{B\}$ jednočlan skup. Za svaki $B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ neka je $\mathcal{B} \cap B \times \{B\} = \{(b, B)\}$. Definiramo funkciju $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ sa $f(B) = b$. Lako je vidjeti da funkcija f ima tražena svojstva.

a) $\Rightarrow$ b) Neka je $A \neq \emptyset$ i $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ neka particija skupa A. Iz $[AC]_2$ slijedi da postoji funkcija $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ takva da vrijedi $f(B) \in B$, za sve $\emptyset \neq B \subseteq A$. Pošto je za svaki $i \in I$ skup $A_i \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$, tada za sve $i \in I$ vrijedi $f(A_i) \in A_i$. To znači da za restrikciju funkcije f na $\mathcal{A}$ vrijedi traženo svojstvo.

b) $\Rightarrow [AC]$ Neka je $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ neprazna familija nepraznih skupova koji su u parovima disjunktni. Označimo $A = \cup_{i \in I} A_i$. Očito je $\mathcal{A}$ jedna particija skupa A. Tada po pretpostavci postoji funkcija $g : \mathcal{A} \to A$ takva da je $g(A_i) \in A_i$, za sve $i \in I$. Tada je $B = \{g(A_i) : i \in I\}$ jedan izborni skup za familiju $\mathcal{A}$.

Rješenje 215. Za ilustraciju dokazujemo da Zornova lema povlači navedenu tvrdnju u zadatku. Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup čiji svaki lanac ima donju među. Promotrimo dualni uređaj od $<$, tj. relaciju $<^*$ definiranu s

$$a <^* b \quad \text{ako i samo ako} \quad b < a.$$

Neka je $L \subseteq A$ neprazan lanac u odnosu na uređaj $<^*$. Očito je to onda i lanac u odnosu na uređaj $<$. Po pretpostavci postoji $a \in A$ koji je donja međa od L u odnosu na uređaj $<$. No, to je onda gornja međa od L u odnosu na uređaj $<^*$. Po Zornovoj lemi slijedi da za skup A postoji maksimalni element u odnosu na uređaj $<^*$. No, to je onda minimalni element u odnosu na uređaj $<$.

Rješenje 217. Iz zadatka 214 znamo da je aksiom izbora ekvivalentan sa sljedećom tvrdnjom:

> Za svaku particiju $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ nekog nepraznog skupa A postoji funkcija $g : \mathcal{A} \to A$ tako da za svaki $i \in I$ vrijedi $g(A_i) \in A_i$.

Dokazujemo da Zornova lema povlači navedenu tvrdnju. Neka je A proizvoljan neprazan skup i $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ neka particija skupa A. Neka je $\mathfrak{F} = \{f | f$ je funkcija takva da postoji $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tako da je $f : \mathcal{B} \to A$, te je za svaki $B \in \mathcal{B}$ ispunjeno $f(B) \in \mathcal{B}\}$. Uzmemo li proizvoljan $A_i \in \mathcal{A}$ tada za $\mathcal{B} = \{A_i\}$ i proizvoljan element $a \in A_i$ možemo definirati funkciju $f : \mathcal{A} \to A$ sa $f(A_i) = a$. Tada imamo $f \in \mathfrak{F}$, pa je

$(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac. Označimo $\mathcal{B} = \cup\{Dom(f) : f \in L\}$ }. Očito je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ pošto je L lanac. Označimo $F : \mathcal{B} \to A$ funkciju koja je definirana ovako: ako je $B \in \mathcal{B}$ tada postoji funkcija $f \in L$ takva da je $B \in Dom(f)$, tada neka je $F(B) = f(B)$. Pošto je L lanac tada je definicija funkcije F dobra, te za svaki $B \in \mathcal{B}$ vrijedi $F(B) \in B$. To znači da je $F \in \mathfrak{F}$. Lako je vidjeti da je B jedna gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da skup $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan maksimalan element. Neka je $g : \mathcal{B} \to A$ jedan maksimalni element skupa $\mathfrak{F}$. Pretpostavimo da je $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} \neq \emptyset$. Neka je $A_i \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ proizvoljan. Tada možemo definirati proširenje g' funkcije g čija je domena $\mathcal{B} \cup \{A_i\}$, te $g'(A_i)$ je proizvoljni element skupa A_i. Očito je $g' \in \mathfrak{F}$. Tada je $g \subset g'$, pa g nije maksimalni element od $\mathfrak{F}$. Iz toga slijedi da je $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Rješenje 219. Neka je E neki skup i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(E)$ neka familija konačnog karaktera.

Neka je $e \in E$ proizvoljan. Očito je $\{e\} \in \mathcal{J}$ (jer familija $\mathcal{J}$ sadrži svaki konačan podskup od E.) Skup $\{e\}$ je očito jedan lanac parcijalno uređenog skupa $(\mathcal{J}, \subset)$. Iz Hausdorffovog principa maksimalnosti slijedi da postoji maksimalni lanac L od $\mathcal{J}$ koji sadrži $\{e\}$.

Sada promatramo dva slučaja:

(i) Postoji $m \in L$ koji je najveći element.
Tada za svaki $l \in L$ vrijedi $l \subseteq m$. Ako je $n \in \mathcal{J}$ takav da vrijedi $\{e\} \subseteq m \subset n$, tada je $n \in L$ (zbog maksimalnosti lanca L vrijedi $L \cup \{n\} \subseteq L$). To znači da je m maksimalni lanac u $\mathcal{J}$ koji sadrži $\{e\}$. No, iz toga odmah slijedi da je m jedan maksimalni element u $\mathcal{J}$.

(ii) Lanac L nema najveći element.
Tada $\bigcup L \notin L$ (jer je $\bigcup L$ jedna gornja međa za L), a onda zbog maksimalnosti od L slijedi $\bigcup L \notin \mathcal{J}$. Iz pretpostavke da je $\mathcal{J}$ familija konačnog karaktera slijedi da postoji konačan $X \subseteq \bigcup L$ takav da

$$X \notin \mathcal{J} \qquad (*)$$

No, iz $X \subseteq L$ i činjenice da je L lanac, slijedi da postoji $Y \in L$ takav da je $X \subseteq Y$. Po drugoj strani iz $Y \in L$ i $L \subseteq \mathcal{J}$ slijedi $Y \in \mathcal{J}$. Pošto je $\mathcal{J}$ konačnog karaktera, te je X konačan podskup od Y, tada je $X \in \mathcal{J}$, što je kontradikcija sa $(*)$. To znači da je ovaj slučaj nemoguć.

Rješenje 220. Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup čiji svaki lanac ima gornju među. Označimo sa $\mathcal{L}$ skup svih lanaca od A. Primijetimo da za svaki $L \subseteq A$ vrijedi:

L je lanac ako i samo ako svaki konačan podskup od L je lanac.

Iz prethodnog direktno slijedi da je $\mathcal{L}$ familija konačnog karaktera. Iz Teichmüller-Tukeyeve leme slijedi da postoji lanac L od A koji je maksimalni element od $\mathcal{L}$. Po pretpostavci parcijalno uređen skup zadovoljava uvjet Zornove leme, tj. za svaki lanac od A postoji gornja međa. Neka je $a \in A$ gornja međa za L. Primijetimo da je nužno $a \in L$, jer je inače $L \cup \{a\}$ lanac koji je pravi nadskup od L, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je L jedan maksimalni lanac od A. Ako bi postojao $b \in A$ takav da je $b > a$, tada bi $L \cup \{b\}$ bio lanac koji je pravi nadskup od L, što je opet u suprotnosti s pretpostavkom da je L jedan maksimalni lanac od A. To znači da je a jedna maksimalni element od A.

Rješenje 221. Neka je $(S, <)$ proizvoljan neprazan linearno uređen skup. Neka je $\mathfrak{F} = \{B \subseteq S : B$ je dobro uređen u odnosu na restrikciju relacije $<\}$. Pošto je npr. $\emptyset \in \mathfrak{F}$ tada je $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Na skupu $\mathfrak{F}$ definiramo binarnu relaciju $\prec$ sa:

$$X \prec Y \quad \text{ako i samo ako} \quad X \text{ je početni komad od } Y.$$

Očito je $(\mathfrak{F}, \prec)$ neprazan parcijalno uređen skup. Želimo dokazati da $(\mathfrak{F}, \prec)$ ispunjava uvjet Zornove leme. U tu svrhu izaberimo proizvoljan neprazan lanac L od $\mathfrak{F}$. Tvrdimo da je $\cup L$ element od $\mathfrak{F}$. Pošto je po pretpostavci S linearno uređen u odnosu na relaciju $<$, te je $\cup L \subseteq S$, tada je i skup $\cup L$ linearno uređen u odnosu na relaciju $<$.

Dokažimo da je $\cup L$ dobro uređen skup. Neka je Y proizvoljan neprazan podskup od $\cup L$. Tada očito postoji $X \in L$ takav da je $Y \cap X \neq \emptyset$. Pošto je X dobro uređen skup tada njegov neprazni podskup $Y \cap X$ ima najmanji element; označimo ga s y_0.

