Fakultativni kolegij *Studentska natjecanja iz matematike*, ak. god. 2023./2024.
`http://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/snim_a`

Tema br. 11:

Triangularizacija

Mateo Tomašević, 03. 06. 2024.

1 Algebra gornjetrokutastih matrica

Za definiciju algebre i osnovnih pojmova vezanih uz nju (jedinica, invertibilnost, podalgebra, homomorfizam algebri, ideal itd.) pogledati npr. [2, Poglavlje 2].

Neka je $\mathbb{F}$ polje realnih ili kompleksnih brojeva. Za $n \in \mathbb{N}$ standardno s $M_n(\mathbb{F})$ označavamo algebru svih $n \times n$ kvadratnih matrica s koeficijentima u $\mathbb{F}$. U ovom predavanju bavimo se jednom istaknutom unitalnom podalgebrom od M_n, algebrom gornjetrokutastih matrica:

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{F}) := \{A \in M_n(\mathbb{F}) : A_{ij} = 0 \text{ za sve } 1 \leq j < i \leq n\}.$$

S Linearne algebre poznato vam je da je zaista riječ o unitalnoj podalgebri od $M_n(\mathbb{F})$ - naime, dovoljno je primijetiti da $I \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ te da za sve $A, B \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ vrijedi $\alpha A + \beta B \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, i da $AB \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$.

Kao malo manje očitu posljedicu imamo i činjenicu da za svaku matricu $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ koja je invertibilna u $M_n(\mathbb{F})$ nužno vrijedi $A^{-1} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$, tj. A je invertibilna i u $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$. To je posljedica sljedeće propozicije.

Za unitalnu algebru A označimo s $A^\times$ skup svih invertibilnih elemenata iz A. Lako se pokaže da je $A^\times$ grupa s obzirom na operaciju množenja u A.

Propozicija 1. *Pretpostavimo da je A konačnodimenzionalna unitalna algebra te neka je $B \leq A$ unitalna podalgebra. Tada je $B^\times = A^\times \cap B$.*

Dokaz. Ako je $b \in B^\times$ invertibilan u B, tada postoji $c \in B$ takav da $bc = cb = 1$ gdje je 1 jedinica u algebrama A i B. Specijalno je i $c \in A$ pa očitavamo da je b stoga invertibilan i u A. Slijedi $b \in A^\times \cap B$.

Obratno, neka je $b \in A^\times \cap B$. Budući da je algebra A konačnodimenzionalna, skup $\{b^j : j \in \mathbb{N}_0\} = \{1, b, b^2, \ldots\}$ je linearno zavisan u A pa zaključujemo da postoji nenul polinom $p \in \mathbb{F}[x]$ takav da $p(b) = 0$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je p minimalnog stupnja. Označimo $p(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j x^j$. Primijetimo da je nužno $a_0 \neq 0$, u suprotnom bismo imali $p(x) = xq(x)$ za neki nenul polinom $q \in \mathbb{F}[x]$, odakle bi slijedilo da

$$0 = b^{-1}p(b) = b^{-1}bq(b) = q(b)$$

što je zbog $\deg q < \deg p$ kontradikcija s minimalnošću stupnja od p. Dakle, $a_0 \neq 0$ pa imamo

$$1 = b\underbrace{\left(-\frac{1}{a_0}\left(a_1 + \cdots + a_n b^{n-1}\right)\right)}_{\in B} = \left(-\frac{1}{a_0}\left(a_1 + \cdots + a_n b^{n-1}\right)\right)b$$

odakle očitavamo da je b invertibilan u B. Zaključujemo $b \in B^\times$. □

Koncept trokutastosti ima smisla i za beskonačne matrice. Kvadratnu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ matricu $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{F}$ standardno označavamo s $A = (A_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$. Nije teško pokazati da je skup

$$M_\infty(\mathbb{F}) := \{(A_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} : \text{ za svaki } j \in \mathbb{N} \text{ je } A_{ij} \neq 0 \text{ za najviše konačno mnogo } i \in \mathbb{N}\}$$

sa standardnim operacijama

$$(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}, \qquad (\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}, \qquad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} B_{kj}, \qquad \text{za } A, B \in M_\infty(\mathbb{N})$$

unitalna algebra. Primijetite da je uvjet konačnosti tu tako da suma u definiciji množenja bude konačna i stoga dobro definirana. Štoviše, ako se on izostavi, množenje matrica prestaje biti asocijativno čak i onda kad bi moglo biti definirano. Primjerice, za matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

vrijedi $(AB)C \neq A(BC)$. Nadalje, matrice iz $M_\infty(\mathbb{F})$ na standardni način reprezentiraju linearne operatore $V \to V$ za neki vektorski prostor V nad $\mathbb{F}$ dimenzije $\aleph_0$ s obzirom na neku bazu $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, dok to nije slučaj za npr. matricu C iz gornjeg primjera. Jedan takav prostor kojeg ste susreli na Linearnoj algebri jest prostor $\mathbb{F}[x]$ svih polinoma u jednoj varijabli s koeficijentima u $\mathbb{F}$.

Skup svih $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gornjetrokutastih matrica definira se prirodno kao

$$\mathcal{T}_\infty(\mathbb{F}) := \{(A_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} : A_{ij} = 0 \text{ za sve } i > j\}$$

(primijetite da je tu uvjet konačnosti automatski ispunjen). Lako se pokaže da je $\mathcal{T}_\infty(\mathbb{F})$ unitalna podalgebra od $M_\infty(\mathbb{F})$. Kao primjer, operator deriviranja $\mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x], p \mapsto p'$ ima u kanonskoj bazi $\{x^j : j \in \mathbb{N}_0\}$ gornjetrokutast matrični prikaz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_\infty(\mathbb{F}).$$

2 Dijagonalizacija trokutastih matrica

Uvedimo neke oznake koje ćemo koristiti u predavanju. S $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ označavamo podalgebru svih dijagonalnih matrica. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ s $k_A(x) = \det(xI - A) \in \mathbb{F}[x]$ označavamo njen karakteristični polinom, a s $r(A)$ i $d(A)$ njen rang i defekt, redom.

Lema 2. *Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ dekomponirana kao blok-matrica*

$$A = \begin{bmatrix} B & C & D \\ 0 & E & F \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \qquad B \in \mathcal{T}_p(\mathbb{F}), C \in M_{p\times q}(\mathbb{F}), D \in M_{p\times r}(\mathbb{F}), E \in \mathcal{T}_q(\mathbb{F}), F \in M_{q\times r}(\mathbb{F}), G \in \mathcal{T}_r(\mathbb{F})$$

gdje je $p+q+r = n$ za neke $p,q,r \geq 0$. Pretpostavimo da su dijagonalni elementi matrica B i G svi različiti od nula, dok su dijagonalni elementi matrice E svi jednaki nula. Tada je $d(A) = d(E)$.

