Treći zadatak iz prve objavljene knjige o vjerojatnosti

Martin Šverko

Djelo o računima u igrama na sreću nizozemskog znanstvenika Christiaana Huygensa predstavlja prvi tiskani traktat u povijesti posvećen teoriji vjerojatnosti. Huygens je priložio nekoliko izazovnih matematičkih problema namijenjenih čitateljima za samostalno rješavanje. Među njima se nalazi i treći problem, koji postavlja sljedeće pitanje: *Ako se igrač A kladi s igračem B da će iz špila od 40 karata, u kojemu se nalazi po 10 karata od četiri različite vrste, izvući 4 karte tako da dobije točno po jednu kartu od svake vrste, koliki je omjer njihovih vjerojatnosti za dobitak*? U tekstu se navodi da je pronađeni omjer vjerojatnosti igrača A prema vjerojatnosti igrača B točno 1000 prema 8139.

U nastavku zadatak je rješavan koristeći današnje principe prebrojavanja; broj kombinacija se određuje koristeći binomni koeficijent. Zainteresirani čitatelj može zadatak riješiti i koristeći princip uzastopnog prebrojavanja.

Ukupan broj načina na koje igrač može izvući 4 karte iz špila od ukupno 40 karata (pretpostavljamo da izvučene karte predstavljaju podskup, odnosno redoslijed izvlačenja nije bitan) :

$$Ukupan\ broj\ ishoda\ k(\Omega) = \binom{40}{4} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} 91\,390$$

Da bi igrač A pobijedio u okladi, izvučene četiri karte moraju biti takve da svaka pripada različitoj boji ili vrsti. Budući da u špilu postoje četiri različite vrste i od svake ima točno 10 karata, broj povoljnih načina za izvlačenje po jedne karte iz svake skupine računa se:

$$Broj\ povoljnih\ ishoda\ k(A) = \binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

Vjerojatnost da će igrač A ostvariti svoj cilj i pobijediti iznosi:

$$P(A) = \frac{"broj\ povoljnih\ ishoda\ za\ A"}{"broj\ svih\ mogućih\ ishoda"} = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{10000}{91390} = \frac{1000}{9139}$$

S druge strane, igrač B pobjeđuje ako igrač A ne uspije izvući po jednu kartu od svake vrste, odnosno događaj B je komplementaran događaju A. Broj povoljnih događaja iz B iznosi:

$$\text{Broj povoljnih ishoda } k(B) = k(\Omega) - k(A) = 91390 - 10000 = 81390$$

$$P(B) = \frac{"broj\ povoljnih\ ishoda\ za\ B"}{"broj\ svih\ mogućih\ ishoda"} = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = \frac{81390}{91390} = \frac{8139}{9139}$$

Omjer vjerojatnosti dobitka igrača A u odnosnu na vjerojatnost dobitka igrača B iznosi:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1000}{9139}}{\frac{8139}{9139}} = \frac{1000 \cdot 9139}{8139 \cdot 9139} = \frac{1000}{8139}$$

Huygens u svojoj knjizi ne prikazuje detaljna rješenja i međukorake izračuna, već samo zapisuje točno rješenje. Iako je u ovom kratkom osvrtu zadatak riješen koristeći prebrojavanjem kombinacija, izglednije je da je Huygens zadatak riješio metodom uzastopnog prebrojavanja što bi bilo srodnije današnjoj metodi prebrojavanja varijacija (redoslijed izvlačenja je tada bitan). Zadatak lijepo ilustrira kako se rani razvoj teorije vjerojatnosti izravno oslanjao na probleme iz svakodnevnih igara na sreću s kartama i kockama, postavljajući temelje za modernu diskretnu matematiku. a

Christiaan Huygens, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, 1657.

Jakob Bernoulli, *Ars Conjectandi*, 1713.