Tvrdimo da je y_0 najmanji element skupa Y, tj. da za sve $z \in Y \setminus \{y_0\}$ vrijedi $y_0 < z$. Neka je $z \in Y \setminus \{y_0\}$ proizvoljan. Pošto je $Y \subseteq \cup L$ tada postoji $X' \in L$ takav da je $z \in X'$. Iz pretpostavke da je L lanac u $\mathfrak{F}$ slijedi da vrijedi jedno od: $X \prec X'$ ili $X = X'$ ili $X' \prec X$.

Pretpostavimo prvo da je $X' \prec X$. Ako bi vrijedilo $z < y_0$ tada iz $z, y_0 \in Y \cap X$ slijedi da je z manji od najmanjeg elementa iz $Y \cap X$, što je nemoguće. To znači da u ovom slučaju mora vrijediti $y_0 \leq z$.

Ako je $X = X'$ tada iz $z \in Y \cap X$, te činjenice da je y_0 najmanji element od $Y \cap X$, slijedi da je y_0 manji od z.

Ako je $X \prec X'$ tada je po definiciji X početni komad od X', pa je nužno $y_0 < z$.

Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \prec)$ sadrži barem jedan maksimalni element. Neka je A neki maksimalni element od $\mathfrak{F}$. Dokažimo da je A kofinalan podskup od S. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $x \in S$ tako da za svaki $a \in S$ vrijedi $a < x$ (skup S je po pretpostavci linearno uređen!). No, tada je $A \cup \{x\}$ dobro uređen skup, i pravi je nadskup skupa A, što je kontradikcija s činjenicom da je A maksimalni element.

Rješenje 222. Neka je $\mathfrak{F} = \{R' \subseteq A \times A : R'$ je relacija ekvivalencije, te $R \subseteq R'\}$. Pošto je $A \times A$ relacija ekvivalencije tada je $A \times A \in \mathfrak{F}$. To znači da je $(\mathfrak{f}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Lako je provjeriti da je $\cap L$ relacija ekvivalencije koja proširuje relaciju R. To znači da je $\cap L$ jedna donja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan minimalni element.

Rješenje 223. Skup $\mathfrak{F}, \subset)$ je parcijalno uređen. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Ako $x, y \in \cup L$ tada postoje $X, Y \in L$ tako da je $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $X \subseteq Y$. Tada imamo $x, y \in Y$. Pošto $L \subseteq \mathfrak{F}$ i $Y \in L$ tada $y \in \mathfrak{F}$, pa je $x \cap y = \emptyset$. Dakle, $\cup L \in \mathfrak{F}$. Očito je $\cup L$ jedna gornja međa za lanac L. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ sadrži barem jedan maksimalni element.

Rješenje 225. Pošto A nije linearno uređen tada postoje a i b u skupu A koji nisu usporedivi. Neka je L_a skup svih lanaca u A koji sadrže a, te neka je L_b skup svih lanaca u A koji sadrže b. Očito su skupovi $(L_a, \subset)$ i $(L_b, \subset)$ neprani parcijalno uređeni skupovi. Neka su $L_1 \subseteq L_a$ i $L_2 \subset L_b$ proizvoljni neprazni lanci. Očito je $\cup L_1 \in L_a$ gornja međa lanca L_1, te $\cup L_2 \in L_b$ gornja međa lanca L_2. Primjenom Zornove leme slijedi da parcijalno uređeni skupovi $(L_a, \subset)$ i $(L_b, \subset)$ sadrže maksimalne elemente L', odnosno L''. Očito vrijedi $a \in L'$, te $b \notin L'$. Zatim, $a \notin L''$ i $b \in L''$ (jer elementi a i b nisu usporedivi). Iz toga slijedi da su L' i L'' dva različita maksimalna lanca u skupu A.

Rješenje 226. Neka je $(A, <)$ proizvoljan neprazan parcijalno uređen skup. Označimo: $\mathfrak{F} = \{S \subseteq A\ :$ skup S je potpuno neuređen$\}$. Primijetimo prvo da je $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, jer $\mathfrak{F}$ npr. sadrži sve jednočlane podskupove skupa A. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac. Lako je provjeriti da je $\cup L$ jedna gornja međa skupa L. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ sadrži barem jedan maksimalan element.

Rješenje 227. Neka je $(A, <)$ proizvoljan linearno uređen skup. Označimo $\mathfrak{F} = \{B \subseteq A : B$ je u sebi gust$\}$. Pošto je $\emptyset \in \mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Dokažimo da je skup $\cup L$ u sebi gust. Neka su $x, y \in \cup L$ takvi da je $x < y$. Tada postoje $X, Y \in L$ takvi da je $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $X \subseteq Y$. Tada imamo $x, y \in Y$. No, pošto je Y u sebi gust, tada postoji $z \in Y$ takav da je $x < z < y$. Pošto je $Y \in L$ tada je $z \in \cup L$. Time smo dokazali da je $\cup L \in \mathfrak{F}$. Očito je $\cup L$ jedna gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan maksimalni element.

Rješenje 228. Neka je $\mathfrak{F} = \{S : S$ je antisimetrična relacija na skupu X, $R \cap S = \emptyset\}$. Pošto je $\emptyset \in \mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Dokažimo prvo da je $\cup L$ antisimetrična relacija na skupu X. Neka je $(x, y) \in \cup L$. Tada postoji $Y \in L$ takav da je $(x, y) \in Y$. Pošto je $Y \in L \subseteq \mathfrak{F}$, tada je Y antisimetrična relacija. To znači da iz $(x, y) \in Y$ slijedi $x = y$. Očito je $\cup L \cap R = \emptyset$. To znači da je $\cup L$ jedna gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $\mathfrak{F}$ ima barem jedan maksimalni element. Neka je S jedan maksimalni element od $\mathfrak{F}$. Iz definicije skupa $\mathfrak{F}$ slijedi da je S antisimetrična relacija, te da je $R \cap S = \emptyset$.

Rješenje 229. Lako je provjeriti da je za svaki neprazan skup A familija svih jednočlanih podskupova najveća, tj. najfinija particija, a $\{A\}$ najmanja particija.

Rješenje 230. Ako skup X nije jednočlan tada je familija svih jednočlanih podskupova skupa A maksimalna particija koja ne sadrži X. Ako je X jednočlan, tada prvo odaberemo neki $y \in A \setminus X$. Tada je lako provjeriti da je $\{X \cup \{y\}\} \cup \{\{z\} z \in A \setminus (X \cup \{y\})\}$ jedna maksimalna particija koja ne sadrži skup X.

Rješenje 231. Neka je

$$\mathfrak{F} = \{(B, \mathfrak{B}) \ : \ B \subseteq A, \ \mathfrak{B} \ \text{ je particija od } B \text{ čiji je svaki član prebrojiv}\}$$

Iz aksioma izbora slijedi da svaki beskonačan skup sadrži prebrojiv podskup. Tada postoji $B \subseteq A$ koji je prebrojiv. Tada očito $(B, \{B\}) \in \mathfrak{F}$, pa imamo $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Na skupu $\mathfrak{F}$ definiramo binarnu relaciju $\prec$ ovako:

$$(B, \mathfrak{B}) \prec (B', \mathfrak{B}') \qquad \text{ako i samo ako} \qquad B \subset B' \ \text{ i } \ (\forall y \in \mathfrak{B}')(\exists x \in \mathfrak{B})(y \subseteq x).$$

Lako je provjeriti da je $(\mathfrak{F}, \prec)$ parcijalno uređen skup. Neka je $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljni neprazni lanac, pri čemu $\mathfrak{L} = \{(L_j, \mathfrak{L}_j) \ : \ j \in J\}$, gdje je J neki skup indeksa. Definiramo $G = \bigcup\limits_{j \in J} L_j$. Zatim, neka je

$$\mathfrak{G} = \{\bigcap_{j \in J} A_j : A_j \in \mathfrak{L}_j, \ \text{ i } \ \bigcap_{j \in J} A_j \ \text{ je prebrojiv}\}.$$

Očito je $G \subseteq A$. Dokažimo da je $\mathfrak{G}$ jedna particija skupa G. Po definiciji familije $\mathfrak{G}$ imamo da je svaki član familije neprazan (jer je prebrojiv). Neka su $\bigcap A_j, \ \bigcap B_j \in \mathfrak{G}$ različiti. Tada postoji $i \in J$ tako da je $A_i \neq B_i$. No, vrijedi i $A_i \cap B_i = \emptyset$, jer su A_i i B_i elementi particije $\mathfrak{L}_i$, pa su dijsunktni. Iz toga odmah slijedi $(\bigcap A_j) \cap (\bigcap B_j) = \emptyset$. Preostalo je dokazati da je $\cup \mathfrak{G} = G$. Očito vrijedi $\cup \mathfrak{G} \subseteq G$. Neka je $x \in G$ proizvoljan. Treba dokazati da za svaki $j \in J$ postoji skup $A_j \in \mathfrak{L}_j$ tako da vrijedi $x \in A_j$, te je skup $\cap A_j$ prebrojiv. Pošto je po definiciji $G = \cup L_j$ tada postoji $i \in J$ takav da je $x \in L_i$. Pošto je $\mathfrak{L}_i$ particija skupa L_i tada postoji $A_i \in \mathfrak{L}_i$ takav da je $x \in A_i$.