Dokaz. Označimo $x \in \mathbb{F}^n$ kao

$$x = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \qquad X \in \mathbb{F}^p, Y \in \mathbb{F}^q, Z \in \mathbb{F}^r.$$

Imamo

$$0 = Ax = \begin{bmatrix} B & C & D \\ 0 & E & F \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BX + CY + DZ \\ EY + FZ \\ GZ \end{bmatrix} \iff \begin{cases} BX + CY + DZ = 0, \\ EY + FZ = 0, \\ GZ = 0. \end{cases}$$

Budući da je matrica G regularna, imamo $GZ = 0 \iff Z = 0$. Tada je druga jednadžba ekvivalentna

$$EY + FZ = 0 \iff EY = 0 \iff Y \in \ker E.$$

Budući da je matrica B regularna, za prvu jednadžbu vrijedi

$$BX + CY + DZ = 0 \iff BX + CY = 0 \iff X = -B^{-1}CY$$

pa sve u svemu zaključujemo

$$\ker A = \left\{ \begin{bmatrix} -B^{-1}CY \\ Y \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n : Y \in \ker E \right\}$$

odakle lako očitavamo $d(A) = d(E)$. □

Teorem 3. *Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ dekomponirana kao blok-matrica*

$$A = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ 0 & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & B_{rr} \end{bmatrix}$$

gdje je $B_{ii} \in \mathcal{T}_{k_i}(\mathbb{F})$ za sve $1 \le i \le r$ te $B_{ij} \in M_{k_i \times k_j}$ za sve $1 \le i < j \le r$. Pretpostavimo da se za svaki $1 \le i \le n$ na dijagonali matrice B_{ii} nalazi samo $\lambda_i \in \mathbb{F}$, te da su $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ međusobno različiti. Tada je matrica A dijagonalizabilna ako i samo ako je $B_{ii} = \lambda_i I$ za sve $1 \le i \le n$.

Dokaz. Karakteristični polinom matrice A je dan s

$$k_A(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \cdots (x - \lambda_r)^{k_r}$$

odakle očitavamo da je algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ_i jednaka k_i za sve $1 \le i \le r$. Stoga imamo

$$\begin{aligned} A \text{ je dijagonalizabilna} &\iff d(A - \lambda_i I) = k_i \text{ za sve } 1 \le i \le r \\ &\overset{\text{Lema 2}}{\iff} d(B_{ii} - \lambda_i I) = k_i \text{ za sve } 1 \le i \le r \\ &\iff B_{ii} = \lambda_i I \text{ za sve } 1 \le i \le r. \end{aligned}$$

□

Napomena. Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$ operator. Tada je A dijagonalizabilan ako i samo ako se svaki $x \in V$ zapisuje kao suma svojstvenih vektora za A.

Zaista, ako je A dijagonalizabilan, tada postoji baza $\{b_1, \ldots, b_n\}$ za V svojstvenih vektora za A pa se svaki $x \in V$ zapisuje u obliku $b = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k$ gdje je svaki od $\alpha_k b_k$ svojstveni vektor za A.

Obratno, pretpostavimo da se svaki vektor iz V zapisuje kao suma svojstvenih vektora za A. Označimo s $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subseteq \mathbb{F}$ spektar operatora A, te za svaki $1 \le k \le r$ odaberimo neku bazu B_k za svojstveni potprostor $\ker(A - \lambda_k I)$. Tada je unija baza $B := B_1 \cup \dots \cup B_k$ baza za V sastavljena od svojstvenih vektora za A. Zaista, da je B sistem izvodnica za V slijedi iz pretpostvke, a njegova linearna nezavisnost slijedi iz poznate činjenice da su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima linearno nezavisni.

Lema 4. *Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A : V \to V$ dijagonalizabilan operator. Pretpostavimo da je $M \le V$ A-invarijantan potprostor. Tada je restrikcija $A|_M : M \to M$ također dijagonalizabilan operator.*

Dokaz. Prema Napomeni, dovoljno je pokazati da se svaki $x \in M$ prikaziv kao suma svojstvenih vektora operatora $A|_M$. Neka je $x \in M$ proizvoljan. Budući da je A dijagonalizabilan, prema Napomeni postoje svojstveni vektori $x_1, \dots, x_r \in V$ (označimo pripadne svojstvene vrijednosti s $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{F}$ redom) operatora A takvi da je $x = x_1 + \dots + x_r$. Tvrdimo da je $x_1, \dots, x_r \in M$. To slijedi direktno iz formule

$$x_i = \left(\prod_{\substack{1 \le j \le r, \\ j \neq i}} \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j} \right) x \in M.$$

$\square$

Teorem 5. *Prepostavimo da je $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ dijagonalizabilna matrica. Tada postoji $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ takva da je $T^{-1}AT \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ (specijalno je njena dijagonala jednaka dijagonali matrice A).*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ je A već dijagonalna pa možemo uzeti $T = [1]$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve matrice reda $n-1$ te neka je $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ dijagonalizabilna matrica. Odaberimo neki svojstveni vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ za A takav da $x_n \neq 0$ (primijetimo da takav sigurno postoji, naime u suprotnom bi svi svojstveni vektori bili sadržani u potprostoru $[\{e_1, \dots, e_{n-1}\}] \neq \mathbb{F}^n$, što je kontradikcija s činjenicom da postoji baza za $\mathbb{F}^n$ svojstvenih vektora od A). Lako se pokaže da je pripadna svojstvena vrijednost upravo A_{nn}. Tada je matrica

$$S = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_{n-1} & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$$

invertibilna s inverzom

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{x_1}{x_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{x_2}{x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & -\frac{x_{n-1}}{x_n} \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}$$

te vrijedi

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A_{nn} \end{bmatrix}$$

gdje je $B \in \mathcal{T}_{n-1}(\mathbb{F})$ gornji lijevi $(n-1) \times (n-1)$ blok matrice A. Prema Lemi 4, matrica B je dijagonalizabilna (riječ je o restrikciji dijagonalizabilnog operatora A na invarijantan potprostor $[\{e_1, \dots, e_{n-1}\}]$) pa prema pretpostavci indukcije postoji matrica $T \in \mathcal{T}_{n-1}(\mathbb{F})^\times$ takva da $T^{-1}BT \in \mathcal{D}_{n-1}(\mathbb{F})$. Tada imamo

$$\left(S\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} A \left(S\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}BT & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$$

čime je korak indukcije kompletiran. □

3 Triangularizacija matrica

Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **triangularizabilna** ako postoji invertibilna matrica $S \in M_n(\mathbb{F})^\times$ takva da je $SAS^{-1} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$.

Za operator $A : V \to V$ kažemo da je **triangularizabilan** ako postoji baza $(b) = \{b_1, \dots, b_n\}$ za V takva da je matrični prikaz $A(b)$ gornjetrokutasta matrica (tada kažemo da se A **triangularizira** u bazi (b)). Ekvivalentno, mora vrijediti

$$Ab_k \in [\{b_1, \dots, b_k\}], \qquad \text{za sve } 1 \le k \le n.$$

Vrijedi da je operator $A : V \to V$ triangularizabilan ako i samo ako postoji niz A-invarijantnih potprostora

$$\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = V. \tag{1}$$

Zaista, ako je $(b) = \{b_1, \dots, b_n\}$ baza takva da je $A(b) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$, tada traženi lanac (1) potprostora dabivamo ako stavimo $V_k := [\{b_1, \dots, b_k\}]$. Obratno, ako A posjeduje lanac (1), tada nije teško doći do baze $(b) = \{b_1, \dots, b_n\}$ za V takve da je $\{b_1, \dots, b_k\}$ baza za V_k za sve $1 \le k \le n$. Tada je $A(b)$ gornjetrokutasta matrica.

Triangularizabilnost operatora je direktno poopćenje dijagonalizabilnosti. Stoga se prvo možemo pitati koje se matrice triangulariziraju.

Teorem 6. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ matrica. Tada je A triangularizabilna u $M_n(\mathbb{F})$ ako i samo ako su sve nultočke karakterističnog polinoma k_A sadržane u $\mathbb{F}$.*

Napomena. Gornji uvjet je trivijalno ispunjen za $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dakle, svaka kompleksna matrica je triangularizabilna u $M_n(\mathbb{C})$.

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ triangularizabilna matrica. Pretpostavimo da je $S \in M_n(\mathbb{F})^\times$ invertibilna matrica takva da je $SAS^{-1} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$. Označimo njenu dijagonalu s $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Tada je karakteristični polinom dan s

$$k_A(x) = k_{SAS^{-1}}(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

pa su $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ upravo njegove nultočke, a one su jasno sadržane u $\mathbb{F}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tvrdnju "svaka matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $k_A^{-1}(\{0\}) \subseteq \mathbb{F}$ je triangularizabilna u $M_n(\mathbb{F})$" ćemo dokazati matematičkom indukcijom po redu matrice n. Za $n = 1$ trivijalno vrijedi da je $A \in \mathcal{T}_1(\mathbb{F})$. Pretpostavimo da je $n \ge 2$ te da tvrdnja vrijedi za sve matrice iz $M_{n-1}(\mathbb{F})$. Pretpostavimo da je $A \in M_n(\mathbb{F})$ matrica sa svojstvom $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = k_A^{-1}(\{0\}) \subseteq \mathbb{F}$. Odaberimo neki svojstveni vektor $x \in \mathbb{F}^n, x \ne 0$ pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1. Nadopunimo $\{x\}$ do baze $\{x, b_2, \dots, b_n\}$ za $\mathbb{F}^n$. Tada se lako provjeri da je

$$\begin{bmatrix} x & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} x & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \widetilde{A} \end{bmatrix}.$$

za neku matricu $\widetilde{A} \in M_{n-1}(\mathbb{F})$. Vrijedi

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n) = k_A(x) = (x-\lambda_1)k_{\widetilde{A}}(x) \implies k_{\widetilde{A}}(x) = (x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

pa prema pretpostavci indukcije postoji matrica $S \in M_{n-1}(\mathbb{F})^\times$ takva da je $S^{-1}\widetilde{A}S \in \mathcal{T}_{n-1}(\mathbb{F})$. Tada je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \widetilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & S\widetilde{A}S^{-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$$

pa imamo

$$\left(\begin{bmatrix} x & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\right)^{-1} A \left(\begin{bmatrix} x & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & S^{-1}\widetilde{A}S \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F}).$$

Dakle, A je triangularizabilna u $M_n(\mathbb{F})$. Time je korak indukcije proveden. □

Napomena. Iz dokaza je jasno da u slučaju kad je A triangularizabilna sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, za svaku permutaciju $\sigma \in S_n$ postoji invertibilna matrica $S \in M_n(\mathbb{F})^\times$ takva da je $S^{-1}AS$ gornjetrokutasta matrica s dijagonalom $(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)})$.

Napomena. Manjom modifikacijom dokaza Teorema 6 može se pokazati da za triangularizabilnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ postoji štoviše unitarna matrica $U \in M_n(\mathbb{F})$ (za $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ rekli bismo ortogonalna) takva da je $U^*AU \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$. Takva unitarna triangularizacija matrice poznata je pod nazivom **Schurova dekompozicija**. Zaista, prateći isti dokaz, pri odabiru prvog svojstvenog vektora x pazili bismo da vrijedi $\|x\| = 1$ gdje je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{F}^n$. Nije teško pokazati da u tom slučaju postoji unitarna matrica U_1 čiji je x prvi stupac. Rezultirajuća matrica $\begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \widetilde{A} \end{bmatrix}$ triangularizira se unitarnom matricom U_2 prema pretpostavci indukcije. Tada samo treba primijetiti da je U_1U_2 unitarna matrica kao produkt dvije unitarne matrice.

Primjer 1. Promotrimo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Lako se izračuna da je $k_A(x) = (x-2)^2$ pa se prema Teoremu 6 matrica A triangularizira u $M_3(\mathbb{R})$. Nađimo neku invertibilnu matricu koja ostvaruje tu triangularizaciju koristeći induktivni postupak iz dokaza teorema.

Lako se izračuna da je

$$\ker(A - 2I) = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right]$$

pa kao prvi svojstveni vektor odaberimo upravo $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Nadopunjenjem do baze od $\mathbb{R}^3$ dolazimo do matrica

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

te slijedi

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sada je cilj triangularizirati matricu $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Znamo da je njen karakteristični polinom dan s $k_B(x) = (x-2)^2$ pa računamo

$$\ker(B - 2I) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

Nadopunjenjem do baze dolazimo do matrica

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

za koje vrijedi

$$T^{-1}BT = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ovo jest gornjetrokutasta matrica pa induktivni postupak ovdje staje. Sada imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}^{-1} (S^{-1}AS) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_3(\mathbb{R})$$

pa vidimo da je triangularizacija ostvarena matricom

$$S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Interpretirajući ovo drugačije, linearan operator $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ koji je zadan u kanonskoj bazi matricom A ima u bazi

$$(b) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

gornjetrokutasti matrični prikaz.

Primjer 2. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ nilpotentna matrica, tj. matrica takva da $A^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Neka je λ neka nultočka njenog karakterističnog polinoma. Gledajući A kao kompleksnu matricu, odaberimo neki pripadni svojstveni vektor $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$. Tada je

$$0 = 0x = A^k x = \lambda^k x \implies \lambda^k = 0 \implies \lambda = 0.$$

Dakle, 0 je jedina nultočka od $k_A(x)$ (odavde slijedi da je $k_A(x) = x^n$). Dakle, A se triangularizira u $M_n(\mathbb{F})$, odnosno postoji $S \in M_n(\mathbb{F})^\times$ takva da je $SAS^{-1} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$. Na dijagonali matrice SAS^{-1} se nalaze upravo nultočke od $k_A(x)$, dakle nule. Znači da je SAS^{-1} strogogornjetrokutasta matrica. Drugim riječima, nilpotentne matrice su "strogotriangularizabilne".

Ustvari vrijedi i obrat: svaka "strogotriangularizabilna" matrica je nužno nilpotent. To npr. slijedi iz činjenice da svaka strogogornjetrokutasta matrica $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ zadovoljava $T^n = 0$, što nije teško provjeriti direktnim računom. Ista tvrdnja može se argumentirati i pomoću teorema Hamilton-Cayley.