Neka je $(L_j, \mathfrak{L}_j) \in \mathfrak{L}$ proizvoljan. Pošto je $\mathfrak{L}$ lanac tada vrijedi

$$(L_j, \mathfrak{L}_j) \preceq (L_i, \mathfrak{L}_i) \ \text{ ili } \ (L_i, \mathfrak{L}_i) \preceq (L_j, \mathfrak{L}_j).$$

Ako je $(L_j, \mathfrak{L}_j) \preceq (L_i, \mathfrak{L}_i)$ tada po definiciji relacije $\prec$ posebno za skup $A_i \in \mathfrak{L}_i$ postoji $A_j \in \mathfrak{L}_j$ tako da vrijedi $A_i \subseteq A_j$.

Ako je $(L_i, \mathfrak{L}_i) \prec (L_j, \mathfrak{L}_j)$ tada zbog $L_i \subset L_j$ i $x \in L_i$ slijedi $x \in L_j$. Pošto je $\mathfrak{L}_j$ particija tada postoji $A_j \in \mathfrak{L}_j$ takav da je $x \in A_j$. Iz definicije relacije $\prec$ i $(L_i, \mathfrak{L}_i) \prec (L_j, \mathfrak{L}_j)$ tada slijedi da je nužno $A_j \subseteq A_i$.

Za ovako izabrane $j \in J$ očito vrijedi $x \in \cap A_j$. Lako je vidjeti da je skup $\cap A_j$ prebrojiv.

Očito za sve $(L_j, \mathfrak{L}_j) \in \mathfrak{L}$ vrijedi $(L_j, \mathfrak{L}_j) \preceq (G, \mathfrak{G})$. Time smo dokazali da za proizvoljni lanac od $\mathfrak{F}$ postoji gornja međa. Sada iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \prec)$ sadrži maksimalni element. Lako je vidjeti da je svaki maksimalni element parcijalno uređenog skupa $(\mathfrak{F}, \prec)$ jedna tražena particija skupa A.

Rješenje 232. Za svaki $a \in A$ označimo $B_a = \{b : aRb\}$. Neka je $\mathcal{A} = \{B_a : a \in A\}$. Očito je $\mathcal{A}$ familija nepraznih skupova (koji nisu nužno u parovima disjunktni). Iz aksioma izbora (točnije iz zadatka 214) slijedi da postoji funkcija $f : A \to B$ takva da za svaki $a \in A$ vrijedi $f(a) \in B_a$. Tada je očito $f \subseteq R$.

Rješenje 233. Neka je $f : A \to B$ surjekcija. To znači da je za svaki $y \in B$ skup $f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$. Tada je $\{f^{-1}[\{y\}] : y \in B\}$ jedna particija skupa A. Iz aksioma izbora (točnije iz zadatka 214 b). slijedi da postoji funkcija $g : B \to \cup_{y \in B} f^{-1}[\{y\}]$ $(= A)$, tako da za svaki $y \in B$ vrijedi $g(y) \in f^{-1}[\{y\}]$. Lako je provjeriti da je $f \circ g = id_B$. Obratna tvrdnja direktno slijedi.

Rješenje 237. Neka je s e označen neutralni element grupe G. Označimo s $\mathcal{A}$ skup

$$\{A : A \text{ je podgrupa od } G \text{ i vrijedi } e \notin A\}.$$

Pošto je $\{e\} \in \mathcal{A}$ tada $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Očito je $(\mathcal{A}, \subset)$ parcijalno uređen skup. Neka je L lanac u $\mathcal{A}$. Definirajmo $A_0 = \cup_{A \in L} A$. Očito $x \notin A_0$. Pokažimo da je A_0 podgrupa od G. Neka su $a, b \in A_0$ proizvoljni. Tada postoje $A_1, A_2 \in L$ takvi da je $a \in A_1$ i $b \in A_2$. No, L je lanac, pa vrijedi $A_1 \subset A_2$ ili $A_2 \subset A_1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $A_1 \subset A_2$. Tada vrijedi $a, b \in A_2$. No, onda je $ab^{-1} \in A_2$, a tada i $ab^{-1} \in A_0$. Time je pokazano da za svaki lanac L u $\mathcal{A}$ postoji gornja međa. Iz Zornove leme slijedi da u parcijalno uređenom skupu $(\mathcal{A}, \subset)$ postoji maksimalni element.

Rješenje 239. Neka je $\mathfrak{F} = \{S : S$ je podgrupa grupe Rot_n koja ne sadrži rotaciju za $6\pi/n\}$. Ako je s e označen neutralni element grupe Rot_n (to je identiteta na A_n) tada očito $\{e\} \in \mathfrak{F}$. To znači da je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac.

Dokažimo prvo da je $\cup L$ grupa, tj. podgrupa od Rot_n. Neka su $x, y \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $X, Y \in L$ tako da je $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $X \subseteq Y$. Tada imamo $x, y \in Y$. No, pošto je Y grupa tada je $x \cdot y^{-1} \in Y$, a onda je i $x \cdot y^{-1} \in \cup L$.

Očito grupa $\cup L$ ne sadrži rotaciju za $6\pi/n$. Iz svega do sada dokazano slijedi da je $\cup L$ jedna gornja međa za lanac L u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ sadrži barem jedan maksimalan element.

Rješenje 240. Neka je $\mathfrak{F} = \{W : W$ je potprostor od V tako da $v \notin W\}$. Označimo s 0 nulvektor prostora V. Pošto je $\{0\} \in \mathfrak{F}$ tada $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Neka je L neki neprazan lanac u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$. Dokažimo prvo da je $\cup L$ vektorski potprostor od V. Neka su $x, y \in \cup L$, te α i β iz pripadnog polja. Tada postoje $X, Y \in L$ tako da vrijedi $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $X \subseteq Y$. Tada imamo $x, y \in Y$, a pošto je Y vektorski potprostor tada je $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in Y$. Sada iz $Y \in L$ slijedi $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \cup L$. Očito $v \notin \cup L$. Time imamo $\cup L \in \mathfrak{F}$. Lako je vidjeti da je $\cup L$ jedna gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da postoji maksimalan element W u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$.

Rješenje 241. Neka je $\mathfrak{F} = \{S' : S'$ je linearno nezavisan, $S \subseteq S'\}$. Pošto je $S \in \mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan linearno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Očito je $S \subseteq \cup L$. Dokažimo sada da je $\cup L$ linearno nezavisan skup. Neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ proizvoljan konačan podskup od $\cup L$. Tada postoje $B_{i_1}, \ldots, B_{i_n} \in L$ takvi da je $v_j \in B_{i_j}$. Pošto je L lanac u $\mathfrak{F}$ tada postoji $i_0 \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ tako da za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $B_{i_j} \subseteq B_{i_0}$. Tada imamo $v_1, \ldots, v_n \in B_{i_0}$. Pošto $B \in \mathfrak{F}$, tada je B linearno nezavisan, pa je i skup $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linearno nezavisan. To znači da je $\cup L$ jedna gornja međa skupa L. Iz ornove leme slijedi da paricjalno uređeni skup $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan maksimalni element.

Rješenje 242. Neka je $\mathfrak{F} = \{B \subseteq X : B$ je linearno nezavisan $\}$. Očito je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je L neki neprazan lanac od $\mathfrak{F}$. Sasvim na isti način kao u rješenju prethodnog zadatka dokazali bi da je skup $\cup L$ linearno nezavisan. To znači da je $\cup L$ jedna gornja međa za lanac L. Primjenom Zornove leme slijedi da skup A sadrži barem jedan maksimalni element C. Lako je vidjeti da je C baza vektorskog prostora V.

Rješenje 243. Označimo $\mathfrak{F} = \{h :$ postoji potprostor W' od V tako da je $h : W' \to V$ linearan operator za koji vrijedi $f \subseteq h$ i $Ker(f) = Ker(h)\}$. Pošto je $f \in \mathfrak{F}$ tada je $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Očito je $(\mathfrak{F}, \subset)$ parcijalno uređen skup. Neka je $L = \{g_i : W_i \to V | i \in I\} \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac. Označimo s h funkciju $\cup_{i \in I} g_i$, tj. funkciju čija je domena $\cup_{i \in I} W_i$, a kodomena V, te koja je za $x \in W_i$ definirana sa $h(x) = g_i(x)$. Primijetite da je definicija funkcije h dobra, jer je L lanac.

Dokažimo prvo da je $\cup_{i \in I} W_i$ potprostor od V. Neka su $x, y \in \cup_{i \in I} W_i$, te $\alpha, \beta \in F$ proizvoljni. Tada postoje $i, j \in I$ tako da vrijedi $x \in W_i$, te $y \in W_j$. Pošto je po pretpostavci L lanac tada vrijedi $W_i \subseteq W_j$ ili $W_j \subseteq W_i$. Radi određenosti neka je $W_i \subseteq W_j$. Tada imamo $x, y \in W_j$. Pošto je po pretpostavci W_j potprostor tada vrijedi $\alpha x + \beta y \in W_j$, a onda i $\alpha x + \beta y \in \cup_{i \in I} W_i$.