3.1 Neke primjene triangularizacije

Teorem 7. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna matrica te označimo $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Tada je A dijagonalizabilna ako i samo ako polinom $p(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_r) \in \mathbb{C}[x]$ poništava A.*

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Pretpostavimo da je A dijagonalizabilna. Tada postoji invertibilna matrica $S \in M_n(C)^\times$ takva da je $S^{-1}AS$ dijagonalna matrica s vrijednostima na dijagonali unutar skupa $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Stoga vrijedi $p(S^{-1}AS) = 0$ jer $p(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}) = \{0\}$. Sada imamo i

$$p(A) = Sp(S^{-1}AS)S^{-1} = 0.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pretpostavimo $p(A) = 0$. Prema Teoremu 6 i napomeni nakon teorema, postoji invertibilna matrica $S \in M_n(C)^\times$ takva da je

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ 0 & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & B_{rr} \end{bmatrix}$$

gdje je $B_{ii} \in \mathcal{T}_{k_i}(\mathbb{F})$ sa samo λ_i na dijagonali za sve $1 \leq i \leq r$ te $B_{ij} \in M_{k_i \times k_j}$ za sve $1 \leq i < j \leq r$ (ovdje je k_i algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ_i). Imamo

$$0 = S^{-1}p(A)S = p(S^{-1}AS) = p\left(\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ 0 & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & B_{rr} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(B_{11}) & * & \cdots & * \\ 0 & p(B_{22}) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & p(B_{rr}) \end{bmatrix}$$

pa slijedi $p(B_{ii}) = 0$ za sve $1 \leq i \leq r$. Za svaki $j \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{i\}$ je matrica $B_{ii} - \lambda_j I$ regularna jer je riječ o gornjetrokutastoj matrici s vrijednostima $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ na dijagonali. Stoga iz

$$0 = p(B_{ii}) = \underbrace{(B_{ii} - \lambda_1 I) \cdots (B_{ii} - \lambda_{i-1} I)}_{\text{regularne}} (B_{ii} - \lambda_i I) \underbrace{(B_{ii} - \lambda_{i+1} I) \cdots (B_{ii} - \lambda_n I)}_{\text{regularne}}$$

zaključujemo $B_{ii} - \lambda_i I = 0$. Sada iz Teorema 3 direktno slijedi da je $S^{-1}AS$ dijagonalizabilna pa isto vrijedi i za matricu A. $\square$

Definiramo **Frobeniusovu normu** kao

$$\|\cdot\|_F : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{R}, \qquad \|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2}.$$

Frobeniusova norma zadovoljava standardna svojstva norme:

(i) $\|A\| \geq 0, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{F})$ (pozitivnost),

(ii) $\|A\| = 0 \iff A = 0, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{F})$ (definitnost),

(iii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{F}), \lambda \in \mathbb{F}$ (pozitivna homogenost),

(iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$ (subaditivnost ili nejednakost trokuta).

Osim toga, ona zadovoljava i sljedeće korisno svojstvo:

(v) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$ (submultiplikativnost).

Frobeniusova norma je također invarijantna na unitarnu konjugaciju, tj. za svaku matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ i unitarnu matricu $U \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi

$$\|AU\|_F = \|UA\|_F = \|A\|_F.$$

(Jednostavan način da se to dokaže jest da se prvo uoči da je $\|A\|_F^2 = \mathrm{Tr}(A^*A)$ za sve $A \in M_n(\mathbb{C})$.)

Frobeniusova norma nam dozvoljava da na algebru $M_n(\mathbb{F})$ prenesemo standardne definicije iz matematičke analize kao što su konvergencija nizova i neprekidnost funkcija tako da svaku pojavu apsolutne vrijednosti $|\cdot|$ zamijenimo s normom $\|\cdot\|_F$.

Primjerice, za niz matrica $(A_m)_{m=1}^\infty$ u $M_n(\mathbb{F})$ kažemo da **konvergira** prema matrici $A \in M_n(\mathbb{F})$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m \in \mathbb{N}$ vrijedi implikacija $m \geq m_\varepsilon \implies \|A_m - A\|_F < \varepsilon$ (drugim riječima, ako $\|A_m - A\|_F \to 0$ u $\mathbb{R}$). Lako se pokaže da konvergencija u Frobeniusovoj normi odgovara konvergenciji matrica po elementima, tj. da $A_m \to A$ ako i samo ako $(A_m)_{ij} \to A_{ij}$ u $\mathbb{F}$ za sve $1 \leq i, j \leq n$.

Slično, za funkciju $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ kažemo da je **neprekidna** u $A_0 \in M_n(\mathbb{F})$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi implikacija $\|A - A_0\|_F < \delta \implies |f(A) - f(A_0)| < \varepsilon$. Također vrijedi i Heineova karakterizacija neprekidnosti, tj. funkcija $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ je neprekidna u $A_0 \in M_n(\mathbb{F})$ ako i samo ako za svaki niz $(A_m)_{m=1}^\infty$ u $M_n(\mathbb{F})$ takav da $A_m \to A_0$ vrijedi $f(A_m) \to f(A_0)$. Sve se analogno može definirati i za funkcije $M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} \to M_n(\mathbb{F})$ i slično.

Korisno je primijetiti da $A_m \to A$ i $B_m \to B$ povlače $A_m B_m \to AB$, dokaz je sličan kao u slučaju konvergencije u polju.

Za podskup $\mathcal{S} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **gust** (s obzirom na $\|\cdot\|_F$) u $M_n(\mathbb{F})$ ako za svaku matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji matrica $B \in \mathcal{S}$ takva da je $\|A - B\|_F < \varepsilon$. Ekvivalentno je zahtijevati da za svaku matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ postoji niz $(B_m)_{m=1}^\infty$ matrica iz $\mathcal{S}$ takav da $B_m \to A$.

Lema 8. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoje međusobno različiti brojevi $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$ takvi da je $|x_k - y_k| < \varepsilon$ za sve $1 \leq k \leq n$.*

Dokaz. Dokaz je ostavljen za zadaću. $\square$

Propozicija 9. *Označimo s*

$$\mathcal{E} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A \text{ ima } n \text{ različitih svojstvenih vrijednosti}\}.$$

Tada je $\mathcal{E}$ gust u $M_n(\mathbb{C})$ s obzirom na $\|\cdot\|_F$.

Dokaz. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna matrica te neka je $\varepsilon > 0$. Prema Napomeni iza Teorema 6 postoji gornjetrokutasta matrica $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ i unitarna matrica $U \in M_n(\mathbb{C})$ takva da je $A = UTU^*$ (Schurova dekompozicija). Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Prema Lemi 8 postoje međusobno različiti brojevi $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$ takvi da je $|T_{kk} - y_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ za sve $1 \leq k \leq n$. Definirajmo matricu $\Theta \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ formulom

$$\Theta_{ij} = \begin{cases} y_i, & \text{za } i = j, \\ T_{ij}, & \text{za } i \neq j \end{cases}.$$

Tada je Θ dijagonalizabilna matrica jer ima n različitih svojstvenih vrijednosti; isto vrijedi i za $U\Theta U^*$ jer je dijagonalizabilnost invarijanta sličnosti. Napokon imamo

$$\begin{aligned} \|A - U\Theta U^*\|_F^2 &= \|UTU^* - U\Theta U^*\|_F^2 = \|U(T - \Theta)U^*\|_F^2 = \|T - \Theta\|_F^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |T_{ii} - \Theta_{ii}|^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|T_{ii} - y_i|^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{n}} < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

odakle vađenjem korijena slijedi $\|A - U\Theta U^*\|_F < \varepsilon$. $\square$

Primjer 3. Propozicija 9 kao posljedicu ima činjenicu da je skup svih dijagonalizabilnih matrica u $M_n(\mathbb{C})$ gust u $M_n(\mathbb{C})$. Zanimljivo je da isto ne vrijedi za algebru $M_n(\mathbb{R})$ kad je $n \geq 2$. Naime, pretpostavimo suprotno, da je skup svih dijagonalizabilnih matrica u $M_n(\mathbb{R})$ gust u $M_n(\mathbb{R})$. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ proizvoljna matrica sa svojstvenom vrijednosti i (takva postoji čim je $n \geq 2$). Tada prema pretpostavci postoji niz $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ dijagonalizabilnih matrica u $M_n(\mathbb{R})$ takvih da $A_m \to A$. Iz neprekidnosti karakterističnog polinoma slijedi $k_{A_m} \to k_A$ pa specijalno i $k_{A_m}(i) \to k_A(i) = 0$. Međutim, za svaki $m \in \mathbb{N}$ označimo s $\lambda_1^{(m)}, \ldots, \lambda_n^{(m)} \in \mathbb{R}$ svojstvene vrijednosti od A_m (realne su jer je A_m dijagonalizabilna u $M_n(\mathbb{R})$). Tada je

$$k_{A_m}(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - \lambda_k) \implies |k_{A_m}(i)| = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{|i - \lambda_k|}_{\geq 1} \geq 1,$$

što je kontradikcija s $k_{A_m}(i) \to 0$.

Teorem 10 (Hamilton-Cayley)**.** *Za svaku matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi $k_A(A) = 0$.*

Dokaz. Prvo ćemo dokazati teorem za matrice s n različitih svojstvenih vrijednosti. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna takva matrica te označimo njene (međusobno različite) svojstvene vrijednosti s $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Tada je njen karakteristični polinom dan s

$$k_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n).$$

Matrica A je specijalno diagonalizabilna pa postoji invertibilna matrica $S \in M_n(\mathbb{C})^{\times}$ takva da je $A = S \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) S^{-1}$. Sada je

$$k_A(A) = S k_A(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) S^{-1} = S \operatorname{diag}(k_A(\lambda_1), \ldots, k_A(\lambda_n)) S^{-1} = 0.$$

Tvrdnja 1. Determinanta $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ je neprekidno preslikavanje.

Dokaz. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna te pretpostavimo $A_m \to A$. Specijalno vrijedi $(A_m)_{ij} \to A_{ij}$ za indekse i, j pa imamo

$$\det A_m = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)(A_m)_{1\sigma(1)} \cdots (A_m)_{n\sigma(n)} \xrightarrow{m \to \infty} \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} = \det A.$$

□

Tvrdnja 2. Za svaki $x \in \mathbb{C}$ preslikavanje $k.(x) : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, A \mapsto k_A(x)$ je neprekidno.

Dokaz. Fiksirajmo $x \in \mathbb{C}$. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna te pretpostavimo $A_m \to A$. Lako se pokaže da $xI - A_m \to xI - A$. Prema prethodnoj tvrdnji imamo

$$k_{A_m}(x) = \det(xI - A_m) \to \det(xI - A) = k_A(x).$$

□

Tvrdnja 3. Za svaki $0 \leq j \leq n$ definiramo preslikavanja $a_j : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ relacijom

$$k_A(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(A) x^j, \qquad A \in M_n(\mathbb{C})$$

odnosno $a_j(A)$ je koeficijent uz potenciju x^j u karakterističnom polinomu matrice A. Tada su preslikavanja a_j neprekidna za sve $0 \leq j \leq n$.

Dokaz. Označimo s

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 0^1 & 0^2 & \cdots & 0^n \\ 1 & 1^1 & 1^2 & \cdots & 1^n \\ 1 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (n-1)^1 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^n \\ 1 & n^1 & n^2 & \cdots & n^n \end{bmatrix}$$

Vandermondeovu matricu brojeva $0, 1, \dots, n$ (ona je stoga regularna) i primijetimo da za svaku matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi

$$V \begin{bmatrix} a_0(A) \\ \vdots \\ a_n(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_A(0) \\ \vdots \\ k_A(n) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a_0(A) \\ \vdots \\ a_n(A) \end{bmatrix} = V^{-1} \begin{bmatrix} k_A(0) \\ \vdots \\ k_A(n) \end{bmatrix}.$$

Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna te pretpostavimo $A_m \to A$. Prema Tvrdnji 2 vrijedi $k_{A_m}(j) \to k_A(j)$ za sve $0 \le j \le n$. Puštanjem limesa po komponentama imamo

$$\begin{bmatrix} a_0(A_m) \\ \vdots \\ a_n(A_m) \end{bmatrix} = V^{-1} \begin{bmatrix} k_{A_m}(0) \\ \vdots \\ k_{A_m}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^n (V^{-1})_{1j} k_{A_m}(j) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^n (V^{-1})_{nj} k_{A_m}(j) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{m\to\infty} \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^n (V^{-1})_{1j} k_A(j) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^n (V^{-1})_{nj} k_A(j) \end{bmatrix} = V^{-1} \begin{bmatrix} k_A(0) \\ \vdots \\ k_A(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0(A) \\ \vdots \\ a_n(A) \end{bmatrix}$$

odnosno $a_j(A_m) \to a_j(A)$ za sve $0 \le j \le n$. □

Sada smo spremni dokazati tvrdnju teorema u punoj općenitosti. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna. Prema Propoziciji 9 postoji niz $(A_m)_{m=1}^\infty$ matrica s n različitih svojstvenih vrijednosti takav da $A_m \to A$. Prema prvom dijelu dokaza za sve $m \in \mathbb{N}$ imamo $k_{A_m}(A_m) = 0$. Iz Tvrdnje 3 sada slijedi

$$0 = k_{A_m}(A_m) = \sum_{j=0}^n \underbrace{a_j(A_m)}_{\to a_j(A)} \underbrace{(A_m)^j}_{\to A^j} \xrightarrow{m\to\infty} \sum_{j=0}^n a_j(A) A^j = k_A(A).$$

Zaključujemo $k_A(A) = 0$.

□

4 Simultana triangularizacija

Neka je $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ familija matrica. Kažemo da se familija matrica $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ **simultano triangularizira** ako postoji invertibilna matrica $S \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takva da je $S^{-1}AS \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ za sve $A \in \mathcal{F}$. U jeziku operatora, ako je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor, familija operatora $\mathcal{F} \subseteq L(V)$ se simultano triangularizira ako postoji baza (b) za V takva da je $A(b) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ za sve $A \in \mathcal{F}$.