Dokažimo sada da je funkcija h linearni operator. Neka su $x, y \in \cup_{i \in I} W_i$, te $\alpha, \beta \in F$ proizvoljni. Tada postoje $i, j \in I$ tako da vrijedi $x \in W_i$, te $y \in W_j$. Pošto je po pretpostavci L lanac tada vrijedi $W_i \subseteq W_j$ ili $W_j \subseteq W_i$. Radi određenosti neka je $W_i \subseteq W_j$. Tada imamo $x, y \in W_j$. No, funkcija $g_j : W_j \to V$ je po pretpostavci linearni operator. Tada imamo:

$$h(\alpha x + \beta y) \ = \ g_j(\alpha x + \beta y) \ = \ \alpha g_j(x) + \beta g_j(y) \ = \ \alpha h(x) + \beta h(y)$$

Očito je h proširenje funkcije f, te je $Ker(h) = Ker(f)$. Time imamo da je h jedna gornja međa skupa $\mathfrak{F}$.

Primjenom Zornove leme slijedi da za parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ postoji barem jedan maksimalni element.

Rješenje 244. Označimo $\mathfrak{F} = \{W : W$ je potprostor od V takav da je $W \cap Ker(f)$ jednodimenzionalan potprostor od $V\}$. Pošto je po pretpostavci zadatka linerani operator f neinjektivan tada je $Ker(F)$ netrivijalan potprostor od V. Za proizvoljan $v \in Ker(F)$, koji nije nulvektor, potprostor razapet s v pripada $\mathfrak{F}$. To znači da je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{f}$ proizvoljan neprazan lanac. Lako je provjeriti da je $\cup L$ vektorski potprostor od V (na isti način kao u rješenju prethodnog zadatka). Iz toga slijedi da svaki neprazni lanac u $\mathfrak{F}$ ima gornju među. Iz Zornove leme slijedi da da $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan maksimalni element.

Rješenje 245. Neka je $\mathfrak{F} = \{U : U$ je potprostor od V, $dim(U \cap W) = 1.\}$ Pošto po pretpostavci zadatka potprostor W netrivijalni, tada postoji $x \in W$ koji nije nulvektor. Očito je potprostor od V generiran s x jedan element od $\mathfrak{F}$. Dakle, $(\mathfrak{F}, \subset)$ je neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Dokažimo prvo da je $\cup L$ vektorski potprostor od V. Neka su $x, y \in \cup L$, te α i β proizvoljni skalari. Tada postoje $X, Y \in L$ takvi da je $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada možemo pretpostaviti da vrijedi $X \subseteq Y$. Tada imamo $x, y \in Y$. Pošto je Y potprostor tada $\alpha x + \beta y \in Y$, a onda i $\alpha x + \beta y \in \cup L$. Kako bi mogli zaključiti da je $\cup L \in \mathfrak{F}$ moramo još provjeriti da je $dim(W \cap (\cup L)) = 1$. Pošto za svaki $X \in L$ vrijedi $dim(W \cap X) = 1$ tada je očito $dim(W \cap (\cup L)) \geq 1$. Kako bi dokazali da vrijedi i obratna nejednakost, dokažimo da su svaka dva vektora $x, y \in W \cap (\cup L)$ linearno zavisna. Analogno kao prije zajključili bi da postoji $Y \in L$ takav da je $x, y \in Y$. Pošto je $Y \in \mathfrak{F}$ tada je $dim(W \cap Y) = 1$. Sada iz $x, y \in W \cap Y$ slijedi da su vektori x i y linearno zavisni. Primjenom Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ sadrži barem jedan maksimalni element.

Rješenje 246. Neka je $\mathfrak{F} = \{W : W$ je potprostor od ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ takav da $f \notin W\}$. Neka je $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkicja definirana s $g(x) = 0$. Pošto je $\{g\}$ vektorski potprostor od ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}$, te $f \notin \{g\}$, tada $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Neka je L neprazan lanac u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$. Lako je vidjeti da je $\cup L$ vektorski potprostor od ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ koji ne sadrži funkciju

f. To znači da je $\cup L \in \mathfrak{F}$. Zatim, očito je $\cup L$ gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da postoji barem jedan maksimalni element od $\mathfrak{F}$.

Rješenje 247. Neka je $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ je algebra skupova, $\mathbb{Q} \notin \mathfrak{A}\}$. Lako je provjeriti da je $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$ algebra skupova nad $\mathbb{R}$ koja ne sadrži $\mathbb{Q}$. To znači da je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Provjerimo prvo da je $\cup L$ algebra skupova nad skupom $\mathbb{R}$. Pošto je $\emptyset \in X$, za svaki $Y \in L$, tada je očito $\emptyset \in \cup L$. Neka je $A \in \cup L$ proizvoljan. Tada postoji algebra skupova $Y \in L$ takva da je $A \in Y$. Tada je $\mathbb{R} \setminus A \in Y$, a onda je i $\mathbb{R} \setminus A \in \cup L$. Neka su $A, B \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $Y, Z \in L$ takvi da je $A \in Y$ i $B \in Z$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $Y \subseteq Z$. Tada $A, B \in Z$. No, Z je algebra skupova, pa je $A \cup B \in Z$, a onda i $A \cup B \in \cup L$. Očito $\mathbb{Q} \notin \cup L$. Time smo dokazali da je $\cup L$ jedna gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup sadrži barem jedan maksimalni element.

Rješenje 248. Neka je $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I}$ je ideal na X, $A \in \mathfrak{I}\}$. Primijetimo prvo da je $\mathcal{P}(A)$ ideal na skupu X koji sadrži A, pa je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Dokažimo prvo da je $\cup L$ ideal na skupu X. Neka su $x, y \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $X, Y \in L$ takvi da je $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $X \subseteq Y$. Tada $x, y \in Y$, a pošto je X ideal tada $x \cup y \in Y$, pa onda i $x \cup y \in \cup L$. Na sličan način bi dokazali da je skup $\cup L$ zatvoren za podskupove. Očito je $A \in \cup L$. Iz svega dokazanog slijedi $\cup L \in \mathfrak{F}$, pa je $\cup L$ jedna gornja međa za lanac L u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ sadrži barem jedan maksimalni element.

Rješenje 251. Promatramo $\mathbb{R}$ kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Q}$. Neka je B neka baza za $\mathbb{R}$. (Takva baza B postoji zbog prethodnog zadatka. Navedite jedan skup izvodnica za $\mathbb{R}$ nad poljem $\mathbb{Q}$). Neka je $\alpha \in B$ proizvoljan. Definiramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da je $f(x)$ jednako koordinati koja piše uz α prilikom prikaza realnog broja x pomoću elemenata baze B. Očito je funkcija f linearni operator, pa posebno vrijedi $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Funkcija f nije nulfunkcija, jer je npr. $f(\alpha) = 1$. Pošto je $Rng(f) \subseteq \mathbb{Q}$ tada je za svaki $k \in \mathbb{R}$ funkcija f različita od funkcije $x \mapsto kx$.

Rješenje 253. Neka je A skup svih otvorenih podskupova skupa O koji imaju svojstvo a). Očito je $(A, \subset)$ parcijalno uređen skup. Neka je L proizvoljan neprazan lanac u A. Pokažimo da je $\cup L$ gornja međa za L. Skup $\cup L$ je otvoren, jer je unija otvorenih skupova. Zatim, očito vrijedi $\cup L \subseteq O$. Preostalo je još samo provjeriti da je skup $\cup L$ ima svojstvo a), tj. da vrijedi $\cup L \in A$. Neka $x, y \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $L_1,\ L_2 \in L$ takvi da je $x \in L_1$ i $y \in L_2$. Pošto je L lanac tada možemo uzeti da vrijedi $L_1 \subseteq L_2$. Tada imamo $x, y \in L_2$. Pošto je $L_2 \in A$ tada $x + y \in L_2$, a onda imamo i $x + y \in \cup L$. Primjenom Zornove leme slijedi da skup A sadrži barem jedan maksimalni element.

Rješenje 254. Zadatak se može standardno riješiti primjenom Zornove leme. No, nije teško vidjeti da skup $\langle -1, 1\rangle \setminus \{0\}$ ima tražena svojstva.

Rješenje 256. Neka je $\mathfrak{F} = \{A \subseteq \mathbb{N}$ aritmetički poluzatvoren, te $A \cap \mathbb{P} = \emptyset\}$. Pošto je npr. $\{0\} \in \mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac.

Dokažimo prvo da je $\cup L$ aritmetički poluzatvoren skup. Neka su $x, y \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $X, Y \in L$ tako da je $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $X \subseteq Y$. Tada su $x, y \in Y$. Pošto je po pretpostavci skup Y aritmetički poluzatvoren tada je $x + y \in Y$ ili $x \cdot y \in Y$. No, onda je očito $x + y \in \cup L$ ili $x \cdot y \in \cup L$.

Dokažimo sada da vrijedi $\cup L \cap \mathbb{P} = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno. Neka je $x \in \cup L \cap \mathbb{P}$ proizvoljan. Tada postoji $X \in L$ takav da je $x \in X$. Time imamo $x \in X \cap \mathbb{P}$. No, to je nemoguće zbog $X \in L \subseteq \mathfrak{F}$, i definicije skupa $\mathfrak{F}$.

Iz svega sada dokazanog slijedi da je $\cup L$ jedna gornja međa lanca L u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$. Iz Zornove leme slijedi da postoji maksimalni element u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$.