Cilj ovog poglavlja je naći neke nužne i dovoljne uvjete za simultanu triangularizaciju familije matrica odnosno operatora. Za familiju matrica $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je komutirajuća ako vrijedi $AB = BA$ za sve $A, B \in \mathcal{F}$. Vezano uz tu definiciju, poznat je sljedeći teorem:

Teorem 11. *Neka je $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ komutirajuća familija matrica. Tada je $\mathcal{F}$ simultano triangularizabilna.*

Napomena. Obrat Teorema 11 ne vrijedi; npr. pogledajte Zadatak 19.

Dokaz teorema bit će induktivan i temelji se na sljedećoj krucijalnoj činjenici koju je lakše dokazati u jeziku operatora, ali onda naravno vrijedi i za matrice:

Lema 12. *Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor te neka je $\mathcal{F} \subseteq L(V)$ komutirajuća familija operatora. Tada familija $\mathcal{F}$ ima zajednički svojstveni vektor, tj. postoji nenul vektor $x \in V$ takav da za svaku operator $A \in \mathcal{F}$ postoji skalar $\lambda_A \in \mathbb{C}$ takav da $Ax = \lambda_A x$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je familija $\mathcal{F}$ konačna, tj. da $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_r\}$. Odaberimo neki svojstveni potprostor $\ker(A_1 - \lambda_1 I)$ operatora A_1. Budući da $A_1A_2 = A_2A_1$, lako se pokaže da je potprostor $\ker(A_1 - \lambda_1 I)$ A_2-invarijantan. Restrikcija operatora $A_2|_{\ker(A_1-\lambda_1 I)} : \ker(A_1 - \lambda_1 I) \to \ker(A_1 - \lambda_1 I)$ je stoga dobro definiran operator na kompleksnom konačnodimenzionalnom netrivijalnom vektorskom prostoru $\ker(A_1 - \lambda_1 I)$ pa stoga taj operator $A_2|_{\ker(A_1-\lambda_1 I)}$ posjeduje neku svojstvenu vrijednost $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ i pripadni svojstveni vektor $x \in \ker(A_1 - \lambda_1 I) \setminus \{0\}$. Tada je očito $x \in \ker(A_1 - \lambda_1 I) \cap \ker(A_2 - \lambda_2 I)$ pa je potprostor $\ker(A_1 - \lambda_1 I) \cap \ker(A_2 - \lambda_2 I)$ netrivijalan.

Kao ranije, operator A_3 komutira s A_1 i A_2 pa se lako pokaže da je potprostor $\ker(A_1-\lambda_1 I)\cap\ker(A_2-\lambda_2 I)$ A_3-invarijantan. Stoga restrikcija $A_3|_{\ker(A_1-\lambda_1 I)\cap\ker(A_2-\lambda_2 I)}$ posjeduje neku svojstvenu vrijednost $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ pa kao ranije zaključujemo da je potprostor $\ker(A_1 - \lambda_1 I) \cap \ker(A_2 - \lambda_2 I) \cap \ker(A_3 - \lambda_3 I)$ netrivijalan.

Nakon konačno mnogo koraka (formalno indukcijom) zaključujemo da je potprostor

$$\ker(A_1 - \lambda_1 I) \cap \ker(A_2 - \lambda_2 I) \cap \cdots \cap \ker(A_r - \lambda_r I)$$

netrivijalan, i stoga sadrži zajednički svojstveni vektor za familiju $\{A_1, \dots, A_r\}$.

Promotrimo sada opći slučaj, tj. kad familija $\mathcal{F}$ nije nužno konačna. Tada se lako pokaže da je njena linearna ljuska $[\mathcal{F}]$ opet komutirajuća familija operatora. Međutim, $[\mathcal{F}]$ je sada potprostor od $L(V)$ pa možemo odabrati neku njenu bazu $\{A_1, \dots, A_r\}$. Ta baza je komutirajuć konačan skup matrica pa prema prethodnom dijelu dokaza, posjeduje neki zajednički svojstveni vektor $x \in V \setminus \{0\}$. Tada se lako pokaže da je x zajednički svojstveni vektor i za familiju $[\mathcal{F}]$ pa specijalno i za $\mathcal{F}$.

Drugi dokaz. Postoji i nešto elegantniji, ali apstraktniji dokaz tražene tvrdnje. Pretpostavimo da je $\mathcal{F} \subseteq L(V)$ neprazna komutirajuća familija operatora. Prvo uočimo da tada postoji netrivijalan potprostor $M \leq V$ koji je A-invarijantan za sve $A \in \mathcal{F}$ (primjerice, takav je čitav V). Neka je M neki takav potprostor koji je minimalne (nenul) dimenzije. Pokazat ćemo da je tada svaki vektor $x \in M \setminus \{0\}$ zajednički svojstveni vektor za $\mathcal{F}$. Zaista, pretpostavimo suprotno, da postoji operator $A \in \mathcal{F}$ i vektor $x \in M \setminus \{0\}$ takav da x nije svojstveni vektor za A. Budući da je prema pretpostavci M A-invarijantan, operator $A|_M : M \to M$ posjeduje neku svojstvenu vrijednost $\lambda \in \mathbb{C}$ te neki pripadni svojstveni vektor $y \in M$. Tada je potprostor $\ker(A - \lambda I) \cap M$ netrivijalan (jer sadrži y), različit od M (jer $x \in M \setminus \ker(A - \lambda I)$) te B-invarijantan za svaki $B \in \mathcal{F}$ (slijedi iz $AB = BA$ i definicije potprostora M). Ovo je kontradikcija s minimalnosti dimenzije od M. Dakle, svaki nenul vektor $x \in M$ je svojstveni vektor za svaki operator iz $\mathcal{F}$. $\square$

Dokaz Teorema 11. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ su sve matrice iz $\mathcal{F}$ već gornjetrokutaste. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve komutirajuće familije iz $M_{n-1}(\mathbb{C})$ te neka je $\mathcal{F}$ proizvoljna komutirajuća familija u $M_n(\mathbb{C})$. Prema Lemi 12 familija $\mathcal{F}$ posjeduje zajednički svojstveni vektor $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$; za matricu $A \in \mathcal{F}$ označimo pripadnu svojstvenu vrijednost s $\lambda_A \in \mathbb{C}$. Ako nadopunimo $\{x\}$ do baze $\{x, b_2, \dots, b_n\}$ za $\mathbb{C}^n$ i označimo $S_1 = \begin{bmatrix} x & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})^\times$, tada za svaku matricu $A \in \mathcal{F}$ možemo zapisati

$$S_1^{-1} A S_1 = \begin{bmatrix} \lambda_A & * \\ 0 & \widetilde{A} \end{bmatrix}$$

za neku matricu $\widetilde{A} \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. Primijetimo da za sve $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi $AB - BA = 0$ i stoga

$$\begin{aligned} 0 &= (S_1^{-1}AS_1)(S_1^{-1}BS_1) - (S_1^{-1}BS_1)(S_1^{-1}AS_1) \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_A & * \\ 0 & \widetilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B & * \\ 0 & \widetilde{B} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_B & * \\ 0 & \widetilde{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A & * \\ 0 & \widetilde{A} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & \widetilde{A}\widetilde{B} - \widetilde{B}\widetilde{A} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

odakle zaključujemo $\widetilde{A}\widetilde{B} = \widetilde{B}\widetilde{A}$. Dakle, familija $\{\widetilde{A} : A \in \mathcal{F}\}$ je komutirajuća familija matrica u $M_{n-1}(\mathbb{C})$ pa prema pretpostavci indukcije postoji matrica $S_2 \in M_{n-1}(\mathbb{C})^\times$ takva da je $S_2^{-1}\widetilde{A}S_2 \in \mathcal{T}_{n-1}(\mathbb{C})$ za sve $A \in \mathcal{F}$. Slijedi da za sve $A \in \mathcal{F}$ imamo

$$\left(S_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}\right)^{-1} A \left(S_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda_A & * \\ 0 & S_2^{-1}\widetilde{A}S_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$$

čime je korak indukcije proveden. □

Poznati su i drugačiji dovoljni uvjeti za simultanu triangularizaciju matrica (pogledajte Zadatke 18–21.). Kao jednostavan primjer navodimo sljedeći rezultat.

Propozicija 13. *Pretpostavimo da matrice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ zadovoljavaju $AB = 0$. Tada se A i B simultano triangulariziraju.*

Dokaz (skica). Uočimo da je $\ker A$ netrivijalan B-invarijantan potprostor od $\mathbb{C}^n$. Stoga postoji $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ takav da $Ax = 0$ i $Bx = \beta x$ za neki $\beta \in \mathbb{C}$. Kao ranije zaključujemo da postoji invertibilna matrica $S \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takva da

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & \widetilde{A} \end{bmatrix}, \qquad S^{-1}BS = \begin{bmatrix} \beta & * \\ 0 & \widetilde{B} \end{bmatrix}$$

te slijedi $\widetilde{A}\widetilde{B} = 0$, što omogućava da dokaz nastavimo induktivno. □

Navodimo i jedan jednostavan nužan uvjet:

Propozicija 14. *Pretpostavimo da su matrice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ simultano triangularizabilne. Tada je $AB - BA$ nilpotent.*

Dokaz. Prema pretpostavci postoji invertibilna matrica $S \in M_n(\mathbb{C})^\times$ i gornjetrokutaste matrice $T_A, T_B \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ takve da je $A = ST_AS^{-1}$ i $B = ST_BS^{-1}$. Tada je

$$AB - BA = S(T_AT_B - T_BT_A)S^{-1}$$

te uočimo da matrica $T_AT_B - T_BT_A$ ima nule na dijagonali pa je strogogornjetrokutasta. Ona je stoga nilpotentna pa je i $AB - BA$ nilpotent. □

Kažemo da se familija matrica $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ **simultano dijagonalizira** ako postoji invertibilna matrica $S \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takva da je $S^{-1}AS \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ za sve $A \in \mathcal{F}$. U jeziku operatora, ako je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor, familija operatora $\mathcal{F} \subseteq L(V)$ se simultano dijagonalizira ako postoji baza (b) za V takva da je $A(b) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ za sve $A \in \mathcal{F}$.

Teorem 15. *Neka je $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ familija matrica. Tada je $\mathcal{F}$ simultano dijagonalizabilna ako i samo ako je familija $\mathcal{F}$ komutirajuća te je svaka matrica iz $\mathcal{F}$ dijagonalizabilna.*

Dokaz Teorema 15. Teorem dokazujemo jezikom operatora. Neka je $V \neq \{0\}$ kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $\mathcal{F} \subseteq L(V)$ familija operatora.

Pretpostavimo prvo da je familija $\mathcal{F}$ simultano dijagonalizabilna, recimo u bazi (b). Tada za sve $A, B \in \mathcal{F}$, njihovi matrični prikazi $A(b), B(b)$ su dijagonalne matrice i stoga komutiraju pa zaključujemo da komutiraju i operatori A i B. Slijedi da je $\mathcal{F}$ komutirajuća familija operatora.

Obratni smjer dokazujemo indukcijom po dimenziji prostora V. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ komutirajuća familija operatora. Ako je $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}I$, tada je $\mathcal{F}$ već triangularizirana. Pretpostavimo stoga da postoji neki operator $A \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{C}I$ te označimo $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subseteq \mathbb{C}$. Budući da je operator A dijagonalizabilan, čitav prostor V dekomponira se kao suma njegovih svojstvenih potprostora:

$$V = \ker(A - \lambda_1 I) \dot{+} \ker(A - \lambda_2 I) \dot{+} \cdots \dot{+} \ker(A - \lambda_r I).$$

Za svaki $B \in \mathcal{F}$, zbog $AB = BA$ slijedi da je potprostor $\ker(A - \lambda_j I)$ B-invarijantan za sve $1 \leq j \leq r$.

Stoga je

$$\{B|_{\ker(A-\lambda_j I)} : B \in \mathcal{F}\}$$

familija komutirajućih dijagonalizabilnih (Lema 4) operatora na potprostoru $\ker(A-\lambda_j I)$ manje dimenzije od V. Prema pretpostavci indukcije postoji baza (b_j) za $\ker(A - \lambda_j I)$ u kojoj se dijagonaliziraju svi operatori $B|_{\ker(A-\lambda_j I)}$ za sve $B \in \mathcal{F}$. Tada je $(b) = \bigcup_{1 \leq j \leq r} (b_j)$ baza za V u kojoj se dijagonaliziraju svi operatori $B \in \mathcal{F}$. Time je korak indukcije proveden. $\square$

Napomena. Iz Teorema 15 slijedi da ako su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ dijagonalizabilne matrice takve da $AB = BA$, tada je i matrica $p(A, B)$ dijagonalizabilna za svaki polinom u dvije varijable $p \in \mathbb{C}[x, y]$. Specijalno, matrice $A + B$ i AB su dijagonalizabilne.

5 Zadaci za zadaću

Za uspješno rješavanje zadaće potrebno je riješiti barem 8 zadataka. Rok za predaju zadaće je srijeda 26. 6.

Zadatak 1. Odredite sve ideale algebre $\mathcal{T}_3(\mathbb{F})$.

Zadatak 2. Odredite sve homomorfizme algebri $\phi : \mathcal{T}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$.

Zadatak 3. Poznato je (vidjeti npr. [1, Teorem 16]) da vrijedi

$$\{X \in M_n(\mathbb{F}) : \operatorname{Tr} X = 0\} = \{AB - BA : A, B \in M_n(\mathbb{F})\}.$$

Pokažite analogon ove tvrdnje za algebru $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$:

$$\{X \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F}) : X \text{ strogo-gornjetrokutasta}\} = \{AB - BA : A, B \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F})\}.$$

Zadatak 4. Pretpostavimo da su $A, B \in M_n(\mathbb{C})^\times$ invertibilne matrice takve da je $AXB \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ za sve matrice $X \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$. Pokažite da je nužno $A, B \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.

Zadatak 5. Poznato je (vidjeti npr. [2, Teorem 3]) da je svaki nenul homomorfizam algebri $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ nužno oblika $\phi(X) = AXA^{-1}$ za neku invertibilnu matricu $A \in M_n(\mathbb{C})^\times$.