Rješenje 257. Neka je $\mathfrak{F} = \{K$ je konveksan skup koji sadrži skup $S\}$. Pošto $\mathbb{R}^3 \in \mathfrak{F}$ tada je $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Očito je $(\mathfrak{F}, \subset)$ parcijalno uređen. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Lako je provjeriti da je $\cap L$ jedna donja međa lanca L. Iz Zornove leme (točnije iz zadatka 215) slijedi da za $\mathfrak{F}$ postoji minimalni element. Očito je svaki minimalni element od $\mathfrak{F}$ jedna konveksna ljuska skupa S.

Rješenje 258. Neka je $S = \{(0, 0),\ (1, 1)$. Svaki jednočlani podskup od S je očito konveksna skela od S.

Rješenje 259. Neka je $\mathfrak{F} = \{A \subseteq X : A$ je putevima povezan$\}$. Pošto je očito $\emptyset \in \mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac.

Dokažimo prvo da je $\cup L$ putevima povezan skup. Neka su $a, b \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $A, B \in L$ takvi da je $a \in A$ i $b \in B$. Pošto je L lanac obzirom na relaciju inkluzije, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A \subseteq B$. Tada je $a, b \in B$. No, pošto je skup B putevima povezan tada postoji neprekidna funkcija $f : [0, 1] \to B$ takva da je $f(0) = a$ i $f(1) = b$. Očito je funkcija $g : [0, 1] \to \cup L$ definirana sa $g(x) = f(x)$ neprekidna, te vrijedi $g(0) = a$ i $g(1) = b$. To upravo znači da je skup $\cup L$ povezan putevima.

Pošto je očito $\cup L \subseteq X$ tada imamo da je $\cup L \in \mathfrak{F}$ jedna gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da postoji maksimalni element u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$.

Rješenje 260. Neka je $\mathfrak{F} = \{Z \subseteq \mathbb{R} : Z \text{ je zatvoren i } O \subseteq Z\}$. Pošto je $\mathbb{R} \in \mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac. Znamo da je općenito proizvoljan presjek zatvorenih skupova također zatvoren skup. Iz toga posebno slijedi da je $\cap Z$ zatvoren skup. Očito vrijedi $O \subseteq \cap Z$. Time imamo $\cap Z \in \mathfrak{F}$. Očito je $\cap Z$ jedna donja međa lanca L. Iz zadatka 215 slijedi da parcijalno uređen skup $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan minimalni element.

Rješenje 261. Neka je $\mathfrak{F} = \{(C, D) : C, D \subseteq \mathbb{R}^+,\ C, D \neq \emptyset,\ C \cap D = \emptyset$, oba skupa C i D su zatvorena za zbrajanje, te su zatvorena za množenje s pozitivnim racionalnim brojevima $\}$. Uzmemo li $C = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$ i $D = \mathbb{Q}\sqrt{2} \cap \mathbb{R}^+$, tada je lako provjeriti da je $(C, D) \in \mathfrak{F}$. Na skupu $\mathfrak{F}$ definiramo relaciju $\prec$ ovako:

$$(C, D) \prec (C', D') \text{ ako i samo ako } C \subset C' \text{ i } D \subset D'$$

Lako je provjeriti da je $(\mathfrak{F}, \prec)$ parcijalno uređen skup koji zadovoljava uvjete Zornove leme. Neka je $(A, B) \in \mathfrak{F}$ maksimalni element. Pretpostavimo da $A \cup B \subset \mathbb{R}^+$. Neka je $a \in \mathbb{R}^+ \setminus (A \cup B)$. Zbog maksimalnosti para (A, B) slijedi da postoji pozitivan $q \in \mathbb{Q}$ i $x \in A$ tako da je $qa + x \in B$. Analogno, postoji $q' \in \mathbb{Q}$ i $y \in B$ tako da je $q'a + y \in A$. Tada zbog zatvorenosti skupova A i B na množenje s pozitivnim racionalnim brojevima slijedi $qq'a + q'x \in B$ i $qq'a + qy \in A$. No, tada je očito zbog zatvorenosti skupova A i B na zbrajanje ispunjeno $qq'a + q'x + qy \in A \cap B$. Pošto je $(A, B) \in \mathfrak{F}$ tada je posebno $A \cap B = \emptyset$, pa je dobivena kontradikcija.

Rješenje 263. Primijenimo Zornovu lemu na familiju svih podskupova od A za koje postoji bojanje s dvije boje. Pri dokazu da je uniju lanca takvih skupova također moguće obojati s dvije boje potrebno je pripaziti: to da možemo pretpostaviti da su dva elementa unije u istom članu lanca pa se mogu različito obojati pripadnom funkcijom, ne znači da se točno ta funkcija može proširiti na čitavu uniju.

Rješenje 264. Neka je (G, R) povezani graf. Neka je $\mathfrak{F} = \{(S, R') : (S, R') \text{ je podgraf od } (G, R) \text{ koji je stablo}\}$. Pošto je svaki jednočlani podgraf očito stablo tada je $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Očito je $(\mathfrak{F}, \subset)$ parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan lanac. Očito je $\cup L$ podgraf od (G, R). Dokažimo da je $\cup L$ stablo, tj. povezan graf bez ciklusa. Neka su $v, w \in \cup L$ takvi da je $v \neq w$. Tada postoje $G_1, G_2 \in L$ takvi da je $v \in G_1$ i $w \in G_2$. Pošto je L lanac tada mora vrijediti $G_1 \subseteq G_2$ ili $G_2 \subseteq G_1$. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da vrijedi $G_1 \subseteq G_2$. Tada imamo $v, w \in G_2$. Sada, pošto je $G_2 \in \mathfrak{F}$ tada je G_2 stablo. To znači da u G_2 postoji konačan put od v do w. Očito je to konačan put i u $\cup L$. Time smo dokazali da je $\cup L$ povezan graf. Na sličan način bi dokazali da graf $\cup L$ ne sadrži cikluse. To znači da je $\cup L$ jedna gornja međa lanca L u $\mathfrak{F}$. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan maksimalni element. Označimo jedan maksimalni element sa S_0. Zatim, označimo sa R' pripadnu relaciju među vrhovima iz S_0.

Preostalo je dokazati da je S_0 razapinjajuće stablo za povezan graf (G, R), tj. da vrijedi $G = S_0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji vrh $w \in G \setminus S_0$. Neka je

$v \in S_0$ proizvoljan vrh. Pošto je po pretpostavci graf G povezan tada postoje vrhovi $v_0, \ldots, v_n$ tako da vrijedi $v = v_0 \; R \; v_1 \; R \; \ldots \; R \; v_n = w$. Neka je $k = \min\{i : v_i \not\in S_0\}$. Promotrimo sljedeći graf: $(S_0 \cup \{v_k\}, \; R' \cup \{\{v_{k-1}, v_k\}\})$. To je očito podgraf od (G, R) koji je pravi nadgraf od (S_0, R'). Zatim, lako je vidjeti da je to povezan graf bez ciklusa, tj. stablo. Time smo dobili kondradikciju s pretpostavkom da je (S_0, R') maksimalno stablo u (G, R).

Rješenje 266. Neka je $(S, <)$ stablo. Po Zermelovom teoremu postoji binarna relacija $\prec$ tako da je $(S, \prec)$ dobro uređen skup. Za $a \in S$ označimo $a' = \{b \in S : b > a\}$. Sada definiramo niz (a_n) u S. Neka je a_1 minimalan element skupa $\{a \in S : a'$ je beskonačan.$\}$ Ako je a_n definiran neka je a_{n+1} najmanji $a \in S$ (u odnosu na uređaj $\prec$) tako da je a neposredni sljedbenik od a_n (u odnosu na uređaj $<$) i skup a' je beskonačan. Lako je vidjeti da je $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan lanac (u odnosu na uređaj $<$).

Dodatak A

Kardinalni brojevi

Kardinalni broj λ je ordinalni broj koji ima svojstvo da niti za jedan ordinalni broj $\alpha < \lambda$ ne postoji bijekcija između λ i α.

Kardinalni broj proizvoljnog skupa A definiramo kao najmanji ordinalni broj λ za koji vrijedi $A \sim \lambda$. Kardinalni broj skupa A označavamo sa $k(A)$.

Neka su λ i μ kardinalni brojevi. Tada definiramo:

a) $\lambda + \mu = k(\lambda \times \{0\} \cup \mu \times \{1\})$

b) $\lambda \cdot \mu = k(\lambda \times \mu)$

c) $\lambda^\mu = k(\{f \mid f : \mu \to \lambda\})$

Definiramo sumu i produkt familije kardinalnih brojeva $(\kappa_i : i \in I)$ na sljedeći način:

$$\sum_{i \in I} \kappa_i := k\left(\bigcup \{\kappa_i \times \{i\} \mid i \in I\}\right) ,$$

$$\prod_{i \in I} \kappa_i := k\left(\left\{f \mid f \colon I \to \bigcup \{\kappa_i \mid i \in I\} \wedge (\forall i \in I)(f(i) \in \kappa_i)\right\}\right) .$$

Važno je spomenuti da operacije zbrajanja, množenja i potenciranja za ordinalne i kardinalne brojeve isto označavamo. No, to nisu iste operacije. Npr. ako ω i 1 zbrajamo kao ordinalne brojeve tada je to $\omega + 1$ (što je različito od ω). No, ako ω i 1 zbrajamo kao kardinalne brojeve tada je to ω (jer je $\omega \times \{0\} \cup 1 \times \{1\} \sim \omega$).

Neka su λ, μ i ν kardinalni brojevi. Tada vrijedi:

a) $\lambda + (\mu + \nu) = (\lambda + \mu) + \nu$

b) $\lambda + \mu = \mu + \lambda$

c) $\lambda \cdot (\mu \cdot \nu) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \nu$

d) $\lambda \cdot \mu = \mu \cdot \lambda$

e) $\lambda \cdot (\mu + \nu) = \lambda \cdot \mu + \lambda \cdot \nu$

f) $\lambda^\nu \cdot \mu^\nu = (\lambda \cdot \mu)^\nu$

g) $\lambda^{\mu+\nu} = \lambda^\mu \cdot \lambda^\nu$

h) $(\lambda^\mu)^\nu = \lambda^{\mu \cdot \nu}$

Za svaki kardinalni broj λ postoji kardinalni broj koji je neposredni sljedbenik od λ. Neposredni sljedbenik od λ označavamo sa λ^+.

Sa $\aleph$ označavamo "funkciju" na klasi svih ordinalnih brojeva On na klasu svih beskonačnih kardinalnih brojeva koja je pomoću rekurzije definirana ovako:

$$\aleph_0 = \omega$$

$$\aleph_{\beta+1} = \aleph_\beta^+$$

$$\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}, \quad \text{ako je } \alpha \text{ granični ordinalni broj.}$$

Sada **Cantorovu hipotezu kontinuuma** možemo zapisati ovako: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Opća Cantorova hipoteza glasi: za svaki ordinalni broj α vrijedi

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

Primjenom aksioma izbora može se dokazati da su zbrajanje i množenje kardinalnih brojeva trivijalne operacije, tj. da vrijedi:

> ako su λ i μ kardinalni brojevi različiti od nule, te od kojih je barem jedan beskonačan, tada vrijedi
>
> $$\lambda + \mu = \lambda \cdot \mu = \max\{\lambda, \mu\}$$

Zadaci.

Zadatak 267. Neka su λ, μ i ν proizvoljni kardinalni brojevi. Dokažite da vrijedi:

(1) ako $\lambda < \mu$ tada je $\nu^\lambda \leq \nu^\mu$

(2) ako je $\nu^\lambda < \nu^\mu$ tada je $\lambda < \mu$

Odredite kardinalne brojeve λ, μ i κ takve da je $\lambda < \mu$ i $\nu^\lambda \geq \nu^\mu$.

Zadatak 268. Neka su λ i μ proizvoljni kardinalni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\mu + \lambda = \lambda \text{ ako i samo ako } \aleph_0 \cdot \mu \leq \lambda$$

Zadatak 269. Neka su λ i μ proizvoljni kardinalni brojevi, i n neki konačan kardinalni broj. Dokažite:

a) jednakost $\mu + n = \lambda + n$ povlači da je $\mu = \lambda$.

b) jednakost $\mu \cdot n = \lambda \cdot n$ povlači da je $\mu = \lambda$.

Zadatak 270. Neka je μ proizvoljan beskonačan kardinalni broj. Dokažite da vrijedi $\aleph_0 + \mu = \mu$.

Zadatak 271. Neka su λ i μ proizvoljni kardinalni brojevi. Dokažite da vrijedi $\mu + \lambda = \lambda$ ako i samo ako $\lambda + n \cdot \mu = \lambda$, za sve $n \in \omega$.

Zadatak 272. Neka su λ i μ kardinalni brojevi takvi da vrijedi $\mu^\lambda = \aleph_0$. Dokažite da je tada nužno $\mu = \aleph_0$ i $\lambda \in \omega$.

Zadatak 273. Dokažite da za sve beskonačne kardinalne brojeve μ vrijedi $2^\mu = \mu^\mu$.

Zadatak 274. Neka su λ i μ proizvoljni kardinalni brojevi. Dokažite da vrijedi $\mu + \lambda = \lambda$ ako i samo ako $\lambda + \aleph_0 \cdot \mu = \lambda$.

Zadatak 275. Neka su λ i μ kardinalni brojevi za koje vrijedi $1 < \mu \leq \lambda$ i $\lambda \geq \aleph_0$. Dokažite da je tada $\mu^\lambda = \lambda^\lambda$.

Zadatak 276. Dokažite da za svaki kardinalni broj μ takav da je $2^\mu \geq \aleph_0$ vrijedi $2^\mu \geq 2^{\aleph_0}$.

Zadatak 277. Dokažite da za sve kardinalne brojeve λ, μ i ν vrijedi

$$\mu \leq \lambda \text{ ako i samo ako } \mu \cdot \nu \leq \lambda \cdot \nu$$

Zadatak 278. Dokažite da za sve konačne kardinalne brojeve n, $n \geq 2$, vrijedi $2^c = (n!)^c$.

Zadatak 279. Neka su $\{\kappa_i : i \in I\}$ i $\{\lambda_i : i \in I\}$ familije kardinalnih brojeva tako da za sve $i \in I$ vrijedi $\kappa_i < \lambda_i$. Dokažite da tada vrijedi

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

Navedena nejednakost se naziva Königova nejednakost.

Zadatak 280. Neka su λ i μ proizvoljni kardinalni brojevi takvi da $\lambda > 1$ i $\mu > 1$. Zatim, neka je ν beskonači kardinalni broj za kojeg vrijedi $\mu,\ \lambda \leq \nu$. Dokažite da je tada $\mu^\nu = \lambda^\nu$.

Zadatak 281. Dokažite: ako $\alpha \leq \beta$ tada $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

Zadatak 282. Bez primjene aksioma izbora dokažite da pretpostavka $\aleph_0 + c = c$ povlači $c^{2^c} = 2^{2^c}$.

Zadatak 283. Dokažite da postoji ordinalni broj β takav da je $\aleph_\beta = \beta$.

Zadatak 284. Koliko ima neprebrojivih podskupova skupa koji ima kardinalni broj $\aleph_1$?

Zadatak 285. Dokažite da za svaki konačni kardinalni broj n vrijedi

$$(n!)^{\aleph_\omega} \leq 2^{2^{\aleph_\omega}}$$

Zadatak 286. Neka su α i β ordinalni brojevi. Dokažite:

$$\text{ako je } \beta < \alpha \text{ tada je } {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} \leq {\aleph_\beta}^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

Zadatak 287. Dokažite: $\aleph_5 = 2^{\aleph_4}$ ako i samo ako $\aleph_5^{\aleph_4} = \aleph_5$

Zadatak 288. Dokažite da za sve konačne kardinalne brojeve n vrijedi

$$\aleph_n \leq k(\underbrace{\mathcal{P}\mathcal{P}\ldots\mathcal{P}}_{n\text{-puta}}(\mathbb{N}))$$

Zadatak 289. Dokažite da za svaki ordinalni broj α vrijedi $\aleph_{\alpha+1} < 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Zadatak 290. Bez primjene aksioma izbora izračunajte $\aleph_0^c + (c \cdot \aleph_1)^{\aleph_0}$

Zadatak 291. Koja od sljedeće dvije tvrdnje: $2^c = \aleph_2$ i $c = \aleph_1$, povlači onu drugu? Dokažite tu implikaciju (bez primjene aksioma izbora).

Zadatak 292. Dokažite da je hipoteza kontinuuma $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ekvivalentna sa $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Zadatak 293. Dokažite da je hipoteza kontinuuma ekvivalentna sa $\aleph_2^{\aleph_0} > \aleph_1^{\aleph_0}$.

Zadatak 294. Dokažite da je $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Uputa. Koristite Königovu nejednakost, tj. zadatak 279.

Zadatak 295. Rekurzivno definiramo niz kardinalnih brojeva $\beth_\alpha$ sa

$$\beth_0 = \aleph_0$$

$$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$$

$$\beth_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beth_\beta$$

Dokažite da opća hipoteza kontinuma povlači da za sve $\alpha \in On$ vrijedi $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$

Zadatak 296. Bez korištenja aksioma izbora poredajte po veličini sljedeće kardinalne brojeve: $\aleph_0^{\beth_1}$, $\aleph_1^{\beth_0}$, $\beth_2^{\aleph_1}$. Gdje vrijedi stroge nejednakosti, a gdje jednakosti?

Zadatak 297. Bez primjene aksioma izbora dokažite da za sve konačne kardinalne brojeve n vrijedi $\beth_n^2 = \beth_n$.

Rješenja.

Rješenje 267.

(1) Neka je $\lambda < \mu$. Promotrimo funkciju $\Phi \colon {}^\lambda\nu \to {}^\mu\nu$, danu sa

$$\Phi(f)(x) := \begin{cases} f(x)\,, & \text{ako je } x \in \lambda \\ 0\,, & \text{inače}\,. \end{cases}$$

Φ je očito injekcija, pa zaključujemo $\nu^\lambda \leq \nu^\mu$.