Pokažite da je svaki *injektivni* homomorfizam algebri $\phi : \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ nužno oblika $\phi(X) = AXA^{-1}$ za neku invertibilnu gornjetrokutastu matricu $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})^\times$. Pokažite da je pretpostavka injektivnosti nužna, tj. da postoje i neinjektivni (nenul) homomorfizmi $\mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.

Zadatak 6. Za linearno preslikavanje $\phi : A \to B$ između algebri A i B kažemo da je antihomomorfizam algebri ako vrijedi $\phi(xy) = \phi(y)\phi(x)$ za sve $x, y \in A$. Postoji li injektivni antihomomorfizam algebri $\phi : \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$?

Zadatak 7. Promotrimo gornjetrokutastu matricu $A \in \mathcal{T}_{3n}$ zadanu po blokovima na sljedeći način:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & 0 & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

gdje su $A_{11}, A_{33} \in \mathcal{T}_n$ i $A_{12}, A_{12}, A_{23} \in M_n$. Pretpostavimo da se na dijagonalama matrica A_{11} i A_{33} nalaze samo jedinice. Pokažite da je A produkt idempotenata iz $\mathcal{T}_{3n}$ ako i samo ako je $A_{11} = A_{33} = I$.

Zadatak 8. Dokažite Lemu 8.

Zadatak 9. Ispitajte jesu li sljedeći podskupovi gusti u $M_n(\mathbb{C})$:

(a) matrice s determinantom različitom od 1,

(b) unitarne matrice,

(c) hermitske matrice.

Zadatak 10. Pretpostavimo da su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrice takve da niz potencija $(A^k)_{k=1}^{\infty}$ konvergira prema matrici B. Dokažite da je B dijagonalizabilna i $\sigma(B) \subseteq \{0, 1\}$.

Zadatak 11. (a) Neka je $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ gornjetrokutasta matrica. Pokažite da je A normalna ako i samo ako je A dijagonalna.

(b) Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna matrica. Označimo njene svojstvene vrijednosti s $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (nisu nužno različite). Pokažite da je

$$\sum_{c=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_F^2$$

te da jednakost vrijedi ako i samo ako je A normalna matrica.

(c) Ako su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ normalne matrice takve da je AB normalna matrica, dokažite da je i BA normalna matrica.

Zadatak 12. Pretpostavimo da je $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ gornjetrokutasta matrica s međusobno različitim elementima na dijagonali te da su $U, V \in M_n(\mathbb{C})$ unitarne matrice takve da je $UTU^* = VTV^*$. Pokažite da je nužno $V = DU$ za neku dijagonalnu matricu $D \in M_n(\mathbb{C})$ takvu da je $|D_{jj}| = 1$ za sve $1 \leq j \leq n$.

Zadatak 13. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrica čija je suma elemenata svakog stupca jednaka 1 te koja zadovoljava $|A_{ij}| \leq 1$ za sve $1 \leq i, j \leq n$. Dokažite da za svaku svojstvenu vrijednost λ matrice A vrijedi $|\lambda| \leq 1$.

Zadatak 14. Pokažite da je matrica $A \in \mathcal{T}_\infty(\mathbb{F})$ invertibilna u algebri $\mathcal{T}_\infty(\mathbb{F})$ ako i samo ako su svi njeni dijagonalni elementi nenul tj. $A_{kk} \neq 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Zadatak 15. Na prostoru $\mathbb{F}[x]$ svih polinoma s realnim koeficijentima promotrimo linearan operator

$$A : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x], \qquad (Ap)(x) := \int_0^x p(t)\, dt.$$

Odredite njegov matrični prikaz $A(e) \in M_\infty(\mathbb{F})$ s obzirom na kanonsku bazu $(e) = \{x^j : j \in \mathbb{N}_0\}$. Pokažite da se operator A ne može triangularizirati, tj. da ne postoji baza (b) za $\mathbb{F}[x]$ takva da je $A(b) \in \mathcal{T}_\infty(\mathbb{F})$ gornjetrokutasta matrica.

Zadatak 16. Za dijgonalizabilnu matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_4(\mathbb{R})$$

nađite neku invertibilnu matricu $T \in \mathcal{T}_4(\mathbb{R})^\times$ takvu da je $T^{-1}AT$ dijagonalna matrica.

Zadatak 17. Pokažite da ako u Teoremu 5 pretpostavimo da A ima n različitih svojstvenih vrijednosti te ako zahtijevamo da matrica T ima jedinice na dijagonali, tada je matrica T ustvari jedinstvena.

Zadatak 18. (a) Pretpostavimo da je $\{A_1, A_2, A_3\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$ komutirajuća familija matrica. Pokažite da je $\{A_1, A_2, A_3\}$ linearno zavisna.

(b) Promotrimo konkretne matrice $A_1, A_2, A_3 \in M_2(\mathbb{C})$ zadane s

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da je familija $\{A_i, A_j\}$ simultano triangularizabilna za sve $1 \leq i \neq j \leq 3$, ali da familija $\{A_1, A_2, A_3\}$ nije simultano triangularizabilna.

Zadatak 19. Simultano triangularizirajte matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Zadatak 20. Pretpostavimo da su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrice takve da je $(AB - BA)A = (AB - BA)B = 0$. Pokažite da se A i B simultano triangulariziraju.

Zadatak 21. Pretpostavimo da su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrice takve da je $AB - BA = c(A - B)$ za neki nenul skalar $c \in \mathbb{C}$. Dokažite da postoji invertibilna matrica $S \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takva da su SAS^{-1} i SBS^{-1} gornjetrokutaste matrice s istom dijagonalom.

Uputa: Pokažite da A i B posjeduju zajednički svojstveni par (tj. zajedničku svojstvenu vrijednost i pripadni svojstveni vektor) pa nastavite indukcijom.

Zadatak 22. Pretpostavimo da su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrice takve da je $\operatorname{rang}(AB - BA) \leq 1$. Pokažite da se A i B simultano triangulariziraju.

Uputa: Ako je $\lambda \in \sigma(B)$, pokažite da je barem jedan od potprostora $\ker(B - \lambda I)$ i $\operatorname{Im}(B - \lambda I)$ A-invarijantan.

Zadatak 23. Pretpostavimo da su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrice takve da je $AB - BA \in [\{A, B\}]$. Pokažite da se A i B simultano triangulariziraju.

Uputa: Svedite pretpostavku na $CD - DC = C$ za neke matrice C, D.

Zadatak 24. Neka je $n \in \mathbb{N}$ neparan te neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrice.

(a) Pretpostavimo da je $AB + BA = A$. Pokažite da A i B imaju zajednički svojstveni vektor. *Uputa:* Pokušajte pretpostavku svesti na $AC + CA = 0$ za neku matricu C.

(b) Pretpostavimo da je $A^2 = B^2 = I$. Pokažite da A i B imaju zajednički svojstveni vektor.

Literatura

[1] Matija Bašić, Trikovi iz linearne algebre (2023),
https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/linearna2023.pdf

[2] Mateo Tomašević, Preslikavanja matričnih algebri (2021),
https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/Preslikavanja_matricnih_algebri.pdf