(2) Neka je $\nu^\lambda < \nu^\mu$. Očito ne može biti $\lambda = \nu$.
Kada bi bilo $\nu < \lambda$, onda bi po (1) bilo $\nu^\mu \leq \nu^\lambda$.

Rješenje 268. Promatramo dva slučaja:

1° λ i μ su konačni. Tada imamo:

$$\mu + \lambda = \lambda \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \aleph_0 \cdot \mu = 0 \leq \lambda\,.$$

Obratno:

$$\aleph_0 \cdot \mu \leq \lambda \Rightarrow \aleph_0 \cdot \mu \text{ je konačan kardinal } \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \mu + \lambda = \lambda\,.$$

2° Barem jedan od λ i μ je beskonačan.
Ako je $\mu + \lambda = \lambda$, onda je $\lambda = \max\{\mu, \lambda\}$ i $\aleph_0 \leq \lambda$, pa imamo:

$$\aleph_0 \cdot \mu \leq \max\{\aleph_0, \mu\} \leq \max\{\mu, \lambda\} = \lambda\,.$$

Obratno, ako je $\aleph_0 \cdot \mu \leq \lambda$, onda je i $\max\{\aleph_0, \mu\} \leq \lambda$, odakle slijedi

$$\mu + \lambda = \max\{\lambda, \mu\} = \lambda\,.$$

Rješenje 269.

a) Neka je $\mu + n = \lambda + n$.
Ako je $\mu < \aleph_0$ onda je očito i $\lambda < \aleph_0$, pa iz svojstava aritmetike konačnih kardinala lagano slijedi $\mu = \lambda$.

Ako je $\mu \geq \aleph_0$, onda je $\mu + n = \mu$, pa je $\lambda + n = \mu \geq \aleph_0$, odakle je očito da je i $\lambda \geq \aleph_0$, pa je i $\lambda + n = \lambda$. Sada imamo

$$\mu = \mu + \mu = \lambda + \mu = \lambda\,, \text{ tj. } \mu = \lambda\,.$$

b) Analogno kao i prethodna tvrdnja.

Rješenje 270. Neka je $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ proizvoljan prebrojiv podskup od μ (Uočite da tu upotrebljavamo aksiom izbora). Definirajmo funkciju $f : \mu \cup \omega \to \mu$ sa:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \in \mu \backslash C \\ c_{2n-1}, & \text{ako je } x = c_n \\ c_{2n}, & \text{ako je } x = n \end{cases}$$

Lako je dokazati da je funkcija f bijekcija. Iz toga slijedi da su skupovi $\mu \cup \omega$ i μ ekvipotentni, tj. da vrijedi $\aleph_0 + \mu = \mu$.

Rješenje 271. Jedan smjer je trivijalan. Točnije ako za sve $n \in \omega$ vrijedi $\lambda + n \cdot \mu = \lambda$, onda je specijalno i $\lambda = \lambda + 1 \cdot \mu = \lambda + \mu$.

Za obrat promatramo dva slučaja.

1° λ i μ su konačni. Tada je tvrdnja trivijalno slijedi iz činjenice da mora biti $\mu = 0$.

2° Barem jedan od λ i μ je beskonačan.
Ako je $\mu + \lambda = \lambda$, onda je $\lambda \geq \mu$. Dakle, λ je beskonačan. Uočimo da za svaki $n \in \omega$ vrijedi $n \cdot \mu \leq \max\{\aleph_0, \mu\}$. Sada vidimo da za proizvoljni $n \in \omega$ vrijedi

$$\lambda \leq \lambda + n \cdot \mu \leq \lambda + \max\{\aleph_0, \mu\} = \lambda\,.$$

Rješenje 272. Pretpostavimo da je $\mu \neq \aleph_0$ ili $n \geq \aleph_0$. Imamo sljedeća tri slučaja.

1° $\mu < \aleph_0$. Tada mora biti $\lambda \geq \aleph_0$ (jer je u suprotnom $\mu^\lambda < \aleph_0$). Također je očito $\mu > 1$ (inače je $\mu^\lambda = \mu$). No, sada vidimo da je

$$\mu^\lambda \geq 2^\lambda \geq 2^{\aleph}_0 > \aleph_0\,.$$

2° $\mu = \aleph_0$. Tada je nužno $\lambda \geq \aleph_0$, no onda je kao i gore:

$$\mu^\lambda \geq 2^\lambda \geq 2^{\aleph}_0 > \aleph_0\,.$$

3° $\mu > \aleph_0$. Tada je $\mu^\lambda \geq \mu$, osim ako je $\lambda = 0$, no tada je $\mu^\lambda = 1$.

Rješenje 273. Pošto je $2 \leq \mu$ tada je $2^\mu \leq \mu^\mu$. Iz Osnovnog Cantorovog teorema znamo $\mu < 2^\mu$. Tada je $\mu^\mu \leq (2^\mu)^\mu$. Time imamo:

$$\mu^\mu \leq (2^\mu)^\mu = 2^{\mu \cdot \mu} = 2^\mu$$

Sada tvrdnja zadatka slijedi primjenom Cantor, Schröder, Bernsteinovog teorema.

Rješenje 274. Promatrajte dva slučaja – kada su oba kardinala konačna i kada je barem jedan beskonačan.

Rješenje 275. Očito je $\mu^\lambda \leq \lambda^\lambda$. S druge strane imamo $\lambda < 2^\lambda \leq \mu^\lambda$. Time dobivamo:

$$\lambda^\lambda \leq \left(\mu^\lambda\right)^\lambda = \mu^{\lambda \cdot \lambda} = \mu^\lambda\,.$$

Rješenje 276. Neka je μ takav da je $2^\mu \geq \aleph_0$. Uočimo da je $\mu \geq \aleph_0$ jer bi u suprotnom 2^μ bio konačan kardinal. Sada je očito $2^\mu \geq 2^{\aleph_0}$.

Rješenje 277. Slično kao i zadatak 271.

Rješenje 278. Očito je $2^c \leq (n!)^c$. S druge strane, imamo:

$$(n!)^c \leq c^c = \left(2^{\aleph_0}\right)^c = 2^{\aleph_0 \cdot c} = 2^c\,.$$

Rješenje 279. Uočimo da vrijedi:

$$\sum_{i\in I}\kappa_i = \sum_{\{i\in I|\kappa_i>0\}}\kappa_i \qquad \text{i} \qquad \prod_{\{i\in I|\kappa_i>0\}}\lambda_i \leq \prod_{i\in I}\lambda_i\,.$$

Dakle, tvrdnju je dovoljno dokazati za slučaj kada je $\kappa_i > 0$ za svaki $i \in I$.

Pretpostavimo da je $\kappa_i > 0$ za svaki $i \in I$. Tada je i $\lambda_i \geq 2$ za svaki $i \in I$. Neka je $I_\infty := \{i \in I \mid \lambda_i \geq \aleph_0\}$ i $I_{fin} := \{i \in I \mid \lambda_i < \aleph_0\}$. Kako je (po definiciji) $\sum\limits_{i\in I}\kappa_i = k(\bigcup\{\kappa_i \times \{i\} \mid i \in I\})$, svakom paru (α, j), gdje je $j \in I$ i $\alpha \in \kappa_j$, pridružimo funkciju $f_{\alpha,j} \in \prod_{i\in I}\lambda_i$ (ovdje $\prod$ označava Kartezijev produkt familije skupova) definiranu sa

$$f_{\alpha,j}(i) := \begin{cases} \kappa_i\,, & \text{za } i \neq j \\ \alpha\,, & \text{za } i = j\,. \end{cases}$$

Pridruživanje $(\alpha, j) \mapsto f_{\alpha,j}$ je injektivno, pa dobivamo

$$\sum_{i\in I_\infty}\kappa_i \leq k\underbrace{\left(\prod_{i\in I}\lambda_i\right)}_{\substack{\text{Kartezijev}\\ \text{produkt}}} = \underbrace{\prod_{i\in I}\lambda_i}_{\substack{\text{produkt}\\ \text{familije}\\ \text{kard. br.}}}\;.$$

U slučaju da je I_{fin} beskonačan, zbog $\kappa_i < \lambda_i < \aleph_0$ za sve $i \in I_{fin}$, imamo

$$\sum_{i\in I_{fin}}\kappa_i \leq \sum_{i\in I_{fin}}\aleph_0 = \aleph_0 \cdot k(I_{fin}) = k(I_{fin}) < 2^{k(I_{fin})} = \prod_{i\in I_{fin}} 2 \leq \prod_{i\in I_{fin}}\lambda_i\,.$$

Ako je I_{fin} konačan, onda iz $\lambda_i \geq 2$ za sve $i \in I$, slijedi da je $\sum\limits_{i\in I_{fin}}\kappa_i \leq \prod\limits_{i\in I_{fin}}\lambda_i$. (Dokaz npr. indukcijom.) Sada imamo

$$\sum_{i\in I}\kappa_i = \sum_{i\in I_\infty}\kappa_i + \sum_{i\in I_{fin}}\kappa_i \leq \prod_{i\in I_\infty}\lambda_i + \prod_{i\in I_{fin}}\lambda_i \leq \prod_{i\in I}\lambda_i\,.$$

Sada još treba dokazati $\sum\limits_{i\in I}\kappa_i \neq \prod\limits_{i\in I}\lambda_i$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji bijekcija $h\colon \bigcup\{\kappa_i \times \{i\} \mid i \in I\} \to \prod\limits_{i\in I}\lambda_i$. Tada je Kartezijev produkt $\prod\limits_{i\in I}\lambda_i$ unija u parovima disjunktnih skupova

$$A_i := h[\kappa_i \times \{i\}]\ (i \in I)\,.$$

Neka je

$$B_i := \lambda_i \cap \{f(i) \mid f \in A_i\}\,.$$

Kako je $k(B_i) \leq k(A_i) = \kappa_i < \lambda_i$, slijedi da je B_i pravi podskup od λ_i za svaki $i \in I$ (tj. $\lambda_i \setminus B_i \neq \emptyset$). Stoga iz aksioma izbora slijedi da postoji funkcija $g \in \prod\limits_{i \in I} \lambda_i$ takva da je $g(i) \in \lambda_i \setminus B_i$ za svaki $i \in I$. Uočimo da $g \notin \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, što je u kontradikciji s ranije uočenim $\prod\limits_{i \in I} \lambda_i = \bigcup_{i \in I} A_i$. Dakle, mora biti

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i \,.$$

Rješenje 282. Neka je $\aleph_0 + c = c$. Tada je

$$2^{2^c} = 2^{2^{\aleph_0 + c}} = 2^{2^{\aleph_0} \cdot 2^c} = 2^{c \cdot 2^c} = (2^c)^{2^c} \geq c^{2^c} \,.$$

Obratna nejednakost $c^{2^c} \geq 2^{2^c}$ očito vrijedi.

Rješenje 283. Neka je λ neki kardinal. Promotrimo niz $(\kappa_n : n \in \omega)$ zadan rekurzivno

$$\begin{cases} \kappa_0 = \lambda \\ \kappa_{n+1} = \aleph_{\kappa_n} \end{cases}$$

Označimo $\kappa := \sup\{\kappa_n \mid n \in \omega\}$, te neka je β ordinal takav da je $\kappa = \aleph_\beta$. Očito je $\beta \leq \aleph_\beta$.

Pretpostavimo da je $\beta < \aleph_\beta$. Kako je $\aleph_\beta = \sup\{\kappa_n \mid n \in \omega\}$, po definiciji supremuma postoji $n \in \omega$ takav da je $\beta < \kappa_n$, no tada je i $\kappa = \aleph_\beta < \aleph_{\kappa_n} = \kappa_{n+1}$, što je u kontradikciji s definicijom kardinala κ. Dakle, mora biti $\beta = \aleph_\beta$.

(*Napomena:* Uočimo da ovo dokazuje ne samo postojanje fiksnih točaka $\aleph$-funkcije, nego i da takvi ordinali čine pravu klasu.)

Rješenje 285.

$$(n!)^{\aleph_\omega} \overset{\text{(zad. 280.)}}{=} 2^{\aleph_\omega} \leq 2^{2^{\aleph_\omega}}$$

Rješenje 286. Neka je $\beta < \alpha$. Očito je $\aleph_\beta^{\aleph_\alpha} \geq 2^{\aleph_\alpha}$.

Iz osnovnog Cantorovog teorema znamo $\aleph_\beta < 2^{\aleph_\beta}$. Primjenom zadatka 267. dobivamo

$$\aleph_\beta^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha} \,.$$

Zbog $\beta < \alpha$ vrijedi $\aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$, odakle slijedi

$$2^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} \,.$$

Treba nam još:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} \overset{\text{(zad. 280.)}}{=} \aleph_\beta^{\aleph_\alpha} \,.$$

Rješenje 287. Neka je $\aleph_5 = 2^{\aleph_4}$. Tada je $\aleph_5^{\aleph_4} = \left(2^{\aleph_4}\right)^{\aleph_4} = 2^{\aleph_4 \cdot \aleph_4}$, a iz $\aleph_4 \cdot \aleph_4 = \aleph_4$ imamo $2^{\aleph_4 \cdot \aleph_4} = 2^{\aleph_4} = \aleph_5$.

Obratno, ako je $\aleph_5^{\aleph_4} = \aleph_5$, onda imamo $\aleph_5 \leq 2^{\aleph_4} \leq \aleph_5^{\aleph_4} = \aleph_5$.

Rješenje 288. Uočimo: $\aleph_0 = k(\mathbb{N}) = k(\mathcal{P}^0(\mathbb{N}))$. (Po dogovoru je $\mathcal{P}^0(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.) Neka je $n \in \omega$ i neka za sve $m < n$ vrijedi $\aleph_m \leq k(\mathcal{P}^m(\mathbb{N}))$. Tada je

$$k(\mathcal{P}^n(\mathbb{N})) = k\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}^{n-1}(\mathbb{N})\right)\right) = 2^{k(\mathcal{P}^{n-1}(\mathbb{N}))} \overset{\substack{\text{pretp.}\\ \text{ind.}}}{\geq} 2^{\aleph_{n-1}} \geq \aleph_n\,.$$

Iz principa matematičke indukcije slijedi tvrdnja.

Rješenje 289.

$$2^{2^{\aleph_\alpha}} > 2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$$

Rješenje 291. Neka je $2^c = \aleph_2$ i pretpostavimo da je $c > \aleph_1$ (tada je $c \geq \aleph_2$). Tada imamo

$$2^c \geq 2^{\aleph_2} > \aleph_2\,,$$

što je kontradikcija s pretopstavkom da vrijedi $2^c = \aleph_2$, pa imamo $2^c = \aleph_2$, što povlači $c = \aleph_1$.

Rješenje 292. Neka vrijedi hipoteza kontinuuma. Tada je

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1\,.$$

Obratno, neka je $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$. Sada imamo

$$\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0} \leq \aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1\,.$$

Rješenje 293. Neka vrijedi hipoteza kontinuuma. Tada je

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 < \aleph_2 \leq \aleph_2^{\aleph_0}\,.$$

Obratno, neka je $\aleph_2^{\aleph_0} > \aleph_1^{\aleph_0}$ i pretpostavimo da je $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Sada imamo

$$\aleph_1^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_1 \Rightarrow \aleph_1^{\aleph_0} \geq \aleph_2 \Rightarrow \aleph_1^{\aleph_0} = \left(\aleph_1^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} \geq \aleph_2^{\aleph_0}\,.$$

Rješenje 294. Pretpostavimo da je

(*) $$2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$$

Tada vrijedi

$$\aleph_\omega = \sup\{\aleph_n \mid n \in \omega\} \leq \sum_{n\in\omega} \aleph_n \overset{\substack{\text{Königova}\\\text{nejed.}}}{<} \prod_{n\in\omega} \aleph_\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0} \overset{(*)}{=} 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0}\,,$$

što je kontradikcija.

Rješenje 295. Po definiciji je $\beth_0 = \aleph_0$.

Neka je $\gamma \geq 1$ ordinal takav da za sve $\beta < \gamma$ vrijedi $\beth_\beta = \aleph_\beta$.

Ako je γ granični ordinal, onda je

$$\beth_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \beth_\beta \overset{\substack{\text{pretp.}\\\text{ind.}}}{=} \bigcup_{\beta<\gamma} \aleph_\beta = \aleph_\gamma\,.$$

Ako je $\gamma = \delta + 1$ za neki ordinal δ, onda je

$$\beth_\gamma = 2^{\beth_\delta} \overset{\substack{\text{pretp.}\\\text{ind.}}}{=} 2^{\aleph_\delta} \overset{\text{(GCH)}}{=} \aleph_{\delta+1} = \aleph_\gamma\,.$$

Iz principa transfinitne indukcije slijedi tvrdnja.

Bibliografija

[1] F. R. DRAKE, D. SINGH, *Intermediate Set Theory*, John Wiley & Sons, 1996.

[2] J. M. HENLE, *An outline of set theory*, Springer, 1986.

[3] M. HOLZ, K. STEFFENS, E. WEITZ, *Introduction to Cardinal Arithmetic*, Birkhäuser, 1999.

[4] W. JUST, M. WEESE, *Discovering Modern Set Theory 1,2*, AMS, 1996.

[5] P. KOMJÁTH, V. TOTIK, *Problems and Theorems in Classical Set Theory*, Springer, 2000.

[6] I. A. LAVROV, L. L. MAKSIMOVA, *Zbornik zadač po teorii množestv. mat. logik i teorii algoritmov* (rus.), Nauka, Moskva, 1986.

[7] I. A. LAVROV, L. L. MAKSIMOVA, *Problems in Set Theory, Mathematical Logic and the Theory of Algorithms*, Kluwer Academic/Plenum Publisher, 2003.

[8] S. LIPSCHUTZ, *Set Theory and Related Topics*, Schaumm's outline series, Second Edition, McGraw–Hill, 1998.

[9] M. D. POTTER, *Mengentheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, 1990.

[10] H. RUBIN, J. RUBIN, *Equivalents of the Axiom of Choice*, North–Holland, 1970.

[11] L. E. SIGLER, *Exercises in Set Theory*, Springer, New York, 1976.

[12] M. VUKOVIĆ, *Teorija skupova (predavanja)*, PMF–MO, Zagreb, 2006. `http://web.math.hr/~vukovic/TS_skripta_2005.pdf`